

* DODATEK.

Paradoksalny rozkład kuli.

Zajmiemy się tu. wyprowadzeniem jednej z najbardziej paradoksalnych konsekwencji pewnika wyboru.

Będziemy rozpatrywali zbiory położone na powierzchni K kuli trójwymiarowej o promieniu 1.

Mówimy, że zbiory X i Y zawarte w K są przystające, jeśli istnieje taki obrót φ kuli dookoła środka, że $\varphi(X) = Y$. Piszemy wówczas $X \approx Y$.

Zbiory X i Y są przystające przez rozkład skończony (dokładniej: przez rozkład na n części), jeśli istnieją zbiory $X_1, \dots, X_n$ rozłączne między sobą i zbiory $Y_1, \dots, Y_n$ również rozłączne między sobą i takie, że $X = \sum X_i$, $Y = \sum Y_i$, oraz $X_i \approx Y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Piszemy wówczas $X \approx Y$.

Mówiąc bardziej obrazowo, zbiory X i Y przystają przez rozkład, jeśli można jeden z nich, np. X , podzielić na skończoną liczbę części tak, aby — dokonując odpowiednich obrotów — można było z tych części złożyć zbiór Y .

Można wywnioskować stąd bez trudności, że stosunek $\approx$ jest przechodni:

jeśli $X \approx Y$ i $Y \approx Z$, to $X \approx Z$.

Twierdzenie, któremu poświęcony jest ten dodatek brzmi:

° **Twierdzenie 1.** Powierzchnia K kuli rozkłada się na sumę dwu zbiorów rozłącznych $K = X + Y$ takich, że $X \approx K$ i $Y \approx K$ ¹⁾.

Twierdzenie to można też wysłowić w taki sposób: istnieje rozkład

$$K = \sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j$$

zbioru K na składniki rozłączne taki, że dokonując odpowiednich obrotów na zbiorach $X_1, X_2, \dots, X_m$ otrzymamy z nich zbiory rozłączne dające

¹⁾ Twierdzenie to udowodnili S. Banach i A. Tarski w pracy *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), str. 244—277. Zasadnicze idee tego dowodu pochodzą od F. Hausdorffa. Ob. *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914, str. 469—472.

w sumie cały zbiór K i — podobnie — dokonując odpowiednich obrotów na zbiorach $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ otrzymamy z nich zbiory rozłączne też dające w sumie cały zbiór K .

Jest to wniosek nad wyraz paradoksalny, przeczący na pozór naszym wyobrażeniom o pojęciu pola (lub, ogólniej, miary). Należy jednak zaznaczyć, że pojęcie pola jest nam bezpośrednio dane tylko dla figur „regularnych”, np. takich jak wielokąty sferyczne i zbiory powstające z nich przez dodawanie i mnożenie skończone lub przeliczalne. Nie można bynajmniej twierdzić a priori, że pojęcie pola daje się określić dla wszystkich podzbiorów K ; przeciwnie, twierdzenie 1 wykazuje, że na pewno tak nie jest.

Twierdzenie 1 nie prowadzi więc do sprzeczności, wykazuje tylko zawodność intuicji, jaką wiążemy z pojęciem pola, gdy pragniemy ją stosować do zbiorów dowolnych.

Dowód twierdzenia 1 wymaga wprowadzenia pewnych pojęć pomocniczych z teorii grup¹⁾.

Niech Γ będzie zbiorem, którego elementami są wzajemnie jednoznaczne przekształcenia jakiegokolwiek zbioru A na siebie. Jako A możemy przyjąć np. zbiór K , a jako Γ zbiór wszystkich obrotów kuli dookoła środka.

Na funkcjach należących do Γ dokonywać można działania składania, zwanego też mnożeniem: jeśli φ i ψ są elementami Γ , to $\varphi\psi$ jest przekształceniem określonym wzorem $y = \varphi(\psi(x))$. Przekształcenie odwrotne do φ oznaczamy przez φ^{-1} . Iloczyn $\varphi\varphi^{-1}$ jest przekształceniem, które każdemu $x \in A$ przyporządkowuje ten sam element x . Przekształcenie to nazywamy tożsamościowym i oznaczamy symbolem 1. Iloczyn $\varphi\varphi \dots \varphi$ oznaczamy symbolem φ^n . Zamiast $(\varphi^n)^{-1}$ piszemy φ^{-n} i przyjmujemy $\varphi^0 = 1$. Z łatwością dowodzimy, że $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}$.

Zbiór G przekształceń wzajemnie jednoznacznych zbioru A na siebie nazywamy grupą, jeśli czyni on zadość następującym trzem warunkom:

$$1^0 \ 1 \in G, \quad 2^0 \ \varphi \in G \rightarrow \varphi^{-1} \in G, \quad 3^0 \ (\varphi \in G) \cdot (\psi \in G) \rightarrow (\varphi\psi \in G).$$

Grupą jest więc np. zbiór wszystkich obrotów kuli (o ile przekształcenie tożsamościowe uznamy za obrót). Również zbiór obrotów kuli dookoła stałej osi jest grupą.

¹⁾ Na fakt, że u podstawy twierdzenia 1 leżą własności grupy obrotów przestrzennych, zwracał uwagę już Hausdorff w książce cytowanej w odsyłaczu na str. 228. S. Banach wykazał, że na płaszczyźnie nie jest możliwy paradoksalny rozkład żadnej figury mający własności takie, jak rozkład omówiony w twierdzeniu 1. Pochodzi to stąd, że grupa obrotów płaszczyzny ma inną strukturę, niż grupa obrotów przestrzeni. Por. S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 4 (1923), str. 7—33 oraz J. v. Neumann, *Zur allgemeinen Theorie der Massen*, Fundamenta Mathematicae 13 (1929), str. 73—116.

Niech G będzie grupą przekształceń zbioru A na siebie. Dla każdego $x \in A$ oznaczamy przez P_x zbiór wszystkich elementów $\varphi(x)$, gdzie $\varphi \in G$.

Z 1^o wynika, że

$$(1) \quad x \in P_x.$$

Z 2^o i 3^o wyprowadzimy:

$$(2) \quad \text{Jeśli } P_x \cdot P_y \neq 0, \text{ to } P_x = P_y.$$

Istotnie, załóżmy, że $z \in P_x$ i $z \in P_y$. Istnieją zatem takie przekształcenia φ i ψ należące do G , że $z = \varphi(x)$ i $z = \psi(y)$, skąd wynika, że $\varphi(x) = \psi(y)$, a więc $x = \varphi^{-1}\varphi(x) = \varphi^{-1}(\psi(y)) = \varphi^{-1}\psi(y)$. Dla dowolnego $\vartheta \in G$ wynika stąd, że $\vartheta(x) = \vartheta\varphi^{-1}\psi(y)$, co wobec $\vartheta\varphi^{-1}\psi \in G$ dowodzi, że $\vartheta(x) \in P_y$. Ponieważ elementy $\vartheta(x)$ tworzą cały zbiór P_x , więc wnosimy stąd, że $P_x \subset P_y$. Podobnie $P_y \subset P_x$. Wzór (2) jest więc udowodniony.

Element $x \in A$ nazywa się *punktem stałym* grupy G , jeśli istnieje takie nietożsamościowe przekształcenie $\varphi \in G$, że $\varphi(x) = x$. Zbiór tych elementów oznaczmy przez D .

Udowodnimy, że:

$$(3) \quad \text{Jeśli } x \in D, \text{ to } P_x \subset D.$$

Istotnie, jeśli $z \in P_x$, to $z = \vartheta(x)$, czyli $x = \vartheta^{-1}(z)$ dla pewnego $\vartheta \in G$. Z $x \in D$ wynika, że dla pewnego $\xi \in G$ jest $\xi \neq 1$ i $\xi(x) = x$. Podstawiając tu $x = \vartheta^{-1}(z)$ otrzymamy $\xi\vartheta^{-1}(z) = \vartheta^{-1}(z)$, skąd wynika, że $\vartheta\xi\vartheta^{-1}(z) = z$. Element z jest więc punktem stałym grupy G ; istotnie, przekształcenie $\vartheta\xi\vartheta^{-1}$ nie jest tożsamościowe, gdyż z $\vartheta\xi\vartheta^{-1} = 1$ wynikałoby $\xi = \vartheta^{-1}\vartheta = 1$.

Opierając się na (3) udowodnimy, że jeśli zbiór M zawiera dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów P_x , gdzie $x \in A - D$, to

$$(4) \quad A - D = \sum_{\varrho \in G} \varrho(M).$$

Istotnie, jeśli $t \in \varrho(M)$, to

$$t = \varrho(x),$$

gdzie $x \in M$; wtedy $t \in P_x$, przy czym, jak wynika z (2) i (3), $P_x \subset A - D$, a więc $t \in A - D$.

Załóżmy na odwrót, że $t \in A - D$. Iloczyn $P_t \cdot M$ zawiera w myśl założenia dokładnie jeden element, np. x . Ponieważ t i x są elementami P_t , więc istnieje takie $\varrho \in G$, że $t = \varrho(x)$, co wobec $x \in M$ daje $t \in \varrho(M)$, a zatem $t \in \sum \varrho(M)$, c. b. d. o.

Dla ilustracji twierdzeń (1)–(4) bierzmy $A = K$ i przyjmijmy za G grupę obrotów kuli dookoła stałej osi. Zbiory P_x są wówczas równoleżnikami kuli, a D składa się z dwu punktów; za M przyjąć możemy np. połowę dowolnego południka zawartą między dwoma biegunami. Twierdzenia (1)–(4) są wówczas geometrycznie oczywiste.

Niech φ i ψ będą dowolnymi przekształceniami wzajemnie jednoznaczными zbioru A na siebie. Istnieje wówczas najmniejsza grupa $G_{\varphi\psi}$ zawierająca φ i ψ . Grupa ta składa się mianowicie ze wszystkich przekształceń kształtu

$$(*) \quad \varphi^{k_1}\psi^{l_1}\varphi^{k_2}\psi^{l_2}\dots\varphi^{k_n}\psi^{l_n},$$

gdzie $n \geq 1$, a $k_1, l_1, \dots, k_n, l_n$ są liczbami całkowitymi, z których tylko k_1 i l_n mogą być równe 0 (dla $n=1$ i $k_1=l_1=0$ otrzymujemy więc w szczególności przekształcenie tożsamościowe).

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że każda grupa zawierająca φ i ψ zawiera wszystkie iloczyny (*), zbiór zaś wszystkich tych iloczynów czyni zadość warunkom 1^o–3^o, a więc jest grupą.

Przekształcenia φ i ψ nazywają się *elementami tworzącymi* grupy $G_{\varphi\psi}$. Grupa o dwu elementach tworzących jest zatem przeliczalna, gdyż ilość wszystkich iloczynów (*) jest przeliczalna.

Grupę $G_{\varphi\psi}$ nazywamy *wolną*, jeśli każdy iloczyn (*) jest różny od 1 z wyjątkiem przypadku, gdy $n=1$ i $k_1=l_1=0$.

Twierdzenie 2. Jeśli grupa $G_{\varphi\psi}$ jest wolna, to dla każdego $\vartheta \in G_{\varphi\psi}$ istnieje dokładnie jedna liczba $n \geq 1$ i dokładnie jeden taki układ liczb całkowitych $k_1, l_1, \dots, k_n, l_n$, z których co najwyżej k_1 i l_n mogą być równe 0, a pozostałe są różne od 0, że

$$(5) \quad \vartheta = \varphi^{k_1}\psi^{l_1}\varphi^{k_2}\psi^{l_2}\dots\varphi^{k_n}\psi^{l_n}.$$

Dowód. Istnienie co najmniej jednej liczby n i układu $k_1, l_1, \dots, k_n, l_n$ spełniającego warunek (5) wynika z definicji grupy wolnej. Załóżmy, że

$$\varphi^{k_1}\psi^{l_1}\dots\varphi^{k_n}\psi^{l_n} = \varphi^{p_1}\psi^{q_1}\dots\varphi^{p_r}\psi^{q_r}.$$

Mnożąc tę równość prawostronnie przez ψ^{-q_r} , a następnie przez φ^{-p_r} , otrzymamy

$$\varphi^{k_1}\psi^{l_1}\dots\varphi^{k_n}\psi^{l_n-q_r}\varphi^{-p_r} = \varphi^{p_1}\psi^{q_1}\dots\varphi^{p_{r-1}}\psi^{q_{r-1}}.$$

Powtarzając $r-1$ razy to samo przekształcenie dojdziemy do równości postaci

$$(6) \quad \varphi^{k_1}\psi^{l_1}\dots\varphi^{k_n}\psi^{l_n-q_r}\varphi^{-p_r}\dots\psi^{-q_1}\varphi^{-p_1} = 1.$$

Gdyby $l_n - q_r \neq 0$, to równość (6) nie mogłaby zachodzić w myśl definicji grupy wolnej. Musi być zatem $l_n = q_r$ i (6) redukuje się do

$$\varphi^{k_1}\psi^{l_1}\dots\varphi^{k_n-p_r}\psi^{q_{r-1}}\varphi^{-p_{r-1}}\dots\psi^{-q_1}\varphi^{-p_1} = 1.$$

Z równości tej wynika podobnie, że $k_n = p_r$. Powtarzając dalej to rozumowanie wnosimy, że $l_{n-1} = q_{r-1}$, $k_{n-1} = p_{r-1}$ itd. Gdyby było $n > r$, to po $2r$ krokach doszlibyśmy do równości

$$\varphi^{k_1} \psi^{l_1} \dots \varphi^{k_{n-r}} \psi^{l_{n-r}} = 1,$$

która w grupie wolnej możliwa jest tylko, gdy $l_{n-r} = 0$. To jednak przeczy założeniu, że żadna z liczb $k_1, l_1, \dots, k_n, l_n$, prócz ewentualnie pierwszej i ostatniej, nie jest zerem. Podobnie dowodzi się, że nie może być $r > n$. A zatem $n = r$ i wobec udowodnionych równości: $l_n = q_r$, $k_n = p_r$, $l_{n-1} = q_{r-1}$, $k_{n-1} = p_{r-1}, \dots$, dowód twierdzenia 2 jest zakończony.

Sumę $|k_1| + |l_1| + |k_2| + |l_2| + \dots + |k_n| + |l_n|$ modułów wykładników występujących po prawej stronie wzoru (5) nazywamy *stopniem* elementu ϑ . Z twierdzenia 2. wynika, że dla grup wolnych stopień ϑ jest wyznaczony jednoznacznie przez ϑ . Stopniem przekształcenia tożsamościowego 1 jest 0. Jeśli ϑ ma stopień $n+1$, to $\vartheta = \varphi^{\pm 1} \varrho$ lub $\vartheta = \psi^{\pm 1} \varrho$, gdzie ϱ ma stopień n , przy czym ϱ jest wyznaczone jednoznacznie przez ϑ . Na odwrót, jeśli ϱ ma stopień n , to $\varphi^{\pm 1} \varrho$ i $\psi^{\pm 1} \varrho$ mają stopień $n+1$ albo $n-1$.

Następujące twierdzenie stanowi podstawę do dowodu podanego dalej ważnego twierdzenia 5:

Twierdzenie 3¹⁾. Grupę wolną $G_{\varphi\psi}$ można przedstawić jako sumę takich trzech składników rozłącznych

$$G_{\varphi\psi} = A + B + C,$$

że dla każdego $\vartheta \in G_{\varphi\psi}$ spełnione są równoważności

- (7) $(\vartheta \in A) \equiv (\varphi\vartheta \in B + C),$
 (8) $(\vartheta \in A) \equiv (\psi\vartheta \in B) \equiv (\psi^2\vartheta \in C).$

Dowód. Niech $G_{\varphi\psi}^{(n)}$ będzie zbiorem tych przekształceń należących do grupy $G_{\varphi\psi}$, które mają stopień n . Przyjmijmy $A_0 = \{1\}$ i $B_0 = C_0 = 0$. Zbiory A_0 , B_0 i C_0 są więc rozłączne i

$$G_{\varphi\psi}^{(0)} = A_0 + B_0 + C_0.$$

Założmy, że dla $n \geq 0$ zbiory A_n , B_n i C_n są rozłączne i dają w sumie $G_{\varphi\psi}^{(n)}$. Określmy podobny rozkład zbioru $G_{\varphi\psi}^{(n+1)}$ jak następuje.

Niech ϑ będzie elementem stopnia $n+1$. ϑ może więc być przedstawione jednoznacznie jako iloczyn $\varphi^{\pm 1} \varrho$ lub $\psi^{\pm 1} \varrho$, gdzie ϱ ma stopień n (por. twierdzenie 2). Jeśli $\vartheta = \varphi^{\pm 1} \varrho$, to zaliczymy ϑ do A_{n+1} , jeśli $\varrho \in B_n + C_n$; jeśli zaś $\varrho \in A_n$, to ϑ zaliczymy do B_{n+1} . Jeśli natomiast $\vartheta = \psi \varrho$, to ϑ zaliczymy do B_{n+1} , C_{n+1} lub A_{n+1} w zależności od tego, czy ϱ jest elementem A_n , B_n , czy C_n . Wreszcie, jeśli $\vartheta = \psi^{-1} \varrho$, to ϑ zaliczymy do C_{n+1} , A_{n+1} lub B_{n+1} w zależności od tego, czy ϱ jest elementem A_n , B_n , czy C_n .

¹⁾ F. Hausdorff, ibid., str. 471.

Każdy element ϑ stopnia $n+1$ został w ten sposób zaliczony do jednego ze zbiorów A_{n+1} , B_{n+1} , C_{n+1} i przy tym tylko do jednego z nich. Rozkłady na zbiory rozłączne

$$G_{\varphi\psi}^{(n)} = A_n + B_n + C_n$$

są zatem określone przez indukcję.

Przyjmijmy $A = \Sigma A_n$, $B = \Sigma B_n$ i $C = \Sigma C_n$. Zbiory te są oczywiście rozłączne i dają w sumie całą grupę $G_{\varphi\psi}$.

Pozostają do udowodnienia równoważności (7) i (8).

Założmy, że $\vartheta \in A$, tj. że $\vartheta \in A_n$ dla pewnego n . Przekształcenie $\varphi\vartheta$ może być stopnia $n+1$ lub $n-1$, przy czym, aby zbadać, do którego z trzech zbiorów A , B , C iloczyn ten należy, trzeba przedstawić go w postaci $\varphi^{\pm 1} \varrho$ lub $\psi^{\pm 1} \varrho$, gdzie ϱ ma stopień niższy niż $\varphi\vartheta$. Jeśli $\varphi\vartheta$ ma stopień $n+1$, to przedstawieniem tym jest oczywiście $\varphi\varrho$, gdzie $\varrho = \vartheta$, i z definicji zbioru B_{n+1} wnosimy (wobec $\vartheta \in A_n$), że $\varphi\varrho \in B_{n+1}$, a więc $\varphi\varrho = \varphi\vartheta \in B + C$. Jeśli $\varphi\vartheta$ ma stopień $n-1$, to możemy ϑ przedstawić w postaci $\vartheta = \varphi^{-1}(\varphi\vartheta) = \varphi^{-1}\varrho$, przy czym stopień elementu ϱ (równego iloczynowi $\varphi\vartheta$) jest niższy niż stopień ϑ . Gdyby ϱ było elementem A_{n-1} , to mielibyśmy zgodnie z definicją $\varphi^{-1}\varrho \in B_n$, czyli $\vartheta \in B_n$, wbrew założeniu. Zatem ϱ jest elementem $B_{n-1} + C_{n-1}$, skąd otrzymujemy $\varphi\vartheta \in B_{n-1} + C_{n-1} \subset B + C$. W ten sposób ustaliliśmy wynikanie

$$(\vartheta \in A) \rightarrow (\varphi\vartheta \in B + C).$$

Założmy teraz, że $\varphi\vartheta \in B + C$, tj. że dla pewnego n jest $\varphi\vartheta \in B_n$ lub $\varphi\vartheta \in C_n$. Jeśli ϑ jest stopnia $n-1$, to z $\vartheta \in B_{n-1} + C_{n-1}$ wynika, że $\varphi\vartheta \in A_n$, wbrew założeniu; wnosimy stąd, że $\vartheta \in A_{n-1} \subset A$. Jeśli natomiast ϑ jest stopnia $n+1$, to z $\varphi\vartheta \in B_n + C_n$ i $\vartheta = \varphi^{-1}(\varphi\vartheta)$ wynika na mocy definicji, że $\vartheta \in A_{n+1}$. W każdym więc przypadku jest $\vartheta \in A$, co dowodzi implikacji

$$(\varphi\vartheta \in B + C) \rightarrow (\vartheta \in A).$$

Równoważność (7) jest w ten sposób udowodniona.

W podobny sposób dowodzi się równoważności (8). Założmy, że $\vartheta \in A$, tzn. że dla pewnego n jest $\vartheta \in A_n$. Jeśli $\psi\vartheta$ ma stopień $n+1$ to na mocy definicji $\psi\vartheta \in B_{n+1}$. Jeśli natomiast $\psi\vartheta$ ma stopień $n-1$, to wobec $\vartheta = \psi^{-1}(\psi\vartheta)$ i $\vartheta \in A_n$ wnosimy, że $\psi\vartheta \in B_{n-1}$. Udowodniliśmy zatem, że

$$(\vartheta \in A) \rightarrow (\psi\vartheta \in B).$$

Na odwrót, jeśli $\psi\vartheta \in B$, tj. jeśli istnieje takie n , że $\psi\vartheta \in B_n$, to ϑ może być albo stopnia $n-1$, albo stopnia $n+1$. W pierwszym przypadku wnosimy wprost z definicji, że $\vartheta \in A_n$; jeśli zaś ϑ ma stopień $n+1$, to

z $\vartheta = \varphi^{-1}(\psi\vartheta)$ wynika, że $\vartheta \in A_{n+1}$. Wyprowadziliśmy w ten sposób implikację $(\psi\vartheta \in B) \rightarrow (\vartheta \in A)$, a zatem i równoważność

$$(\vartheta \in A) \equiv (\psi\vartheta \in B).$$

Zupełnie analogicznie dowodzi się pozostałej równoważności

$$(\psi\vartheta \in B) \equiv (\psi^2\vartheta \in C).$$

Twierdzenie 4¹⁾. Istnieją takie dwa obroty φ i ψ kuli K , że grupa $G_{\varphi\psi}$ jest wolna.

Dowód. Umieścimy początek prostokątnego układu współrzędnych w środku kuli i obierzmy jako przekształcenie χ obrót o kąt α dokoła osi Oz , a jako przekształcenie ω — obrót o kąt π dokoła osi leżącej w płaszczyźnie xOz i nachylonej pod kątem $\theta/2$ do osi Ox . Założmy przy tym, że kąt α nie jest wymierną wielokrotnością kąta prostego. Kąt θ pozostawimy na razie nieokreślony.

Przy przekształceniach χ^n , ω , $\chi^n\omega$ punkt (x, y, z) przechodzi odpowiednio na punkty (x', y', z') , (x'', y'', z'') , (x''', y''', z''') określone równaniami

$$\chi^n \begin{cases} x' = x \cos n\alpha - y \sin n\alpha, \\ y' = x \sin n\alpha + y \cos n\alpha, \\ z' = z, \end{cases} \quad \omega \begin{cases} x'' = x \cos \theta + z \sin \theta, \\ y'' = -y, \\ z'' = x \sin \theta - z \cos \theta, \end{cases}$$

$$\chi^n \omega \begin{cases} x''' = x \cos \theta \cos n\alpha + y \sin n\alpha + z \sin \theta \cos n\alpha, \\ y''' = x \cos \theta \sin n\alpha - y \cos n\alpha + z \sin \theta \sin n\alpha, \\ z''' = x \sin \theta - z \cos \theta. \end{cases}$$

Wykażemy, że można tak obrać kąt θ , aby dla żadnego układu różnych od 0 liczb całkowitych $s_1, \dots, s_n$ nie zachodziła równość

$$\chi^{s_1}\omega \chi^{s_2}\omega \dots \chi^{s_n}\omega = 1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Obierzmy w tym celu dowolny — lecz na przeciąg dalszych rachunków stały — układ n liczb całkowitych $s_1, \dots, s_n$ różnych od 0 i oznaczmy przez $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$ punkty, na które przechodzi punkt $P(0, 0, 1)$ przez zastosowanie doń obrotów

$$\chi^{s_n}\omega, \chi^{s_{n-1}}\omega \chi^{s_n}\omega, \dots, \chi^{s_1}\omega \chi^{s_2}\omega \dots \chi^{s_n}\omega.$$

Udowodnimy przez indukcję, że współrzędne x_i, y_i, z_i punktu P_{n-i+1} ($i=1, \dots, n$) mają następującą własność:

$x_i: \sin \theta$ oraz $y_i: \sin \theta$ są wielomianami stopnia $i-1$ względem $\cos \theta$; natomiast z_i jest wielomianem stopnia i względem $\cos \theta$. Współczynniki tych wielomianów zależą przy tym od α .

¹⁾ F. Hausdorff, ibid., str. 470.

Inaczej mówiąc udowodnimy, że

$$(9) \quad x_i = \sin \theta [a_i \cos^{i-1} \theta + \dots], \quad y_i = \sin \theta [b_i \cos^{i-1} \theta + \dots], \quad z_i = c_i \cos^i \theta + \dots,$$

gdzie kropki zastępują wielomiany względem $\cos \theta$ stopni co najwyżej $i-2$ lub $i-1$.

Twierdzenie to jest prawdziwe dla $i=1$, gdyż punkt P_n ma współrzędne

$$x_1 = \sin \theta \cos s_n \alpha, \quad y_1 = \sin \theta \sin s_n \alpha, \quad z_1 = -\cos \theta.$$

Założmy wzory (9) dla pewnej wartości i . Ze wzorów na przekształcenie $\chi^{s_{n-i}}\omega$ wnosimy, że

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i \cos \theta \cos s_{n-i} \alpha + y_i \sin s_{n-i} \alpha + z_i \sin \theta \cos s_{n-i} \alpha \\ &= \sin \theta [(a_i + c_i) \cos s_{n-i} \alpha \cdot \cos^i \theta + \dots], \\ y_{i+1} &= x_i \cos \theta \sin s_{n-i} \alpha - y_i \cos s_{n-i} \alpha + z_i \sin \theta \sin s_{n-i} \alpha \\ &= \sin \theta [(a_i + c_i) \sin s_{n-i} \alpha \cdot \cos^i \theta + \dots], \\ z_{i+1} &= x_i \sin \theta - z_i \cos \theta = \sin^2 \theta [a_i \cos^{i-1} \theta + \dots] - [c_i \cos^{i+1} \theta + \dots] \\ &= -(a_i + c_i) \cos^{i+1} \theta + \dots \end{aligned}$$

Wynika stąd, że wzory (9) spełnione są też dla następnej wartości i . Dla współczynników a_i, b_i, c_i otrzymujemy przy tym wzory zwrotne

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= (a_i + c_i) \cos s_{n-i} \alpha, & b_{i+1} &= (a_i + c_i) \sin s_{n-i} \alpha, \\ c_{i+2} &= -(a_i + c_i), \end{aligned}$$

z których wynika, że

$$(a_{i+1} + c_{i+1}) = -(a_i + c_i) [1 - \cos s_{n-i} \alpha] = -2(a_i + c_i) \sin^2 s_{n-i} \alpha / 2.$$

Wnosimy stąd przez indukcję, że

$$a_{n-1} + c_{n-1} = (-1)^{n-2} 2^{n-2} (a_1 + c_1) \cdot \prod_{i=2}^{n-1} \sin^2 s_i \alpha / 2,$$

a zatem, wobec $a_1 = \cos s_n \alpha$, $c_1 = -1$,

$$a_{n-1} + c_{n-1} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \prod_{i=2}^n \sin^2 s_i \alpha / 2.$$

Wynika stąd na podstawie wzorów zwrotnych dla a_i, b_i i c_i , że

$$a_n = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \prod_{i=2}^n \sin^2 s_i \alpha / 2 \cdot \cos s_1 \alpha,$$

$$b_n = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \prod_{i=2}^n \sin^2 s_i \alpha / 2 \cdot \sin s_1 \alpha,$$

$$c_n = (-1)^n 2^{n-1} \prod_{i=2}^n \sin^2 s_i \alpha / 2.$$

W myśl założenia, kąt α nie jest wymierną wielokrotnością 2π ; a więc a_n , b_n i c_n są różne od 0.

Wynika stąd, że jeśli dla dowolnego (stałego) układu liczb $s_1, s_2, \dots, s_n$ różnych od 0 zachodzi równość

$$(10) \quad \chi^{s_1} \omega \chi^{s_2} \omega \dots \chi^{s_n} \omega = 1,$$

to liczba $\cos \theta$ spełnia równania

$$a_n \cos^{n-1} \theta + \dots = 0, \quad b_n \cos^{n-1} \theta + \dots = 0, \quad c_n \cos^n \theta + \dots = 0,$$

które nie są spełnione tożsamościowo. Dla danego układu $s_1, \dots, s_n$ istnieje więc co najwyżej skończona liczba wartości dla $\cos \theta$, przy których spełniona jest równość (10). Ponieważ zaś istnieje przeliczalnie wiele różnych układów $(s_1, \dots, s_n)$, więc istnieje nieprzeliczalnie wiele takich wartości dla $\cos \theta$, że wzór (10) nie jest spełniony dla żadnych $s_1, \dots, s_n$ różnych od 0.

Grupa $G_{\chi\omega}$ nie jest wolna, gdyż np. $\omega^2 = 1$. Łatwo jednak z przekształceń χ i ω utworzyć grupę wolną. Przyjmijmy mianowicie

$$(11) \quad \varphi = \chi\omega\chi, \quad \psi = \chi^2\omega\chi^2.$$

Przypuśćmy, że istnieje taki układ liczb całkowitych $k_1, l_1, \dots, k_n, l_n$, różny od układu 0,0, że

$$(12) \quad \varphi^{k_1} \psi^{l_1} \dots \varphi^{k_n} \psi^{l_n} = 1.$$

Na podstawie wzorów (11) otrzymujemy stąd

$$\underbrace{\chi^{\pm 1} \omega \chi^{\pm 1} \dots \chi^{\pm 1} \omega \chi^{\pm 1}}_{|k_1|} \cdot \underbrace{\chi^{\pm 2} \omega \chi^{\pm 2} \dots \chi^{\pm 2} \omega \chi^{\pm 2}}_{|l_1|} \dots \underbrace{\chi^{\pm 1} \omega \chi^{\pm 1} \dots \chi^{\pm 1} \omega \chi^{\pm 1}}_{|k_n|} \cdot \underbrace{\chi^{\pm 2} \omega \chi^{\pm 2} \dots \chi^{\pm 2} \omega \chi^{\pm 2}}_{|l_n|} = 1.$$

Jest to jednak niemożliwe, żadna bowiem równość postaci (10) nie jest spełniona przez χ i ω . Wnosimy stąd, że nie zachodzi żadna równość postaci (12), tj. że grupa $G_{\varphi\psi}$ jest wolna.

Opierając się na tych twierdzeniach pomocniczych wyprowadzimy teraz twierdzenie o tzw. paradoksalnym rozkładzie Hausdorffa:

Twierdzenie 5¹⁾. Powierzchnię K kuli można rozłożyć na 3 zbiory rozłączne: $K = P + Q + D$ takie, że zbiór D jest przeliczalny, a zbiory P i Q przystają do $K - D$ przez rozkład: $P \approx K - D$ i $Q \approx K - D$.

¹⁾ F. Hausdorff, ibid., str. 472.

Dowód. Niech φ i ψ będą obrotami takimi, że grupa $G_{\varphi\psi}$ jest wolna. Rozłożmy tę grupę na trzy części A, B, C w taki sposób, by spełnione były równoważności (7) i (8).

Zbiór D punktów stałych grupy $G_{\varphi\psi}$ jest przeliczalny, ponieważ grupa $G_{\varphi\psi}$ jest przeliczalna, a dla każdego przekształcenia $\vartheta \neq 1$ tej grupy istnieją tylko 2 punkty $x \in K$ czyniące zadość równości $\vartheta(x) = x$.

Na mocy (1), (2) i (3) zbiór $K - D$ rozkłada się na sumę zbiorów rozłącznych i niepustych:

$$K - D = \sum_{x \in K - D} P_x.$$

W myśl pewnika wyboru istnieje zatem zbiór M , który z każdym ze zbiorów P_x (gdzie $x \in K - D$) ma dokładnie jeden punkt wspólny. Przyjmijmy

$$(13) \quad K_A = \sum_{\varrho \in A} \varrho(M), \quad K_B = \sum_{\varrho \in B} \varrho(M), \quad K_C = \sum_{\varrho \in C} \varrho(M),$$

$$(14) \quad P = K_A, \quad Q = K_B + K_C.$$

Wykażemy, iż zbiory te czynią zadość tezie twierdzenia.

Z (4) wynika przede wszystkim, że

$$K - D = \sum_{\varrho \in A} \varrho(M) + \sum_{\varrho \in B} \varrho(M) + \sum_{\varrho \in C} \varrho(M) = K_A + K_B + K_C = P + Q,$$

gdzie $G = A + B + C$. A zatem

$$(15) \quad K = D + P + Q.$$

Zbiory K_A, K_B i K_C są rozłączne między sobą. Istotnie, gdyby przypuścić, że $x \in K_A \cdot K_B$, to istniałyby elementy $m_1, m_2 \in M$ i przekształcenia ϱ_1, ϱ_2 takie, że $\varrho_1 \in A, \varrho_2 \in B$ i $x = \varrho_1(m_1) = \varrho_2(m_2)$. Wynikałoby stąd, że $m_1 = \varrho_1^{-1} \varrho_2(m_2)$, a więc $m_1 \in P_{m_2}$, co z uwagi na założenie, że M ma tylko jeden element wspólny z każdym ze zbiorów P_x daje $m_1 = m_2$. Wzór $m_1 = \varrho_1^{-1} \varrho_2(m_2)$ wskazywałby więc na to, że albo $\varrho_1^{-1} \varrho_2 = 1$, albo m_1 jest punktem stałym grupy $G_{\varphi\psi}$. Pierwsza możliwość nie zachodzi, gdyż daje ona $\varrho_1 = \varrho_2$, podczas gdy zbiory A i B są rozłączne, druga — również nie zachodzi, gdyż żaden z punktów zbioru M nie jest punktem stałym grupy $G_{\varphi\psi}$.

Zbiory K_A i K_B są zatem rozłączne. Podobnie można wykazać, że $K_B \cdot K_C = K_C \cdot K_A = 0$. Wynika stąd, że rozkład (15) jest rozkładem na zbiory rozłączne.

Pozostaje do udowodnienia, że $P \approx K-D$ i $Q \approx K-D$. Zauważmy w tym celu, że

$$\varphi(P) = \sum_{\varrho \in A} \varphi \varrho(M).$$

Zgodnie z (7) iloczyn $\varphi \varrho$ przebiega przez zbiór $B+C$, gdy ϱ przebiega przez zbiór A . Zatem

$$\varphi(P) = \sum_{\sigma \in B+C} \sigma(M) = \sum_{\sigma \in B} \sigma(M) + \sum_{\sigma \in C} \sigma(M) = K_B + K_C,$$

co dowodzi, że

$$(16) \quad P = K_B + K_C.$$

Z pierwszej równoważności (8) wnosimy podobnie, że $\psi(P) = \psi(K_A) = K_B$, zaś z drugiej — że $\psi^2(K_A) = K_C$. Otrzymujemy stąd

$$K_B = P, \quad K_C = P = K_B + K_C = Q.$$

Wzór (16) wykazuje zatem, że zbiór P można rozłożyć na dwie części, z których jedna przystaje do P a druga do Q . Wynika stąd, że

$$P \approx P + Q = K - D.$$

Zupełnie podobnie wykażemy, że $Q \approx K - D$. Istotnie, $Q = K_B + K_C$, przy czym $K_B = P$, zaś $K_C = Q$. Twierdzenie 5 jest zatem udowodnione.

Aby od twierdzenia 5 przejść do twierdzenia 1, udowodnimy

Twierdzenie 6¹⁾. Jeśli D jest zbiorem przeliczalnym zawartym w K , to $K - D \approx K$.

Dowód. Obierzmy za oś obrotu jakąkolwiek prostą L przechodzącą przez środek kuli i rozłączną z D . Niech A będzie płaszczyzną przechodzącą przez L i rozłączną z D .

Niech $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ będzie ciągiem nieskończonym punktów tworzących zbiór D , zaś β_k — kątem między płaszczyzną A a płaszczyzną poprowadzoną przez prostą L i punkt x_k .

Zbiór liczb

$$(17) \quad \frac{\pm \beta_k \pm \beta_l + 2m\pi}{n},$$

gdzie n, k, l przyjmują wartości $1, 2, 3, \dots$ a m wartości $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, jest oczywiście przeliczalny; istnieje zatem liczba β różna od wszystkich liczb (17).

¹⁾ Ob. W. Sierpiński, *Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties*, Fundamenta Mathematicae **35** (1948), str. 150—158, twierdzenie 8.

Niech φ będzie obrotem kuli o kąt β dokoła prostej L . Wykażemy, że

(18) Zbiory $\varphi^m(D)$ i $\varphi^n(D)$ są rozłączne dla $m \neq n$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$).

Istotnie, założmy np., że $m > n$ i że zbiory $\varphi^m(D)$ i $\varphi^n(D)$ nie są rozłączne. Wynika stąd, że istnieje punkt $x_k \in D$ taki, że $x_k \in \varphi^{m-n}(D)$, tzn. taki, że $x_k = \varphi^{m-n}(x_l)$ dla pewnego l . Po dokonaniu $m-n$ obrotów φ punkt x_l przechodzi w taki punkt x' powierzchni kuli, że kąt $\leq \pi$ utworzony przez płaszczyznę A i płaszczyznę wyznaczoną przez L i x' , wynosi

$$\beta_l + (m-n)\beta + 2h\pi \quad \text{albo} \quad (2\pi - \beta_l) + (m-n)\beta + 2h\pi,$$

gdzie h jest liczbą całkowitą. Ponieważ zaś punkt x_l przechodzi przez przekształcenie φ_l^{m-n} na punkt x_k , więc wnosimy stąd, że

$$\beta_k = \beta_l + (m-n)\beta + 2h\pi \quad \text{albo} \quad \beta_k = (2\pi - \beta_l) + (m-n)\beta + 2h\pi,$$

skąd wynika, że

$$\beta = \frac{\beta_k - \beta_l - 2h\pi}{m-n} \quad \text{albo} \quad \beta = \frac{\beta_k + \beta_l - 2(h+1)\pi}{m-n}.$$

Wniosek ten pozostaje w sprzeczności z założeniem, że β jest liczbą różną od wszystkich liczb (17). Wzór (18) jest więc udowodniony.

Przyjmijmy

$$R = D + \varphi(D) + \varphi^2(D) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(D),$$

$$S = \varphi(D) + \varphi^2(D) + \varphi^3(D) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(D).$$

Jest jasne, że $\varphi(R) = S$, co dowodzi, że

$$(19) \quad R = S.$$

Ponieważ zbiór D jest rozłączny z każdym ze zbiorów $\varphi^n(D)$ dla $n = 1, 2, \dots$, więc $R - S = D$ i otrzymujemy

$$(20) \quad K - D = K - (R - S) = (K - R) + S.$$

Z drugiej strony

$$(21) \quad K = (K - R) + R.$$

Wzory (20) i (21) dowodzą wobec (19), że zbiory $K - D$ i K mogą być podzielone na dwie części odpowiednio przystające. Wynika stąd, że $K - D \approx K$, c. b. d. ^o.

Dowód twierdzenia 1. Ze wzoru (15) wynika, że

$$K = (D + P) + Q.$$

Zbiór $D + P$ przystaje przez rozkład do K , gdyż $P \approx K - D$. Zaś zbiór Q przystaje przez rozkład do $K - D$, a więc też do K , gdyż na mocy twierdzenia 6 $K - D \approx K$, a stosunek $\approx$ jest przechodni.

Twierdzenie 1 jest w ten sposób udowodnione.

Na zakończenie zauważmy, że zastępując punkty na powierzchni kuli przez promienie (otwarte) łączące te punkty ze środkiem można bez trudności wywnioskować z twierdzenia 1, że *wnętrze kuli (bez środka) daje się podzielić na takie dwie części, że z każdej z nich można przez podział na skończoną liczbę części i dokonanie odpowiednich obrotów złożyć kulę (bez środka) identyczną z kulą wyjściową*. Łatwa modyfikacja pozwoliłaby też zastąpić kulę bez środka przez pełną kulę (otwartą lub zamkniętą)¹⁾.

¹⁾ R. M. Robinson w pracy *On the decomposition of spheres*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), str. 246—260, wykazał, że minimalna ilość części, na które można podzielić kulę w taki sposób, aby z części tych można było złożyć dwie kule o tym samym promieniu, wynosi 5.

SKOROWIDZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI

Liczby oznaczają stronicę.

.	koniunkcja 1; iloczyn zbiorów 7; iloczyn liczb kardynalnych 110; iloczyn typów porządkowych 159.
+	alternatywa 1; suma zbiorów 6; suma liczb kardynalnych 109; suma typów porządkowych 159.
→	implikacja 1.
≡	równoważność 2; przystawanie 288.
'	negacja 2; uzupełnienie 18.
—	różnica zbiorów 6; różnica liczb kardynalnych 112; różnica liczb porządkowych 205.
—	różnica symetryczna 8.
0	zdanie fałszywe 2; zbiór pusty 9; zero algebry Boole'a 34; zero struktury 172.
1	zdanie prawdziwe 2; zbiór jednostkowy 18; jedność algebry Boole'a 34; jedność struktury 172.
II	kwantyfikator ogólny 39; iloczyn zbiorów 63; iloczyn liczb kardynalnych 130; iloczyn typów porządkowych 170.
Σ	kwantyfikator szczegółowy 39; suma zbiorów 63; suma liczb kardynalnych 125; suma typów porządkowych 161.
ε	relacja należenia 5.
⊂	relacja zawierania 8.
S(A)	suma zbiorów rodziny A 44.
P(A)	iloczyn zbiorów rodziny A 46.
2^A	rodzina podzbiorów zbioru A 44.
E	zbiór elementów spełniających funkcję zdaniową 45.
{a, b}	para nieuporządkowana 46.
⟨a, b⟩	para uporządkowana 51.
×	iloczyn kartezjański dwu zbiorów 52.
P	iloczyn kartezjański dowolnej liczby zbiorów 73.
X ⁿ	zbiór ciągów n elementowych o wyrazach należących do X 56.
Y ^X	rodzina funkcji, odwzorowujących zbiór X na podzbiór zbioru Y 55.
f ⁻¹	funkcja odwrotna 57.
f _M	funkcja częściowa 58.
f(X)	obraz zbioru X 60.
f ⁻¹ (Y)	przeciwwobraz zbioru Y 60.
Lim sup X_n n=∞	granica górna ciągu zbiorów 70.