

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXVII

Q338

KAZIMIERZ KURATOWSKI

i
ANDRZEJ MOSTOWSKI

TEORIA MNOGOŚCI

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKOLNICTWA WYŻSZEGO

WARSZAWA — WROCŁAW 1952

02338

COPYRIGHT, 1952, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
 WARSZAWA (Poland) Śniadeckich 8

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced
 in any form, by mimeograph or any other means,
 without permission in writing from the publishers.



PRINTED IN POLAND

Polskie Towarzystwo Matematyczne — Warszawa Nakład 2000 egz. Ark. druku 20 1/16
 Krakowska Drukarnia Naukowa — Kraków, Czysta 4 Zam. 409. — 9. VIII. 1951.
 Druk ukończono w lipcu 1952. Papier druk. sat. kl. V, 70×100 cm 80 g
 M-2-25531

26.9.52
 Druk

PRZEDMOWA

Teoria mnogości zawdzięcza swe powstanie pracom matematyków XIX stulecia, które miały na celu ugruntowanie podstaw analizy i zbadanie podstawowych pojęć tej nauki. Do pojęć tych należy pojęcie *zbioru*.

Nie ma działu matematyki, w którym nie rozpatrywało by się zbiorów. Wystarczy wymienić zbiory: liczb całkowitych, wymiernych zespolonych, zbiór punktów okręgu, pęk prostych, zbiór funkcji ciągłych, mierzalnych itp.

Zadaniem teorii mnogości jest poznanie własności zbioru w najogólniejszym tego słowa znaczeniu. Ogólność założeń jest jedną z najbardziej charakterystycznych cech teorii mnogości: o ile w geometrii elementami rozważanych zbiorów są punkty (płaszczyzny, czy przestrzeni), w algebrze — liczby (rzeczywiste, czy zespolone), o tyle w teorii mnogości nie czynimy żadnych założeń o istocie elementów rozważanych zbiorów; operujemy zbiorami o dowolnych elementach.

Wyjaśnimy to na paru charakterystycznych przykładach.

Mając dane dwa zbiory A i B , mówimy o ich sumie $A+B$, tj. o zbiorze złożonym z elementów, które należą bądź do A , bądź do B ; mówimy o ich iloczynie AB , rozumiejąc przez to wspólną część zbiorów A i B , o ich różnicy $A-B$, tj. o zbiorze elementów zbioru A , które nie należą do B . Zanalizowanie tych działań (posiadających wiele własności analogicznych do działań arytmetycznych) prowadzi do ważnego i interesującego z punktu widzenia zastosowań działu teorii mnogości, do tzw. *algebry zbiorów*. Jak widać, definicje tych działań i — jak się przekonamy w Rozdziałach I i II — ich teoria, dotyczą zbiorów o dowolnych elementach (obojętne, czy to będą liczby, punkty, funkcje itp).

Jako inny przykład typowego zagadnienia teorii mnogości wymienimy zagadnienie *równoliczności* zbiorów (lub — jak mówimy — zagadnienie równości mocy zbiorów). Mówimy, mianowicie, że zbiory A i B są równoliczne, jeśli istnieje przyporządkowanie między elementami zbioru A a wszystkimi elementami zbioru B , które każdemu elementowi

zbioru A przyporządkowuje jeden i tylko jeden element zbioru B . Zbiory skończone są równoliczne, oczywiście, wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą liczbę elementów; natomiast żaden zbiór skończony nie jest równoliczny ze zbiorem nieskończonym. Łatwo podać przykład dwóch zbiorów nieskończonych równolicznych: np. zbiór liczb całkowitych dodatnich i zbiór liczb całkowitych ujemnych. Mniej elementarne jest istnienie zbiorów nieskończonych nierównolicznych; taką parą zbiorów jest zbiór liczb naturalnych i zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Okazuje się (mowa o tym będzie w Rozdziale III), że istnieje nieskończenie wiele zbiorów nieskończonych, z których żadne dwa nie są równoliczne. Własność równoliczności dwóch zbiorów jest naturalnym przeniesieniem na zbiory nieskończone własności równej liczebności zbiorów skończonych. Nasunęło to Cantorowi pomysł przyporządkowania zbiorom równolicznym tzw. liczby kardynalnej, która w wypadku, gdy zbiór jest skończony, jest liczbą jego elementów.

Pojęcie równoliczności zbiorów, tak jak pojęcie liczby kardynalnej zbioru, jest ponownie przykładem pojęcia, które dotyczy zbioru a nie jego poszczególnych elementów; możemy bowiem dowolnie zastępować elementy danego zbioru przez elementy inne nie zmieniając jego liczby kardynalnej, byleby równoliczność zbiorów była zachowana.

Wreszcie, jako trzeci przykład pojęcia należącego do teorii mnogości wymienimy pojęcie *uporządkowania* zbiorów. Na elementarnych przykładach zbiorów: liczb całkowitych, liczb wymiernych, liczb rzeczywistych — obserwować możemy własności porządkowe, którymi te zbiory się różnią: w pierwszym występują pary elementów bezpośrednio ze sobą sąsiadujących (np. para liczb 2 i 3); w drugim ani trzecim takich par nie ma (są to zbiory „geste”), można natomiast określić w zbiorze liczb wymiernych przekrój wyznaczający lukę (np. przekrój odpowiadający liczbie $\sqrt{2}$), co w wypadku zbioru liczb rzeczywistych jest niemożliwe.

W Rozdziałach IV i V zajmujemy się teorią porządkowych własności zbiorów. Czynimy to — jak w rozdziałach wcześniejszych — dla zbiorów dowolnych.

Pierwsze prace, które ze względu na przedmiot ich badań, zaliczyć by można do teorii mnogości — jak prace Dedekinda, Du Bois-Reymonda — pisane były pod kątem widzenia bezpośrednich zastosowań do analizy. Dopiero G. Cantor w latach 1871—1883 publikuje szereg prac poświęconych specjalnie zbadaniu zasadniczych własności pojęcia zbioru; podaje w nich podstawowe definicje i twierdzenia teorii mnogości, które po dzień dzisiejszy stanowią najistotniejszą część tej teorii.

Od tego czasu datuje się powstanie teorii mnogości, jako samodzielnej gałęzi matematyki.

W początkowym okresie swego rozwoju teoria mnogości spotyka się z niechęcią i nieufnością wielu matematyków, których — jak to często w historii nauki bywa — odstraszały nowe metody, obce pojęcia i problemy. W miarę jednak jak podstawowe pojęcia teorii mnogości wykazywały swą użyteczność w innych gałęziach matematyki, na przykład pojęcie przeliczalności w teorii szeregów trygonometrycznych lub w teorii funkcji analitycznych (prace Poincarégo i Mittag-Lefflera ok. r. 1885), teoria mnogości zyskuje stopniowo prawo obywatelstwa i coraz większą rolę odgrywa jako samodzielna dyscyplina matematyczna.

W pierwszych latach wieku XX-tego teoria mnogości przechodzi kryzys. Cantor budował teorię mnogości nie podając definicji zbioru, ani nie wprowadzając tego pojęcia aksjomatycznie; opierał się na intuicyjnym pojęciu zbioru. Metoda, ta dopuszczalna w stosunku do wielu elementarnych zagadnień teorii mnogości, okazała się zawodna w zastosowaniu do zagadnień bardziej subtelnych; mianowicie, zawodną okazała się intuicja pojęcia zbioru, która na niektóre narzucające się pytania nie dawała jednoznacznej odpowiedzi (np. czy istnieje zbiór wszystkich zbiorów?). W konsekwencji teoria mnogości stanęła wobec sprzeczności (tzw. antynomii), których na drodze samego tylko odwoływania się do intuicji rozwiązać nie było można.

Kryzys ten został opanowany dzięki sformułowaniu (E. Zermelo w r. 1904 i jego kontynuatorzy) systemu aksjomatów całkowicie wystarczającego do uzyskania ówczesnych wyników teorii mnogości a zarazem wolnego od wymienionych antynomii.

W ten sposób pojawienie się antynomii w pewnym okresie rozwoju teorii mnogości przyczyniło się w rezultacie do nadania tej dyscyplinie doskonalszych form, odpowiadających istotnemu jej postępowi. Postęp ten objawił się zarówno w dokładniejszym poznaniu podstaw teorii mnogości, jak i w postawieniu nowej problematyki.

Problematyka ta dotyczy pytania: jakie aksjomaty teorii mnogości przyjąć należy? W doborze aksjomatów danej teorii matematycznej nie mamy absolutnej swobody, lecz powinniśmy ten dobór umieć uzasadnić i dokonać go w taki sposób, ażeby teoria ta posiadała istotną wartość naukową, tj. żeby mogła służyć do poznania świata materialnego, czy to bezpośrednio, czy też za pośrednictwem innych działów matematyki, dla których jest narzędziem.

Z tego punktu widzenia jeden z aksjomatów Zermeli, tzw. aksjomat wyboru, spotkał się z wątpliwościami niektórych matematyków, którzy zakwestionowali aksjomat ten zwłaszcza z powodu niektórych jego konsekwencji, istotnie bardzo paradoksalnych. Czy paradoksalność tych konsekwencji aksjomatu wyboru należy uznać za argument za odrzuceniem tego aksjomatu, czy też wrażenie paradoksalności pochodzi z nie-

dość wykształconej, zbyt „naiwnej” intuicji zbioru¹⁾ — co do tego nie ma jednolitego stanowiska wśród matematyków.

Badania aksjomatyczne rozpoczęte przez Zermelę, a kontynuowane przez Fraenkla, v. Neumanna i innych, postawiły na porządku dziennym nowe problemy dotychczas nierozwiązane, a dotyczące zasięgu zdań rozstrzygalnych na gruncie danego systemu aksjomatów. Nie jest np. jasne, czy każdy system aksjomatyczny narzuca ograniczenia w wysokości liczb kardynalnych²⁾.

Również problemem o dużej doniosłości jest tego rodzaju ujęcie teorii mnogości, które — odpowiednio zacieśniając pojęcie zbioru — eliminowałoby istnienie zbiorów patologicznych (które jest konsekwencją — jak wspomnieliśmy — przede wszystkim aksjomatu wyboru), a nie uszczupliłoby przy tym istotnie wartościowych osiągnięć teorii mnogości. I ten problemat nie ma dotychczas zadawalającego rozwiązania.

Wiele jest innych podstawowych zagadnień teorii mnogości nierozwiązanych w chwili obecnej (jak np. słynna „hipoteza continuum”). O niektórych z tych hipotez udowodniono (Gödel w r. 1939), że dołączenie ich do systemu aksjomatów nie prowadzi do sprzeczności; nie wyklucza to jednak, że ich zaprzeczenie mogłoby być przyjęte jako aksjomat.

Nie jest też dotychczas przeprowadzona wszechstronna dyskusja filozoficzna podstawowych założeń teorii mnogości. Zagadnienie czy i do jakiego stopnia bliski jest związek pojęć abstrakcyjnej teorii mnogości (a zwłaszcza tych jej działów, w których jest mowa o zbiorach bardzo wysokiej mocy) z podstawowymi pojęciami matematycznymi bezpośrednio związanymi z praktyką, nie jest dotąd wyjaśnione. Potrzeba takiej analizy jest tym większa, że u twórcy teorii mnogości — Cantora — podstawowe pojęcia tej teorii były owiane duchem mistycyzmu.

Pierwsze ćwierćwiecze wieku XX-ego jest okresem tryumfu teorii mnogości, jej metod i pojęć. W każdej niemal gałęzi matematyki daje

¹⁾ W podobnej sytuacji była w latach ubiegłych definicja ciągłości: udowodniono po raz pierwszy przez Weierstrassa istnienie funkcji ciągłej pozbawionej pochodnej w każdym punkcie rażąco intuicję ówczesnych matematyków wiążącą pojęcie funkcji ciągłej, czy krzywej ciągłej, z torem poruszającego się punktu. Podobnie wydawała się sprzeczna z intuicją ciągłości możliwość przedstawienia parametrycznego kwadratu (wraz z wnętrzem) na odcinku. Odkrycia te, mimo swej paradoksalności, nie spowodowały jednak porzucenia definicji funkcji ciągłej (pochodzącej od Cauchy'ego), lecz przeciwnie — ze względu na swą paradoksalność — przyczyniły się do udoskonalenia intuicji ciągłości i do lepszego zrozumienia roli tego pojęcia wśród innych pojęć (różniczkowości, jednoznaczności itd.).

²⁾ Jak wynika z prac Gödla, nie może wogóle istnieć system aksjomatów teorii mnogości tak dalece zupełny, ażeby dawał odpowiedź na każde pytanie dotyczące zbiorów i ażeby stanowił teorię całkowicie zamkniętą. Ob. na ten temat filozoficzne uwagi A. D. Aleksandrowa w artykule „O idealizmie w matematyce”, *Mysł Filozoficzny* 1 (3), 1952 (przekład z rosyjskiego).

się odczuć wpływ teorii mnogości: czy to w formułowaniu podstawowych definicji (np. definicji całki Lebesgue'a), czy to w daleko idących uogólnieniach obiektów badań (np. w pracach Steinitza z algebry abstrakcyjnej), czy to w stosowaniu nowych metod zaczerpniętych z teorii mnogości (np. we współczesnej geometrii różniczkowej lub w rachunku wariacyjnym). Jak stwierdza francuski matematyk Denjoy, teoria mnogości spowodowała w matematyce przewrót w skali nieznanej od czasów Newtona i Leibniza.

Szczególnie doniosłą rolę dla rozwoju matematyki odgrywa teoria mnogości — nie tylko bezpośrednio, przez własne osiągnięcia — lecz również pośrednio: dzięki powstaniu nowych dyscyplin matematycznych, które na gruncie teorii mnogości i w oparciu o jej metody wyrosły: topologii mnogościowej (Cantor, Schönflies, Brouwer, Hausdorff, Urysohn, Alexandrow, Pontrjagin, Čech, Menger, szkoła amerykańska R. L. Moore'a, matematycy polscy), analizy funkcjonalnej (Fréchet, F. Riesz, matematycy radzieccy z Gelfandem, Krajnem, Kantorowiczem, matematycy polscy z Banachem na czele), teorii funkcji zmiennej rzeczywistej (Baire, Borel, Lebesgue, W. H. Young, Denjoy, Caratheodory, Łuzin, Suslin, Alexandrow, Kolmogorow, Chinczina, matematycy polscy), logiki matematycznej i metamatematyki (Peano, Russell, Hilbert, Bernays, Gödel, Skolem, matematycy i logicy polscy).

Ta wielka doniosłość teorii mnogości jako *narzędzia* dla innych działów matematyki, wśród których są działy matematyki związane bezpośrednio z zastosowaniami, góruje obecnie, jak się zdaje, nad doniosłością badań w obrębie samej teorii mnogości.

Badania nad podstawami teorii mnogości odegrały też wielką rolę w dziedzinie podstaw matematyki w ogóle. Analiza takich pojęć jak niesprzeczność aksjomatów, ich niezależność, kategoryczność, zupełność, efektywność dowodów — wiąże się ściśle z teorią mnogości.

To niewątpliwie znaczenie teorii mnogości dla podstaw matematyki znalazło również swój wyraz w odniesieniu do filozofii matematyki. W tej dziedzinie wpływ teorii mnogości daje się szczególnie silnie odczuć. Tak na przykład, dzięki zdefiniowaniu zbioru skończonego i wprowadzeniu liczb kardynalnych ugruntowano na mocnych podstawach arytmetykę liczb naturalnych. Równocześnie powstała nowa należąca do sprecyzowania problematyka matematyczna związana z ogólnym pojęciem zbioru nieskończonego. Pojęcie to nie ma dziś już nic w sobie z charakteru mitycznego, którym przez stulecia było obciążone.

Wkład matematyków polskich do teorii mnogości na specjalną zasługuje uwagę. Matematycy polscy szczególnie wcześniej zainteresowali się tą nową gałęzią matematyki. Prawdziwie pionierską rolę odegrał tu Wacław Sierpiński, a książka jego „Zarys teorii mnogości” wy-

dana przed laty czterdziestu była jednym z pierwszych podręczników z tej dziedziny w literaturze światowej. Gdy przed trzydziestu kilku laty powstawała nowa Polska Szkoła Matematyczna, problematyka jej skoncentrowana została zgodnie z planem wytyczonym przez jej organizatorów (a przede wszystkim przez Janiszewskiego) dokoła teorii mnogości i jej zastosowań. Założone wówczas w Warszawie czasopismo „*Fundamenta Mathematicae*” tej problematyce zostało specjalnie poświęcone i wkrótce stało się centralnym, w skali światowej, organem skupiającym prace z teorii mnogości i działów z nią związanych.

Doniosłość prac matematyków polskich w tej dziedzinie polega nie tylko na odkryciu nowych twierdzeń, sprecyzowaniu podstawowych pojęć teorii mnogości i wyjaśnieniu ich roli w matematyce (jak pojęcie zbioru skończonego, czy uporządkowanego, pojęcie i rola liczby porządkowej, rola aksjomatu wyboru, rola efektywności), ale — i to może jest najważniejsze — na uzyskaniu podstawowych wyników w cytowanych już działach matematyki, które na gruncie teorii mnogości wyrosły i które z metodami teorii mnogości są związane.

* * *

Książka niniejsza stanowi uzupełniony i znacznie rozszerzony „Kurs Ogólnej Teorii mnogości” K. Kuratowskiego, wydany w postaci skryptu przez Koło Matematyczno-Fizyczne Studentów Uniwersytetu Warszawskiego w r. 1924. Przybyły tu pojęcia i twierdzenia, które przed laty trzydziestu nie były znane (np. zastosowania operacji logicznych do teorii mnogości, niesprzeczność aksjomatu wyboru) lub były mało zbadane (np. mnożenie kartezjańskie zbiorów, zbiory częściowo uporządkowane, struktury). Całkowicie nowe są tu: rozdział VI, końcowe trzy paragrafy rozdziałów IV i V, oraz „dodatek” — opracowane przez A. Mostowskiego.

Jakkolwiek książka nasza wykracza w wielu punktach poza zwykły kurs uniwersytecki, nie wyczerpuje jednak całości przedmiotu i w żadnym dziale nie pretenduje do encyklopedycznej zupełności.

Wykład oparty jest na klasycznym, w zasadzie wywodzącym się od Cantora, układzie materiału, idącym od algebry zbiorów poprzez teorię mocy i teorię uporządkowania do teorii zbiorów dobrze uporządkowanych i alefów. Różnica w stosunku do innych podręczników teorii mnogości polega przede wszystkim na posługiwaniu się metodą aksjomatyczną od samego początku wykładu. W szerokim zakresie stosowana jest też symbolika logiczna. Pozwala ona uzyskać nie tylko zwięzłość wzorów, ale w wielu wypadkach istotnie upraszcza dowody.

Uzupełnienia materiału klasycznego dotyczą w pierwszym rzędzie algebry zbiorów: podaliśmy zarys algebry Boole’a i jej uogólnienia znanego

pod nazwą teorii struktur, a nadto wzmianki o operacji ($\mathcal{A}$) i o zbiorach borelowskich. Materiał ten stanowić może wstęp do bardziej szczegółowego studium zagadnień związanych z tymi pojęciami. Dość szeroko potraktowaliśmy zagadnienie eliminacji liczb porządkowych i typów porządkowych, w szczególności „geometryzując” tych pojęć. W ostatnim rozdziale zebraliśmy różne wyniki dotyczące niesprzeczności i niezależności aksjomatów.

Arytmetykę typów porządkowych i liczb porządkowych potraktowaliśmy dość pobieżnie. Bowiem ten dział teorii mnogości wydaje się dość izolowany i pozbawiony — jak dotychczas — zastosowań do innych działów matematyki (posiada on zresztą dość szczegółowe opracowania monograficzne). Duży nacisk natomiast położony jest na zastosowaniach teorii mnogości, zwłaszcza do topologii i do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. Pozwala to na uwydatnienie użyteczności teorii mnogości i na ściślejsze powiązanie tego działu matematyki z innymi jej działami, co w odniesieniu do teorii mnogości wydaje się szczególnie ważne.

Aby uwidocznic rolę aksjomatu wyboru, zaznaczyliśmy kółeczkiem^{*} te twierdzenia, w których dowódzie pewnik jest użyty. Nadto dodaliśmy liczne jego zastosowania¹⁾ oraz uwagi, dotyczące roli aksjomatu wyboru w poszczególnych dowodach; wreszcie uzupełniliśmy nasz wykład dodatkami, w którym przedstawiony jest jeden z najbardziej paradoksalnych wniosków, do których prowadzi aksjomat wyboru.

W wielu miejscach tekst oznaczony jest gwiazdką *. Ma to na celu ułatwienie w korzystaniu z tej książki przez czytelnika pragnącego się zapoznać z teorią mnogości w zakresie obecnie obowiązującego programu uniwersyteckiego na kursie trzyletnim matematyki; dla studium w tym zakresie tekst oznaczony gwiazdką może być bądź całkowicie pominięty, bądź też uwzględniony częściowo (bez dowodów).

* * *

Kończąc tę przedmowę pragniemy wyrazić podziękowanie kolegom naszym, Jerzemu Łosiowi, Romanowi Sikorskiemu i Marcelemu Starowskiemu za ich uwagi, które pozwoliły nam częstokroć ulepszyć tekst.

Warszawa, w maju 1952.

K. Kuratowski
A. Mostowski.

¹⁾ Ograniczamy się tu do podania zastosowań najważniejszych. Na bogactwo zastosowań pewnika wyboru i na fakt, że bez tego pewnika nie potrafimy udowodnić niektórych twierdzeń z elementarnej analizy, zwraca uwagę P. S. Aleksandrow w podręczniku *Введение в общую теорию множеств и функций*, Moskwa—Leningrad, 1948, str. 94. Ob. też W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et Analyse*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des sciences math. et nat., série A, 1919, str. 97—152.

Dowód twierdzenia 1. Ze wzoru (15) wynika, że

$$K = (D + P) + Q.$$

Zbiór $D + P$ przystaje przez rozkład do K , gdyż $P \approx K - D$. Zasię zbiór Q przystaje przez rozkład do $K - D$, a więc też do K , gdyż na mocy twierdzenia 6 $K - D \approx K$, a stosunek $\approx$ jest przechodni.

Twierdzenie 1 jest w ten sposób udowodnione.

Na zakończenie zauważmy, że zastępując punkty na powierzchni kuli przez promienie (otwarte) łączące te punkty ze środkiem można bez trudności wywnioskować z twierdzenia 1, że *wnętrze kuli (bez środka) daje się podzielić na takie dwie części, że z każdej z nich można przez podział na skończoną liczbę części i dokonanie odpowiednich obrotów złożyć kulę (bez środka) identyczną z kulą wyjściową*. Łatwa modyfikacja pozwoliłaby też zastąpić kulę bez środka przez pełną kulę (otwartą lub zamkniętą)¹⁾.

¹⁾ R. M. Robinson w pracy *On the decomposition of spheres*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), str. 246—260, wykazał, że minimalna ilość części, na które można podzielić kulę w taki sposób, aby z części tych można było złożyć dwie kule o tym samym promieniu, wynosi 5.

SKOROWIDZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI

Liczby oznaczają stronicę.

.	koniunkcja 1; iloczyn zbiorów 7; iloczyn liczb kardynalnych 110; iloczyn typów porządkowych 159.
+	alternatywa 1; suma zbiorów 6; suma liczb kardynalnych 109; suma typów porządkowych 159.
→	implikacja 1.
≡	równoważność 2; przystawanie 288.
'	negacja 2; uzupełnienie 18.
—	różnica zbiorów 6; różnica liczb kardynalnych 112; różnica liczb porządkowych 205.
÷	różnica symetryczna 8.
0	zdanie fałszywe 2; zbiór pusty 9; zero algebry Boole'a 34; zero struktury 172.
1	zdanie prawdziwe 2; zbiór jednostkowy 18; jedność algebry Boole'a 34; jedność struktury 172.
II	kwantyfikator ogólny 39; iloczyn zbiorów 63; iloczyn liczb kardynalnych 130; iloczyn typów porządkowych 170.
Σ	kwantyfikator szczegółowy 39; suma zbiorów 63; suma liczb kardynalnych 125; suma typów porządkowych 161.
ε	relacja należenia 5.
⊂	relacja zawierania 8.
S(A)	suma zbiorów rodziny A 44.
P(A)	iloczyn zbiorów rodziny A 46.
2 ^A	rodzina podzbiorów zbioru A 44.
E	zbiór elementów spełniających funkcję zdaniową 45.
{a, b}	para nieuporządkowana 46.
<a, b>	para uporządkowana 51.
×	iloczyn kartezjański dwu zbiorów 52.
P	iloczyn kartezjański dowolnej liczby zbiorów 73.
X ⁿ	zbiór ciągów n elementowych o wyrazach należących do X 56.
Y ^X	rodzina funkcji, odwzorowujących zbiór X na podzbiór zbioru Y 55.
f ⁻¹	funkcja odwrotna 57.
f _M	funkcja częściowa 58.
f(X)	obraz zbioru X 60.
f ⁻¹ (Y)	przeciwwobraz zbioru Y 60.
Lim sup X _n n=∞	granica górna ciągu zbiorów 70.

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ granica dolna ciągu zbiorów 70.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ granica ciągu zbiorów 70.
 $(\mathcal{A})$ operacja $\mathcal{A}$ 83.
 $\approx$ relacja równoliczności 94.
 $\mathbb{A}$ moc zbioru A 100.
 $\nless$ nierówność (słaba) dla liczb kardynalnych 112; nierówność (słaba) dla liczb porządkowych 193; relacja inkluzji w algebrze Boole'a 33; relacja częściowo porządkująca strukturę 171.
 α moc zbioru liczb naturalnych 100.
 $\mathcal{C}$ moc rodziny wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych 120.
 $\prec_R$ lub $\prec$ stosunek poprzedzania 140.
 $O_R(x)$ lub $O(x)$ odcinek zbioru uporządkowanego, wyznaczony przez x 145.
 $\bar{R}$ relacja odwrotna do R 158.
 $\bar{E}$ typ relacji porządkującej 143.
 $\bar{A}$ typ zbioru uporządkowanego A 143; domknięcie zbioru A 25.
 ω typ zbioru liczb naturalnych 151.
 η typ zbioru liczb wymiernych 151.
 λ typ zbioru liczb rzeczywistych 151.
 ε pierwsza liczba epsilonowa 210.
 α^* typ odwrotny do α 158.
 $\bigcup$ kres górny elementów w strukturze 172.
 $\bigcap$ kres dolny elementów w strukturze 172.
 $\lim_{\gamma \in \Lambda} \varphi(\gamma)$ granica ciągu pozaskończonego 196.
 $W(\alpha)$ zbiór liczb porządkowych $\leq \alpha$ 194.
 ξ moc liczby ξ 216.
 Ω pierwsza liczba porządkowa o mocy nieprzeliczalnej 216.
 $\aleph_1$ moc liczby $\aleph_1$ 216.
 $Z(m)$ zbiór liczb porządkowych mocy $\leq m$ 220.
 $N(m)$ moc zbioru $Z(m)$ 220.
 $i(\varphi)$ indeks liczby początkowej φ 230.
 ω_α liczba początkowa o indeksie α 231.
 $cf(\alpha)$ najmniejsza liczba współkończowa z ω_α 232.
 $\aleph_\alpha$ moc liczby ω_α 234.
 α_ξ ξ -ty wyraz w skali potęgowej 242.
 $\text{Int}(A)$ wnętrze zbioru A 27.
 $\text{Fr}(A)$ ograniczenie zbioru A 30.
 A' pochodna zbioru A 31.
 F_σ klasa sum ciągów zbiorów domkniętych 77.
 G_δ klasa iloczynów ciągów zbiorów otwartych 78.
 $\approx$ relacja przystawiania przez rozkład skończony 288.
 $\mathcal{J}$ zbiór liczb naturalnych 42.
 $\mathcal{E}$ zbiór liczb rzeczywistych 53.
 $\mathcal{R}$ zbiór liczb wymiernych 103.
 $\mathcal{R}_2$ zbiór liczb dwójkowo wymiernych 84.
 $\mathcal{N}$ zbiór liczb niewymiernych 75.
 $\mathcal{C}$ zbiór Cantora 75.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę.

Abstrakcji klasa 182, — zasada 181.

Addytywna rodzina 48.

Aksjomat istnienia 6, — istnienia liczb kardynalnych 97, — jednoznaczności 6, — nieskończoności 50, podzbiorów 44, — różnicy 6, — sumy 6, 44, — wyboru 48, — zastępowania 49, — zbioru potęgowego 44, -y topologii ogólnej 25.

Alef 234.

Algebra Boole'a 32.

Alternatywa (suma logiczna) 1.

Analitycznie przedstawiane funkcje 200, 219.

Antyleksykograficzne (według zasady ostatnich różnic) uporządkowanie 166.

Antynomia Russella 47.

Antysymetryczna (przeciwsymetryczna) relacja 139.

Argument funkcji 55.

Asymetryczna słabo relacja 139.

Atom pierścienia Boole'a 89.

Baza Hamela 225, — operacji 86, — zbioru 201.

Bernsteina wzór 240.

Boole'a algebra 32, — pierścień 34.

Borelowski zbiór 77, — rzędu α 200.

Brzegowy zbiór 31.

Cantora-Bendisona twierdzenie 219.

Cantora-Bernsteina twierdzenie 113.

Cantora zbiór 75.

Charakterystyczna funkcja zbioru 70.

Ciąg zbiorów 35, 49.

Ciąg 56, — pozaskończony ciągły 197, — pozaskończony rosnący 196, — pozaskończony typu α 196, — zbiorów zbieżny 70.

Ciągła funkcja 72, -y ciąg pozaskończony 197, -y zbiór 148.

Continuum hipoteza 106, 223, 244, — hipoteza uogólniona 244, — moc 120.

Cyfry rozwinięcia liczby porządkowej 212.

Częściowa funkcja 58, -o porządkująca relacja 171, -o uporządkowane zbiory izomorficzne 176, -o uporządkowany zbiór 171.

Czynnik koniunkcji 1.

De Morgana prawa 4, 40.

Dobrze porządkująca relacja 185.

Dodawanie naturalne 215.

Dolna granica ciągu zbiorów 70, — klasa przekroju 147, -y kres 172.

Domknięcie zbioru 25.

Domknięta dziedzina 35, -y zbiór 26.

Dowód efektywny 39.

Dwoistości zasada 37.

Dwuczęłowa relacja 54.

Dziedzicznie wolna od kwadratów liczba 250.

Dziedzina domknięta 35, — lewostronna relacji 54, — prawostronna relacji 54.

Efektywny dowód 39.

Element jednostkowy (jedność) 172, — maksymalny (nasycony) 227, — zbioru 5, — zerowy (zero) 172, -y tworzące grupy 291.

Epsilonowa liczba 210.

Euklidesowa przestrzeń 75.

Funkcja 55, — charakterystyczna zbioru 70, — ciągła 72, — częściowa 58, — n zmiennych 59, — odwrotna 56, — przedstawialna analitycznie 200, 219, — regularna 83, — regularna na zbiorze częściowo uporządkowanym 227, — różnowartościowa (wzajemnie jednoznaczna) 56, — rzutowa 80, — ustalająca podobieństwo zbiorów 141, — zdaniowa o jednym argumentie 38, — zdaniowa o ograniczonym zakresie zmienności argumentów 38, — zdaniowa rzędu p 251, — zdaniowa rzędu 0 251, — zdaniowa wielu argumentów 41, — zdaniowa zupełna 261, — złożona 58.

Gęsty zbiór 145.
Główne liczby mnożenia 216.
Górna granica ciągu zbiorów 70, — klasa przekroju 147, — y kres 171.
Granica ciągu pozaskończonego 196, — dolna ciągu zbiorów 70, — górna ciągu zbiorów 70.
Graniczna liczba 195.
Grupa 289, — wolna 291.

Hamel baza 225.
Hausdorffa operacja 85, — rozkład paradoksalny 298, — wzór rekurencyjny 239, — wzór uogólniony 240.
Hessenberga twierdzenie 190.
Hipoteza continuum 106, 223, 244, — uogólniona 244.

Ideal pierwszy 177, — struktury 177.
Iloczyn kartezjański (produkt) zbiorów 52, — liczb kardynalnych 110, 130, — liczb kardynalnych uogólniony 130, — logiczny (koniunkcja) 1, — logiczny uogólniony 39, — typów porządkowych 159, — typów według argumentu 170, — zbiorów 7, — zbiorów rodziny 46.

Ilorazowy pierścień 184.
Implikacja 1.
Indeks liczby początkowej 230.
Indukcji pozaskończonej zasada 187.
Indukcyjna rodzina zbiorów 230.
Inkluzja (zawieranie) 8.
Interpretacja naturalna 26, — i metoda 257.
Izolowany punkt 124.
Izometryczne przekształcenie 120.
Izomorficzne pierścienie Boole'a 90, — relacje 141, — zbiory częściowo uporządkowane 176.
Izomorfizm 141.

Jednostkowy element (jedność) 172, — zbiór 46.
Jedność pierścienia 15.
Jednoznaczności aksjomat 6.

Kardynalna liczba 97, 183.
Kartezjański iloczyn (produkt) zbiorów 52.
Klasa abstrakcji 182, — dolna przekroju 147, — górna przekroju 147.
Kondensacji punkt 124.
Koniunkcja (iloczyn logiczny) 1, — czynnik 1, — i prawo łączności 3, — i prawo przemienności 3.
Kontrapozycji prawo 4.
Kostka n-wymiarowa 75.
Königa twierdzenie 131.
Kres dolny 172, — górny 171.
Krytyczna liczba 197.

Kwantyfikator duży (ogólny) 39, — mały (szczegółowy) 39, — ów relatywizowania 258.

Leksykograficzne (według zasady pierwszych różnic) uporządkowanie 167.
Lewostronna dziedzina relacji 54.
Liczba dziedzicznie wolna od kwadratów 259, — epsilonowa 210, — graniczna 195, — kardynalna 97, 183, — krytyczna 197, — nieosiągalna 233, — początkowa 230, — porządkowa 193, — porządkowa w sensie v. Neumanna (l. p. N.) 247, — regularna 233, — współkońcowa 196.
Liczby główne mnożenia 216, — klasy drugiej 216, — klasy pierwszej 216.
Luka 147.

Łączności prawa 10, 97, — prawa uogólnione 65, 127, — prawo dla sumy typów porządkowych 165.
Luzina rzeszoto 85.

Maksimum zasada 227.
Maksymalny (nasycony) element 227.
Metoda interpretacji 257, — przekątni 101, — zapełniania luk 149, — zerowo-jedynkowa 3.
Mnożenie naturalne 215.
Moc continuum 120, — (liczba kardynalna) zbioru skończonego 99, — liczb porządkowych 216.
Mocno niezależna rodzina 77.
Model 258, — normalny 262, — specjalny 273.
Modułarna struktura 173.
Monotoniczna rodzina zbiorów 145.
Monotoniczności prawa dla dodawania 204, — dla mnożenia 205, — dla odejmowania 205.
Multiplikatywna rodzina 48.

Następnik 145, — pary uporządkowanej 51.
Nasycony (maksymalny) element 227, — (nieprzywiedlny) zbiór 133.
Naturalna interpretacja 26, — e dodawanie 215, — e mnożenie 215.
Negacja 2.
Nieosiągalna liczba 233.
Nieprzywiedlny (nasycony) zbiór 133.
Nierówności dla liczb kardynalnych 112, — porządkowych 193.
Nieskończoności aksjomat 50.
Niewłaściwy przekrój 147.
Niezależna mocno rodzina 77, — e zbiory 22.
Nigdziegęsty zbiór 31.
Normalna postać 20, 23, — y model 262.
n-wymiarowa kostka 75.

n zmiennych funkcja 59, — różnowartościowa 59.

Obraz zbioru 61.
Odcięta 53.
Odcinek 145.
Odwrotna funkcja 56, — relacja 158, — y typ porządkowy 158.
Ogólna potęga typów porządkowych 170, — zasada wyboru 74, — e prawa rozdzielności 66.
Ograniczenie zbioru 30.
Operacja Hausdorffa 85, — Suslina 83.
Osie wsłotrzędnych 53.
Otwarty zbiór 26.

Para uporządkowana 51.
Paradoksalny rozkład Hausdorffa 298.
Permutacja zbioru 59.
Pewnik uporządkowania 223.
Pierścień ilorazowy 184, — ie Boole'a izomorficzne 90, — ie przemienne 15.
Pierwszy ideal 177.
Pochłaniania prawa 4.
Pochodna zbioru 31, — rzędu α 199.
Początkowa liczba 230.
Podobne zbiory 141.
Podwójnego przeczenia prawo 4, — uzupełnienia prawo 18.
Podzbiór 8, — właściwy 8.
Podział zbioru 171.
Pole relacji 54.
Poprzednik 145, — pary uporządkowanej 51.
Porządkowa liczba 193, — w sensie v. Neumanna (l. p. N.) 247.
Porządkowy typ 143, 144.
Postać normalna 20, 23.
Potęga liczby kardynalnej 111, — liczby porządkowej 209, — ogólna typów porządkowych 170, — typu porządkowego 160.
Potęgową skalę 242, — y zbiór 44.
Pozaskończonej indukcji zasada 187.
Pozaskończony ciąg ciągły 197, — rosnący 196, — typu α 196.
Prawa de Morgana 4, 40, — łączności 10, 97, — łączności uogólnione 65, 127, — monotoniczności dla dodawania 204, — monotoniczności dla odejmowania 205, — monotoniczności dla odejmowania 205, — pochłaniania 4, — przemienności 10, 97, — rozdzielności 11, — rozdzielności ogólne 66, — tautologii 4, 11.
Prawie rozłączne zbiory 17, — równe zbiory 17.
Prawo asymetrii relacji mniejszości 113, — kontrapozycji 4, — logiczne (tauto-

logia) 3, 39, — łączności alternatywy 3, — łączności dla sumy typów porządkowych 165, — łączności koniunkcji 3, — podwójnego przeczenia 4, — podwójnego uzupełnienia 18, — potęgowania produktu 98, — przemienności alternatywy 3, — przemienności koniunkcji 3, — przemienności uogólnione 65, 127, — rozdzielności drugie 3, — rozdzielności mnożenia względem odejmowania 206, — rozdzielności pierwsze 3, — rozdzielności uogólnione 166, — sprzeczności 4, — sylogizmu 4, — trychotomii relacji mniejszości 113, — wyłączonego środka 4.

Prawostronna dziedzina relacji 54.
Problem rozstrzygalności 25.
Produkt (iloczyn kartezjański) zbiorów 52, — uogólniony 73.
Przechodnia relacja 139.
Przeciwwzrost zbioru 61.
Przeciwsymetryczna (antysymetryczna) relacja 139.
Przeciwzrotna relacja 139.
Przedłużenie funkcji 58.
Przedział 145.
Przekątni metoda 101.
Przekrój niewłaściwy 147, — właściwy 147, — zbioru 147.
Przekształcenie izometryczne 120.
Przełączalny zbiór 100.
Przemienne pierścienie 15.
Przemienności prawa 10, 97, — prawo uogólnione 65, 127.
Przestrzeń 18, — euklidesowa 75, — topologiczna 25.
Przyporządkowanie 60.
Przystające zbiory 288, — przez rozkład skończony 288.
Punkt 53, — izolowany 124, — kondensacji 124, — osiągalny prostoliniowo 81, — skupienia 26, 31, — stały grupy 290.
Pusty zbiór 9.

Regularna funkcja 83, — na zbiorze częściowo uporządkowanym 227.
Regularna liczba 233.
Rekurencyjny wzór Hausdorffa 239, — Tarskiego 239.
Relacja dobrze porządkująca 185, — dwuczłonowa 54, — odwrotna 158, — porządkująca 140, — porządkująca częściowo 171, — przechodnia 139, — przeciwsymetryczna (antysymetryczna) 139, — przeciwzrotna 139, — równoważności 181, — słabo asymetryczna 139, — spójna 139, — symetryczna 139, — zwrotna 139, — e izomorficzne 141.
Relatywizowanie kwantyfikatorów 258.

Reszta 145, — liczby porządkowej 214.
Rodzina addytywna 48, — mocno niezależna 77, — masyfikatywna 48, — zbiorów 43, — zbiorów induktywna 230, — zbiorów monotoniczna 145.
Rosnący ciąg pozaskończony 196.
Rozdzielna struktura 173.
Rozdzielności drugie prawo 3, — pierwsze prawo 3, — prawa 11, — prawa ogólne 66, — prawo mnożenia względem odejmowania 206, — prawo uogólnione 166.
Rozłączne zbiory 10.
Rozproszony zbiór 146.
Rozstrzygalności problem 25.
Rozwinięcie liczby porządkowej 212.
Równoliczne zbiory 94.
Równoważność 2, -i relacja 181.
Różnica liczb kardynalnych 112, — liczb porządkowych 205, — symetryczna 8, — zbiorów 6.
Różnowartościowa funkcja (wzajemnie jednoznaczna) 56, — *n* zmiennych 59.
Rząd wartości funkcji 62.
Rzeszota Luzina 85.
Rzędna 53.
Rzut zbioru 54.
Rzutowa funkcja 80, -e zbiory 80.
Russella antynomia 47.

Scala potęgowa 242.

Składnik alternatywy 1.
Składowa 20.
Skok 147.
Skończony zbiór 99, 133, — w znaczeniu Dedekinda 136.
Skupienia punkt 26, 31.
Spójna relacja 139.
Sprzeczności prawo 4.
Staty punkt grupy 290.
Stopień elementu grupy 292.
Struktura 173, — modularna 173, — rozdzielną 173, — zupełną 173, — *y* ideał 177.
Suma liczb kardynalnych 109, — logiczna (alternatywa) 1, — logiczna uogólniona 39, — typów porządkowych 159, — typów według argumentu 164, — uogólniona liczb kardynalnych 126, — zbiorów 6, — zbiorów rodziny 44.
Suslina operacja 83, — zgadnienie 157.
Sylogizmu prawo 4.
Symetryczna relacja 139, — różnica 8.

Tarskiego wzór rekurencyjny 239.

Tautologia (prawo logiczne) 3, -i prawa 4, 11.
Topologiczna przestrzeń 25.
Topologii ogólnej aksjomaty 25.
Twierdzenie Cantora-Bendixsona 219, — Cantora-Bernsteina 113, —

Hessenberga 190, — Königa 131, — o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną 198, — o przekątni 106, — o trychotomii 222, — Zermeli 221.

Tworzące elementy grupy 291.

Typ porządkowy 143, 144, — odwrotny 158.

Uogólniona hipoteza continuum 244, — suma liczb kardynalnych 126, — suma logiczna 39, -e prawa łączności 65, 127, -e prawo przemienności 65, 127, -e prawo rozdzielnosti 166, -e prawo rozdzielnosti mnożenia względem dodawania 127, -y iloczyn liczb kardynalnych 130, -y iloczyn logiczny 39, -y produkt 73, -y wzór Hausdorffa 240.

Uporządkowana para 51.

Uporządkowania pewnik 223, -e antyleksykograficzne (według zasady ostatnich różnic) 166, -e leksykograficzne (według zasady pierwszych różnic) 167.

Uporządkowany zbiór 140, — częściowo 171.

Uzupełnienie zbioru 18, 34.

W sobie gesty zbiór 31.

Warstwa funkcji 61.
Wartość funkcji 55, -i funkcji rząd 62.
Właściwy podzbiór 8, — przekrój 147.
Wnętrze zbioru 27.
Wolna grupa 291.
Współkończona liczba 196, -e zbiory 146.
Współpoczątkowe zbiory 146.
Wykładniki rozwinięcia liczby porządkowej 212.
Wykres funkcji 56.
Wzajemnie jednoznaczna (różnowartościowa) funkcja 56.
Wzór Bernsteina 240, — Hausdorffa uogólniony 240, — rekurencyjny Hausdorffa 239, — rekurencyjny Tarskiego 239.

Zagadnienie Suslina 157.

Zasada abstrakcji 181, — dwoistości 37, — indukcji pozaskończony 187, — maksimum 227, — ogólna wyboru 74.
Zastępowania aksjomat 49.
Zawieranie (inkluzja) 8, — relacji 284.
Zbięty ciąg zbiorów 70.
Zbiory częściowo uporządkowane izomorficzne 176, — niezależne 22, — podobne 141, — prawie rozłączne 17, — prawie równe 17, — prawie zawarte 17, — przystające 288, — przystające przez rozkład skończony

288, — rozłączne 10, — równej mocy 96, — równoliczne 94, — współkończowe 146, — współpoczątkowe 146.

Zbiór argumentów funkcji 55, — borelowski 77, — borelowski rzędu α 200, — brzegowy 31, — Cantora 75, — ciągły 148, — częściowo uporządkowany 171, domknięty 26, — gesty 145, — gesty w zbiorze 146, — jednostkowy 46, — nasycony (nieprzywiedlny) 133, — niegdziegesty 31, — otwarty 26, — potęgowy 44, — przebiegalny 100, 136, — pusty 9, — rozproszony 146, — rzutowy 80, — skończony 99, 133, — skończony

w znaczeniu Dedekinda 136, — spełniający dziedzicznie funkcję zdaniową 263, — uporządkowany 140, — w sobie gesty 31, — wartości funkcji 55.

Zdanie 252, — algebry zbiorów 23.

Zdaniowa funkcja rzędu p 251, — rzędu 0 251, — zupełna 261.

Zermeli twierdzenie 221.

Zero (element zerowy) 172.

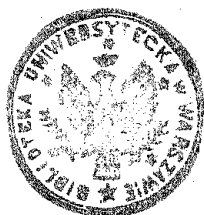
Zerowo-jedynkowa metoda 3.

Złożona funkcja 58.

Zmienne związane 42.

Zupełna funkcja zdaniowa 261, — struktura 173, -y pierścień Boole'a 89.

Zwrotna relacja 139.



WYDAWNICTWA

PAŃSTWOWEGO INSTYTUTU MATEMATYCZNEGO
i
POLSKIEGO TÓWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

CZASOPISMA

FUNDAMENTA MATHEMATICAE I-XXXVIII (tom XXXIX
w druku).

STUDIA MATHEMATICA I-XII (tom XIII w druku).

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMA-
TIQUE I-XXIII (tom XXIV i XXV w druku).

COLLOQUIUM MATHEMATICUM I-II (tom III w przygo-
towaniu).

ZASTOSOWANIA MATEMATYKI (tom I w przygotowaniu).

ROZPRAWY MATEMATYCZNE (zeszyt I w druku).

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

- I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, str. VIII+256.
- II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933, str. X+292, wyczerpane.
- III. C. Kuratowski, Topologie I, 1933, str. X+288.
- IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, 1934, str. VI+194.
- V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, str. IV+332.
- VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, 1935, str. VI+300.
- VII. S. Saks, Theory of the Integral, 1937, str. VIII+348.
- VIII. S. Banach, Mechanika I, wydanie trzecie, 1950, str. VI+234.
- IX. S. Banach, Mechanika II, wydanie trzecie, 1950, str. 235-556.
- X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje analityczne, wydanie drugie niezmiennione, 1948, str. VIII+432.
- XI. W. Sierpiński, Zasady algebry wyższej, wydanie drugie, 1951, str. VIII+436.
- XII. K. Borsuk, Geometria analityczna w n wymiarach, 1950, str. IV+448.
- XIII. W. Sierpiński, Działania nieskończone, wydanie trzecie niezmiennione, 1947, str. XI+503.
- XIV. W. Sierpiński, Rachunek różniczkowy, wydanie drugie niezmiennione, 1947, str. VII+262.
- XV. K. Kuratowski, Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego I, wydanie drugie, 1949, str. 236.