

CZĘŚĆ PIERWSZA

LICZBY I FUNKCJE ZESPOLONE

ROZDZIAŁ I

Liczby zespolone

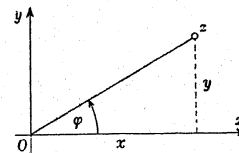
1. Liczby zespolone i punkty płaszczyzny. Zakładamy, że czytelnik jest obznajomiony z liczbami zespolonymi. Dla ustalenia terminologii przypomnimy zasadnicze oznaczenia i definicje.

Każda liczba zespolona a ma postać

$$(1) \quad a = \alpha + \beta i,$$

gdzie α i β są pewnymi liczbami rzeczywistymi; i oznacza jednostkę urojoną. Liczby α i β nazywamy odpowiednio *częścią rzeczywistą* i *częścią urojoną* liczby a . Liczbę zespoloną $\alpha + 0 \cdot i$ piszemy krócej α i nazywamy *liczbą rzeczywistą*, liczbę zaś $0 + \beta \cdot i$ piszemy krócej βi i nazywamy *liczbą urojoną*¹⁾. Zamiast $\alpha + \beta i$ piszemy również $\alpha + i\beta$.

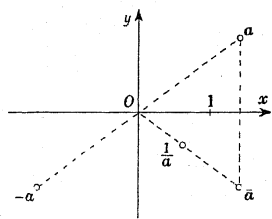
Liczbę zespolonej $\alpha + \beta i$ odpowiada na płaszczyźnie układu współrzędnych prostokątnych punkt o współrzędnych α, β . Na odwrót, punktowi o współrzędnych x, y odpowiada liczba zespolona $z = x + yi$ (rys. 1). Płaszczyznę, której punktom przyporządkowano liczby zespolone, nazywamy *płaszczyzną liczbową*. Zamiast mówić „punkt odpowiadający liczbie z ”, mówimy krótko „punkt z ”. Punktem osi x odpowiadają liczby rzeczywiste, punktem osi y liczby urojone, to też oś x nazywamy *osią rzeczywistą*, oś y *osią urojoną*.



Rys. 1.

¹⁾ Termin *liczba urojona* nie jest zbyt szczęśliwy, bo nasuwa błędne przypuszczenia; używamy go ze względów tradycyjnych. Warto zaznaczyć, że jak liczby ujemne nie są „gorsze” od dodatnich, tak liczby urojone i zespolone nie są „gorsze” od liczb rzeczywistych i oddają doskonałe usługi w opisywaniu zjawisk realnych, np. ciepłych, elektrycznych itd.

Jeżeli liczbę $a+\beta i$ oznaczymy jedną literą a , to liczby $a-\beta i$ i $-a-\beta i$ oznaczamy przez



Rys. 2.

$\bar{a}=a-\beta i$ i $-a=-a-\beta i$
i pierwszą z nich nazywamy *liczbą sprzężoną* z a , drugą zaś – *symetryczną* do a . Gdy $a \neq 0$, wówczas przez $1/a$ oznaczamy liczbę

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{a^2 + \beta^2} i$$

i nazywamy *liczbą odwrotną* do a . Rys. 2 wskazuje wzajemne położenie punktów a , $-a$, $\bar{a}$ i $1/a$.

Dwie liczby zespolone

$$(2) \quad a = a' + \beta i \quad i \quad b = a' + \beta' i$$

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a'$ i $\beta = \beta'$. Sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb (2) określamy wzorami

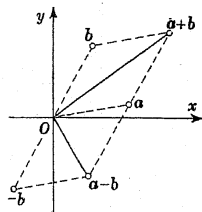
$$a + b = (a' + a') + (\beta + \beta') i,$$

$$a - b = (a - a') + (\beta - \beta') i,$$

$$(3) \quad a \cdot b = (aa' - \beta\beta') + (a\beta' + \beta a') i,$$

$$\frac{a}{b} = a' \cdot \frac{1}{b} = \frac{aa' + \beta\beta'}{a'^2 + \beta'^2} - \frac{a\beta' - \beta a'}{a'^2 + \beta'^2} i.$$

Iloraz ma sens tylko wtedy, gdy $b \neq 0$. Rys. 3 wskazuje wzajemne położenie liczb $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ i a/b .



Rys. 3.

Z wzorów (3) wynikają dla liczb zespolonych a , b i c następujące prawa:

$$a + b = b + a \quad i \quad ab = ba \quad (\text{prawo przemienności}),$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad i \quad (ab)c = a(bc) \quad (\text{prawo łączności}),$$

$$(a + b)c = ac + bc \quad (\text{prawo rozdzielności}).$$

Iloczyn dwu liczb sprzężonych $a = a + \beta i$ i $\bar{a} = a - \beta i$ jest zawsze liczbą rzeczywistą nieujemną

$$a \cdot \bar{a} = a^2 + \beta^2.$$

Kwadrat liczby urojonej $i = 0 + 1 \cdot i$ jest liczbą ujemną

$$i^2 = -1^1).$$

2. Moduł i argument liczby. Liczbę rzeczywistą nieujemną $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy *modułem* lub *wartością bezwzględną* liczby $z = x + yi$ i oznaczamy przez $|z|$:

$$(4) \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Moduł liczby z równa się odległości punktu z od początku układu współrzędnych (rys. 1).

Liczbę rzeczywistą φ określoną równaniami

$$(5) \quad \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}$$

nazywamy *argumentem* liczby $z = x + yi \neq 0$.

Argument liczby z oznaczamy przez „argz”; jest on miarą kąta nachylenia wektora Oz do osi x (rys. 1). Każda liczba $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów; jeżeli φ jest jednym z nich, to każdy inny wyraża się wzorem

$$\arg z = \varphi + 2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Dokładnie jeden z argumentów spełnia nierówność $-\pi < \arg z \leq \pi$; nazywamy go *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy przez „Argz”. Argumentem liczby $z=0$ nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ .

Z wzorów (5) wynika, że $x = |z| \cos \varphi$ i $y = |z| \sin \varphi$, więc każdej liczbie zespolonej $z = x + yi$ można nadać postać

$$(6) \quad z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $\varphi = \arg z$. Liczba $z \neq 0$ jest wyznaczona, gdy znamy jej moduł i jeden z argumentów. Stąd wniosek:

Dwie liczby zespolone różne od zera są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe moduły i gdy ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π .

¹⁾ Potrzeba wprowadzenia liczb zespolonych powstała na gruncie rozwiązywania równań kwadratowych postaci

$$(z - a)^2 + \beta^2 = 0$$

$$(\beta \neq 0),$$

skąd $z = a + \beta i$ lub $z = a - \beta i$. Liczbami tymi posługiwano się już od czasów R. Descartesa (1596-1654). Właściwe jednak ujęcie teorii liczb zespolonych pochodzi od W. R. Hamiltona (1805-1865) i K. F. Gaussa (1777-1855).

Niech będą dane dwie liczby a i b o argumentach φ i ψ

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad b = |b|(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Stosując dwa ostatnie wzory (3) otrzymamy po przekształceniach

$$(7) \quad ab = |a| \cdot |b| [\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)],$$

$$(8) \quad \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} [\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)].$$

Zatem:

Moduł iloczynu (ilorazu) dwóch liczb równa się iloczynowi (ilorazowi) modułów, argument zaś równa się sumie (różnicy) argumentów obu czynników (dzielnej i dzielnika).

Z wzoru (7) wynika, że kwadrat liczby a wyraża się wzorem $a^2 = |a|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$, i ogólnie, n -ta potęga a^n , gdzie $n=1, 2, \dots$, wyraża się wzorem

$$(9) \quad a^n = |a|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Przyjmując tu $a=1$ otrzymamy równość zwaną *wzorem Moivre'a*

$$(10) \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Każdą liczbę zespoloną z spełniającą równanie $z^n = a$ nazywamy n -tym *pierwiastkiem* liczby zespolonej a i oznaczamy przez $\sqrt[n]{a}$. Niech liczba $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ spełnia to równanie, tzn.

$$|z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = |a| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Moduły obu stron muszą być równe, a argumenty mogą różnić się o wielokrotność 2π , czyli $|z|^n = |a|$ i $n\theta = \varphi + 2\pi k$, skąd

$$(11) \quad |z| = \sqrt[n]{|a|}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

gdzie $\sqrt[n]{|a|}$ oznacza tzw. *pierwiastek arytmetyczny*, tj. liczbę nieujemną, której n -ta potęga równa się $|a|$. Wśród argumentów $(\varphi + 2\pi k)/n$, gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, istnieje dokładnie n takich, których różnice nie są wielokrotnościami liczby 2π . Są to np. liczby

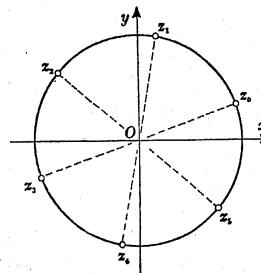
$$(12) \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Zatem:

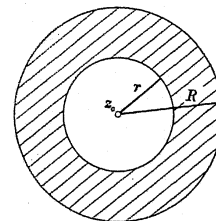
Istnieje dokładnie n pierwiastków n -tych liczby $a \neq 0$, mianowicie

$$(13) \quad z_k = \sqrt[n]{|a|} (\cos \theta_k + i \sin \theta_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Wszystkie liczby (13) mają równe moduły, a więc leżą na okręgu koła zatoczonego z początku układu współrzędnych promieniem $\sqrt[n]{|a|}$. Dzielą one okrąg na n równych części (rys. 4, $n=6$), bo $\arg z_{k+1} - \arg z_k = 2\pi/n$.



Rys. 4.



Rys. 5.

3. Nierówności. Dwie dowolne liczby a i b spełniają nierówności

$$(14) \quad |a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a+b| \geq |a| - |b|.$$

Moduły bowiem $|a|$, $|b|$ i $|a+b|$ są bokami trójkąta o wierzchołkach O , a i $a+b$ (rys. 3), a każdy bok trójkąta jest nie większy od sumy i nie mniejszy od różnicy boków pozostałych.

Moduł różnicy dwu liczb $z = x + yi$ i $z_0 = x_0 + y_0i$ wyraża się w myśl (3) i (4) wzorem

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

i przedstawia odległość punktów z i z_0 . Stąd wniosek:

Zbiór wszystkich punktów z na płaszczyźnie liczbowej spełniających nierówność

$$(15) \quad |z - z_0| < r \quad (r > 0),$$

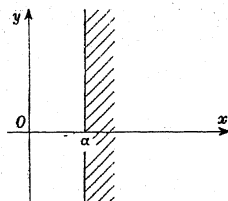
tworzy wnętrze koła o środku z_0 i promieniu r .

Podobnie, równanie $|z - z_0| = r$ przedstawia dla zmiennego z okrąg koła, nierówność $|z - z_0| > r$ przedstawia zewnętrzne koła (15), a nierówności $r < |z - z_0| < R$, gdzie $0 < r < R$, przedstawiają wnętrze pierścienia kołowego o środku z_0 (rys. 5).

Część rzeczywistą liczby $z = x + yi$ oznaczamy przez $\operatorname{Re} z$, część urojoną przez $\operatorname{Im} z$, czyli

$$(16) \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Wobec tego nierówność $\operatorname{Re} z > a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą, przedstawia półpłaszczyznę leżącą na prawo od prostej $x=a$ (rys. 6).



Rys. 6.

Podobnie nierówność $\operatorname{Im} z > 0$ przedstawia półpłaszczyznę górną, tj. leżącą powyżej osi rzeczywistej.

PRZYKŁAD. Nierówności $a < \operatorname{Im} z < \beta$ przedstawiają pas nieograniczony zawarty między dwiema prostymi równoległymi do osi x .

Nierówności $a < \arg z < \beta$ przedstawiają kąt o wierzchołku $z=0$ i o ramionach nachylonych do osi x pod kątami a i β .

4. Ciągi liczbowe. Przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej n pewną liczbę zespoloną $z_n = x_n + iy_n$. Otrzymamy ciąg nieskończony, który oznaczamy przez $\{z_n\}$:

$$(17) \quad \{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \dots$$

Ciąg $\{z_n\}$ nazywamy *ograniczonym*, gdy istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdego n mamy $|z_n| < M$, czyli gdy wszystkie wyrazy ciągu leżą w kole $|z| < M$.

Mówimy, że ciąg (17) jest *zbieżny* do granicy $g = a + \beta i$, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = g \quad \text{lub krócej} \quad z_n \rightarrow g,$$

jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik $N = N(\varepsilon)$, że

$$(18) \quad |z_n - g| < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad n \geq N,$$

czyli jeżeli w każdym kole $|z - g| < \varepsilon$ o środku g leżą wszystkie wyrazy ciągu (tj. wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby wyrazów).

Liczbę s nazywamy *punktem skupienia* ciągu $\{z_n\}$, jeżeli w każdym kole $|z - s| < \varepsilon$ o środku s leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu (niekoniecznie prawie wszystkie). Granica ciągu jest więc jego punktem skupienia, lecz niekoniecznie na odwrót.

Podobnie jak dla ciągów o wyrazach rzeczywistych, dowodzi się, że każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Wykażemy, że:

Ciąg $\{z_n\}$, gdzie $z_n = x_n + iy_n$, jest wtedy i tylko wtedy zbieżny do granicy $g = a + \beta i$, gdy jednocześnie

$$(19) \quad x_n \rightarrow a \quad \text{i} \quad y_n \rightarrow \beta.$$

Istotnie, niech $z_n \rightarrow g$. Warunek (18) jest więc spełniony. Można go napisać w postaci

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - \beta)^2} < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad n \geq N,$$

stąd zaś wynika, że $|x_n - a| < \varepsilon$ i $|y_n - \beta| < \varepsilon$ dla $n \geq N$, a zatem $x_n \rightarrow a$ i $y_n \rightarrow \beta$. Na odwrót, założmy zbieżność (19). Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie $N_1 > 0$, że $|x_n - a| < \varepsilon/2$, gdy $n \geq N_1$, oraz takie $N_2 > 0$, że $|y_n - \beta| < \varepsilon/2$, gdy $n \geq N_2$. Niech $N = \max(N_1, N_2)$; wówczas dla $n \geq N$ zachodzą obie nierówności: $|x_n - a| < \varepsilon/2$ i $|y_n - \beta| < \varepsilon/2$, skąd dla $n \geq N$ mamy $|x_n - a| + |y_n - \beta| < \varepsilon$. Leż

$$|z_n - g| \leq |x_n - a| + |y_n - \beta|,$$

więc $|z_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq N$, czyli $z_n \rightarrow g$.

Mówimy, że ciąg $\{z_n\}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taki wskaźnik N , że

$$(20) \quad |z_n - z_m| < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad m \text{ i } n \geq N.$$

Wykażemy, że:

Ciąg $\{z_n\}$ jest wtedy i tylko wtedy zbieżny, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Warunek (20) jest konieczny, bo gdy $z_n \rightarrow g$, wówczas do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie N , że

$$|z_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |z_m - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{gdy} \quad m \text{ i } n \geq N,$$

a więc

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - g| + |z_m - g| < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad m \text{ i } n \geq N.$$

Założmy teraz, że warunek (20) jest spełniony. Wówczas ciągi rzeczywiste $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$, gdzie $z_n = x_n + iy_n$, spełniają również warunek Cauchy'ego. Wiadomo, że ciągi o wyrazach rzeczywistych spełniające warunek Cauchy'ego są zbieżne¹⁾. Zatem na mocy twierdzenia poprzedniego ciąg $\{z_n\}$ jest zbieżny.

Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ o wyrazach zespolonych. Twierdzenia o granicach sumy $\{a_n + b_n\}$, różnicy $\{a_n - b_n\}$, iloczynu $\{a_n \cdot b_n\}$ i ilorazu $\{a_n/b_n\}$ znane dla ciągów rzeczywistych pozostają ważne dla ciągów zespolonych, tj.

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n,$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n),$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad \text{gdy} \quad b_n \neq 0 \quad \text{i} \quad \lim b_n \neq 0.$$

Metoda dowodu jest taka sama jak dla ciągów rzeczywistych.

¹⁾ Zob. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wyd. II, Warszawa 1949; str. 176.

PRZYKŁAD 1. Ciąg $\left\{2 + \frac{i}{n}\right\}$ jest zbieżny do granicy 2.

PRZYKŁAD 2. Ciąg $\{1 + (-1)^n i\}$ jest rozbieżny; ma dwa punkty skupienia: $1+i$ oraz $1-i$.

PRZYKŁAD 3. Ciąg $\{z^n\}$ jest zbieżny do zera, gdy $|z| < 1$; gdy $|z| \geq 1$ i $z \neq 1$, ciąg ten jest rozbieżny.

5. Szeregi liczbowe. Szereg

$$(21) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

o dowolnych wyrazach zespolonych nazywamy *zbieżnym* do sumy s , co piszemy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, gdy ciąg sum cząstkowych $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, jest zbieżny do granicy s . Zamiast $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ piszemy krócej $\sum_0^{\infty} a_n$ lub $\sum a_n$.

Szereg $\sum a_n$ nazywamy 1° *bezwzględnie zbieżnym*, gdy szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny; 2° *warunkowo zbieżnym*, gdy jest zbieżny, lecz nie jest bezwzględnie zbieżny; 3° *rozbieżnym*, gdy nie jest zbieżny. W podobny sposób jak dla szeregów o wyrazach rzeczywistych dowodzi się, że:

1. Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $a_n \rightarrow 0$.

2. Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny przy dowolnym uporządkowaniu wyrazów i suma jego nie zależy od porządku wyrazów.

Wykażemy, że:

3. Szereg $\sum a_n$, gdzie $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, jest wtedy i tylko wtedy zbieżny do sumy $s = \alpha + i\beta$, gdy szeregi $\sum \alpha_n$ i $\sum \beta_n$ są zbieżne i gdy

$$(22) \quad \sum \alpha_n = \alpha, \quad \sum \beta_n = \beta.$$

Dowód. Niech szereg (21) będzie zbieżny do sumy $s = \alpha + i\beta$. Wówczas ciąg

$$s_n = a_0 + \dots + a_n = (\alpha_0 + \dots + \alpha_n) + i(\beta_0 + \dots + \beta_n)$$

dąży do granicy $\alpha + i\beta$, a więc (p. str. 6) $\alpha_0 + \dots + \alpha_n \rightarrow \alpha$ i $\beta_0 + \dots + \beta_n \rightarrow \beta$, czyli $\sum \alpha_n = \alpha$ i $\sum \beta_n = \beta$. Na odwrót, jeżeli szeregi (22) są zbieżne, to $\alpha_0 + \dots + \alpha_n \rightarrow \alpha$ i $\beta_0 + \dots + \beta_n \rightarrow \beta$, skąd wynika $s_n \rightarrow \alpha + i\beta$, a zatem zachodzi równość $\sum a_n = \alpha + i\beta$.

Będziemy często korzystali z następujących kryteriów zbieżności szeregów (dowody tych kryteriów są takie same jak dla szeregów o wyrazach rzeczywistych, więc je pomijamy):

I. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE. Jeżeli wyrazy szeregów $\sum a_n$ i $\sum A_n$ spełniają dla prawie wszystkich n nierówność $|a_n| \leq A_n$ i szereg $\sum A_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

II. KRYTERIUM D'ALEMBERTA¹⁾. Szereg $\sum a_n$ o wyrazach różnych od zera jest 1° *bezwzględnie zbieżny*, gdy $\limsup |a_{n+1}/a_n| < 1$; 2° *rozbieżny*, gdy $|a_{n+1}/a_n| > 1$ dla prawie wszystkich n .

III. KRYTERIUM CAUCHY'EGO²⁾. Szereg $\sum a_n$, dla którego

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \gamma,$$

jest zbieżny, gdy $\gamma < 1$, a rozbieżny, gdy $\gamma > 1$.

PRZYKŁAD 1. Szereg $\sum_1^{\infty} i^n/n^2$ jest bezwzględnie zbieżny na mocy kryterium porównawczego, bo szereg $\sum_1^{\infty} 1/n^2$ jest zbieżny.

PRZYKŁAD 2. Szereg $\sum_0^{\infty} z^n$, zwany *szeregiem geometrycznym*, jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < 1$ na mocy kryterium Cauchy'ego i ma sumę $1/(1-z)$, bo ciąg sum $s_n = 1 + z + \dots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$, dla $|z| < 1$, dąży do $1/(1-z)$. Gdy $|z| \geq 1$, szereg $\sum z^n$ jest rozbieżny, bo ciąg wyrazów z^n nie dąży do zera.

PRZYKŁAD 3. Szereg $\sum_1^{\infty} z^n/n! = 1 + z/1! + z^2/2! + \dots$ jest bezwzględnie zbieżny dla każdej wartości z na mocy kryterium d'Alemberta; podobnie dla każdej wartości z są bezwzględnie zbieżne szeregi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

PRZYKŁAD 4. Szereg $\sum_1^{\infty} z^n/n$ jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < 1$, rozbieżny dla $|z| > 1$.

¹⁾ I. d'Alembert (1717-1783).

²⁾ Określenie $\limsup$ ciągu o wyrazach rzeczywistych znajdzie czytelnik w książce cytowanej na str. 7.

³⁾ A. Cauchy (1789-1857).

Powyższe kryteria nie rozstrzygają, czy szereg $\Sigma z^n/n$ jest zbieżny na okręgu $|z|=1$. Zobaczymy, że szereg ten jest zbieżny na całym okręgu $|z|=1$ poza jednym punktem $z=1$, w którym jest rozbieżny. Wynika to z następującego

KRYTERIUM DIRICHLETA¹⁾. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny, jeżeli wyrazy a_n są rzeczywiste, dodatnie i maleją ze wzrostem n do zera, a ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest ograniczony.

Dowód. Niech $\sigma_n = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$, $s_n = b_1 + \dots + b_n$ i niech będzie $|s_n| < M$ dla wszelkich n . Z tożsamości

$$\begin{aligned}\sigma_n - \sigma_m &= a_{m+1} b_{m+1} + \dots + a_n b_n = a_{m+1} (s_{m+1} - s_m) + \dots + a_n (s_n - s_{n-1}) = \\ &= -s_m a_{m+1} + s_{m+1} (a_{m+1} - a_{m+2}) + \dots + s_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + s_n a_n\end{aligned}$$

i z założenia $a_k - a_{k+1} > 0$ otrzymamy dla $n > m$ nierówność

$$|\sigma_n - \sigma_m| \leq M(a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \dots + a_{n-1} - a_n + a_n) = 2M a_{m+1}.$$

Ponieważ $a_m \rightarrow 0$, więc $|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$, gdy m jest dostatecznie wielkie, a zatem ciąg $\{\sigma_n\}$ jest zbieżny, bo spełnia warunek Cauchy'ego.

PRZYKŁAD. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ jest zbieżny dla $|z|=1$, $z \neq 1$, bo przyjmując $a_n = 1/n$, $b_n = z^n$, $|z|=1$ i $|1-z| > \eta$, otrzymujemy

$$s_n = |z + z^2 + \dots + z^n| = \left| z \frac{1-z^n}{1-z} \right| < \frac{2}{\eta},$$

tzn. założenia kryterium Dirichleta są spełnione.

Niech będą dane dwa dowolne szeregi

$$(23) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{ i } \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Nowy szereg

$$(24) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n,$$

nazywamy *iloczynem Cauchy'ego* szeregów (23). Wykażemy, że:

Jeżeli oba szeregi (23) są zbieżne, $\Sigma a_n = A$, $\Sigma b_n = B$ i przynajmniej jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to szereg (24) jest zbieżny i $\Sigma c_n = AB$.

Dowód. Niech np. szereg $\Sigma a_n = A$ będzie bezwzględnie zbieżny i niech $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = K$. Oznaczmy przez A_n , B_n i C_n sumy cząstkowe sze-

regów Σa_n , Σb_n i Σc_n ; wówczas

$$\begin{aligned}C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) = \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0;\end{aligned}$$

skąd

$$C_n - A_n B = a_0 (B_n - B) + a_1 (B_{n-1} - B) + \dots + a_n (B_0 - B).$$

Ponieważ $\beta_n = B_n - B \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, więc do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taki wskaźnik p , że dla $n > p$ jest $|\beta_n| < \varepsilon/2K$, a zatem

$$|C_n - A_n B| \leq \frac{\varepsilon}{2K} (|a_0| + \dots + |a_{n-p+1}|) + |a_{n-p} \beta_p + \dots + a_n \beta_0|.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest $\leq \varepsilon/2$, drugi zaś jest sumą $p+1$ wyrazów, z których każdy dąży ze wzrostem n do zera. A więc drugi składnik jest $< \varepsilon/2$, gdy $n > q$, gdzie q zależy od ε . Gdy więc $n > \max(p, q)$, wówczas $|C_n - A_n B| < \varepsilon$, a zatem $C_n \rightarrow AB$, bo $A_n B \rightarrow AB$.

PRZYKŁAD. Szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b^n/n!$ są bezwzględnie zbieżne dla dowolnych wartości a i b . Stosując twierdzenie poprzednie otrzymamy

$$(25) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!},$$

bo

$$\frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{b}{1!} + \dots + \frac{b^n}{n!} = \frac{1}{n!} \left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n \right] = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

ĆWICZENIA.

1. Kiedy kwadrat liczby $a + \beta i$ jest liczbą a) rzeczywistą, b) ujemną, c) urojoną?
2. Jakie muszą być argumenty liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$, aby a) iloczyn $a \cdot b$, b) iloraz a/b był liczbą rzeczywistą?
3. Wykazać, że: $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a/b} = \overline{a}/\overline{b}$.
4. Wykazać, że iloraz $(z-1)/(z+1)$ jest wtedy i tylko wtedy liczbą a) urojoną, gdy $|z|=1$ oraz $1z \neq 0$, b) rzeczywistą, gdy $1z=0$.
5. Wykazać, że gdy z jest liczbą rzeczywistą różną od a , to moduł ilorazu $(z-a)/(z-\bar{a})$ dla każdej wartości a równa się 1.
6. Wykazać, że w punktach okręgu $|z|=1$ różnych od a moduł ilorazu $(z-a)/(\bar{a}z-1)$ równa się 1 dla każdej wartości a .
7. Udowodnić wzór $|a-b|^2 = |a|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{a}b + |b|^2$, gdzie $\operatorname{Re} \bar{a}b$ oznacza część rzeczywistą iloczynu $\bar{a}b$.

¹⁾ P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859).

8. Udowodnić następujące wzory:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots,$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots$$

9. Wykazać, że w każdym punkcie okręgu $|z|=1$ różnym od 1 ciąg sum częściowych szeregu $\sum_0^\infty z^n$ jest ograniczony.

10. Wykazać, że gdy szereg $\sum_0^\infty a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to szereg $\sum_0^\infty a_n^2$ jest też bezwzględnie zbieżny.

11. Wykazać, że szereg $\sum_1^\infty z^n/(1-z^n)$, zwany szeregiem Lamberta, jest bezwzględnie zbieżny, gdy $|z|<1$, a rozbieżny, gdy $|z|>1$.

ROZWIĄZANIA.

1. a) $\alpha=0$ lub $\beta=0$, b) $\alpha=0$, $\beta \neq 0$, c) $\alpha=\beta \neq 0$. — 2. a) $\arg a + \arg b = k\pi$, b) $\arg a - \arg b = k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — 3. Zastosować wzory (3). — 4. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną ilorazu dla $z=x+yi$. — 5. Licznik i mianownik są dla z rzeczywistego liczbami sprzężonymi, a więc mają równe moduły. — 6. Gdy $|z|=1$, to $1/\bar{z}=\bar{z}$, a więc mianownik jest równy $-z(\bar{z}-\bar{a})$ i ma ten sam moduł co licznik. — 7. Oprzeć się na wzorach $|z|^2=z\bar{z}$ i $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$. — 8. Zastosować wzór Moivre'a. — 9. Bo $|1+z+\dots+z^{n-1}|=|(1-z^n)/(1-z)| \leq 2/|1-z|$. — 10. $a_n \rightarrow 0$, więc począwszy od pewnego n mamy $|a_n|^2 \leq |a_n|$. — 11. Gdy $|z|<1$, wówczas $|z^n|<|z|$, a więc $|1-z^n|>1-|z^n|>1-|z|$. Zatem $|z^n/(1-z^n)|<|z^n|/(1-|z|)$; zastosować kryterium porównawcze. Gdy $|z|>1$, to ciąg wyrazów szeregu nie dąży do zera.

ROZDZIAŁ II

Zbiory punktów na płaszczyźnie

6. Zbiory dowolne. Obszary. Punkty płaszczyzny będziemy oznaczali tymi samymi literami, co odpowiadające im liczby zespolone $a, b, z, \dots$. Odległość dwu punktów a i b wyraża się więc wzorem $|a-b|$. Wnętrze koła $|z-a|<r$ o środku a i dowolnym promieniu $r>0$ nazywamy otoczeniem punktu a .

Niech E oznacza dowolny zbiór punktów płaszczyzny (czyli zbiór płaski), np. zbiór punktów pierścienia $2<|z-1|<3$, zbiór wszystkich punktów postaci

$$p+qi,$$

gdzie p i q są dowolnymi liczbami wymiernymi, itd. Zbiór E nazywamy *przeliczalnym*, gdy wszystkie jego punkty można ułożyć w ciąg nieskończony, a *ograniczonym*, gdy istnieje koło $|z|\leq R$ zawierające cały zbiór. Średnicą zbioru ograniczonego nazywamy kres górny wszystkich odległości $|a-b|$, gdzie a i b są punktami zbioru.

Jeżeli punkt a należy do zbioru E , piszemy $a \in E$; jeżeli zbiór E jest częścią innego zbioru E' , piszemy $E \subset E'$ lub $E' \supset E$. Mając dane dwa zbiory E_1 i E_2 , oznaczamy przez $E_1 + E_2$ ich *sumę* (tj. zbiór punktów należących bądź do E_1 , bądź do E_2), a przez $E_1 E_2$ ich *iloczyn* (tj. zbiór punktów należących równocześnie do E_1 i do E_2). Zbiory E_1 i E_2 są *rozłączne*, gdy ich iloczyn jest zbiorem pustym.

Punkt a , należący do zbioru E lub nie, nazywamy *punktem skupienia zbioru E* , jeżeli w każdym otoczeniu $|z-a|<r$ leży nieskończenie wiele punktów zbioru. Punkt zbioru, który nie jest jego punktem skupienia, nazywamy *punktem odosobnionym* zbioru. Zbiór E , do którego dołączono wszystkie jego punkty skupienia, oznaczamy przez $\bar{E}$.

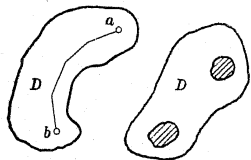
Dowolny punkt a może mieć względem zbioru E trzy położenia: jest punktem 1° *wewnętrznym* zbioru, jeżeli należy do E wraz z pewnym swym otoczeniem; 2° *zewnętrznym*, jeżeli wraz z pewnym swym otoczeniem nie należy do E ; 3° *brzegowym*, jeżeli nie jest ani punktem wewnętrznym, ani zewnętrznym.

Zbiór E nazywamy 1° *otwartym*, gdy każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym zbioru; 2° *domkniętym*, gdy zawiera wszystkie swe punkty skupienia, tj. gdy $E=\bar{E}$; 3° *spójnym*, jeżeli nie daje się rozdzielić na ta-

kie dwa zbiory rozłączne E_1 i E_2 , że zbiory $\bar{E}_1$ i E_2 oraz E_1 i $\bar{E}_2$ są również rozłączne.

Każdy zbiór otwarty i spójny nazywamy krótko *obszarem*¹⁾; zbiór wszystkich jego punktów brzegowych nazywamy *brzegiem* obszaru.

Brzeg obszaru jest zawsze zbiorem domkniętym, bo gdy z_0 jest punktem skupienia punktów brzegowych, to z_0 nie jest ani punktem wewnętrznym obszaru ani punktem zewnętrznym, a zatem jest punktem brzegowym. Brzeg B obszaru D nie należy do obszaru; jeżeli go dołączymy do obszaru, to zbiór $D+B$ nazywamy *obszarem domkniętym*.



Rys. 7.

Obszary dzielimy na jednospójne i wielospójne. Obszar ograniczony D nazywamy *jednospójnym*, jeżeli jego brzeg B jest zbiorem spójnym (np. wnętrze trójkąta lub elipsy);

obszar jest n -spójny, jeżeli jego brzeg B jest sumą n zbiorów domkniętych rozłącznych, a nie jest sumą $n+1$ takich zbiorów²⁾. Na rys. 7 obszar pierwszy jest jednospójny, drugi — trójspójny.

PRZYKŁAD 1. Zbiór punktów pierścienia $2 < |z-1| < 3$ jest obszarem ograniczonym. Jego brzeg składa się z dwóch okręgów $|z-1|=2$ i $|z-1|=3$; średnica tego zbioru wynosi 6.

PRZYKŁAD 2. Zbiór złożony z okręgu $|z|=1$ i punktu $z=3$ nie ma punktów wewnętrznych i nie jest spójny. Jest zbiorem ograniczonym i domkniętym; punkt $z=3$ jest punktem odosobnionym zbioru.

PRZYKŁAD 3. Zbiór wszystkich punktów $p+qi$, gdzie p i q są liczbami wymiernymi, jest przeliczalny³⁾ i nieograniczony; każdy punkt płaszczyzny jest punktem skupienia tego zbioru.

W dalszym ciągu będziemy korzystali z następujących twierdzeń⁴⁾:

TWIERDZENIE BOLZANO-WEIERSTRASSA. *Każdy zbiór nieskończony i ograniczony ma przynajmniej jeden punkt skupienia.*

TWIERDZENIE BORELA (o pokryciu). *Jeżeli każdy punkt a zbioru ograniczonego i domkniętego E pokryjemy pewnym obszarem D_a , to z rodzinę wszystkich tych obszarów można wyjąć skończoną ilość takich, które łącznie pokrywają cały zbiór E .*

¹⁾ Inaczej: obszar jest to zbiór otwarty, którego każde dwa punkty a i b dają się połączyć linią łamaną należącą do zbioru (rys. 7).

²⁾ Spójność obszaru nieograniczonego będzie określona w ustępie 9.

³⁾ Wiadomo, że zbiór liczb wymiennych (oraz zbiór par liczb wymiennych) daje się ułożyć w ciąg.

⁴⁾ Dowody w książce cytowanej na stronie 7.

Z pierwszego z tych twierdzeń łatwo wyprowadzić wniosek, że:

Z każdego ciągu ograniczonego $\{a_n\}$ można wyjąć ciąg częściowy zbieżny.

Jeżeli bowiem w ciągu $\{a_n\}$ istnieje nieskończenie wiele wyrazów równych, np. $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$, to wyrazy te tworzą ciąg częściowy zbieżny. W przypadku przeciwnym zbiór wyrazów różnych jest nieskończony, a więc ma pewien punkt skupienia s i wtedy istnieje ciąg częściowy zbieżny do s .

7. Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej. Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej t należącej do pewnego przedziału $I^1)$ przyporządkujemy pewną liczbę zespoloną $z(t)=x(t)+iy(t)$, to mówimy, że w danym przedziale określona jest *funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej* $z(t)$.

Granice i ciągłość funkcji $z(t)$ określamy podobnie jak dla funkcji rzeczywistych. Funkcja $z(t)$ ma w punkcie t_0 granicę równą $z_0=x_0+iy_0$, co zapisujemy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0 \quad \text{lub} \quad z(t) \rightarrow z_0,$$

jeżeli dla każdego ciągu liczb $\{t_n\}$ danego przedziału I , gdzie $t_n \neq t_0$ i $t_n \rightarrow t_0$, mamy $z(t_n) \rightarrow z_0$.

Funkcja $z(t)$ jest *ciągła* w punkcie $t_0 \in I$, jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z(t_0)$.

Można przy tym wyróżnić granicę oraz ciągłość lewostronną, prawostronną i zwykłą (obustronną).

Pochodną funkcji $z(t)$ w punkcie t_0 określamy wzorem

$$z'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right].$$

Z § 4 (str. 6) wynika bezpośrednio, że funkcja

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

ma granicę, jest ciągła lub różniczkowalna w punkcie t_0 wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje rzeczywiste $x(t)$ i $y(t)$ mają w tym punkcie granice, są ciągłe lub różniczkowalne. Mamy przy tym

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

8. Krzywe regularne. Kontury. Zbiór punktów określony równaniem

$$(1) \quad z = z(t),$$

gdzie $z(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t , ciągłą w pewnym przedziale $\alpha \leq t \leq \beta$ i różną od stałej, nazywamy *linią* lub *krzywą*

¹⁾ Np. dla $\alpha \leq t \leq \beta$ lub $\alpha < t < \beta$.

o początku $z(\alpha)$ i końcu $z(\beta)$. Kierunek wzrastającego parametru nazywamy *kierunkiem krzywej*. Gdy przedział jest otwarty, wówczas krzywa nie ma początku ani końca. Przyjmując $z=x+iy$ można równanie (1) zastąpić układem dwu równań $x=x(t)$ i $y=y(t)$.

W szczególności równanie

$$(2) \quad z=z_0+at \quad (-\infty < t < \infty),$$

gdzie $z_0=x_0+iy_0$ i $a=\lambda+i\mu$ są dowolnymi liczbami zespolonymi i $a \neq 0$, przedstawia prostą przechodzącą przez punkt z_0 . Prosta ta daje się przedstawić za pomocą dwóch równań rzeczywistych $x=x_0+\lambda t$ i $y=y_0+\mu t$, a zatem jej kąt nachylenia φ do osi x wyraża się wzorami

$$\cos \varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\lambda}{|a|}, \quad \sin \varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\mu}{|a|}.$$

Ze wzorów tych otrzymamy $a=\lambda+i\mu=|a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Zatem:

Kąt nachylenia prostej (2) do osi x jest równy argumentowi współczynnika a .

Niech funkcja $z(t)$ ma w punkcie t_0 pochodną $z'(t_0) \neq 0$. Równanie stycznej przecinającej krzywą (1) w punktach $z(t_0)$ i $z(t_1)$ ma postać

$$z=z(t_0) + \frac{z(t_1)-z(t_0)}{t_1-t_0} t.$$

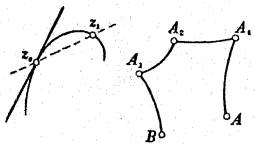
Gdy $t \rightarrow t_0$, wówczas styczna zdąża do prostej (rys. 8) o równaniu

$$(3) \quad z=z(t_0)+z'(t_0)t.$$

Jest to równanie stycznej do krzywej (1) w punkcie $z(t_0)$. Styczna do krzywej (1) w punkcie $z(t_0)$ tworzy więc z osią x kąt $\varphi = \arg z'(t_0)$.

Krzywą (1), gdzie $z(t)$ jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, \beta]$, nazywamy 1° *łukiem zwykłym*, jeżeli nie ma punktów wielokrotnych, tj. $z(t_1) \neq z(t_2)$, gdy $t_1 \neq t_2$; 2° *łukiem regularnym*, jeżeli nie ma punktów wielokrotnych i w przedziale domkniętym $[a, \beta]$ istnieje ciągła pochodna $z'(t)$, wszędzie różna od zera.

Jeżeli przedział $[a, \beta]$ daje się podzielić na skończoną ilość takich przedziałów $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{p-1}, \beta]$, gdzie $a < a_1 < \dots < a_{p-1} < \beta$, że w każdym z nich linia (1) jest łukiem regularnym, to linię (1) nazywamy *krzywą regularną* o wierzchołkach $z(a_1), z(a_2), \dots, z(a_{p-1})$. Krzywa regularna ma więc wszędzie styczną prócz swych wierzchołków (punkty A_1, A_2, A_3 na rys. 8); w wierzchołkach styczna może nie istnieć, istnieje natomiast styczna prawostronna i lewostronna. Np. każda linia wieloboczna jest krzywą regularną.

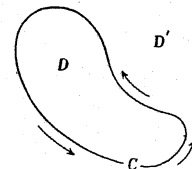


Rys. 8.

Linię (1) nazywamy *krzywą zamkniętą*, gdy $z(\alpha)=z(\beta)$. Jeżeli ponadto mamy $z(t_1) \neq z(t_2)$ dla $t_1 \neq t_2$, to krzywa zamknięta nie ma punktów wielokrotnych i nosi nazwę *krzywej Jordana*. Krzywą taką jest np. okrąg $|z-z_0|=r$, dający się przedstawić równaniem parametrycznym

$$(4) \quad z=z_0+r(\cos t + i \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Każda krzywa Jordana dzieli, jak wiadomo, płaszczyznę na dwie części: *wnętrze D* i *zewnątrze D'* (rys. 9). Mówimy, że krzywa Jordana jest *skierowana dodatnio* (względem swego wnętrza), jeżeli w czasie obiegu po krzywej w kierunku odpowiadającym wzrastającemu parametrowi mamy wewnątrz D po stronie lewej (kierunek strzałki na rys. 9). Np. okrąg (4) jest skierowany dodatnio. Wiadomo, że wewnątrz krzywej Jordana położonej w obszarze jednopójnym należy do tego obszaru.

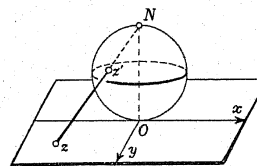


Rys. 9.

Krzywą regularną Jordana, skierowaną dodatnio będziemy nazywali krótko *konturem* (krzywa C na rys. 9).

9. Punkt w nieskończoności. Oznaczmy przez Q powierzchnię kuli o dowolnym promieniu, styczną do płaszczyzny liczbowej w punkcie $z=0$. Nazwijmy biegunem północnym punkt N kuli przeciwny punktowi $z=0$ (rys. 10) i przyporządkujmy każdemu punktowi z na płaszczyźnie ten punkt $z' \neq N$ na kuli, w którym prosta łącząca punkty z i N przecina kulę Q .

Punktom na płaszczyźnie odpowiadają wówczas punkty na kuli różne od N . Otrzymane w ten sposób odwzorowanie płaszczyzny na kulę Q bez punktu N jest wzajemnie jednoznaczne i nosi nazwę *rzutu stereograficznego* płaszczyzny na kulę. Równoleżnikom na kuli odpowiadają na płaszczyźnie koła współśrodkowe o środku $z=0$, południkom odpowiadają proste przechodzące przez punkt $z=0$.



Rys. 10.

Jedynie biegunowi N na kuli nie odpowiada na płaszczyźnie żaden punkt. Gdy punkt z' na kuli zbliża się do bieguna N , wówczas jego obraz z na płaszczyźnie oddala się w nieskończoność.

Okazało się rzeczą praktyczną dla teorii funkcji analitycznych uzupełnić płaszczyznę liczbową jednym nowym punktem, który przy rzucie stereograficznym przyporządkowujemy biegunowi N na kuli. Punkt ten oznaczamy przez ∞ i nazywamy *punktem w nieskończoności*. Mówimy

przy tym, że gdy punkt z' na kuli dąży do N , to jego obraz z na płaszczyźnie dąży do punktu ∞ .

Otoczeniem punktu ∞ nazywamy zewnątrz dowolnego koła, np. $|z| > R$. O ciągu liczbowym $\{z_n\}$ mówimy, że dąży do nieskończoności, co oznaczamy

$$z_n \rightarrow \infty,$$

gdy $|z_n| \rightarrow \infty$, czyli gdy dla każdego $R > 0$ prawie wszystkie wyrazy z_n spełniają nierówność $|z_n| > R$. Jeżeli nierówność tę spełnia dla każdego $R > 0$ nieskończenie wiele wyrazów (niekoniecznie prawie wszystkie), to mówimy, że ∞ jest punktem skupienia ciągu $\{z_n\}$.

PRZYKŁAD 1. Ciąg $a_n = 1 + ni$ dąży do ∞ .

PRZYKŁAD 2. Ciąg $b_n = \sqrt{n} + i/n$ dąży również do ∞ .

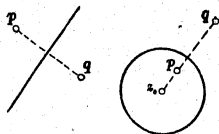
PRZYKŁAD 3. Ciąg $c_n = 2 + [1 + (-1)^n]ni$ nie dąży do ∞ , bo jego wyrazy nieparzyste są stale równe 2. Dla niego ∞ jest punktem skupienia.

Płaszczyznę liczbową uzupełnioną punktem ∞ nazywamy *plaszczyną domkniętą*¹⁾. Płaszczyznę bez punktu ∞ nazywamy *plaszczyną otwartą* lub krótko „plaszczyną”.

Obszar nieograniczony może mieć punkt ∞ wewnątrz lub na brzegu. Np. zewnątrz koła $|z| > R$ na płaszczyźnie domkniętej ma punkt ∞ wewnątrz, obszar zaś $R < |z| < \infty$ ma punkt ∞ na brzegu.

Spójność obszaru nieograniczonego określamy tak samo jak spójność obszaru ograniczonego, należy jedynie rozstrzygnąć, czy punkt ∞ jest punktem wewnętrznym obszaru, czy brzegowym. Np. zewnątrz koła jest obszarem jednospójnym, gdy punkt ∞ zaliczymy do obszaru, a jest obszarem dwuspójnym, gdy punkt ∞ nie należy do obszaru (bo wtedy brzeg składa się z okręgu i z punktu odosobnionego ∞).

10. Symetria względem okręgu lub prostej. Dwa punkty p i q są *symetryczne względem prostej*, gdy są jednakowo odległe od każdego punktu prostej (rys. 11). Punkty p i q nazywamy *symetrycznymi względem okręgu* $|z - z_0| = r$, gdy są różne od z_0 , leżą na jednej półprostej wychodzącej ze środka z_0 , tj. $\arg(p - z_0) = \arg(q - z_0)$, i gdy iloczyn ich odległości od środka równa się kwadratowi promienia, tj. $|p - z_0| \cdot |q - z_0| = r^2$ (rys. 11).



Rys. 11.

¹⁾ W przeciwieństwie do osi liczbowej nie wyróżniamy na płaszczyźnie domkniętej dwóch punktów w nieskończoności $+\infty$ i $-\infty$. Na płaszczyźnie domkniętej istnieje tylko jeden punkt ∞ . Zgodnie z tym ciąg $\{(-2)^n\}$ dąży do ∞ (na osi liczbowej ciąg ten jest wahający).

Niech będą dane dwa różne punkty p i q oraz liczba $\lambda > 0$. Gdy $\lambda = 1$, wówczas równanie

$$(5) \quad \left| \frac{z-p}{z-q} \right| = \lambda$$

przedstawia prostą, względem której punkty p i q są symetryczne. Wykażemy, że:

Gdy $\lambda \neq 1$, to równanie (5) przedstawia okrąg $|z - z_0| = r$, względem którego punkty p i q są symetryczne. Środek i promień tego okręgu wyrażają się wzorami

$$(6) \quad z_0 = \frac{p - \lambda^2 q}{1 - \lambda^2}, \quad r = \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|} |p - q|.$$

Istotnie, mnożąc obie strony równania (5) przez $|z - q|$ i podnosząc do kwadratu, otrzymamy (zob. przykład 7, str. 11)

$$|z|^2 + |p|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{p}z = \lambda^2(|z|^2 + |q|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{q}z),$$

skąd

$$|z|^2 - \frac{2\operatorname{Re}(\bar{p} - \lambda^2 \bar{q})z}{1 - \lambda^2} = \frac{-|p|^2 + \lambda^2 |q|^2}{1 - \lambda^2},$$

czyli po przekształceniu

$$\left| z - \frac{p - \lambda^2 q}{1 - \lambda^2} \right|^2 = \frac{\lambda^2 |p - q|^2}{(1 - \lambda^2)^2};$$

równanie (5) przedstawia więc okrąg. Z wzorów (6) otrzymamy

$$p - z_0 = \lambda^2 (q - z_0) \quad \text{ i } \quad |p - z_0| \cdot |q - z_0| = r^2.$$

Z pierwszego z tych równań wnosimy, że $\arg(p - z_0) = \arg(q - z_0)$, a więc punkty p i q są symetryczne względem danego okręgu.

Na odwrót, każdą prostą i każdy okrąg można na nieskończenie wiele sposobów przedstawić za pomocą równania postaci (5), dobierając odpowiednio p , q i $\lambda > 0$ ¹⁾.

Proste nazywamy inaczej *okręgami niewłaściwymi*, albo okręgami przechodzącymi przez punkt w nieskończoności.

¹⁾ Dla okręgu $|z - z_0| = r$ wystarczy obrać punkt p dowolnie poza okręgiem i jego środkiem i przyjąć

$$q = z_0 + r^2 / (\bar{p} - z_0), \quad \lambda = |p - z_0| / r.$$

Dla każdego punktu $z = z_0 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ na danym okręgu zachodzi wówczas związek (5).

ĆWICZENIA.

1. Kiedy trzy różne punkty a, b i c leżą na jednej prostej?
2. Napisać warunek na to, aby proste $z = z_0 + at$ i $z = z'_0 + a't$, gdzie $-\infty < t < \infty$, były a) równoległe, b) prostopadłe.
3. Napisać równanie prostej postaci $z = z_0 + at$ a) przechodzącej przez punkty z_1 i z_2 , b) połowiącej odcinek łączący punkty z_1 i z_2 i do niego prostopadłej.
4. Jaką linię przedstawia równanie a) $Rz^2 = r$, b) $Iz^2 = r$, c) $|z^2 - 1| = r$, d) $|z+1| + |z-1| = r$, $r > 0$.
5. Wykazać, że gdy liczby z_1, z_2, z_3 i z_4 są różne, to leżą one na jednym okręgu lub prostej wtedy i tylko wtedy, gdy dwustosunek

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

ma wartość rzeczywistą.

[Wskazówka: Argument stosunku $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ jest kątem między wektorami $z_3 z_2$ i $z_3 z_1$].

6. Wykazać, że wszystkie punkty

$$z = \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \dots + \theta_n z_n,$$

gdzie liczby $z_1, z_2, \dots, z_n$ są stałe, a liczby $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ są liczbami zmiennymi, rzeczywistymi, nieujemnymi i spełniającymi warunek

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 1,$$

wypełniają najmniejszy obszar wypukły Δ_n , obejmujący punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$ (zbiór E jest wypukły, gdy wraz z dwoma dowolnymi punktami zawiera odcinek łączący te punkty).

7. Wykazać, że gdy liczba z spełnia równanie

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = 0,$$

to punkt z leży w najmniejszym obszarze wypukłym obejmującym punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$.

8. Wykazać, że z każdego ciągu $\{z_n\}$ można wyjąć ciąg częściowy, zbieżny do granicy skończonej lub do ∞ .

9. Wykazać, że dwa okręgi, z których jeden przechodzi przez dwa punkty symetryczne względem drugiego z okręgów, są ortogonalne.

ROZWIĄZANIA.

1. Gdy stosunek $(b-a)/(c-a)$ jest liczbą rzeczywistą. — 2. a) $\arg a' = \arg a + k\pi$, czyli a'/a jest liczbą rzeczywistą, b) $\arg a' = \arg a + (2k+1)\pi/2$, czyli a'/a jest liczbą urojoną. — 3. a) $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$, b) $z = (z_1 + z_2)/2 + (z_2 - z_1)it$. — 4. a) hiperbolę $x^2 - y^2 = r$, b) hiperbolę $2xy = r$, c) lemniskatę o ogniskach -1 i $+1$, d) elipsę o ogniskach -1 i $+1$, gdy $r > 2$. — 5. Kąty $\angle z_1 z_2 z_3$ i $\angle z_1 z_4 z_2$ albo są równe, gdy dwustosunek jest dodatni, albo ich suma równa się π , gdy dwustosunek jest ujemny; zastosować twierdzenie o kątach obwodowych w kole. — 6. Dla $n=2$ zbiór Δ_2 jest odcinkiem $z_1 z_2$; zakładając, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n=p$,

przejsć do przypadku $n=p+1$, korzystając z uwagi, że każdy punkt obszaru Δ_{p+1} leży na pewnym odcinku zz_{p+1} , gdzie $z \in \Delta_p$. — 7. Jeżeli $\sum 1/(z - z_k) = 0$, to

$$\sum \frac{1}{z - z_k} = \sum \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0.$$

Przyjmując

$$\frac{1}{|z - z_k|^2} = \lambda_k \quad \text{ i } \quad \frac{\lambda_k}{\sum \lambda_k} = \theta_k,$$

mamy $\sum \lambda_k (z - z_k) = 0$, skąd $z = \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \dots + \theta_n z_n$. Zastosować przykład poprzedni. — 8. Gdy ciąg jest ograniczony, zob. § 3; gdy nie jest ograniczony, wówczas dla każdej liczby naturalnej k istnieje taki wyraz z_{n_k} , że $|z_{n_k}| > k$, a więc $z_{n_k} \rightarrow \infty$. —

9. Sprawdzić, że gdy $|z - z_0| = r$ jest okręgiem (5), a okrąg $|z - z_1| = r_1$ przechodzi przez punkty p i q , to $|z_0 - z_1|^2 = r^2 + r_1^2$.

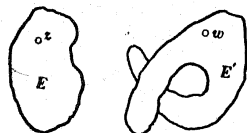
ROZDZIAŁ III

Funkcje zmiennej zespolonej

11. Funkcje ciągłe i odwzorowania zbiorów płaskich. Niech E będzie dowolnym zbiorem płaskim, np. obszarem. Jeżeli każdemu punktowi $z \in E$ przyporządkujemy pewną liczbę zespoloną

$$w = f(z),$$

to mówimy, że w zbiorze E została określona *funkcja zespolona* $f(z)$ *zmiennej zespolonej* z . Zbiór E nazywamy *polem* lub *obszarem istnienia* funkcji $f(z)$, zbiór E' złożony z wszystkich wartości w nazywamy *zbiorem wartości* funkcji $f(z)$ i oznaczamy przez $f(E)$.



Rys. 12.

Mówimy, że dana funkcja $f(z)$ *odwzorowuje* (przekształca) zbiór E na zbiór $E' = f(E)$. Na odwrót, każde odwzorowanie jednego zbioru płaskiego E na drugi zbiór E' (rys. 12) wyznacza pewną funkcję zespoloną zmiennej zespolonej, której polem jest E , a zbiorem wartości E' .

Funkcję $f(z)$ nazywamy 1° *jednokrotną*, gdy dla $z_1 \neq z_2$ mamy $f(z_1) \neq f(z_2)$; 2° *wielokrotną*, gdy nie jest jednokrotną¹⁾; 3° *ograniczoną*, gdy zbiór E' jest ograniczony.

PRZYKŁADY.

1. $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.
2. $g(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $h(z) = \bar{z} = x - iy$.

Polem tych trzech funkcji jest cała płaszczyzna. Druga z nich przyjmuje tylko wartości rzeczywiste. Trzecia funkcja jest jednokrotna, pierwsza i druga są wielokrotne.

Funkcję postaci $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ nazywamy *wielomianem n-go stopnia*, gdy $a_0 \neq 0$. Iloraz dwóch wielomianów nazywamy *funkcją wymierną*. Polem funkcji wymiernej jest cała płaszczyzna bez tych punktów, w których mianownik jest równy zeru.

¹⁾ Funkcję jednokrotną (*univalente, schlicht*) nazywamy inaczej *jednolistną*, a wielokrotną — *wielolistną*.

Nazwijmy *otoczeniem pierścieniowym punktu* z_0 dowolne koło o środku z_0 po odrzuceniu środka z_0 , tj. zbiór punktów z spełniających nierówność

$$0 < |z - z_0| < r \quad (r > 0).$$

Niech z_0 będzie punktem skupienia zbioru E , w którym jest określona funkcja $f(z)$. Mówimy, że funkcja $f(z)$ ma w punkcie z_0 *granice* równą liczbie g , co piszemy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = g \quad \text{lub} \quad f(z) \rightarrow g \quad \text{dla} \quad z \rightarrow z_0,$$

jeżeli jest spełniony jeden z dwóch następujących warunków:

I. *Dla każdego ciągu punktów $\{z_n\}$ zbioru E różnych od z_0 , jeżeli $z_n \rightarrow z_0$, to $f(z_n) \rightarrow g$.*

II. *Do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę $\delta > 0$, że dla wszystkich punktów zbioru E należących do otoczenia pierścieniowego $0 < |z - z_0| < \delta$ mamy*

$$|f(z) - g| < \varepsilon.$$

Te dwa określenia granicy są równoważne, podobnie jak w przypadku zmiennej rzeczywistej, i nie różnią się formalnie od określenia granicy funkcji zmiennej rzeczywistej. Wobec tego pozostają ważne znane twierdzenia o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji $f(z)$ i $g(z)$ określonych w tym samym zbiorze. Mianowicie:

Jeżeli dla $z \rightarrow z_0$ mamy $f(z) \rightarrow a$ i $g(z) \rightarrow b$, to w punkcie z_0 istnieją granice

$$f \pm g \rightarrow a \pm b, \quad f \cdot g \rightarrow a \cdot b, \quad \frac{f}{g} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Przy ilorazie zakładamy, że $b \neq 0$.

Funkcję $f(z)$ nazywamy 1° *ciągłą w punkcie* z_0 , gdy $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$; 2° *ciągłą w zbiorze*, gdy jest ciągła w każdym punkcie zbioru; 3° *jednostajnie ciągłą w zbiorze*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego dwóch punktów z_1 i z_2 danego zbioru, odległych o mniej niż δ , mamy $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Tą samą drogą, co dla funkcji zmiennej rzeczywistej, dowodzi się, że:

Funkcja $f(z)$ ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym jest w nim jednostajnie ciągła.

Mówimy, że funkcja $f(z)$ *dąży do ∞* , gdy $z \rightarrow z_0$, co piszemy $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, jeżeli dla każdego ciągu $\{z_n\}$ liczb należących do pola funkcji $f(z)$, różnych od z_0 i dążących do z_0 , mamy $f(z_n) \rightarrow \infty$. Analogicznie określamy granice

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = g, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

PRZYKŁAD 1. Funkcje $f(z) \equiv \text{const}$ i $f(z) \equiv z$ są oczywiście ciągłe w każdym punkcie. Wykonując na nich cztery działania można otrzymać wszystkie wielomiany i funkcje wymierne, a zatem z twierdzeń poprzednich o granicach wynika, że wielomiany i funkcje wymierne są ciągłe w swych obszarach istnienia.

PRZYKŁAD 2. $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z-2} = \infty$. **PRZYKŁAD 3.** $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n = \infty$ ($n=1, 2, \dots$).

Przyjmijmy $f(z) = u + iv$. Wartości u i v niech będą rzeczywiste; zależą one od zmiennej $z = x + iy$ lub — co na jedno wychodzi — od dwóch zmiennych rzeczywistych x oraz y , co zapisujemy

$$(1) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Funkcje u i v nazywamy odpowiednio *częścią rzeczywistą i częścią urojoną* funkcji $f(z)$; pole ich jest oczywiście to samo co pole E funkcji $f(z)$. Np. dla funkcji $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ mamy $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$; dla funkcji $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ mamy $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = 0$.

Wykażemy, że:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$, to obie funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) i na odwrót.

Dowód. Niech funkcja (1) będzie ciągła w punkcie z_0 . Wówczas dla każdego ciągu $z_n = x_n + iy_n \rightarrow z_0$ mamy $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$, czyli

$$(2) \quad u(x_n, y_n) + iv(x_n, y_n) \rightarrow u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0),$$

skąd

$$(3) \quad u(x_n, y_n) \rightarrow u(x_0, y_0) \quad \text{ i } \quad v(x_n, y_n) \rightarrow v(x_0, y_0).$$

Zatem funkcje u i v są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) .

Na odwrót, jeżeli są spełnione warunki (3), to jest spełniony warunek (2), czyli $f(z) \rightarrow f(z_0)$, a zatem funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie z_0 .

Niech funkcja $w = f(z)$ będzie jednokrotna i niech odwzorowuje zbiór E na zbiór E' . Wówczas odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Przyporządkujmy każdemu punktowi w w zbiorze E' ten punkt $z = F(w)$ zbioru E , dla którego $f(z) = w$. Otrzymamy nową funkcję $F(w)$, której polem jest zbiór E' ; nazywamy ją *funkcją odwrotną* względem $f(z)$. Oczywiście, funkcją odwrotną względem $F(w)$ jest funkcja $f(z)$, tzn.

$$(4) \quad F[f(z)] \equiv z.$$

PRZYKŁAD 1. Funkcja $w = az + b$, gdzie $a \neq 0$, nosi nazwę *funkcji liniowej* i jest jednokrotna na całej płaszczyźnie, bo gdy $az_1 + b = az_2 + b$, to $z_1 = z_2$. Przekształca ona całą płaszczyznę w siebie, przy czym: 1° gdy $a=1$, wówczas odwzorowanie to jest *przesunięciem*; 2° gdy $|a|=1$ i $b=0$,

wówczas odwzorowanie jest *obrotom* dookoła punktu $z=0$ o kąt $\varphi = \arg a$, bo wtedy punkt z i jego obraz mają te same moduły i zachodzi równość $\arg w = \arg z + \arg a$; 3° gdy a jest liczbą dodatnią i $b=0$, wówczas odwzorowanie jest *homotetią*, czyli *podobieństwem środkowym* o środku $z=0$ i o *stosunku podobieństwa* równym a .

W przypadku ogólnym odwzorowanie $w = az + b$ jest złożeniem podobieństwa, obrotu i przesunięcia.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $w = \bar{z}$ jest jednokrotna i wyznacza odwzorowanie całej płaszczyzny w siebie, zwane *symetrią* względem osi x .

PRZYKŁAD 3. Funkcja $w = z^2$ jest wielokrotna na całej płaszczyźnie, jest jednak jednokrotna w każdym obszarze, który z dwu punktów symetrycznych z i $-z$ zawiera co najwyżej jeden (np. w półpłaszczyźnie $\text{Im} z > 0$), bo gdy $z_1^2 = z_2^2$, to $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = 0$, lecz ponieważ $z_2 \neq -z_1$, więc $z_1 = z_2$.

12. Ciągi i szeregi funkcyjne. Ciąg $\{s_n(z)\}$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, którego wyrazami są funkcje określone we wspólnym zbiorze E , nazywamy *ciągami* względnie *szeregami funkcyjnymi*¹⁾.

Jeżeli ciąg $\{s_n(z)\}$ jest zbieżny w każdym punkcie z zbioru E , to jego granica $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = s(z)$ jest funkcją określoną w zbiorze E . Zbieżność ta jest *jednostajna*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik $N(\varepsilon)$, że w całym zbiorze E mamy $|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon$, gdy $n > N(\varepsilon)$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ nazywamy *zbieżnym* (*jednostajnie zbieżnym*) w zbiorze E , jeżeli ciąg $\{s_n(z) = \sum_{i=1}^n f_i(z)\}$ jest zbieżny (jednostajnie zbieżny) w zbiorze E . Granica $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)$ jest wówczas sumą danego szeregu.

Będziemy korzystali z trzech następujących *kryteriów jednostajnej zbieżności*.

KRYTERIUM CAUCHY'EGO. Ciąg $\{s_n(z)\}$ jest wtedy i tylko wtedy jednostajnie zbieżny w zbiorze E , jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik $N(\varepsilon)$, że w całym zbiorze E jest

$$|s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon \quad \text{dla } n \text{ i } m > N(\varepsilon).$$

KRYTERIUM WEIERSTRASSA. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze E , jeżeli jego wyrazy spełniają w zbiorze E nierówności $|f_n(z)| \leq A_n$, $n=1, 2, \dots$, gdzie liczby $A_1, A_2, \dots$ są wyrazami szeregu²⁾ zbieżnego $\sum_1 A_n$.

¹⁾ Zamiast $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ piszemy $\sum_1 f_n(z)$ lub krócej $\Sigma f_n(z)$.

²⁾ Szereg $\sum A_n$ nazywamy wówczas *majorantą* szeregu $\Sigma f_n(z)$.

KRYTERIUM DIRICHLETA. Szereg $\sum_1^{\infty} a_n f_n(z)$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze E , jeżeli współczynniki a_n są liczbami dodatnimi malejącymi stale do zera, a ciąg $s_n(z) = f_1(z) + \dots + f_n(z)$ jest jednostajnie ograniczony w zbiorze E ¹⁾.

Dowody tych twierdzeń są analogiczne do dowodów dla funkcji zmiennej rzeczywistej. W podobny też sposób dowodzi się, że:

Granica ciągu (suma szeregu) jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

PRZYKŁAD. Szereg $\sum_1^{\infty} z^n/n$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze K_ε , który otrzymamy wycinając z koła domkniętego $|z| \leq 1$ koło $|z-1| < \varepsilon$ o dowolnie małym promieniu $\varepsilon > 0$. Wynika to z kryterium Dirichleta, bo przyjmując $a_n = 1/n$ i $f_n(z) = z^n$, otrzymamy $a_n > a_{n+1}$, $a_n \rightarrow 0$ oraz

$$s_n(z) = z + z^2 + \dots + z^n = z \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

a więc w obszarze K_ε jest $|s_n(z)| < 2/\varepsilon$. Suma tego szeregu jest więc funkcją ciągłą w kole $|z| \leq 1$ po odrzuceniu punktu $z=1$.

13. Szeregi potęgowe. Szereg postaci

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots$ są dowolnymi liczbami nazywamy *szeregiem potęgowym o środku $z=0$* . Szereg ten jest zawsze zbieżny w swym środku; poza środkiem mogą istnieć punkty zbieżności lub nie. Wykażemy jednak, że:

Jeżeli szereg (5) jest zbieżny w pewnym punkcie $z_1 \neq 0$, to jest bezwzględnie zbieżny w kole $|z| < \rho$, gdzie $\rho = |z_1|$, oraz jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leq \theta \rho$, gdzie $0 < \theta < 1$; jeżeli jest rozbieżny w punkcie z_1 , to jest rozbieżny dla $|z| > \rho$.

Dowód. Niech szereg $\sum a_n z_1^n$ będzie zbieżny. Wówczas ciąg $\{a_n z_1^n\}$ dąży do zera, a więc istnieje taka liczba $M > 0$, że $|a_n z_1^n| < M$ dla wszystkich n . Zatem

$$(6) \quad |a_n z^n| < M \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \theta^n, \quad \text{gdy } |z| \leq \theta \rho.$$

Szereg geometryczny $\sum M \theta^n$ jest, jak wiadomo, zbieżny, gdy $0 < \theta < 1$, a więc zbieżność bezwzględna szeregu (5) w kole $|z| < \rho$ wynika z kryterium porównawczego (str. 9), a zbieżność jednostajna w kole $|z| \leq \theta \rho$ — z kryterium Weierstrassa.

¹⁾ Tj. istnieje taka liczba $M > 0$, że $|s_n(z)| \leq M$ dla wszystkich $z \in E$ i dla $n=1, 2, \dots$

Niech teraz szereg $\sum a_n z_1^n$ będzie rozbieżny. Gdyby szereg (5) był zbieżny w jakimś punkcie z_2 , gdzie $|z_2| > |z_1|$, to na mocy poprzedniej części dowodu byłby zbieżny w punkcie z_1 , wbrew założeniu. Twierdzenie jest więc dowiedzione.

W myśl tego twierdzenia, jeśli szereg (5) jest zbieżny w jakimś punkcie z_1 , to jest zbieżny w kole o środku 0, którego okrąg przechodzi przez dany punkt z_1 (rys. 13). Największe koło

$$(7) \quad |z| < r,$$

w którym szereg potęgowy (5) jest zbieżny, nazywamy *kołem zbieżności*, a jego promień — *promieniem zbieżności* tego szeregu¹⁾. Zewnątrz swego koła zbieżności szereg potęgowy jest oczywiście rozbieżny. Na okręgu koła zbieżności mogą istnieć punkty zbieżności i punkty rozbieżności. Np. szereg $\sum_1^{\infty} z^n/n$ na okręgu swego koła zbieżności jest w punkcie $z=-1$ zbieżny, a w punkcie $z=1$ rozbieżny.

Jeżeli szereg (5) jest zbieżny na całej płaszczyźnie, to mówimy, że jego promień zbieżności $r=\infty$, a gdy jest zbieżny tylko w punkcie $z=0$, wówczas piszemy $r=0$.

Każdy szereg postaci

$$(8) \quad \sum_1^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

nazywamy *szeregiem potęgowym o środku z_0* . Zastępując w nim $z-z_0$ przez z otrzymamy szereg (5), a zatem szereg (8) jest zbieżny wewnątrz, a rozbieżny zewnątrz pewnego koła $|z-z_0| < r$. Koło to nazywamy *kołem zbieżności szeregu (8)*.

Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą wewnątrz koła zbieżności, co wynika stąd, że wyrazy szeregu są funkcjami ciągłymi, a zbieżność jest jednostajna.

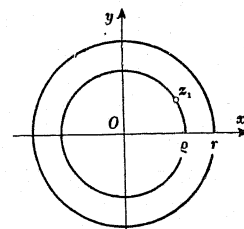
Promień zbieżności szeregu $\sum a_n z^n$ zależy oczywiście od współczynników a_n . Zależność tę wyznacza następujące

TWIERDZENIE CAUCHY-HADAMARDA. Promień zbieżności r szeregu potęgowego (5) wyraża się wzorem

$$(9) \quad r = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{gdzie } \lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Przyjmujemy przy tym $r=\infty$, gdy $\lambda=0$, oraz $r=0$, gdy $\lambda=\infty$.

¹⁾ Zakładamy, że istnieją punkty zbieżności różne od zera i punkty rozbieżności. Liczba r jest największą z takich liczb $\rho > 0$, że szereg (5) jest zbieżny w kole $|z| < \rho$.



Rys. 13.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\lambda \neq \infty$. Na mocy kryterium Cauchy'ego (str. 9) szereg $\sum a_n z^n$ jest bezwzględnie zbieżny dla tych z , dla których

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| = \lambda |z| < 1,$$

a rozbieżny dla $\lambda |z| > 1$. Wynika stąd wzór (9), bo jeżeli $\lambda \neq 0$, to szereg jest zbieżny dla $|z| < 1/\lambda$, a rozbieżny dla $|z| > 1/\lambda$, więc $r = 1/\lambda$. Gdy $\lambda = 0$, wówczas nierówność $\lambda |z| < 1$ jest spełniona na całej płaszczyźnie, a więc $r = \infty$.

W przypadku $\lambda = \infty$, niech z_0 będzie dowolnym punktem różnym od 0. Nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/|z_0|$ zachodzi wówczas dla nieskończenie wielu n , a więc ciąg $\{a_n z_0^n\}$ nie dąży do zera, a przez to szereg $\sum a_n z_0^n$ jest rozbieżny dla każdego $z_0 \neq 0$, skąd $r = 0$.

* TWIERDZENIE ABELA. Wiemy, że suma szeregu potęgowego

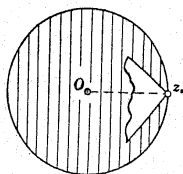
$$(10) \quad f(z) = \sum a_n z^n$$

jest funkcją ciągłą w każdym punkcie wewnętrznym koła zbieżności $|z| < r$ danego szeregu. Wykażemy za Abelem, że:

Jeżeli szereg (10) jest zbieżny w punkcie brzegowym $z = z_0$ swego koła zbieżności $|z| < r$, to istnieje granica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n,$$

gdy z dąży do z_0 po dowolnej drodze zawartej między dwiema cięciwami danego koła, wychodzącymi z punktu z_0 (rys. 14)¹⁾.



Rys. 14.

Dowód. Podstawmy w szeregu (10) $z_0 z$ w miejsce z ; otrzymamy szereg $\sum a_n z_0^n \cdot z^n$, zbieżny w punkcie $z = 1$ i mający promień zbieżności 1. Możemy więc założyć, że $r = 1$ i $z_0 = 1$, czyli że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Oznaczmy $\sum a_n = s$ oraz $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Dla $|z| < 1$ mamy

$$\begin{aligned} \sum a_n z^n &= s_0 + (s_1 - s_0)z + (s_2 - s_1)z^2 + \dots = \\ &= s_0(1-z) + s_1(z-z^2) + s_2(z^2-z^3) + \dots \end{aligned}$$

Wyciągając $1-z$ przed nawias otrzymamy dla $|z| < 1$

$$f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.$$

Z drugiej strony $1 = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, a więc $s = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$. Zatem

¹⁾ Można założyć, że promień Oz_0 przepoławia kąt między danymi cięciwami, jak na rys. 14.

$$(11) \quad f(z) - s = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) z^n = (1-z) \sum_{n=0}^m + (1-z) \sum_{n=m+1}^{\infty}.$$

Dobierzmy liczbę m do dowolnie obranych liczb $\varepsilon > 0$ i $K > 0$ tak, żeby dla $n > m$ było $|s_n - s| < \varepsilon/2K$. Jest to możliwe, bo $s_n \rightarrow s$, a zatem ostatni wyraz we wzorze (11) spełnia dla $|z| < 1$ nierówność

$$\left| (1-z) \sum_{n=m+1}^{\infty} \right| \leq |1-z| \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{n=m+1}^{\infty} |z|^n = \frac{\varepsilon}{2K} \frac{|1-z|}{1-|z|} |z|^{m+1}.$$

Założmy teraz, że obok warunku $|z| < 1$ zmienna z spełnia nierówność

$$(12) \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} < K,$$

$$\text{skąd} \quad |z|^{m+1} < 1 \quad \text{oraz} \quad \left| (1-z) \sum_{n=m+1}^{\infty} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

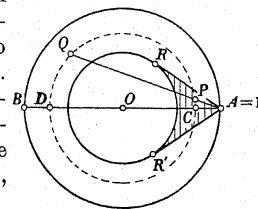
Moduł przedostatniego wyrazu we wzorze (11) jest również $< \varepsilon/2$, gdy tylko z jest dostatecznie bliskie 1, np. gdy $|1-z| < \delta$, bo dla $|z| < 1$ moduł sumy $\sum_{n=0}^m (s_n - s) z^n$ jest nie większy od stałej $\sum_{n=0}^m |s_n - s|$. Zatem, gdy z spełnia nierówność (12) i należy równocześnie do koła $|z| < 1$ i do koła $|1-z| < \delta$, gdzie δ zależy od ε , wówczas

$$|f(z) - s| \leq \left| (1-z) \sum_{n=0}^m \right| + \left| (1-z) \sum_{n=m+1}^{\infty} \right| < \varepsilon.$$

Wystarczy teraz wykazać, że gdy z dąży do 1 pozostając między dwiema cięciwami (AR i AR' na rys. 15), to istnieje taka liczba $K > 0$, że zachodzi nierówność (12). W tym celu wykreślimy okrąg o środku O styczny do obu cięciw i oznaczmy przez R i R' punkty styczności. Niech $z = P$ znajduje się zewnątrz tego okręgu w obszarze ARR' , gdzie $A = 1$ (rys. 15). Z punktu O zatoczmy nowy okrąg przechodzący przez punkt P i z punktu A wykreślimy dwie sieczne ACD i APQ przechodzące przez punkty O i P . Wówczas $AP = |1-z|$, $AC = 1 - |z|$ oraz $AP \cdot AQ = AC \cdot AD$, skąd

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{AD}{AQ} < \frac{2}{AR},$$

bo $AD < 2$ i $AQ > AR$. Gdy więc punkt z leży między cięciwami w obszarze ARR' , to spełnia nierówność (12), gdzie $K = 2/AR$.*



Rys. 15.

14. Funkcje e^z , $\sin z$, $\cos z$. Obok wielomianów i funkcji wymierzalnych do najprostszych funkcji zmiennej zespolonej należy funkcja wykładnicza e^z określona szeregiem potęgowym

$$(13) \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zbieżnym na całej płaszczyźnie. Na mocy wzoru (25), str. 11, spełnia ona dla każdego dwóch liczb zespolonych a i b związek

$$(14) \quad e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

Dla wartości rzeczywistych z jest ona identyczna ze znaną funkcją zmiennej rzeczywistej e^x .

Funkcja e^z nie przyjmuje nigdzie wartości 0.

Gdyby bowiem dla pewnej wartości $z=a$ było $e^a=0$, to iloczyn $e^a \cdot e^{-a}$ miałby wartość 0. Lecz na mocy (14) $e^a \cdot e^{-a} = e^0 = 1$, z czego wynikałoby równość $0=1$. Zatem $e^a \neq 0$.

Funkcje trygonometryczne $\sin z$ i $\cos z$ określamy dla wszystkich wartości zespolonych z za pomocą szeregów potęgowych

$$(15) \quad \begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}. \end{aligned}$$

Wzorów tych wynika natychmiast, że $\sin z$ jest funkcją nieparzystą, a $\cos z$ funkcją parzystą, tzn. $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$.

Między funkcjami e^z , $\sin z$ i $\cos z$ zachodzą ważne związki

$$(16) \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

W myśl wzoru (13) mamy bowiem

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{2\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{2\nu+1} z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

z czego wynika pierwszy z wzorów (16), bo $i^{2\nu} = (-1)^{\nu}$. Drugi z wzorów (16) otrzymamy zastępując w pierwszym z przez $-z$. Dodając i odejmując równania (16) otrzymujemy związki

$$(17) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

zwane wzorami Eulera, a z tych ostatnich — związek $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, znany dla rzeczywistych wartości z .

Wykażemy jeszcze, że:

$$(18) \quad e^z = 1 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } z = 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Istotnie, stosując (14) i (16) otrzymamy

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

a więc równość $e^z = 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $e^x \cos y = 1$ oraz $e^x \sin y = 0$. Stąd wynika $\sin y = 0$, bo $e^x > 0$, a zatem $y = n\pi$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Gdy n jest liczbą nieparzystą, wówczas $\cos y = \cos n\pi$ jest liczbą ujemną, aby więc było $e^x \cos y = 1$, musi być n liczbą parzystą; a zatem $y = 2k\pi$ oraz $e^z = 1$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Funkcja e^z zmiennej rzeczywistej x przyjmuje, jak wiemy, wartość 1 tylko dla $x = 0$; zatem

$$z = x + iy = 2k\pi i,$$

czego należało dowieść.

Z twierdzenia tego wynika, że

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

Z drugiej strony, jeżeli $e^z = e^z$, to $e^{z-z} = 1$, a więc $z' - z = 2k\pi i$, czyli $z' = z + 2k\pi i$. Zatem:

Funkcja e^z jest okresowa; każdy jej okres jest wielokrotnością liczby $2\pi i$. Na mocy (17) funkcje $\sin z$ i $\cos z$ są też okresowe; każdy ich okres jest wielokrotnością liczby 2π .

Funkcje $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ określamy, podobnie jak dla wartości rzeczywistych z , wzorami: $\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z$, $\operatorname{ctg} z = \cos z / \sin z$.

Uwaga. Wiemy, że każdej liczbie zespolonej a można nadać postać $|a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi = \arg a$. Zatem, na mocy pierwszego z wzorów (16), mamy

$$(19) \quad a = |a|e^{i\varphi}, \quad \text{gdzie } \varphi = \arg a.$$

15. Logarytm i potęga. Niech a będzie dowolną liczbą zespoloną. Każdą liczbę zespoloną z , spełniającą równanie $e^z = a$, nazywamy *logarytmem* liczby a i oznaczamy przez $\log a$.

Logarytm liczby 0 nie istnieje, bo równanie $e^z = 0$ nie ma rozwiązań (str. 30). Gdy $a \neq 0$, wówczas równanie $e^z = a$, czyli $e^z \cdot e^{iy} = |a|e^{i \arg a}$, ma nieskończenie wiele rozwiązań. Istotnie, jest ono spełnione, gdy

$$e^z = |a| \quad \text{oraz} \quad y = \arg a.$$

Wiemy, że istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełniająca równanie $e^x = |a|$. Oznaczmy ją przez $\operatorname{Log} |a|$; wówczas liczba zespolona $z = \operatorname{Log} |a| + i \arg a$ spełnia równanie $e^z = a$. Zatem, zgodnie z określeniem logarytmu,

$$(20) \quad \log a = \operatorname{Log} |a| + i \arg a.$$

Argument liczby $a \neq 0$ ma, jak wiemy, nieskończenie wiele wartości różniących się o całkowite wielokrotności liczby 2π , a zatem:

Każda liczba $a \neq 0$ ma nieskończenie wiele logarytmów wyrażonych wzorem (20). Każde dwa logarytmy tej samej liczby różnią się o całkowitą wielokrotność liczby $2\pi i$.

Tę spośród liczb (20), w której $\arg a$ jest argumentem głównym liczby a , nazywamy *logarytmem głównym* i oznaczamy przez $\text{Log } a$, tj.

$$(21) \quad \text{Log } a = \text{Log } |a| + i \text{Arg } a \quad (-\pi < \text{Arg } a \leq \pi).$$

Dowolna liczba $a \neq 0$ ma dokładnie jeden logarytm główny; każdy inny logarytm tej liczby ma postać $\log a = \text{Log } a + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

PRZYKŁAD 1. $\log 1 = \text{Log } 1 + i \arg 1 = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

PRZYKŁAD 2. $\log i = \text{Log } i + i \arg i = (2k+1/2)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Niech a i b będą dowolnymi liczbami zespolonymi, byle by było $a \neq 0$. Przez a^b oznaczamy każdą liczbę zespoloną określoną wzorem

$$(22) \quad a^b = e^{b \log a} = e^{b(\text{Log } a + 2k\pi i)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

i nazywamy ją *potęgą* o podstawie a i wykładniku b . Liczbę $e^{b \text{Log } a}$ nazywamy *wartością główną potęgi* a^b .

Potęga (22) ma na ogół nieskończenie wiele wartości, różniących się czynnikami $e^{b \cdot 2k\pi i}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ Jedynie wtedy, gdy b jest liczbą całkowitą, potęga ma dokładnie jedną wartość, bo wówczas $e^{b \cdot 2k\pi i} = 1$. Jeżeli b jest liczbą wymierną postaci m/n , to potęga (22) ma dokładnie n różnych wartości, odpowiadających liczbom $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; gdy zaś b jest liczbą rzeczywistą niewymierną lub liczbą nieracjonalną, wówczas potęga (22) ma nieskończenie wiele wartości różnych.

W przypadku $b = 1/n$ mamy $(e^{b \log a})^n = e^{\log a} = a$. Wtedy powyższe określenie potęgi $a^{1/n}$ jest identyczne z określeniem pierwiastka $\sqrt[n]{a}$ (str. 4), a zatem $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

PRZYKŁAD. Ponieważ $i^i = e^{i \log i}$, więc, na mocy poprzedniego przykładu, mamy $i^i = e^{-(2k+1/2)\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

16. Funkcje $\log z$ i z^μ . Niech E będzie dowolnym zbiorem spójnym na płaszczyźnie (np. obszarem) nie zawierającym punktu $z = 0$. Każdą funkcję $l(z)$ określoną na zbiorze E , ciągłą i spełniającą dla wszystkich $z \in E$ warunek $e^{l(z)} = z$ (o ile taka funkcja istnieje) nazywamy *gałęzią (jednoznaczłą) logarytmu zmiennej z* i oznaczamy przez $\log z$. Mamy więc

$$(23) \quad e^{\log z} = z \quad \text{dla każdego } z \in E.$$

Zobaczymy później, że nie w każdym zbiorze spójnym E istnieje jednoznaczna gałąź logarytmu¹⁾. Jeżeli jednak istnieje jedna taka funkcja $l(z)$, to istnieje ich nieskończenie wiele, bo wówczas każda funkcja $l_k(z)$ postaci

$$l_k(z) = l(z) + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

jest też jednoznaczną gałęzią logarytmu²⁾, jest to bowiem funkcja ciągła i spełnia warunek

$$e^{l_k(z)} = e^{l(z)} e^{2k\pi i} = e^{l(z)} = z.$$

Z warunku (23) wnosimy, że $\log z$ jest funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej e^w , rozważanej w zbiorze wszystkich wartości $w = \log z$, gdzie $z \in E$.

Niech E będzie dowolnym zbiorem spójnym, w którym istnieje jednoznaczna gałąź logarytmu, i niech μ będzie dowolną liczbą zespoloną. Każdą funkcję ciągłą, określoną na zbiorze E wzorem

$$(24) \quad z^\mu = e^{\mu \log z},$$

nazywamy *jednoznaczną gałęzią potęgi* o wykładniku μ i oznaczamy przez z^μ ; potęgę $z^{1/n}$ oznaczamy też przez $\sqrt[n]{z}$ i nazywamy *jednoznaczną gałęzią n -go pierwiastka zmiennej z* ³⁾.

ĆWICZENIA.

1. W których punktach płaszczyzny funkcja $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ przyjmuje wartości a) rzeczywiste, b) urojone? Na jaką krzywą przekształca ona okrąg $|z| = r$?

2. Jeśli r_1 i r_2 są promieniami zbieżności szeregów $\sum a_n z^n$ i $\sum b_n z^n$, to jaki jest promień zbieżności r szeregu $\sum (a_n + b_n) z^n$?

3. Znaleźć promień zbieżności szeregu

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n,$$

$$b) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \cdot \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

(szereg drugi nosi nazwę szeregu *hipergeometrycznego*).

¹⁾ Nie istnieje np. w pierścieniu $r < |z| < R$, ani w żadnym zbiorze zawierającym pewien okrąg $|z| = \rho$, bo jeżeli $\log z = \text{Log } |z| + i \arg z$ zmienia się w sposób ciągły, gdy z opisyje raz cały okrąg $|z| = |z_0|$ wychodząc z punktu z_0 , to $\arg z$ wzrasta o 2π , więc $\log z$ wzrasta o $2\pi i$ i nie dąży do wartości wyjściowej $\log z_0$, choć $z \rightarrow z_0$. Natomiast istnieje jednoznaczna gałąź $\log z$ w każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym punktu 0.

²⁾ Na odwrót, można dowieść, że każde dwie jednoznaczne gałęzie logarytmu różnią się o stałą postaci $2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

³⁾ Z określeń tych wynika, że jeżeli funkcje $\log z$ i $\sqrt[n]{z}$ istnieją w pewnym obszarze, to są one wyznaczone dopiero wtedy, gdy ustalimy ich wartość w jednym punkcie danego obszaru.

4. Dowiedzieć, że a) funkcja e^z jest w pasie $-\pi < \text{Im} z < \pi$ jednokrotna i jej wartości pokrywają całą płaszczyznę bez półośi $\text{Re} z \leq 0$, b) funkcja $z/(1-z)^2$ jest jednokrotna w kole $|z| < 1$.

5. Znaleźć wszystkie pierwiastki równania a) $\sin z = 0$, b) $\cos z = 0$.

6. Udowodnić dla wartości zespolonych a i b związki:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

7. Wykazać, że równania $\sin w = z$ i $\cos w = z$ mają dla każdej wartości z nieskończenie wiele rozwiązań w i w' i wyrazić te rozwiązania za pomocą logarytmu stosując wzory Eulera.

8. Wykazać, że równania $\text{tg} w = z$ i $\text{ctg} w = z$ mają dla każdej wartości z różnej od $\pm i$ nieskończenie wiele rozwiązań w i w' i wyrazić te rozwiązania za pomocą logarytmu.

9. Wykazać, że funkcja $f(z)$ określona w kole $|z| \leq r$ przez szereg $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest jednokrotna, gdy $|a_1| > \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$.

[Wskazówka: Rozważyć równanie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) = 0$, gdzie z_1 i z_2 są punktami koła $|z| \leq r$].

10. Obliczyć a) $\log(1-i)$, b) 1^{a+ib} .

11. Wykazać, że wszystkie wartości potęgi a^{a+ib} , $a \neq 0$, a) są wtedy i tylko wtedy rzeczywiste, gdy suma $\beta \text{Log} a + a \text{Arg} a$ jest wielokrotnością liczby π i gdy $2a$ jest liczbą całkowitą, b) mają równe moduły, gdy $\beta = 0$.

12. Wykazać, że gdy w pewnym obszarze istnieje jedna gałąź jednoznaczna pierwiastka $\sqrt[n]{z}$, to istnieje dokładnie n takich gałęzi; czym się one różnią?

13. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nazywamy nadzbieżnym, jeżeli pewien ciąg częściowy $\{s_{n_k}(z)\}$ ciągu sum cząstkowych szeregu jest zbieżny w pewnych punktach zewnątrz koła zbieżności szeregu. Wykazać, że szereg potęgowy otrzymany z szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n [z(1-z)]^{4^n}$ przez opuszczenie nawiasów, gdzie $1/c_n$ jest największym modułem współczynników wielomianu $w_n(z) = [z(1-z)]^{4^n}$, ma koło zbieżności $|z| < 1$ i że jest on nadzbieżny (przykład A. Ostrowskiego).

14. Szeregi postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, gdzie liczby a_n są dowolne, a liczby λ_n są rzeczywiste i spełniają warunek $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, nazywamy szeregami Dirichleta¹⁾. Wykazać, że jeżeli szereg Dirichleta jest bezwzględnie zbieżny w punkcie $z_0 = \alpha_0 + i\gamma_0$, to jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w półpłaszczyźnie $\text{Re} z \geq \alpha_0$.

ROZWIĄZANIA.

1. a) Na okręgu $|z| = 1$ i na osi rzeczywistej, b) na osi urojonej bez punktów i , $-i$. Gdy $r \neq 1$, na elipsę o półosiach $\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ i $\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$ i ogniskach 1

¹⁾ Szereg Dirichleta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ jest uogólnieniem szeregu potęgowego, bo jeśli przyjmiemy $\lambda_n = n$ i zastąpimy e^{-z} przez z , to otrzymamy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

i -1 ; gdy $r=1$, na odcinek $[-1, 1]$. — 2. $r = \min(r_1, r_2)$, gdy $r_1 \neq r_2$; gdy $r_1 = r_2$, wówczas r może być dowolną liczbą niemniejszą od r_1 . — 3. a) $r=e$, b) $r=1$. — 4. a) Gdy x przebiega oś rzeczywistą od $-\infty$ do ∞ , a y jest stałe, wówczas $e^{e^{x+iy}} = e^{e^x(\cos y + i \sin y)}$ przebiega półprostą p wychodzącą z punktu 0 i nachyloną do osi x pod kątem y ; gdy następnie y przebiega przedział $(-\pi, \pi)$, wówczas półprosta p obraca się wokół punktu 0 i zatacza całą płaszczyznę bez półośi rzeczywistej ujemnej, b) sprawdzić, że gdy z_1 i z_2 leżą w kole $|z| < 1$, to $z_1/(1-z_1)^2 = z_2/(1-z_2)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 = z_2$. — 5. Stosując wzory (17) i (18) otrzymamy a) $z = k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, b) $z = (k+1/2)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. — 6. Oprzeć się na wzorach Eulera. — 7. $w = -i \log(iz \mp \sqrt{1-z^2}) = \pi/2 + i \log(z \pm \sqrt{z^2-1})$, $w' = -i \log(z \pm \sqrt{z^2-1})$. — 8. $w = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}$, $w' = \frac{1}{2i} \log \frac{z-i}{z+i}$; istnieje nieskończenie wiele rozwiązań, bo logarytm ma nieskończenie wiele wartości. — 9. Gdyby było $f(z_1) = f(z_2)$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) = 0 \quad \text{dla } z_1 \neq z_2,$$

to dzieląc przez $z_1 - z_2$ otrzymalibyśmy

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n f_{n-1} = 0, \quad \text{gdzie } f_n = z_1^n + z_1^{n-1} z_2 + \dots + z_2^n,$$

skąd $|f_{n-1}| \leq n r^{n-1}$. Zatem

$$|a_1| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n f_{n-1} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$$

wbrew założeniu. — 10. a) $\log(1-i) = \text{Log} \sqrt{2} + (2k-1/4)\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, b) $e^{2k\pi(-\beta+ia)} = e^{2k\pi i \alpha}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. — 11. W myśl (20) i (22) mamy $a^{a+ib} = e^w$, gdzie $w = a \text{Log} |a| - \beta \text{Arg} a + i(\beta \text{Log} |a| + a \text{Arg} a)$. — 12. Gdy istnieje gałąź $g_0(z) = e^{(1/n) \log z}$, to każda inna gałąź ma postać

$$g_k(z) = e^{(1/n)(\log z + 2k\pi i)} = e^{2k\pi i/n} g_0(z),$$

gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Wśród nich istnieje dokładnie n różnych gałęzi, np. $g_0(z), \dots, g_{n-1}(z)$; stosunek dwóch gałęzi jest stały i równa się całkowitej potędze liczby $e^{2\pi i/n}$. 13. Moduły współczynników otrzymanego szeregu $\sum a_n z^n$ są niewiększe od 1, więc $|z| < 1$ jest kołem zbieżności. Ciąg częściowy $\{s_{2^n}(z)\}$ jest zbieżny również w kole $|1-z| < 1$, bo wielomiany $w_n(z)$ nie ulegają zmianie, gdy zastąpimy z przez $1-z$. — 14. Dla $\text{Re} z \geq \alpha_0$ mamy $|a_n e^{-\lambda_n z}| \leq |a_n| e^{-\lambda_n \alpha_0}$. Zastosować kryterium Weierstrassa (str. 25).

W ten sam sposób jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej dowodzi się następujących reguł różniczkowania:

I. Jeżeli funkcje $f(z)$ i $g(z)$ mają w pewnym punkcie pochodne, to istnieją w tym punkcie pochodne sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu, i wyrażają się wzorami

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Przy ilorazie zakładamy, że $g \neq 0$.

II. Jeżeli funkcja $g(z)$ ma pochodną w punkcie z , a funkcja $f(w)$ ma pochodną w punkcie $w = g(z)$, to funkcja złożona $f[g(z)]$ ma w punkcie z pochodną wyrażoną wzorem

$$\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z).$$

III. Jeżeli funkcja $w = f(z)$ w pewnym otoczeniu punktu z_0 jest ciągła i jednokrotna, jeśli ma pochodną $f'(z_0) \neq 0$ i przekształca otoczenie punktu z_0 w otoczenie¹⁾ punktu $w_0 = f(z_0)$, to funkcja $F(w)$, odwrotna względem $f(z)$, ma w punkcie w_0 pochodną wyrażoną przez wzór²⁾

$$F'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

PRZYKŁAD. Stosując wzór (2) i regułę I otrzymamy

$$(z^3 - 2z + 1)' = 3z^2 - 2, \quad \left(\frac{z^2}{z-1}\right)' = \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}.$$

Ogólnie, wielomiany i funkcje wymierne są w swych obszarach istnienia różniczkowalne.

18. Równania Cauchy-Riemanna. Zbadamy, jak zachowuje się część rzeczywista i część urojona funkcji

$$(3) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

w punkcie $z = x + iy$, w którym istnieje pochodna $f'(z)$. Niech przyrost $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dąży do zera przez wartości rzeczywiste. Wówczas $\Delta y = 0$, a więc

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

¹⁾ Otoczenie punktu oznacza tu dowolny obszar zawierający dany punkt.

²⁾ Dowód tego wzoru (jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej) opiera się na równości

$$\frac{F(w_0 + \Delta w) - F(w_0)}{\Delta w} = \frac{\Delta z}{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)},$$

gdzie $F(w_0 + \Delta w) - F(w_0) = \Delta z$, czyli $F(w_0 + \Delta w) = z_0 + \Delta z$, skąd $w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)$.

ROZDZIAŁ IV

Funkcje analityczne

17. Pochodna zespolona. Niech $f(z)$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu z_0 . Mówimy, że ma ona w punkcie z_0 pochodną zespoloną lub krótko pochodną $f'(z_0)$, jeżeli istnieje skończona granica

$$(1) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

gdzie — zgodnie z definicją granicy (str. 23) — przyrost Δz dąży do zera przez dowolne wartości zespolone $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ różne od zera. Funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna w obszarze, gdy ma pochodną $f'(z)$ w każdym punkcie obszaru.

Określenie pochodnej $f'(z_0)$ nie różni się formalnie od określenia pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej; różnica polega jedynie na tym, że przyrost Δz może obecnie przebiegać wartości rzeczywiste i zespolone. Różnica ta pociąga za sobą — jak to później zobaczymy — daleko idące konsekwencje.

Funkcja stała ma oczywiście pochodną równą 0, funkcja $f(z) \equiv z$ ma wszędzie pochodną równą 1, i ogólnie dla n całkowitych mamy

$$(2) \quad (z^n)' = nz^{n-1} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Funkcja $f(z)$ może mieć pochodną tylko w takim punkcie z_0 , w którym jest ciągła, bo jeżeli istnieje granica (1), to prawa strona tożsamości

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \Delta z$$

dąży do zera, gdy $\Delta z \rightarrow 0$.

Wiele jednak prostych funkcji ciągłych zmiennej zespolonej nie ma pochodnej. Np. funkcja $g(z) = \bar{z} = x - iy$ jest ciągła i nie ma nigdzie pochodnej. Iloraz różnicowy ma bowiem postać

$$\frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}, \quad \text{gdzie } \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

i ma wartość 1, gdy $\Delta y = 0$, a wartość -1 , gdy $\Delta x = 0$, a zatem nie dąży do tej samej granicy, gdy Δz dąży do zera raz po wartościach rzeczywistych, drugi raz po wartościach urojonych.

Gdy $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, wówczas istnieje granica strony lewej, a przez to i prawej, a zatem istnieją pochodne cząstkowe u_x i v_x i zachodzi równość

$$(4) \quad f'(z) = u_x + iv_x.$$

Niech teraz Δz dąży do zera przez wartości urojone. Wówczas $\Delta x = 0$ oraz

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y},$$

skąd, gdy $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$, czyli gdy $\Delta y \rightarrow 0$, otrzymamy

$$(5) \quad f'(z) = \frac{1}{i} (u_y + iv_y).$$

Prawe strony równości (4) i (5) są z założenia równe, a więc $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$. Zatem:

Jeżeli funkcja (3) ma w pewnym punkcie pochodną, to w tym punkcie istnieją pochodne cząstkowe funkcji u i v i spełniają związki

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Związki (6) nazywamy *równaniami Cauchy-Riemanna*¹⁾. Czytelnik sprawdzi je dla funkcji

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi, \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Zauważmy, że pochodna $f'(z)$ funkcji $f(z) = u + iv$ może nie istnieć, choć istnieją pochodne cząstkowe obu funkcji $u(x, y)$ i $v(x, y)$, bo muszą być nadto spełnione równania (6). Np. dla funkcji $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ mamy $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 0$, lecz $f'(z)$ nie istnieje, bo nie są spełnione równania (6).

Warunek (6) jest wprawdzie konieczny, lecz nie jest wystarczający dla istnienia pochodnej funkcji $f(z) = u + iv$ ²⁾. Wykażemy jednak, że:

¹⁾ A. Cauchy (1789-1857), B. Riemann (1826-1866).

²⁾ Wskazuje na to przykład: Dla funkcji $f(z) = \sqrt{|xy|}$ mamy $u = \sqrt{|xy|}$ i $v = 0$. W punkcie $z = 0$ istnieją pochodne $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, a więc równania (6) są spełnione. Natomiast pochodna $f'(0)$ nie istnieje, bo gdy z dąży do zera po półprostej $x = at$, $y = \beta t$, gdzie $t > 0$, wówczas iloraz

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$$

dąży do granicy

$$\frac{\sqrt{a\beta}}{a + i\beta}$$

zależnej od kierunku półprostej.

Jeśli funkcje u i v mają w pewnym obszarze D ciągłe pochodne cząstkowe spełniające związki (6), to funkcja $f(z) = u + iv$ ma pochodną w każdym punkcie $z \in D$.

Dowód. Niech $z = x + iy$ będzie punktem obszaru D . Stosując do funkcji u i v znane twierdzenie o wartości średniej otrzymamy

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = (u_x + \varepsilon) \Delta x + (u_y + \varepsilon') \Delta y,$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = (v_x + \eta) \Delta x + (v_y + \eta') \Delta y,$$

gdzie $\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$ zależą od przyrostów Δx i Δy i dążą z nimi do zera. Uwzględniając tu związki (6) otrzymamy

$$\Delta u + i\Delta v = (u_x + iv_x) (\Delta x + i\Delta y) + \delta,$$

gdzie $\delta = (\varepsilon + i\eta) \Delta x + (\varepsilon' + i\eta') \Delta y$, a zatem

$$(7) \quad \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x + \frac{\delta}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Moduł ostatniego ułamka jest niewiekszy od $|\varepsilon| + |\eta| + |\varepsilon'| + |\eta'|$, a więc dąży do zera, gdy $\Delta z \rightarrow 0$. Zatem iloraz (7) dąży do $u_x + iv_x$, gdy $\Delta z \rightarrow 0$.

19. Funkcja analityczna. Funkcję $f(z)$ określoną w pewnym obszarze nazywamy *analityczną* w tym obszarze, jeśli ma ona pochodną $f'(z)$ w każdym punkcie obszaru.

Mówimy, że funkcja jest *analityczna w punkcie*, gdy jest ona analityczna w pewnym otoczeniu tego punktu. Funkcję analityczną (w obszarze, w punkcie) nazywamy inaczej *funkcją regularną* lub *holomorficzną* (w danym obszarze, punkcie).

Wielomiany i funkcje wymierne mają wszędzie w swych obszarach istnienia pochodną, a więc są funkcjami analitycznymi. Wykażemy, że:

Każdy szereg potęgowy $\sum_0^\infty a_n z^n$ jest wewnątrz swego koła zbieżności funkcją analityczną; jego pochodną wyraża się wzorem

$$(8) \quad \left(\sum_0^\infty a_n z^n \right)' = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}.$$

Dowód. Niech $|z| < r$ będzie kołem zbieżności szeregu $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

Biorąc pochodne wszystkich wyrazów szeregu otrzymamy nowy szereg $g(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$ zwany *szeregiem pochodnym* szeregu $f(z)$. Ponieważ

$\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, więc szereg $g(z)$ ma to samo koło zbieżności co $f(z)$. Wykażemy, że gdy z_0 jest dowolnym punktem koła $|z| < r$, to $f'(z_0)$ istnieje i równa się $g(z_0)$.

Istotnie, dla każdego $z \neq z_0$ zawartego w kole $|z| \leq \varrho$, gdzie $|z_0| < \varrho < r$, mamy

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| = |z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}| \leq n \varrho^{n-1},$$

a ponieważ szereg $\sum n|a_n|\varrho^{n-1}$ jest z założenia zbieżny, więc szereg

$$G(z) = \sum_1^{\infty} a_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1})$$

jest jednostajnie zbieżny w kole $|z| \leq \varrho$ w myśl kryterium Weierstrassa (str. 25). Istnieje zatem granica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = \sum_1^{\infty} a_n \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}) = \sum_1^{\infty} n a_n z_0^{n-1} = g(z_0).$$

Dalej, dla $z \neq z_0$ mamy

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_1^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = G(z),$$

a więc istnieje granica lewej strony i równa się $g(z_0)$, co należało udowodnić.

Z twierdzenia tego wynika, że obok wielomianów i funkcji wymiernych funkcje e^z , $\sin z$ i $\cos z$ są analityczne na całej płaszczyźnie jako sumy szeregów potęgowych. Różniczkując odnośne szeregi (str. 30) otrzymamy

$$(9) \quad (e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Zobaczymy później, że określone wyżej funkcje $\log z$ i z^μ mają w swych obszarach istnienia pochodne

$$(10) \quad (\log z)' = \frac{1}{z}, \quad (z^\mu)' = \mu z^{\mu-1},$$

więc są funkcjami analitycznymi.

Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch funkcji $f(z)$ i $\bar{g}(z)$ analitycznych w pewnym wspólnym obszarze (iloraz poza punktami zerowymi mianownika), jest funkcją analityczną w tym obszarze; wynika to z reguł różniczkowania (str. 37). Zatem $\tanh z$ i $\operatorname{ctg} z$ są funkcjami analitycznymi na całej płaszczyźnie poza punktami, w których $\cos z$ względnie $\sin z$ równa się zero.

Natomiast funkcja $f(z) \equiv \bar{z}$ nie jest analityczna w żadnym obszarze, bo nigdzie nie ma pochodnej (str. 36).

20. Interpretacja pochodnej. Odwzorowania równokątne. Niech funkcja

$$(11) \quad w = f(z)$$

będzie różniczkowalna (a więc analityczna) w pewnym otoczeniu punktu z_0 i niech przekształca to otoczenie na otoczenie punktu $w_0 = f(z_0)$. Załóżmy nadto, że $f'(z_0) \neq 0$.

Łuk regularny C o równaniu $z = z(t)$, gdzie $t_0 \leq t \leq t_1$, wychodzący z punktu $z_0 = z(t_0)$, przechodzi przy przekształceniu (11) w krzywą Γ o równaniu $w = f[z(t)] = w(t)$, wychodzącą z punktu w_0 (rys. 16).

Styczna do C w punkcie z_0 tworzy, jak wiemy (str. 16), z osią x kąt $\varphi = \arg z'(t_0)$. Z tożsamości

$$\frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} = \frac{f[z(t)] - f[z(t_0)]}{z(t) - z(t_0)} \cdot \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0},$$

gdy $t \rightarrow t_0$, otrzymujemy $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$, a więc styczna do krzywej Γ w punkcie w_0 tworzy z osią x kąt

$$(12) \quad \Phi = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \varphi,$$

bo $\arg[f' \cdot z'] = \arg f' + \arg z'$. Zatem:

Nachylenie do osi x każdego łuku regularnego wychodzącego z punktu z_0 wzrasta przy odwzorowaniu (11) o stały kąt równy argumentowi pochodnej $f'(z_0)$.

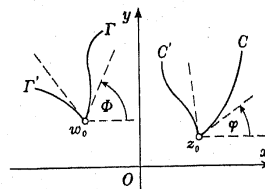
Stosunek odległości $|w - w_0| = |f(z) - f(z_0)|$ do odległości $|z - z_0|$ dąży oczywiście do modułu pochodnej $f'(z_0)$, gdy $z \rightarrow z_0$. A więc:

Odległości punktów bliskich z_0 od punktu z_0 wzrastają przy odwzorowaniu (11) w stosunku równym (w przybliżeniu) modułowi pochodnej $f'(z_0)$.

Niech funkcja $w = f(z)$ będzie ciągła w pewnym obszarze D i niech przekształca ona ten obszar w pewien obszar D' . Mówimy, że to odwzorowanie jest w punkcie $z_0 \in D$ równokątne z zachowaniem zwrotu, jeśli każdym dwóm łukom regularnym C i C' wychodzącym z punktu z_0 odpowiadają w obszarze D' dwie krzywe Γ i Γ' mające w punkcie $w_0 = f(z_0)$ styczne i jeśli zachodzi równość

$$(13) \quad \sphericalangle(\Gamma, \Gamma') = \sphericalangle(C, C'),$$

¹⁾ Zobaczymy później, że założenie drugie wynika z pierwszego.



Rys. 16.

gdzie $\angle(C, C')$ jest kątem o wierzchołku z_0 , którego pierwszym ramieniem jest styczna do C , drugim styczna do C' , a $\angle(\Gamma, \Gamma')$ ma znaczenie analogiczne (rys. 16). Jeżeli natomiast

$$(14) \quad \angle(\Gamma, \Gamma') = \angle(C', C),$$

to mówimy, że dane odwzorowanie jest *równokątne ze zmianą zwrotu*.

Załóżmy teraz, że $f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze D i że $f'(z_0) \neq 0$. Niech krzywe C i C' tworzą z osią x w punkcie z_0 kąty φ i φ' , krzywe zaś Γ i Γ' z osią x w punkcie w_0 kąty Φ i Φ' (rys. 16). Na mocy (12) mamy $\Phi' = \arg f'(z_0) + \varphi'$, skąd $\Phi' - \Phi = \varphi' - \varphi$. Jest to równość (13). Zatem:

W każdym punkcie z_0 , w którym $f'(z_0) \neq 0$, odwzorowanie $w = f(z)$ jest *równokątne z zachowaniem zwrotu*.

Warunek $f'(z_0) \neq 0$ jest istotny, bo np. przy odwzorowaniu $w = f(z) = z^2$, w którym $f'(0) = 0$, kąt między osią rzeczywistą i półprostą p o równaniu $z = e^{i\varphi}t$, $0 \leq t < \infty$, zostaje podwojony, gdyż oś rzeczywista przechodzi w siebie, a półprosta p — w półprostą $w = e^{2i\varphi}t$, $0 \leq t < \infty$.

PRZYKŁAD 1. Odwzorowanie $w = az + b$, gdzie $a \neq 0$ (str. 23), jest w każdym punkcie *równokątne z zachowaniem zwrotu*, bo funkcja $az + b$ jest analityczna na całej płaszczyźnie i jej pochodna jest wszędzie różna od zera.

PRZYKŁAD 2. Odwzorowanie $w = z^n$, $n = 2, 3, \dots$, jest *równokątne z zachowaniem zwrotu* wszędzie z wyjątkiem punktu $z = 0$.

PRZYKŁAD 3. Funkcja $w = \bar{z}$ nie jest analityczna; odwzorowuje ona całą płaszczyznę w siebie. Odwzorowanie to jest *równokątne ze zmianą zwrotu*.

Prostą interpretację geometryczną mają równania Cauchy-Riemanna. Niech będzie dana funkcja analityczna $f(z) = u + iv$ i niech krzywe $u(x, y) = c$ i $v(x, y) = c'$, gdzie c i c' są stałymi, przecinają się w punkcie (x_0, y_0) . Styczne do tych krzywych dane są równaniami

$$u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) = 0, \quad v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) = 0,$$

a więc przecinają się pod kątem prostym, bo na mocy równań (6) mamy $u_x v_x + u_y v_y = 0$. Zatem:

Równania Cauchy-Riemanna orzekają, że każda krzywa rodziny $u(x, y) = c$ jest ortogonalna do każdej krzywej rodziny $v(x, y) = c'$.

PRZYKŁAD. $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Krzywe $x^2 - y^2 = c$ tworzą rodzinę hiperbol ortogonalnych do rodziny hiperbol $2xy = c'$.

21. Odwzorowanie homograficzne. Funkcja

$$(15) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{gdzie } ad - bc \neq 0,$$

nosi nazwę *funkcji homograficznej*. Odwzorowuje ona całą płaszczyznę domkniętą w siebie; zakładamy przy tym, że punktowi $z = -d/c$ odpowiada punkt $w = \infty$, a punktowi $z = \infty$ punkt $w = a/c$, względnie ∞ , gdy $c = 0$.

Przekształcenie płaszczyzny określone wzorem (15) nazywamy *odwzorowaniem homograficznym*. Jest ono jednokrotne, tzn. równość

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 = z_2$, bo wtedy

$$(az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d), \quad \text{skąd } (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0,$$

a więc $z_1 = z_2$. Pochodna funkcji (15) równa się $(ad - bc)/(cz + d)^2$, a więc jest wszędzie różna od zera. Zatem odwzorowanie homograficzne jest wszędzie *równokątne z zachowaniem zwrotu*.

Przypadkiem szczególnym odwzorowania (15) jest *przekształcenie liniowe*

$$(16) \quad w = az + b$$

oraz przekształcenie postaci

$$(17) \quad w = \frac{1}{z},$$

zwane *inwersją*. Ogólne odwzorowanie (15), gdzie $c \neq 0$, można napisać w postaci

$$w = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c}.$$

Odwzorowanie to jest więc złożeniem przesunięcia $z' = z + d/c$, następnie inwersji i przekształcenia liniowego.

Wykażemy, że:

1. Każde przekształcenie homograficzne przeprowadza zawsze okrąg (właściwy lub nie) w okrąg, a punkty symetryczne względem okręgu w punkty symetryczne względem jego obrazu¹⁾.

¹⁾ Zob. str. 18. Środek okręgu i punkt ∞ nazywamy również punktami symetrycznymi względem danego okręgu.

Dowód. Okrąg, względem którego punkty p i q są symetryczne, daje się przedstawić (str. 19) równaniem

$$(18) \quad \left| \frac{z-p}{z-q} \right| = \lambda.$$

Po wykonaniu przekształcenia odwrotnego do przekształcenia (16) lub (17) równanie (18) przechodzi w równanie

$$\left| \frac{w-(ap+b)}{w-(aq+b)} \right| = \lambda, \quad \text{lub w} \quad \left| \frac{w-1/p}{w-1/q} \right| = \lambda \left| \frac{q}{p} \right|,$$

co można stwierdzić prostym rachunkiem. Są to znowu równania okręgów, względem których punkty $ap+b$ i $aq+b$ względnie punkty $1/p$ i $1/q$ są symetryczne. Twierdzenie jest więc udowodnione, bo każde przekształcenie homograficzne daje się złożyć z przekształceń (16) i (17).

2. Dla każdych dwu okręgów K i K' istnieje przekształcenie homograficzne przeprowadzające K w K' .

Istotnie, obierzmy trzy dowolne (różne) punkty z_1, z_2, z_3 na okręgu K i trzy dowolne punkty w_1, w_2, w_3 na K' i rozwiążmy względem w równanie

$$(19) \quad \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-w_1}{z-w_2} : \frac{z_3-w_1}{z_3-w_2}.$$

Otrzymamy przekształcenie homograficzne przeprowadzające punkty z_1, z_2, z_3 odpowiednio w punkty w_1, w_2, w_3 , a więc okrąg K w okrąg K' .

Wnętrze okręgu K przechodzi oczywiście przy przekształceniu (19) albo całkowicie we wnętrze okręgu K' , albo całkowicie w zewnątrz.

ĆWICZENIA.

1. Dowieść, że funkcja $f(z) = |z|^2$ ma pochodną tylko w punkcie $z=0$.
2. Wykazać, że funkcja

$$f(z) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \quad \text{dla } z \neq 0 \quad \text{i} \quad f(0) = 0$$

nie ma pochodnej w punkcie 0, mimo że iloraz różnicowy $[f(z)-f(0)]/z$ dąży do określonej granicy, gdy $z \rightarrow 0$ po dowolnej prostej.

3. Wykazać, że gdy funkcja $f(z) = u+iv$ ma pochodną w punkcie z_0 , to funkcja $g(z) = u-iv$ ma pochodną $g'(z_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(z_0) = 0$.

4. Wykazać, że funkcja analityczna przyjmująca w całym swym obszarze istnienia wartości rzeczywiste musi być stała.

5. Znaleźć część rzeczywistą i część urojoną funkcji $\cos z$ i sprawdzić, że funkcje te spełniają równania Cauchy-Riemanna.

6. Wykazać, że funkcja $f(z)$ określona wzorami: $f(z) = (\sin z)/z$ dla $z \neq 0$, $f(0) = 1$, jest analityczna na całej płaszczyźnie.

7. Wykazać, że punkty zerowe pochodnej wielomianu $W(z)$ leżą w najmniejszym obszarze wypukłym obejmującym punkty zerowe wielomianu $W(z)$.

8. Zakładając, że funkcja $f(z) = f(x+iy)$ jest analityczna, obliczyć tangens kąta γ , jaki tworzy z osią ξ normalna w punkcie $x+iy$ do powierzchni o równaniu $\xi = |f(x+iy)|^2 = F(x, y)$.

9. Znaleźć a) takie przekształcenie homograficzne odwzorowujące okrąg $|z|=1$ na oś rzeczywistą, aby punktem $1, i, -1$ okręgu odpowiadały punkty $-1, 0, 1$ na osi, b) najogólniejsze przekształcenie homograficzne odwzorowujące oś rzeczywistą na okrąg $|w|=1$.

10. Wykazać, że a) stosunek trójki punktów z_1, z_2, z_3 , tj. iloraz

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = (z_1, z_2, z_3),$$

jest niezmiennikiem przekształceń liniowych $w = az + b$, tj. $(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_k = az_k + b$, b) dwustosunek czwórki punktów z_1, z_2, z_3, z_4 , tj. iloraz

$$\frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)},$$

jest niezmiennikiem przekształceń homograficznych.

ROZWIĄZANIA.

1. Iloraz różnicowy w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ dąży do $2x_0$ albo do $-2y_0i$, gdy przystos $\Delta z \rightarrow 0$ poprzez wartości rzeczywiste albo urojone; granice te są wtedy i tylko wtedy równe, gdy $z_0 + iy_0 = 0$. — 2. Iloraz różnicowy równa się $xy^2/(x^2+y^4)$ i dąży do 0, gdy $z \rightarrow 0$ po prostych, natomiast dąży do $1/2$, gdy $z \rightarrow 0$ po paraboli $y^2 = x$. — 3. Zastosować równania Cauchy-Riemanna. — 4. Jeżeli dla $f(z) = u+iv$ jest $v=0$, to na mocy równań Cauchy-Riemanna mamy $u_x = 0$ i $u_y = 0$, a więc $u = \text{const}$. —

5. $R \cos z = \frac{1}{2} \cos x \cdot (e^y + e^{-y})$, $I \cos z = -\frac{1}{2} \sin x \cdot (e^y - e^{-y})$. — 6. $f(z)$ równa się sumie

szeregu $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ zbieżnego na całej płaszczyźnie. — 7. Jeżeli

$$W(z) = a(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n),$$

to

$$W'(z) = W(z) \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-z_k}.$$

Zastosować wynik ćw. 7, str. 20. — 8. $\operatorname{tg}^2 \gamma = F_x^2 + F_y^2$, a więc $\operatorname{tg} \gamma = 2|f(z)| \cdot |f'(z)|$. —

9. a) $w = -i \frac{z-i}{z+i}$, b) $w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$, gdzie a jest dowolną liczbą nierzeczywistą, φ — dowolną liczbą rzeczywistą. — 10. Wystarczy sprawdzić.