

CZĘŚĆ DRUGA

CAŁKI FUNKCJI ZESPOLONYCH

ROZDZIAŁ V

Całki funkcji ciągłych

22. Całka zwykła. Niech $\Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ będzie funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t określoną w przedziale domkniętym $[a, \beta]$. Podzielmy przedział $[a, \beta]$ na n części punktami $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, obierzmy w każdym z przedziałów $[t_{j-1}, t_j]$ dowolny punkt θ_j i utwórzmy sumę

$$(1) \quad s_n = \sum_{j=1}^n \Phi(\theta_j)(t_j - t_{j-1}) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Jeśli ciąg (1) dąży do pewnej granicy, gdy $n \rightarrow \infty$ i jednocześnie najdłuższy z przedziałów $[t_{j-1}, t_j]$ maleje do zera, granica ta zaś nie zależy od doboru punktów podziału t_j ani od punktów pośrednich θ_j , to daną granicę oznaczamy przez

$$(2) \quad \int_a^\beta \Phi(t) dt$$

i nazywamy *całką zwykłą* funkcji $\Phi(t)$ w przedziale $[a, \beta]$.

Definicja ta nie różni się od znanej definicji całki Riemanna funkcji rzeczywistej. Zauważmy, że sumę przybliżoną (1) całki (2) można napisać w postaci

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\theta_j)(t_j - t_{j-1}) + i \sum_{j=1}^n \psi(\theta_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Ponieważ $\lim s_n$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy osobno część rzeczywista i osobno część urojona s_n dążą do granic, więc:

Funkcja $\Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ jest całkowalna w przedziale $[a, \beta]$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są całkowalne; zachodzi przy tym związek

$$(3) \quad \int_a^\beta \Phi(t) dt = \int_a^\beta \varphi(t) dt + i \int_a^\beta \psi(t) dt.$$

Z twierdzenia tego i ze znanych własności całek funkcji rzeczywistych wynikają następujące wnioski:

1° Funkcja $\Phi(t)$ ciągła w przedziale domkniętym (lub ogólniej: ograniczona i mająca skończoną ilość punktów nieciągłości) jest całkowalna. Wtedy bowiem funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są, jak wiadomo, całkowalne.

2° Jeśli funkcja $\Phi(t)$ jest całkowalna w przedziale $[a, \beta]$, to jest całkowalna w każdym przedziale częściowym, i gdy $a < \gamma < \beta$, wówczas

$$\int_a^\beta = \int_a^\gamma + \int_\gamma^\beta.$$

3° Jeśli funkcja $\Phi(t)$ jest całkowalna, to jej moduł $|\Phi(t)| = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$ jest funkcją całkowalną i

$$(4) \quad \left| \int_a^\beta \Phi(t) dt \right| \leq \int_a^\beta |\Phi(t)| dt.$$

Nierówność (4) wynika wprost z nierówności

$$\left| \sum_{j=1}^n \Phi(\theta_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\Phi(\theta_j)|(t_j - t_{j-1}).$$

23. Całka krzywoliniowa. Niech $f(z)$ będzie funkcją zmiennej zespolonej z określoną wzdłuż krzywej regularnej C , danej równaniem

$$(5) \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq \beta).$$

Podzielmy krzywą na n łuków punktami $z_j = z(t_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ (rys. 17), gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, i utwórzmy sumę

$$(6) \quad I_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}),$$

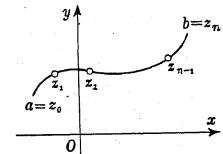
gdzie ζ_j jest dowolnym punktem łuku $z_{j-1}z_j$, czyli $\zeta_j = z(\theta_j)$, gdzie $t_{j-1} \leq \theta_j \leq t_j$.

Jeżeli suma (6) dąży do pewnej granicy I , gdy $n \rightarrow \infty$ i jednocześnie najdłuższy z przedziałów $[t_{j-1}, t_j]$ dąży do zera, i jeżeli granica ta nie zależy od doboru punktów t_j i θ_j , to granicę I oznaczamy przez

$$(7) \quad \int_C f(z) dz$$

i nazywamy *całką krzywoliniową* funkcji $f(z)$ wzdłuż drogi C .

¹⁾ Tzn. dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba δ , że dla dowolnego podziału $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ przedziału $[a, \beta]$, w którym $\max |t_j - t_{j-1}| < \delta$ i dla dowolnie obranych liczb θ_j w przedziałach $[t_{j-1}, t_j]$ jest $|I_n - I| < \epsilon$.



Rys. 17.

Wykażemy, że:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła wzdłuż krzywej regularnej C , to całka (7) istnieje i daje się wyrazić przez całkę zwykłą

$$(8) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że C jest łukiem regularnym. Wówczas pochodna $z'(t)$ istnieje i jest ciągła w całym przedziale $[a, b]$, a więc całka po prawej stronie (8) istnieje. Sumy przybliżone tej całki mają postać

$$s_n = \sum_{j=1}^n f[z(\theta_j)] z'(\theta_j) (t_j - t_{j-1}), \quad \text{gdzie} \quad t_{j-1} \leq \theta_j \leq t_j.$$

Przyjmijmy

$$(9) \quad \frac{z_j - z_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} - z'(\theta_j) = \eta_j;$$

wówczas na mocy (6) otrzymamy $I_n - s_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \eta_j (t_j - t_{j-1})$. Poraz różnicowy po lewej stronie (9) jest dowolnie bliski $z'(t_j)$, jeżeli tylko przedział $[t_{j-1}, t_j]$ jest dostatecznie mały. Ponieważ funkcja $z'(t)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $[a, b]$, więc wszystkie różnice η_j są dowolnie małe, jeżeli tylko przedziały $[t_{j-1}, t_j]$ są dostatecznie małe, czyli jeżeli n jest dostatecznie duże. Niech będzie $|\eta_j| < \varepsilon$ dla $j=1, 2, \dots, n$, gdy $n > N(\varepsilon)$, i niech M oznacza maksimum modułu $|f(z)|$ na łuku C . Wówczas

$$|I_n - s_n| \leq M \varepsilon \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = M(\beta - \alpha)\varepsilon, \quad \text{gdy} \quad n > N(\varepsilon).$$

Sumy I_n różnią się więc dowolnie mało od sum s_n . Te ostatnie dążą do całki po prawej stronie (8), a zatem całka (7) istnieje i zachodzi (8).

Gdy C jest krzywą regularną, wówczas całka (7) również istnieje i równość (8) pozostaje prawdziwa, bo wtedy całka (7) jest sumą skończonej ilości całek wzdłuż łuków regularnych. Twierdzenie jest więc udowodnione.

Przyjmijmy w sumie (6) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ oraz $z_j = x_j + iy_j$ i $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$. Po wykonaniu mnożeń otrzymamy $I_n = \sigma_n + i\tau_n$, gdzie

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n u(\xi_j, \eta_j) (x_j - x_{j-1}) - v(\xi_j, \eta_j) (y_j - y_{j-1}),$$

$$\tau_n = \sum_{j=1}^n v(\xi_j, \eta_j) (x_j - x_{j-1}) + u(\xi_j, \eta_j) (y_j - y_{j-1}).$$

Są to sumy przybliżone całek krzywoliniowych

$$(10) \quad \int_C u dx - v dy, \quad \int_C v dx + u dy.$$

Zatem z równości $I_n = \sigma_n + i\tau_n$ wynika twierdzenie:

Całka krzywoliniowa (6) funkcji $f(z) = u + iv$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją całki krzywoliniowe rzeczywiste (10). Zachodzi przy tym równość

$$(11) \quad \int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

Całka krzywoliniowa (7) ma następujące własności, z których dwie pierwsze wynikają wprost z definicji:

1° Oznaczmy przez $-C$ krzywą C , w której zmieniono jej zwrot na przeciwny, a przez C_1 i C_2 dwie krzywe, na jakie dowolny punkt dzieli krzywą C ; wówczas

$$(12) \quad \int_{-C} = - \int_C, \quad \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}.$$

2° Jeżeli A jest stałą, a $f(z)$ i $g(z)$ są funkcjami całkowalnymi wzdłuż krzywej C , to

$$(13) \quad \int_C A f(z) dz = A \int_C f(z) dz, \quad \int_C (f+g) dz = \int_C f dz + \int_C g dz.$$

3° Jeżeli $|f(z)| \leq M$ na krzywej C , a długość krzywej równa się d , to

$$(14) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq M d.$$

Dowód. Stosując wzory (4) i (8) mamy

$$\left| \int_C f dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]| \cdot |z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt,$$

z czego wynika (14), bo

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = d.$$

4° Jeżeli szereg $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ o wyrazach ciągłych na krzywej C jest jednostajnie zbieżny na C , to

$$(15) \quad \int_C f dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n dz.$$

Dowód. Całka po lewej stronie (15) istnieje, bo funkcja f jest ciągła na C . Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$r_n = \int_C f dz - \sum_{k=1}^n \int_C f_k dz = \int_C \left[f - \sum_{k=1}^n f_k \right] dz.$$

Ponieważ szereg jest jednostajnie zbieżny na C , więc $|f - \sum_1^n f_k| < \varepsilon$, gdy n jest dostatecznie duże. Zatem, na mocy (14), $|r_n| \leq \varepsilon d$. Różnica r_n jest więc dowolnie mała, gdy n jest dostatecznie wielkie, z czego wynika równość (15).

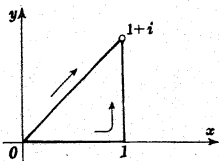
PRZYKŁAD 1. Niech K będzie okręgiem $|z - z_0| = r$ skierowanym dodatnio. Wykażemy, że

$$(16) \quad \int_K \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Istotnie, równanie okręgu K można napisać w postaci $z = z_0 + re^{it}$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ (str. 17 i 31). Stosując wzór (8) otrzymamy

$$\int_K \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} re^{it} i dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

PRZYKŁAD 2. Niech C i C' będą dwiema liniami łączącymi punkt 0 z punktem $1+i$. Niech C będzie odcinkiem o równaniu $z = (1+i)t$, $0 \leq t \leq 1$, a C' – linią łamaną, złożoną z dwóch odcinków $z = t$, $0 \leq t \leq 1$, oraz $z = 1 + it$, $0 \leq t \leq 1$ (rys. 18). Stosując do funkcji $f(z) = Rz = x$ wzór (8), otrzymamy



Rys. 18.

$$\int_C x dz = \int_0^1 (1+i)t dt = (1+i) \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(1+i),$$

$$\int_{C'} x dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1+it) dt = \frac{1}{2}(3+i).$$

Uwaga. Całkę (7), w której C jest krzywą o początku a i końcu b , oznaczamy również przez

$$(17) \quad \int_a^b f dz.$$

Przykład poprzedni wskazuje, że całka ta może zależeć od drogi łączącej punkty a i b .

24. Funkcja pierwotna. Niech $f(z)$ będzie funkcją określoną w obszarze D . Każdą funkcję $F(z)$, różniczkowalną w obszarze D i spełniającą w nim warunek $F'(z) = f(z)$, nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji $f(z)$. Dodając do $F(z)$ dowolną stałą, otrzymamy znowu funkcję pierwotną. Wykażemy, że:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła i ma funkcję pierwotną $F(z)$ w obszarze D , to całka (17) wzdłuż dowolnej drogi (regularnej) C zawartej w D o początku a i końcu b nie zależy od drogi i wyraża się wzorem

$$(18) \quad \int_C f dz = \int_a^b f dz = F(b) - F(a).$$

Dowód. Niech $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, będzie równaniem drogi C ; zatem $z(a) = a$, $z(b) = b$. Przyjmijmy $F[z(t)] = \Phi(t)$; stąd

$$\Phi'(t) = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t).$$

Stosując wzór (8) otrzymamy

$$\int_C f dz = \int_a^b \Phi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a).$$

Funkcja $F(z)$ mająca w całym swym obszarze istnienia pochodną równą zeru jest stała.

Istotnie, przyjmijmy we wzorze (18) $f(z) = F'(z) = 0$ oraz $b = z$. Otrzymamy $0 = F(z) - F(a)$, a więc $F(z)$ ma w każdym punkcie z danego obszaru wartość stałą $F(a)$.

PRZYKŁAD 1. Stała A ma funkcję pierwotną Az , a więc w myśl (18)

$$(19) \quad \int_a^b A dz = A(b - a).$$

PRZYKŁAD 2. Funkcja $A(z - z_0)^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą różną od -1 , ma funkcję pierwotną $\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$. Gdy C jest dowolną krzywą regularną zamkniętą, wówczas

$$(20) \quad \int_C A(z - z_0)^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Wynika to z wzoru (18), bo z założenia jest $a = b$. Gdy $n = -1$, C zaś jest okręgiem o środku z_0 skierowanym dodatnio, wówczas w myśl (16) całka (20) równa się $2\pi i A$.

PRZYKŁAD 3. Szereg potęgowy $\sum_0^\infty a_n z^n$ ma w swym kole zbieżności

funkcję pierwotną $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$; gdy więc C jest dowolną krzywą regularną zamkniętą zawartą wewnątrz koła zbieżności, wówczas w myśl (18)

$$(21) \quad \int_C \left(\sum_0^\infty a_n z^n \right) dz = 0.$$

PRZYKŁAD 4. Całkując po dowolnej drodze zawartej w kole $|z| < 1$ obie strony rozwinięć

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots$$

otrzymamy na mocy wzorów (15) i (18)

$$(22) \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{ i } \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

ĆWICZENIA.

1. Obliczyć całki

$$\int_a^b \sin it \, dt, \quad \int_a^b e^{int} \, dt.$$

2. Wykazać, że suma przybliżona (6) całki $\int_C z \, dz$, gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku a i końcu b , dąży do granicy $(b^2 - a^2)/2$, gdy $n \rightarrow \infty$.

3. Obliczyć całkę

$$I = \int_{-i}^i |z| \, dz,$$

gdzie drogą całkowania jest a) odcinek prostoliniowy, b) półokrąg $|z|=1$, $\operatorname{Re} z > 0$.

4. Znaleźć funkcje pierwotne dla e^z , e^{iz} , $\cos z$, $\sin(az+b)$.

5. Obliczyć całkę

$$I = \int_C \left(z + \frac{1}{z} \right) dz,$$

gdzie C jest a) okręgiem $|z-2|=1$, b) brzegiem kwadratu o środku 0 i bokach dowolnej długości, równoległych do osi współrzędnych.

6. Obliczyć wartość średnią funkcji

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

po okręgu $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, zawartym wewnątrz koła zbieżności szeregu, tj. całkę

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \, dt.$$

7. Wykazać, że wartość średnia funkcji $|f(z)|^2$, gdzie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, po okręgu $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, zawartym wewnątrz koła zbieżności szeregu, tj. całka

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt,$$

wyraża się wzorem $I = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.

[Wskazówka: $|f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)}$.]

8. Wykazać, że jeżeli okrąg $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, leży wewnątrz kół zbieżności dwóch szeregów $f(z) = \sum a_n z^n$, $g(z) = \sum b_n z^n$, to zachodzi następująca równość Parsevala:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{it}) \overline{g(re^{it})} + \overline{f(re^{it})} g(re^{it})] \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \overline{b_n} + \overline{a_n} b_n) r^{2n}.$$

9. Wykazać, że gdy funkcja $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ odwzorowuje jednokrotnie koło $K\{|z| \leq r\}$ na obszar D , to pole obszaru D wyraża się wzorem

$$|D| = \pi(|a_1|^2 r^2 + 2|a_2|^2 r^4 + \dots + n|a_n|^2 r^{2n} + \dots).$$

Ze wzoru tego wynika, że gdy $|a_1| \geq 1$, to koło K przechodzi w obszar o polu nie mniejszym.

ROZWIĄZANIA.

1. $i(\cos i\beta - \cos ia)$, $i(e^{ia} - e^{ib})/n$. — 2. Przyjmując we wzorze (6) raz $\zeta_j = z_j$, drugi raz $\zeta_j = \overline{z_{j-1}}$ i utworzyć średnią arytmetyczną tych sum. Istnienie granicy jest zapewnione, bo funkcja podcałkowa jest ciągła. — 3. a) i , b) $2i$. — 4. e^z , $-ie^{iz}$, $\sin z$, $-(1/a)\cos(az+b)$. — 5. Przy dodatnim skierowaniu drogi a) $I=0$, b) $I=2\pi i$. —

6. a_0 . — 7. $|f(re^{it})|^2 = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}) (\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int}) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_\mu \overline{a_\nu} r^{\mu+\nu} e^{i(\mu-\nu)t}$. Całkując wyraz po wyrazie otrzymamy szukany wzór, bo całka $\int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)t} \, dt$ równa się 2π , gdy $\mu=\nu$, względnie 0, gdy $\mu \neq \nu$. — 8. Zob. przykład poprzedni. — 9. Przyjmijmy $w = u + iv$; wówczas

$$|D| = \iint_D du \, dv = \iint_K \frac{D(u, v)}{D(x, y)} dx \, dy.$$

Na mocy równań Cauchy-Riemanna jacobian pod ostatnią całką równa się $|f'(z)|^2$,

a więc $|D| = \iint_K |f'(z)|^2 dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r |f'(e^{it})|^2 \rho \, d\rho \, dt$; zob. ćw. 7.

ROZDZIAŁ VI

Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

25. Twierdzenie całkowe. A. Cauchy, jeden z głównych twórców teorii funkcji analitycznych, wyprowadził zasadnicze własności tych funkcji z następującego twierdzenia, które nosi nazwę *twierdzenia całkowego Cauchy'ego*:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz i na brzegu obszaru jednospójnego D ograniczonego krzywą regularną zamkniętą C , to

$$(1) \quad \int_C f(z) dz = 0^1.$$

Idea podanego niżej dowodu pochodzi od E. Goursata. Oryginalny dowód Cauchy'ego opierał się na założeniu dodatkowym, że pochodna $f'(z)$ nie tylko istnieje, lecz jest ciągła wewnątrz i na C . Wówczas, jak to zauważył Riemann, równość (1) wynika ze wzoru (11) na str. 49, bo całki krzywoliniowe po prawej stronie tego wzoru można, na mocy znanego twierdzenia Greena²⁾, zamienić na całki podwójne

$$\iint_D (-u_y - v_x) dx dy \quad \text{ i } \quad \iint_D (u_x - v_y) dx dy,$$

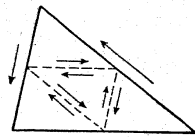
a te są równe zeru na mocy równań Cauchy-Riemanna.

Dowód. 1. Przypadek, gdy C jest trójkątem. Podzielimy trójkąt C na 4 trójkąty przystające (rys. 19) i oznaczmy ich brzegi skierowane dodatnio, jak na rys. 19, przez C_1, C'_1, C''_1, C'''_1 . Wówczas

$$I = \int_C f(z) dz = \int_{C_1} + \int_{C'_1} + \int_{C''_1} + \int_{C'''_1},$$

bo całki wzdłuż linii podziału znoszą się. Jedna z 4 całek po prawej stronie ma największy moduł, np. pierwsza, więc

$$|I| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|.$$



Rys. 19.

¹⁾ Na stronie 51 dowiedliśmy już tego twierdzenia w przypadku, gdy $f(z)$ jest szeregiem potęgowym (przykład 3).

²⁾ Zob. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wyd. II, Warszawa 1949, str. 334.

Dzieląc znowu C_1 na 4 trójkąty przystające i oznaczając ich brzegi przez C_2, C'_2, C''_2, C'''_2 otrzymamy przy odpowiednim doborze C_2 nierówność $\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_2} f(z) dz \right|$, skąd $|I| \leq 4^2 \left| \int_{C_2} f(z) dz \right|$. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg trójkątów o brzegach $C_1, C_2, \dots$, z których każdy następny jest czwartą częścią poprzedniego, gdzie

$$(2) \quad |I| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z) dz \right|.$$

Oznaczmy przez d długość brzegu C , a przez d_n długość C_n . Każdy brzeg następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego, zatem $d_n = d/2^n$. Niech z_0 będzie punktem wspólnym wszystkich trójkątów domkniętych o brzegach $C, C_1, C_2, \dots$. W punkcie tym istnieje pochodna $f'(z_0)$, a więc dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że gdy $0 < |z - z_0| < \delta$, to

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

czyli $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$, gdzie η zależy od z i spełnia w kole $|z - z_0| < \delta$ nierówność $|\eta| < \varepsilon$. W kole tym leżą wszystkie trójkąty C_n począwszy od pewnego $n = N$. Zatem, gdy $n \geq N$, wówczas

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} f(z_0) dz + \int_{C_n} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{C_n} \eta(z - z_0) dz.$$

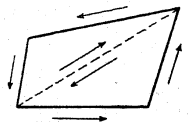
Dwie pierwsze całki po prawej stronie są równe zeru (str. 51, wzór (20)). Stosując do trzeciej nierówność (14) na str. 49 otrzymamy $\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon d_n^2$, bo $|z - z_0| < d_n$, a droga całkowania ma długość d_n . Ponieważ $d_n = d/2^n$, więc na mocy (2)

$$I = \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \varepsilon d^2,$$

z czego wynika (1), bo ε jest dowolnie małe.

2. Przypadek, gdy C jest wielobokiem. Gdy C jest czworobokiem, wówczas całka (1) równa się zeru jako równa sumie całek wzdłuż brzegów dwóch trójkątów (rys. 20). Podobnie, twierdzenie (1) jest prawdziwe dla dowolnego wieloboku, bo każdy wielobok daje się podzielić na trójkąty przekątnymi leżącymi wewnątrz wieloboku.

3. Przypadek ogólny. Sprowadzimy go do przypadku poprzedniego¹⁾. W tym celu oznaczmy przez D_r wnętrze krzywej C powiększone o sumę



Rys. 20.

¹⁾ Inny dowód (bardziej szczegółowy) w książce: I. I. Priwałow, *Введение в теорию функции комплексного переменного*, Moskwa 1948, str. 169-172.

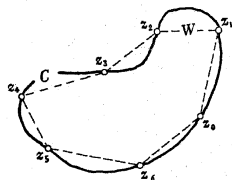
wszystkich kół $|z - z_0| \leq r$, gdy z_0 przebiega krzywą C . Ponieważ funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz i na C , więc jest analityczna w obszarze domkniętym D_r , gdy r jest dostatecznie małe.

Utwórzmy sumy przybliżone dla całki (1), tj.

$$(3) \quad I_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}), \quad \text{gdzie} \quad I_n \rightarrow \int_C f dz,$$

i niech n będzie tak wielkie, aby było

$$(4) \quad \left| \int_C f dz - I_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Rys. 21.

Punkty $z_0, z_1, \dots, z_n$ leżą na C i są kolejnymi wierzchołkami linii wielobocznej, którą oznaczmy przez W (rys. 21). Gdy n jest dostatecznie duże, wówczas długości odcinków $z_{j-1}z_j$ są dowolnie małe i cała linia W leży wewnątrz obszaru D_r . Możemy przy tym założyć, że odcinki te są tak małe, że w punktach każdego z odcinków $z_{j-1}z_j$ zachodzi nierówność

$$(5) \quad |f(z) - f(\xi_j)| < \frac{\varepsilon}{2d},$$

gdzie d jest długością krzywej C ; wynika to z jednostajnej ciągłości funkcji $f(z)$ w obszarze domkniętym D_r .

Utwórzmy teraz całkę funkcji $f(z)$ wzdłuż linii W i rozłóżmy ją na całki wzdłuż poszczególnych boków. Przyjmując $f(z) = f(\xi_j) + \eta_j$, gdy z leży na odcinku $z_{j-1}z_j$, otrzymamy

$$\int_W f dz = \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} [f(\xi_j) + \eta_j] dz = I_n + \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} \eta_j dz,$$

gdzie $\eta_j = f(z) - f(\xi_j)$ zależy od z i spełnia nierówność $|\eta_j| < \varepsilon/2d$. Zatem

$$\left| \int_W f dz - I_n \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{z_{j-1}}^{z_j} \eta_j dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2d} \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

bo długość linii W jest nie większa od d . Uwzględniając (4) otrzymamy

$$(6) \quad \left| \int_C f dz - \int_W f dz \right| \leq \left| \int_C f dz - I_n \right| + \left| \int_W f dz - I_n \right| < \varepsilon.$$

Lecz ponieważ w myśl poprzedniej części dowodu całka wzdłuż W równa się zeru¹⁾, więc moduł całki wzdłuż C jest dowolnie mały, a przez to całka ta równa się zeru.

¹⁾ Linia W może się obecnie ze sobą przecinać; jest ona wtedy sumą kilku linii wielobocznych zamkniętych nie przecinających się ze sobą, a więc całka wzdłuż W równa się zeru.

26. Uogólnienia twierdzenia całkowego. 1. Twierdzenie całkowe można wypowiedzieć w następującej (nieco ogólniejszej) formie:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze jednospójnym D , a C jest krzywą regularną zamkniętą zawartą wewnątrz D , to całka (1) równa się zeru.

2. Niech C będzie brzegiem obszaru jednospójnego D jak w ustępie 25. W dowodzie wzoru (1) przybliżaliśmy całkę (1) przez całkę wzdłuż linii wielobocznej W , której wierzchołki leżą na C . Dowód można przeprowadzić tak, aby cała linia W leżała wewnątrz D . Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz D i ciągła w $D+C$, oraz że W leży całkowicie wewnątrz D . Wówczas całka (1) również istnieje i jeżeli W leży dostatecznie blisko C , to nierówność (6) pozostaje prawdziwa. Całka wzdłuż W znowu równa się zeru, a zatem:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze D , którego brzeg jest krzywą regularną C , i ciągła w $D+C$, to całka (1) równa się zeru.

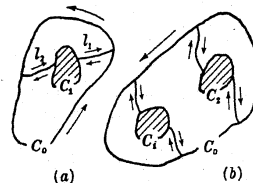
3. Niech $C_1, C_2, \dots, C_p$ będą konturami (str. 17), z których każdy leży zewnątrz pozostałych i niech wszystkie leżą wewnątrz nowego konturu C_0 (rys. 22). Wykażemy, że:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze D ograniczonym konturami $C_0, C_1, \dots, C_p$ i ciągła wewnątrz i na brzegu D , to

$$(7) \quad \int_{C_0} f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz + \dots + \int_{C_p} f dz.$$

Dowód. Niech $p=1$. Podzielmy obszar D dwoma łukami regularnymi l_1 i l_2 na dwa obszary, jak na rys. 22. Ponieważ funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz każdego z tych obszarów oraz ciągła wewnątrz i na brzegach, więc suma całek po obu brzegach, skierowanych jak na rys. 22, równa się zeru. Przy sumowaniu, całki wzdłuż łuków l_1 i l_2 obieganych dwukrotnie w kierunkach przeciwnych znoszą się i pozostaje suma $\int_{C_0} + \int_{-C_1}$, gdzie $-C_1$ ma kierunek przeciwny niż C_1 . Ponieważ $\int_{-C_1} = -\int_{C_1}$, więc wzór (7) jest prawdziwy dla $p=1$. W przypadku $p>1$ dowód jest analogiczny (zob. rys. 22b).

Uwaga. Jeżeli zmienimy kierunek krzywych wewnętrznych $C_1, C_2, \dots, C_p$ na przeciwny, to mówimy, że są one skierowane dodatnio względem obszaru D . Oznaczając przez C sumę wszystkich krzywych brzegowych obszaru D skierowanych dodatnio względem D , można twierdzenie (7) napisać w postaci (1), gdzie całka wzdłuż C oznacza sumę całek po wszystkich krzywych brzegowych.



Rys. 22.

WNIOSEK 1. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem punktu $z_0 \in D$, to

$$(8) \quad \int_C f dz = \int_{C'} f dz,$$

gdzie C i C' są dowolnymi konturami zawierającymi wewnątrz punkt z_0 i zawartymi wewnątrz D .

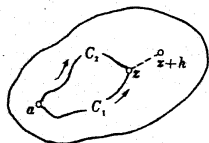
Istotnie, niech K będzie okręgiem o środku z_0 skierowanym dodatnio oraz zawartym jednocześnie wewnątrz C i wewnątrz C' . Na mocy twierdzenia poprzedniego $\int_C = \int_K + \int_{C'}$, z czego wynika (8).

WNIOSEK 2. Jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze jednospójnym D i jeżeli a jest ustalonym punktem obszaru D , to funkcja $\Phi(z)$ określona przez całkę¹⁾

$$(9) \quad \Phi(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

nie zależy od drogi całkowania (zawartej w D) i jest funkcją analityczną pierwotną względem $f(z)$, tj. $\Phi'(z) = f(z)$.

Dowód. Niech C_1 i C_2 będą dwiema drogami o początku a i końcu z (rys. 23). Wówczas $C_1 + (-C_2)$ jest krzywą regularną zamkniętą zawartą wewnątrz D , a więc całka po niej równa się zeru i dlatego całka wzdłuż C_1 równa się całce wzdłuż C_2 . Funkcja $\Phi(z)$ zależy więc tylko od punktu z .



Rys. 23.

Niech z_0 będzie dowolnym punktem obszaru D i niech h będzie liczbą tak małą, aby cały odcinek łączący punkty z_0 i $z_0 + h$ należał do D . Na mocy (9) mamy

$$\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0) = \int_a^{z_0+h} f(\zeta) d\zeta - \int_a^{z_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^{z_0+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Drogą całkowania od z_0 do $z_0 + h$ może być linia dowolna, np. odcinek łączący te punkty. W myśl (19), str. 51, mamy

$$\int_{z_0}^{z_0+h} d\zeta = h, \quad \text{więc} \quad \Phi(z_0) = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} f(\zeta) d\zeta;$$

zatem

$$\frac{\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0)}{h} - f(z_0) = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} [f(\zeta) - f(z_0)] d\zeta.$$

¹⁾ Zmienną całkowania oznaczamy tu przez ζ dla odróżnienia od górnej granicy całkowania z .

Funkcja $f(\zeta)$ jest ciągła w punkcie z_0 , a więc $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$, gdy h jest dostatecznie małe, np. gdy $|h| < \delta(\varepsilon)$. Długość drogi całkowania równa się $|h|$, a więc (str. 49, wzór (14)) gdy $|h| < \delta(\varepsilon)$, wówczas mamy

$$\left| \frac{\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0)}{h} - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

Zatem pochodna $\Phi'(z_0)$ istnieje i równa się $f(z_0)$.

27. Funkcja log z wyrażona całką. Uzupełniając określenie funkcji log z podane na str. 32, wykażemy, że:

W każdym obszarze jednospójnym D nie zawierającym punktów 0 ani ∞ ¹⁾ istnieje jednoznaczna gałąź logarytmu i daje się wyrazić przez całkę

$$(10) \quad \log z = \int_a^z \frac{d\zeta}{\zeta} + \log a,$$

gdzie a jest dowolnym punktem obszaru D , a wartość $\log a$ jest dowolnie ustalona. Ponadto mamy

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

Dowód. Oznaczmy prawą stronę (10) przez $l(z)$. Jest to funkcja analityczna, a więc ciągła w obszarze D , na mocy poprzedniego twierdzenia, bo funkcja podcałkowa $1/\zeta$ jest analityczna w D , a $\log a$ jest stałą; ponadto $l'(z) = 1/z$. Wystarczy więc dowieść, zgodnie z określeniem log z na str. 32, że $e^{l(z)} = z$. Iloraz $z/e^{l(z)}$ jest stały w obszarze D , bo jego pochodna

$$[ze^{-l(z)}]' = e^{-l(z)} - z l'(z) e^{-l(z)}$$

stałe równa się zeru, gdyż $z l'(z) = 1$. W punkcie $z = a$ mamy $l(a) = \log a$, a więc $z/e^{l(z)} = 1$, czyli $e^{l(z)} = z$.

Z twierdzenia tego wynika, że w każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym punktów 0 i ∞ istnieje funkcja $z^\mu = e^{\mu \log z}$, gdzie μ jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną (str. 33) i że (str. 37)

$$(11) \quad (z^\mu)' = e^{\mu \log z} \frac{\mu}{z} = \mu z^{\mu-1},$$

skąd wnioskujemy, że z^μ jest funkcją analityczną w danym obszarze.

¹⁾ Obszarem takim jest np. cała płaszczyzna po odrzuceniu jednej półprostej wychodzącej z punktu $z = 0$.

Uogólnienie. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną różną od zera w obszarze D i niech $w = \log f(z)$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $e^w = f(z)$. Czytelnik wykaże, że jeżeli obszar D jest jednospójny, to funkcja $\log f(z)$ istnieje i daje się wyrazić całką

$$(12) \quad \log f(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \log f(a), \quad \text{gdzie } a \in D,$$

i funkcja ta ma w obszarze D pochodną równą $f'(z)/f(z)$. Wzór (12) jest uogólnieniem wzoru (10) i dowód jego jest analogiczny.

W obszarze, w którym istnieje $\log f(z)$, określamy funkcję analityczną $\sqrt[n]{f(z)}$ wzorem

$$(13) \quad \sqrt[n]{f(z)} = e^{\frac{1}{n} \log f(z)}.$$

ĆWICZENIA.

1. Obliczyć całkę $\int_C dz/z$, gdzie C jest a) okręgiem $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, b) brzeżem kwadratu skierowanego dodatnio o środku $z=0$ i bokach długości $2r$ równoległych do osi współrzędnych.

2. Obliczyć całkę $\int_K \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta$, gdzie K jest okręgiem $\zeta = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, a punkt z leży a) wewnątrz K , b) zewnątrz K .

3. Obliczyć całkę $\int_K \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$, gdzie K jest okręgiem $\zeta = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, a punkt z leży a) wewnątrz K , b) zewnątrz K .

4. Obliczyć całkę funkcji $f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{z - a_k} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{z - b_k}$

po konturze C zawierającym punkty $a_1, \dots, a_m$ wewnątrz, a punkty $b_1, \dots, b_n$ zewnątrz.

5. Obliczyć $\log i$ oraz $\log(-1)$ stosując wzór (10) dla $a=1$.

ROZWIĄZANIA.

1. a) $2\pi i$, b) $2\pi i$. — 2. a) $2\pi iz^2$, b) 0. — 3. a) 0, b) $-2\pi i/z$. — 4. Oznaczmy przez K_j okrąg o środku a_j zawarty wewnątrz C , nie zawierający pozostałych punktów a_k i skierowany dodatnio; na mocy (7)

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{K_j} \frac{A_j}{z - a_j} dz = 2\pi i (A_1 + \dots + A_m),$$

bo funkcja $B_j/(z - b_j)$ jest analityczna wewnątrz i na C , a więc $\int_C \frac{B_j}{z - b_j} dz = 0$ dla

$j=0, 1, \dots, n$. — 5. $\log i = (2k+1/2)\pi i$, $\log(-1) = (2k+1)\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ROZDZIAŁ VII

Wzór całkowy Cauchy'ego i zastosowania

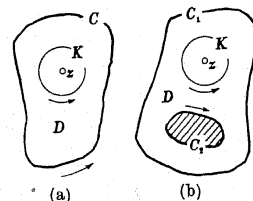
28. Wzór całkowy Cauchy'ego. Opierając się na twierdzeniu całkowym, wykażemy, że:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz i na brzegu obszaru D , ograniczonego krzywą regularną Jordana C skierowaną dodatnio, to w każdym punkcie wewnętrznym obszaru wyraża się ona wzorem

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dowód. Niech z będzie punktem dowolnie obranym wewnątrz D , a K — okręgiem o środku z zawartym wraz ze swym wnętrzem wewnątrz D i skierowanym dodatnio (rys. 24). Funkcja pod całką we wzorze (1) jest — jako funkcja zmiennej ζ — analityczna wewnątrz i na brzegu obszaru zawartego między krzywymi C i K ; zatem na mocy wzoru (8), str. 58,

$$(2) \quad \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



Rys. 24.

Całkę po stronie lewej można przedstawić jako sumę dwóch całek

$$\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = I_1 + I_2,$$

z których pierwsza I_1 równa się $f(z) \cdot 2\pi i$, bo $f(z)$ można wyjąć przed znak całki i zastosować następnie wzór (16), str. 50. Wystarczy wykazać, że $I_2 = 0$.

Promień r koła K można obrać dowolnie mały. Obierzmy r tak małe, aby w kole $|\zeta - z| \leq r$ było $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon/2\pi$, co jest możliwe, bo funkcja $f(\zeta)$ jest ciągła w punkcie z . Na okręgu K mamy $|\zeta - z| = r$,

a więc moduł ilorazu pod całką I_2 jest nie większy od $\varepsilon/2\pi r$. Długość drogi całkowania równa się $2\pi r$, a zatem $|I_2| \leq 2\pi r \varepsilon / 2\pi r = \varepsilon$. Ponieważ moduł I_2 jest dowolnie mały, więc $I_2 = 0$.

Wzór (1) nosi nazwę *wzoru całkowego Cauchy'ego*. Pozwala on obliczyć wartości funkcji analitycznej wewnątrz obszaru, gdy znamy jej wartości na brzegu. *Funkcja analityczna w obszarze domkniętym jest więc określona przez swe wartości na brzegu obszaru*, co jest bardzo znamiennej własnością funkcji analitycznych.

Brzeg C obszaru D nie musi być jedną krzywą zamkniętą (jak na rys. 24a). Może się on składać z kilku takich krzywych ($C = C_1 + C_2$ na rys. 24b). W tym przypadku całka we wzorze (1) oznacza sumę całek wzdłuż każdej z krzywych brzegowych skierowanych dodatnio względem wnętrza obszaru D , bo wówczas wzór (2) pozostaje prawdziwy na mocy wzoru (7), str. 57.

Uwaga. Gdy punkt z leży zewnątrz obszaru D , wówczas całka po prawej stronie wzoru (1) równa się zeru na mocy twierdzenia całkowego Cauchy'ego, bo wtedy funkcja podcałkowa — jako funkcja zmiennej ζ — jest analityczna wewnątrz i na brzegu obszaru D .

Ze wzoru (1) wyprowadzimy ważne wnioski, opierając się na następującym twierdzeniu pomocniczym:

Jeżeli $\varphi(\zeta)$ jest funkcją ciągłą na dowolnej krzywej regularnej C zamkniętej lub nie, a punkt z nie leży na C , to funkcja $\Phi(z)$ określona wzorem

$$(3) \quad \Phi(z) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^p} d\zeta \quad (p=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

jest analityczna wszędzie poza krzywą C i jej pochodna wyraża się wzorem

$$(4) \quad \Phi'(z) = p \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta.$$

Dowód. Niech punkt z_0 leży poza krzywą C . Utwórzmy iloraz różnicowy

$$\frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z - z_0} = \int_C \varphi(\zeta) \frac{(\zeta - z)^{-p} - (\zeta - z_0)^{-p}}{z - z_0} d\zeta$$

i następnie różnicę

$$\frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z - z_0} - I_0 = \int_C \varphi(\zeta) \left[\frac{(\zeta - z)^{-p} - (\zeta - z_0)^{-p}}{z - z_0} - \frac{p}{(\zeta - z_0)^{p+1}} \right] d\zeta,$$

gdzie I_0 oznacza prawą stronę (4) dla $z = z_0$. Różnicę w nawiasie kwadratowym pod ostatnią całką oznaczmy krócej przez $r(\zeta, z)$. Gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas różnica $r(\zeta, z)$ dąży do zera i to jednostajnie względem $\zeta \in C^1$,

¹⁾ Dowód tego, że zbieżność jest jednostajna, pozostawiam czytelnikowi.

bo pochodna potęgi $(\zeta - z)^{-p}$ jako funkcji zmiennej z w punkcie z_0 równa się $p/(\zeta - z_0)^{p+1}$. Wobec tego zachodzi nierówność $|r(\zeta, z)| < \varepsilon$ dla wszystkich $\zeta \in C$, gdy $|z - z_0| < \delta$, gdzie δ zależy tylko od ε . Oznaczając przez M maksimum modułu $|\varphi(\zeta)|$ na krzywej C , a przez d długość tej krzywej, otrzymamy

$$\left| \frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z - z_0} - I_0 \right| \leq M d \varepsilon \quad \text{dla } |z - z_0| < \delta.$$

Zatem twierdzenie jest prawdziwe, bo iloczyn $M d \varepsilon$ jest dowolnie mały.

29. Rozwijalność funkcji analitycznej w szereg potęgowy. Zastosujmy poprzednie twierdzenie do funkcji analitycznej $f(z)$ wyrażonej przez całkę (1). W myśl wzoru (4) pochodna $f'(z)$ wyraża się wewnątrz C przez całkę

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Na mocy wzoru (4) pochodna $f'(z)$ ma dalsze pochodne, mianowicie

$$f''(z) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

i ogólnie dla $n=1, 2, \dots$

$$(5) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Zatem:

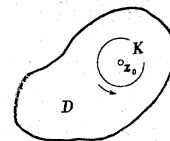
Funkcja analityczna w pewnym obszarze (tj. posiadająca w nim pierwszą pochodną) ma w tym obszarze wszystkie pochodne.

Niech z_0 będzie punktem wewnętrznym dowolnego obszaru D , w którym funkcja $f(z)$ jest analityczna, i niech K będzie okręgiem $|z - z_0| = r$ skierowanym dodatnio i zawartym wraz ze swym wnętrzem wewnątrz D (rys. 25). Gdy punkt z leży wewnątrz K , wówczas w myśl wzoru całkowego (1)

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Niech $|z - z_0| = \varrho < r = |z - z_0|$. Wówczas iloraz $1/(\zeta - z)$ można rozwinąć w szereg zbieżny

$$(7) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



Rys. 25.

Zbieżność ta jest jednostajna względem ζ przebiegającego okrąg K , bo moduły wyrazów szeregu (7) są nie większe od wyrazów szeregu geometrycznego $\sum_0^\infty \rho^n / r^{n+1}$. Podstawmy rozwinięcie (7) do całki (6). Całkując wyraz po wyrazie i oznaczając

$$(8) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

otrzymamy rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg potęgowy

$$(9) \quad f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots,$$

zbieżny wewnątrz K . Promień koła K może być dowolnie bliski najmniejszej odległości punktu z_0 od brzegu obszaru D . Dowiedliśmy więc, że:

Funkcja $f(z)$ analityczna w pewnym obszarze D jest rozwijalna w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in D$ w szereg potęgowy (9) o współczynnikach wyrażonych wzorem (8). Szereg ten jest zbieżny w kole o środku z_0 , którego promień jest nie mniejszy niż odległość punktu z_0 od brzegu obszaru D .

Szereg (9) nazywamy szeregiem Taylora funkcji $f(z)$.

Dwa ostatnie twierdzenia wskazują na zasadniczą różnicę między funkcją $f(z)$ zmiennej rzeczywistej x , posiadającą pochodną $f'(x)$ w pewnym przedziale P , i funkcją $f(z)$ zmiennej zespolonej z , posiadającą pochodną $f'(z)$ w pewnym obszarze D . Pierwsza może – jak wiadomo – nie posiadać żadnej dalszej pochodnej w przedziale P , druga posiada w obszarze D wszystkie pochodne i jest rozwijalna w szereg potęgowy.

Założmy, że funkcja $f(z)$ jest analityczna i ograniczona w kole domkniętym $|z - z_0| \leq r$ i że na okręgu $|z - z_0| = r$ spełnia nierówność $|f(z)| \leq M$. Wówczas funkcja ta jest rozwijalna w szereg potęgowy (9) i na mocy wzoru (8) jest

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r.$$

Zatem współczynniki a_n spełniają nierówności

$$(10) \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Nierówności te noszą nazwę *nierówności Cauchy'ego*.

PRZYKŁAD 1. Funkcja $1/(1-z)$ jest analityczna na całej płaszczyźnie poza punktem $z=1$. W otoczeniu punktu $z_0 \neq 1$ posiada ona rozwinięcie w szereg

$$(11) \quad \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0) - (z-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

zbieżny w kole $|z - z_0| < |1 - z_0|$, którego promień równa się odległości punktu z_0 od jedyne go punktu brzegowego 1. Współczynniki rozwinięcia obliczyliśmy tu drogą bezpośrednią nie stosując wzorów (8).

PRZYKŁAD 2. Wiemy (str. 59), że w każdym obszarze jednostopijnym D nie zawierającym punktów 0 i ∞ istnieje funkcja analityczna $w = \log z$ i że daje się ona przedstawić przez całkę $\log z = \int_a^z \frac{d\zeta}{\zeta} + \log a$, gdzie a jest dowolnym punktem obszaru D . Mamy przy tym $w' = 1/z$, $w'' = -z^{-2}$ i ogólnie $w^{(n)} = (-1)^{n+1} (n-1)! z^{-n}$, a więc na mocy wzorów (8) i (9) rozwinięcie na szereg Taylora ma postać

$$(12) \quad \log z = \log a + \frac{z-a}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{z-a}{a} \right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{z-a}{a} \right)^n + \dots$$

Szereg ten jest zbieżny w kole $|z-a| < |a|$, którego promień równa się odległości punktu a od punktu 0.

Przyjmując $a=1$ i zastępując z przez $1+z$, otrzymamy dla wartości głównej logarytmu rozwinięcie

$$(13) \quad \text{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad \text{dla } |z| < 1.$$

PRZYKŁAD 3. Funkcja $w = z^\mu$ jest analityczna w każdym obszarze jednostopijnym nie zawierającym punktów 0 i ∞ . Ponieważ

$$w' = \mu z^{\mu-1}, \quad w'' = \mu(\mu-1) z^{\mu-2}, \quad \dots, \quad w^{(n)} = n! \binom{\mu}{n} z^{\mu-n},$$

więc szereg Taylora tej funkcji w otoczeniu punktu $a \neq 0$ ma postać

$$(14) \quad z^\mu = a^\mu \left[1 + \binom{\mu}{1} \frac{z-a}{a} + \dots + \binom{\mu}{n} \left(\frac{z-a}{a} \right)^n + \dots \right]$$

i jest zbieżny w kole $|z-a| < |a|$. W szczególności, zastępując a przez 1 i z przez $1+z$, otrzymamy dla wartości głównej potęgi $(1+z)^\mu$ rozwinięcie

$$(15) \quad (1+z)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} z + \dots + \binom{\mu}{n} z^n + \dots \quad \text{dla } |z| < 1.$$

Szereg (15) nazywamy szeregiem dwumiennym.

30. Punkty zerowe funkcji analitycznej. Punkt, w którym funkcja $f(z)$ przyjmuje wartość 0, nazywamy *punktem zerowym* lub krócej *zerem* danej funkcji. W rozwinięciu (9) w otoczeniu punktu zerowego z_0 mamy zawsze $a_0 = 0$.

Jeżeli równocześnie $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$, natomiast $a_k \neq 0$, to z_0 nazywamy *zerem k -krotnym* danej funkcji. W punkcie takim mamy $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ oraz $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, szereg zaś Taylora (9) ma postać

$$(16) \quad f(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots = (z-z_0)^k \varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z) = a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots$ jest funkcją analityczną różną od zera w punkcie z_0 i (wobec ciągłości tej funkcji) w pewnym otoczeniu $|z-z_0| < \delta$ danego punktu. Wynika stąd, że:

Punkty zerowe funkcji analitycznej (nie równej tożsamościowo zero) są odosobnione¹⁾.

Innymi słowy, zbiór punktów zerowych funkcji analitycznej w pewnym obszarze D nie może mieć punktu skupienia wewnątrz D , chyba że funkcja stałe równa się zero²⁾.

Dwie funkcje $f(z)$ i $g(z)$ analityczne we wspólnym obszarze D i mające równe wartości w ciągu punktów mającym punkt skupienia wewnątrz D , są identyczne.

Istotnie, różnica $f(z) - g(z)$ jest w obszarze D funkcją analityczną, równą zero w punktach danego ciągu; zatem $f(z) - g(z) \equiv 0$, czyli $f(z) \equiv g(z)$.

W szczególności funkcja analityczna nie może mieć wartości stałej w dowolnie małej części swego obszaru istnienia, ani na dowolnie małej linii, chyba że jest stała wszędzie.

31. Twierdzenie Morery. *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją ciągłą w obszarze D i całka $\int_C f(\zeta) d\zeta$ wzdłuż każdej drogi zamkniętej C zawartej w D równa się zero, to $f(z)$ jest funkcją analityczną w D .*

Dowód. Niech a będzie punktem obszaru D . Funkcja $F(z)$ określona przez całkę

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

nie zależy od drogi łączącej punkty a i z i zawartej w D , bo jeżeli C_1 i C_2 są dwiema takimi drogami, to krzywa $C = C_1 + (-C_2)$ jest drogą zamkniętą i całka wzdłuż niej równa się zero, a zatem całka wzdłuż C_1 równa się całce wzdłuż C_2 .

Stąd wnioskujemy, powtarzając rozumowanie ze str. 58, że istnieje pochodna $F'(z)$ równa $f(z)$. Funkcja $F(z)$ jest więc analityczna w obszarze D i jako taka ma drugą pochodną $F''(z) = f'(z)$. Zatem funkcja $f(z)$ ma pierwszą pochodną, czyli jest analityczna w obszarze D .

Twierdzenie to jest odwróceniem twierdzenia całkowego Cauchy'ego i nosi nazwę *twierdzenia Morery*.

¹⁾ I podobnie punkty, w których dana funkcja przyjmuje dowolną wartość a , bo są to punkty zerowe różnicy $f(z) - a$.

²⁾ Na brzegu obszaru D mogą istnieć punkty skupienia zer. Np. funkcja $\sin 1/z$ równa się zero w punktach $1/n\pi$, $n=1, 2, \dots$, mających punkt skupienia 0 leżący na brzegu obszaru istnienia funkcji.

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_s$ rozwinięcia funkcji $\tanh z$ w szereg $\sum_0^\infty a_n z^n$ i promień zbieżności tego szeregu.

2. Niech szeregi $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ będą zbieżne w otoczeniu punktu $z=0$. Wykazać, że gdy $b_0 = b_1 = \dots = b_{p-1} = 0$ i $b_p \neq 0$, to funkcja $I(z)$ określona wzorami: $I(z) = z^p f(z)/g(z)$ dla $z \neq 0$, $I(0) = a_0/b_p$, jest analityczna w otoczeniu punktu $z=0$, i znaleźć kilka początkowych współczynników rozwinięcia $I(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$.

3. Wykazać, że funkcja $\Phi(z)$ określona wzorami: $\Phi(z) = z/(e^z - 1)$ dla $z \neq 0$, $\Phi(0) = 0$, jest analityczna w otoczeniu punktu $z=0$; oznaczając $\Phi(z) = \sum_0^\infty B_n/n! z^n$ znaleźć B_n dla $n=0, 1, \dots, 6$ i wykazać, że $B_{2p+1} = 0$ dla $p=1, 2, \dots$. Współczynniki B_n noszą nazwę *liczb Bernoulliego*.

4. Wykazać, że funkcja $F(z)$ określona wzorami: $F(z) = z \cotg z$ dla $z \neq 0$, $F(0) = 1$, jest analityczna dla $|z| < \pi$ i że w tym kole ma rozwinięcie

$$z \cotg z = 1 - \frac{B_2}{2!} (2z)^2 + \frac{B_4}{4!} (2z)^4 - \dots,$$

gdzie współczynniki B_n są liczbami Bernoulliego (p. ćwiczenie poprzednie).

5. Opierając się na ćwiczeniu poprzednim wykazać, że funkcja $\tanh z$ ma w otoczeniu punktu $z=0$ rozwinięcie

$$\tanh z = \sum_{p=1}^\infty (-1)^{p-1} \frac{2^{2p} (2^{2p} - 1) B_{2p}}{(2p)!} z^{2p-1}.$$

6. Wykazać nierówności Cauchy'ego (10) opierając się na przykładzie 7, str. 52.

7. Znaleźć rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji a) $\sin z$ w otoczeniu punktu πn , b) $\cos z$ w otoczeniu punktu $(2n+1)\pi/2$.

8. Wykazać, że gdy r i r' są promieniami zbieżności odpowiednio szeregów $f(z) = \sum a_n z^n$ i $g(z) = \sum b_n z^n$, to promień zbieżności szeregu $F(z) = \sum a_n b_n z^n$ jest nie mniejszy od rr' i że

$$F(z) = \int_C \frac{f(\zeta)g(z/\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

gdzie C jest dowolnym konturem zawierającym wewnątrz punkt 0 i takim, że $|\zeta| < r$ i $|z/\zeta| < r'$ na C .

9. Wykazać, że gdy szereg $f(z) = \sum a_n z^n$ jest zbieżny w pewnym kole $|z| < r$, to przyjmując $\Phi(z) = \sum a_n z^n/n!$ mamy $f(z) = \int_0^\infty e^{-t} \Phi(zt) dt$.

10. Sprawdzić, że szereg hipergeometryczny (str. 33) spełnia w kole $|z| < 1$ równanie

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + [\gamma - (a + \beta + 1)] \frac{df}{dz} - \alpha \beta f = 0,$$

zwane *równaniem różniczkowym hipergeometrycznym*.

ROZWIĄZANIA.

1. $\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots$; $r = \pi/2$. — 2. $I(z) = \left(\sum_0^\infty a_n z^n \right) / \left(\sum_0^\infty b_{p+n} z^n \right)$; suma $\sum_0^\infty b_{p+n} z^n$

jest funkcją analityczną różną od zera w pewnym otoczeniu punktu 0, a więc w pewnym otoczeniu tego punktu istnieje pochodna $I'(z)$. Z tożsamości

$$(\Sigma a_n z^n) / (\Sigma b_{p+n} z^n) = \Sigma c_n z^n$$

otrzymamy: $c_0 b_p = a_0$, $c_1 b_p + c_0 b_{p+1} = a_1, \dots$, $c_n b_p + c_{n-1} b_{p+1} + \dots + c_0 b_{p+n} = a_n$, stąd zaś

można obliczyć $c_0, c_1, \dots, c_n$. — 3. $\Phi(z) = 1 / \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_0^\infty \frac{B_n}{n!} z^n$, więc

$$\left(B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots \right) \left(\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) = 1,$$

skąd $B_0 = 1$, $\frac{B_1}{1!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{2!} = 0$ i ogólnie $\frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{(n+1)!} = 0$

dla $n \geq 1$; zatem $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}, \dots$ Spraw-

dzić, że suma $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} - \frac{B_1}{1!} z = 1 + \sum_2^\infty \frac{B_n}{n!} z^n$ jest funkcją parzystą, a zatem współczynniki B_n dla $n > 2$ i nieparzystych są równe zero. — 4. Stosując wzory Eulera

i przykład poprzedni (tj. $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu}$) otrzymamy

$$\begin{aligned} z \operatorname{ctg} z &= iz \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = iz \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} + \frac{2iz}{2} = 1 + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} (2iz)^{2\nu} = \\ &= 1 - \frac{B_2}{1!} (2z)^2 + \frac{B_4}{4!} (2z)^4 - \dots \end{aligned}$$

5. Wynika to stąd, że

$$2 \operatorname{ctg} 2z = \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin z \cos z} = \operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z.$$

6. Ponieważ $\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$, więc $|a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$, skąd $|a_n| \leq M r^{-n}$.

7. a) $\sin z = (-1)^n \left[(z - n\pi) - \frac{(z - n\pi)^3}{3!} + \frac{(z - n\pi)^5}{5!} - \dots \right]$,

b) $\cos z = (-1)^{n+1} \left[(z - z_0) - \frac{(z - z_0)^3}{3!} + \frac{(z - z_0)^5}{5!} - \dots \right]$,

gdzie $z_0 = (2n+1)\pi/2$. — 8. Dla małych $\varepsilon > 0$ zachodzą nierówności $|a_n(r-\varepsilon)| < M$ i $|b_n(r'-\varepsilon)| < M$, gdzie M jest pewną stałą, skąd $\limsup \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq 1/(r-\varepsilon)(r'-\varepsilon)$; podstawić $g(z/\zeta) = \Sigma b_n z^n \zeta^{-n}$ do całki i całkować wyraz po wyrazie. — 9. Całkować wyraz po wyrazie i uwzględnić wzór $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$.

CZĘŚĆ TRZECIA

WŁASNOŚCI OGÓLNE FUNKCJI ANALITYCZNYCH

ROZDZIAŁ VIII

Wnioski z wzoru całkowego

32. Funkcje całkowite i twierdzenie Liouville'a. Funkcję analityczną na całej płaszczyźnie (otwartej) nazywamy *funkcją całkowitą*. Funkcja całkowita $f(z)$ daje się przedstawić jednym szeregiem potęgowym postaci

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

zbieżnym na całej płaszczyźnie.

Funkcje całkowite dzielimy na *wielomiany* (czyli *funkcje całkowite wymierne*) i na *funkcje całkowite przestępne* zależnie od tego, czy w rozwinięciu (1) ilość współczynników a_n różnych od zera jest skończona, czy nieskończona. Np. e^z , $\sin z$, $\cos z$ są funkcjami całkowitymi przestępnymi. Wykażemy następujące ważne

TWIERDZENIE LIOUVILLE'A. *Każda funkcja całkowita ograniczona jest stała.*

Dowód. Niech funkcja $f(z)$ będzie całkowita i niech spełnia na całej płaszczyźnie nierówność $|f(z)| \leq M$, gdzie M jest pewną stałą. Na mocy nierówności Cauchy'ego (str. 64) mamy dla dowolnego $r > 0$

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Ponieważ promień r może być dowolnie wielki, więc moduł $|a_n|$ jest dowolnie mały, gdy $n > 0$; zatem $a_n = 0$ dla $n=1, 2, \dots$ i dlatego $f(z)$ redukuje się do wyrazu stałego a_0 .

Twierdzenie powyższe orzeka, że każda funkcja całkowita różna od stałej przyjmuje wartości o module dowolnie wielkim, czyli że