12. *Dla każdej relacji R dobrze porządkującej swe pole istnieje dokładnie jedna l. p. N. uporządkowana przez stosunek inkluzji podobnie do R.*

Dowód. Niech Z będzie polem relacji R zaś H zbiorem tych $z \in Z$, dla których istnieje dokładnie jedna l. p. N. N_z spełniająca warunek: N_z jest uporządkowane przez stosunek inkluzji podobnie do odcinka $O(z)$ zbioru Z; w skróceniu: $N_z \sim O(z)$.

Załóżmy, że $O(x) \subset H$. Wykażemy, że $x \in H$. Wobec 11 istnieje co najwyżej jedna l. p. N. podobna do $O(x)$; wystarczy zatem okazać, że co najmniej jedna taka l. p. N. istnieje.

Przyjmijmy

$$N_x = \underset{X}{E}[\sum_z (z \prec x) \cdot (X = N_z)].$$

Wykażemy, że N_x jest l. p. N. Istotnie, warunek 1 jest oczywiście spełniony.

Jeśli $N_z \in N_x$ i $Y \in N_z$, to Y jest l. p. N.; zarazem, ponieważ $Y \in N_z \sim O(z)$, więc na mocy 11 Y jest podobne do pewnego odcinka zbioru N_z, a więc do pewnego odcinka $O(t)$ zbioru $O(z)$. Wobec tego, że $t \prec z \prec x$, mamy $t \in O(x)$, a więc $t \in H$ i $Y \sim N_t$, skąd (wobec 11) $Y = N_t$; ponieważ zaś $N_t \in N_x$, więc $Y \in N_x$. A zatem $N_z \subset N_x$, tj. N_x spełnia warunek 2.

Warunek 3 wynika bezpośrednio z 10 i 7.

Niech B będzie niepustym zbiorem zawartym w N_x i niech z_0 będzie najwcześniejszym elementem Z takim, że $N_{z_0} \in B$. Gdyby istniało $Y \in N_{z_0}$ takie, że $Y \in B$, to byłoby $Y = N_z$, gdzie $z \prec z_0$ wbrew definicji z_0.

Zbiór N_x jest więc l. p. N. Jeśli $z_1 \prec z_2 \prec x$, to $N_{z_1} \sim O(z_1)$ i $N_{z_2} \sim O(z_2)$, a więc N_{z_1} jest podobne do odcinka N_{z_2}, skąd wnosimy na mocy 11, że $N_{z_1} \subset N_{z_2}$ i $N_{z_1} \neq N_{z_2}$. A zatem $N_x \sim O(x)$, co dowodzi, że $x \in H$.

W myśl zasady indukcji (§ 1, str. 187) mamy zatem $H = Z$. Zbiór

$$N = \underset{X}{E}[\sum_x (x \in Z) \cdot (X = N_x)]$$

jest l. p. N. uporządkowaną podobnie do Z. Dowód jest analogiczny do dowodu przeprowadzonego dla zbioru N_x.

Z twierdzeń 12, 11 i 8 wynika, że l. p. N. istotnie czynią zadość wszystkim wymaganiom stawianym liczbom porządkowym.

W związku z przeprowadzonym tu rozumowaniem warto zauważyć, że w dowodzie twierdzenia 12 czynimy istotny użytek z aksjomatu zastępowania (aksjomat VIII). Bez tego aksjomatu nie można by dowieść istnienia zbiorów N_x i N.

---

*ROZDZIAŁ VI.

Niesprzeczność i niezależność aksjomatów.

§ 1. Układ aksjomatów teorii mnogości. W wysłowieniu aksjomatów V i VIII (str. 44 i 49) występowało bliżej nie sprecyzowane pojęcie funkcji zdaniowej [1]). Obecnie podamy zupełnie precyzyjny opis układu aksjomatów dla teorii mnogości (jednego z wielu możliwych).

Pojęciami pierwotnymi systemu są

0 (zbiór pusty) i $\in$ (stosunek należenia).

Poza tymi dwoma pojęciami w systemie występują tylko pojęcia logiczne (m. in. identyczność).

Funkcją zdaniową *rzędu* 0 nazywamy wyrażenia postaci

$$x \in y, \quad x = y, \tag{1}$$

gdzie x i y są dowolnymi symbolami (tzw. zmiennymi). Litery x i y mogą być przy tym zastąpione symbolem 0 (dla zbioru pustego). O zmiennych x i y mówimy, że są *wolne* w wyrażeniach (1).

Załóżmy, że p jest liczbą naturalną i że określone już są funkcje zdaniowe rzędów $0, 1, \ldots, p-1$. Funkcją zdaniową *rzędu* p nazywamy każde wyrażenie jednej z następujących postaci:

$$\Phi', \quad \Phi + \Psi, \quad \Phi \cdot \Psi, \quad \Phi \to \Psi, \quad \Phi \equiv \Psi, \tag{2}$$

$$\prod_x \Phi, \quad \sum_x \Phi, \tag{3}$$

---

[1]) Pierwszy układ aksjomatów teorii mnogości podał E. Zermelo; ob. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Mathematische Annalen, **65** (1908), str. 261—281. Niejasne sformułowanie pewnika podzbiorów (por. rozdział II, § 2, str. 44) wywołało ożywione dyskusje, w wyniku których powstało kilka (nierównoważnych) metod uściślenia tego pewnika i spokrewnionego z nim pewnika zastępowania. Metoda, której używamy w tym rozdziale, pochodzi od Th. Skolema; ob. *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem V Kongress der Skandinavischen Mathematiker, Helsingfors 1923, str. 217—232.

przy czym Φ i Ψ we wzorach (2) są funkcjami zdaniowymi rzędu co najwyżej $p-1$ i jedna ma rząd dokładnie $p-1$, zaś Φ we wzorach (3) jest funkcją zdaniową rzędu $p-1$. Zmienne, które są wolne w Φ lub Ψ, są też wolne w funkcjach zdaniowych (2); zmienna u jest wolna w funkcjach zdaniowych (3), jeśli jest ona wolna w funkcji zdaniowej Φ i przy tym jest różna od x. W ten sposób pojęcie funkcji zdaniowej (dowolnego naturalnego rzędu) jest całkowicie określone.

PRZYKŁAD. $\Sigma_z \Pi_u \{u \in z \equiv [(u=x)+(u=y)]\}$ jest funkcją zdaniową 4-go rzędu o zmiennych wolnych x,y.

Przy pomocy opisanych tu funkcji zdaniowych można wypowiedzieć wszystkie twierdzenia teorii mnogości.

Funkcje zdaniowe będziemy oznaczali dużymi literami greckimi, wypisując obok nich zmienne wolne. Tak np. symbol $\Phi(x,y,\ldots,u)$ oznacza funkcję zdaniową o zmiennych wolnych $x,y,\ldots,u$. Symbol $\Phi(s,t,\ldots,w)$ oznacza wówczas funkcję zdaniową powstającą z $\Phi(x,y,\ldots,u)$ przez wstawienie liter $s,t,\ldots,w$ w miejsce liter $x,y,\ldots,u$.

Funkcja zdaniowa bez zmiennych wolnych nazywa się zdaniem.

Zapiszemy teraz w postaci zdań aksjomaty teorii mnogości. Wprowadzimy najpierw kilka pomocniczych definicji:

1. $Z(x) \equiv (x=0)+\sum_v (v \in x)$ [x jest zbiorem],
2. $R(x) \equiv Z(x)\cdot\prod_y [(y \in x)\to Z(y)]$ [x jest rodziną zbiorów],
3. $(x \subset y) \equiv Z(x)\cdot Z(y)\cdot\prod_u [(u \in x)\to(u \in y)]$ [x jest podzbiorem y],
4. $[x=S(y)] \equiv \prod_u \{u \in x \equiv \sum_z [(u \in z)\cdot(z \in y)]\}$ [x jest sumą zbiorów należących do y],
5. $(x=2^y) \equiv \prod_t [(t \in x) \equiv (t \subset y)]$ [x jest rodziną podzbiorów zbioru y],
6. $(x=y\cdot z) \equiv \prod_t [(t \in x) \equiv (t \in y)\cdot(t \in z)]$ [x jest częścią wspólną y i z],
7. $1(x) \equiv Z(x)\cdot(x \neq 0)\cdot\prod_y\prod_z [(y \in x)\cdot(z \in x)\to(y=z)]$ [x ma dokładnie jeden element].

Następująca definicja odnosi się do dowolnej funkcji zdaniowej $\Phi=\Phi(x,y,u_1,\ldots,u_n)$ o co najmniej dwu zmiennych wolnych x,y, w której mogą jednak występować i inne zmienne wolne $u_1,\ldots,u_n$:

8. $J_\Phi(u_1,\ldots,u_n) \equiv \prod_x\prod_{y_1}\prod_{y_2} [\Phi(x,y_1,u_1,\ldots,u_n)\cdot\Phi(x,y_2,u_1,\ldots,u_n)\to(y_1=y_2)]$,

czyli funkcja zdaniowa Φ wyznacza jednoznaczne przyporządkowanie, tj. każdemu x odpowiada co najwyżej jedno y takie, że $\Phi(x,y,u_1,\ldots u_n)$.

Używać będziemy, jak poprzednio, dużych liter $A,B,\ldots,X,Y,\ldots$ do oznaczania zbiorów, a liter $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\ldots,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\ldots$ do oznaczania rodzin zbiorów. Znaczy to, że

zamiast $\sum_x [Z(x)\cdot\Phi(x)]$ piszemy $\sum_X \Phi(X)$,

zamiast $\sum_x [R(x)\cdot\Phi(x)]$ piszemy $\sum_{\boldsymbol{X}} \Phi(\boldsymbol{X})$.

Podobnie, używając ogólnych kwantyfikatorów,

zamiast $\prod_x [Z(x)\to\Phi(x)]$ piszemy $\prod_X \Phi(X)$,

zamiast $\prod_x [R(x)\to\Phi(x)]$ piszemy $\prod_{\boldsymbol{X}} \Phi(\boldsymbol{X})$.

Przy użyciu tych definicji i skrótów możemy nadać aksjomatom teorii mnogości postać następującą:

Aksjomat I (jednoznaczności):

$$\prod_X\prod_Y [\prod_x (x \in X \equiv x \in Y)\to(X=Y)].$$

Aksjomat II (zbioru pustego):

$$\prod_x (x \in 0)'.$$

Aksjomat III (sumy):

$$\prod_{\boldsymbol{X}}\sum_X [X=S(\boldsymbol{X})].$$

Aksjomat IV (zbioru potęgowego):

$$\prod_X\sum_{\boldsymbol{X}} [\boldsymbol{X}=2^X].$$

Aksjomat V (nieskończoności):

$$\sum_{\boldsymbol{X}} \Big\{(\boldsymbol{X} \neq 0)\cdot\prod_X \{(X \in \boldsymbol{X})\to\sum_Y [(Y \in \boldsymbol{X})\cdot(X \subset Y)\cdot(X \neq Y)]\}\Big\}.$$

Aksjomat VI (wyboru):

$$\prod_{\boldsymbol{X}} \{(0 \in \boldsymbol{X})'\cdot(\boldsymbol{X} \neq 0)\cdot\prod_X\prod_Y [(X \in \boldsymbol{X})\cdot(Y \in \boldsymbol{X})\cdot(X \neq Y)\to(X\cdot Y=0)]$$
$$\to\sum_W\prod_X\prod_Y [(X \in \boldsymbol{X})\cdot(Y=W\cdot X)\to 1(Y)]\}.$$

Aksjomat VII (zastępowania):

$$\prod_{u_1}\ldots\prod_{u_n}\Big\{J_\Phi(u_1,\ldots,u_n)\to\prod_X\sum_Y\prod_y \{y \in Y \equiv \sum_x [(x \in X)\cdot\Phi(x,y,u_1,\ldots,u_n)]\}\Big\}.$$

Aksjomaty te objaśnione były w rozdziałach I (str. 6) i II (str. 45 i 50—51). Jedynym nowym aksjomatem jest aksjomat II, który musieliśmy tu wprowadzić, gdyż zbiór pusty przyjęliśmy za pojęcie pierwotne (podczas, gdy w rozdziale II był on zdefiniowany przez ogólne pojęcie zbioru).

Na uwagę zasługuje w szczególności aksjomat VII, który w naszym ujęciu nie jest pojedyńczym zdaniem, lecz schematem zdań: każda funkcja zdaniowa Φ o co najmniej dwu zmiennych wolnych pozwala nam utworzyć jeden przypadek szczególny aksjomatu zastępowania.

Sposób, w jaki z powyższych aksjomatów wyprowadza się twierdzenia teorii mnogości, omówiony został w rozdziałach poprzednich.

W szczególności, widzieliśmy w rozdziale II, § 3, str. 51, że z pewników zastępowania można wyprowadzić pewnik podzbiorów (który — podobnie jak pewnik zastępowania — należy traktować jako schemat aksjomatów).

Widzieliśmy również, że twierdzenia, w których nie występują ogólne pojęcia liczb kardynalnych i typów porządkowych, mogą być wyprowadzone z aksjomatów I—VII. Twierdzenia odnoszące się do liczb kardynalnych i porządkowych określonej mocy (np. przeliczalnych lub mocy continuum, albo mocy $2^{\aleph}$) mogą być również wyprowadzone z aksjomatów I—VII, gdyż liczby kardynalne i typy porządkowe określonej mocy mogą być zdefiniowane (por. rozdział III, str. 97 i rozdział IV, str. 144).

Wreszcie, twierdzenia dotyczące liczb porządkowych można — jak to wykazaliśmy w rozdziale V, § 16 — wyprowadzić z aksjomatów I—VII.

Opisany powyżej system teorii mnogości nazwiemy *systemem* (S). W § 5 będziemy badali system (S^*) zawierający prócz aksjomatów I—VII jeszcze aksjomat następujący:

VIII. *Istnieje nieskończony zbiór, którego elementy nie są zbiorami.*

W symbolach możemy zapisać ten aksjomat jak następuje

$$\sum_{X}\sum_{Y}\Big[(X\subset 2^{X})\cdot(X\neq 0)\cdot\prod_{Y}\{Y\in X\rightarrow\sum_{Z}[(Z\in X)\cdot(Y\subset Z)\cdot(Y\neq Z)]\}\cdot \prod_{x}[x\in X\rightarrow Z'(x)]\Big].$$

UWAGI. 1. W odróżnieniu od innych aksjomatycznych systemów rozważanych zazwyczaj w matematyce system (S) opiera się na nieskończenie wielu aksjomatach. Można wykazać, że systemu (S) nie można oprzeć na skończonej liczbie aksjomatów [1]). Natomiast można uznać pojęcie funkcji zdaniowej za nowe pojęcie pierwotne teorii mnogości i scharakteryzować jego własności aksjomatycznie. Otrzymuje się w ten sposób

[1]) H. Wang, *Non finizability of impredicative principles*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA **36** (1950), str. 448—453.

skończoną ilość aksjomatów, na których można oprzeć całą teorię mnogości; w aksjomatach tych jest jednak mowa nie tylko o zbiorach i stosunku należenia, lecz także o funkcjach zdaniowych [1]).

2. Należy odróżniać przypadki, w których *używamy* funkcji zdaniowych, od przypadków, w których *mówimy* o funkcjach zdaniowych.

W całej teorii mnogości używamy oczywiście różnych specjalnych funkcji zdaniowych przy wypowiadaniu twierdzeń, mówimy natomiast nie o funkcjach zdaniowych, lecz o zbiorach i o stosunkach między zbiorami. W przypadku natomiast, gdy badamy aksjomatykę teorii mnogości, mówimy o funkcjach zdaniowych, zdaniach itp. Widać stąd, że rozważania obecnego rozdziału nie wchodzą właściwie do samej teorii mnogości, lecz do działu logiki badającego aksjomatykę teorii mnogości.

Nieodróżnianie przypadków, kiedy używamy funkcji zdaniowych od przypadków, kiedy o nich mówimy, było przyczyną nieporozumień i wywołało pozorne sprzeczności znane pod nazwą antynomii semantycznych.

3. Wiele twierdzeń dotyczących funkcji zdaniowych daje się udowodnić przy pomocy zasady indukcji. Twierdzenie o funkcjach zdaniowych jest prawdziwe, jeśli 1^0 zachodzi ono dla najprostszych funkcji zdaniowych $x\in y$ i $x=y$ i 2^0 ze słuszności jego dla funkcji zdaniowych Φ_1 i Φ_2 wynika jego słuszność dla funkcji zdaniowych Φ_1', $\Phi_1\cdot\Phi_2$ i $\Sigma_x\Phi_1$.

Zasada ta pochodzi stąd, że wszystkie funkcje zdaniowe dają się zdefiniować przy pomocy operacji logicznych: negacji, koniunkcji i kwantyfikatora Σ z najprostszych funkcji zdaniowych $x\in y$ i $x=y$.

4. Przyporządkowania, o których wielokrotnie będzie mowa w dalszym ciągu, rozumieć należy jako funkcje zdaniowe. Powiedzenie, że pewne przyporządkowanie istnieje, oznacza, że można efektywnie napisać tę funkcje zdaniową. W wielu przypadkach wypisanie jej zajęłoby sporo miejsca, zawsze będzie jednak widoczne z dowodu, że jest ono możliwe.

5. W całym rozdziale będziemy się zasadniczo zajmowali dowodami nie twierdzeń teorii mnogości, lecz dowodami twierdzeń orzekających, że pewne zdania napisane przy pomocy pewnych funkcji zdaniowych są (lub też nie są) twierdzeniami systemów (S) lub (S^*). W niektórych przypadkach dla uproszczenia sformułowań, będziemy stwier-

[1]) Por. J. v. Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **154** (1925), str. 219—240, oraz pracę tegoż autora *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Mathematische Zeitschrift **27** (1928), str. 669—752. Por. też P. Bernays, *A system of axiomatic set-theory I*, Journal of Symbolic Logic **2** (1937), str. 65—77.

dzali samo zdanie, lub wyprowadzali jego dowód z aksjomatów systemu, zamiast — jak byłoby poprawniej — stwierdzać, że zdanie to wynika z aksjomatów. Tak np. będziemy czasem pisać (niepoprawnie): zbiór $E_x[\Phi(x)]$ spełnia funkcję zdaniową Ψ zamiast poprawnego zwrotu: zdanie $\Psi\{E_x[\Phi(x)]\}$ jest konsekwencją aksjomatów systemu (S) lub (S^*). Jeszcze poprawniej należałoby powiedzieć: zdanie

$$\prod_s \{Z(s) \cdot \prod_x [x \in s \equiv \Phi(x)] \to \Psi(s)\}$$

jest konsekwencją aksjomatów systemu (S) lub (S^*).

§ 2. Metoda interpretacji. Najważniejszym zagadnieniem dotyczącym aksjomatów teorii mnogości jest zagadnienie ich niesprzeczności; jak wiadomo, intuicyjne pojmowanie zbiorów doprowadziło do antynomii. Systemy aksjomatyczne stworzono właśnie z myślą uchronienia się od sprzeczności.

Żadna antynomia nie powstała w tych aksjomatycznych systemach. Nasuwa się jednak pytanie, czy można *udowodnić* ich niesprzeczność.

Od czasu prac K. Gödla[1]) wiadomo, że dowód niesprzeczności żadnego systemu aksjomatycznego nie daje się przeprowadzić przy wyłącznym korzystaniu z tych środków logicznych i matematycznych, które wyrażone są w systemie poddawanym dowodowi niesprzeczności.

Wynika stąd, że niesprzeczności systemu (S) nie można dowieść korzystając tylko ze środków dających się wyrazić w systemie (S). Nie jest więc możliwy dowód niesprzeczności systemu (S) oparty np. tylko na arytmetyce liczb naturalnych lub rzeczywistych, gdyż oba te działy matematyki dają się wyrazić w systemie (S).

Twierdzenie Gödla stwierdza, że w dowodzie niesprzeczności systemu (S) interweniować musi jakiś aksjomat nie należący do (S).

Jedyny dotychczas znany dowód niesprzeczności systemu (S) powołuje się na aksjomaty równoważne aksjomatom systemu (S) i na jeden jeszcze dodatkowy aksjomat, stwierdzający istnienie liczb nieosiągalnych (por. rozdział V, § 12, str. 223). Dowód taki nie ma jednak głębszej wartości, gdyż opiera się na założeniach silniejszych, niż założenia leżące u podstawy systemu (S). To też podawać go nie będziemy.

Wykażemy natomiast w § 3, że jeśli arytmetyka liczb naturalnych nie jest sprzeczna, to system (S) bez aksjomatu nieskończoności nie jest sprzeczny.

[1]) K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I.* Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931), str. 173—198.

Niesprzeczność całego systemu (S) pozostaje — zgodnie z poprzednio podanymi uwagami — dotychczas zagadnieniem otwartym. Istnieją jednak ciekawe wyniki częściowe dotyczące tego zagadnienia. Najdonioślejszym z nich jest podany w 1939 r. przez Gödla dowód niesprzeczności całego systemu (S) przy założeniu, że bez pewnika wyboru jest on niesprzeczny. Dowód ten podamy w § 6. Doniosłość jego pochodzi stąd, że pewniki systemu (S) poza pewnikiem wyboru przyjmowane są na ogół za intuicyjnie jasne, pewnik wyboru zaś od pierwszej chwili, gdy sformułowano go wyraźnie, był odczuwany przez wielu matematyków jako założenie nieoczywiste i dość dowolne, a ponadto doprowadził on do wyników bardzo paradoksalnych i nieintuicyjnych, jak np. do paradoksu kuli (por. Dodatek, str. 288).

Mniejsze znaczenie teoretyczne mają zagadnienia wzajemnej niezależności pewników. I te zagadnienia są jednak ważne, gdyż rozstrzygnięcie ich pozwala wyjaśnić rolę, jaką poszczególne pewniki grają w systemie teorii mnogości.

Zagadnieniami niezależności zajmiemy się w §§ 4 i 5.

Zarówno w dowodach niesprzeczności, jak i w dowodach niezależności korzystać będziemy z tzw. *metody interpretacji*. Jest to metoda następująca: aby udowodnić niesprzeczność układu pewników należy wskazać takie przedmioty, zbiory i relacje, które spełniają aksjomaty; aby udowodnić niezależność jednego z pewników od pozostałych, należy wskazać takie przedmioty, zbiory i relacje, które nie spełniają wybranego pewnika, lecz spełniają wszystkie pozostałe.

Dokładniej można scharakteryzować metodę interpretacji jak następuje:

Będziemy się zajmowali tylko niesprzecznością i wzajemną niezależnością aksjomatów systemu (S). Aksjomaty tego systemu są wyrażeniami, w których poza stałymi logicznymi występują znaki 0 i $\in$ oraz zmienne reprezentujące nazwy zbiorów i ich elementów. Przy interpretowaniu teorii mnogości nadajemy zatem nowe znaczenie stałym 0 i $\in$ oraz zakresowi przebieganemu przez zmienne. Zakres ten interpretowany jest jako własność, stała $\in$ — jako relacja dwuczłonowa, stała zaś 0 — jako element. Inaczej mówiąc, interpretację określają dwie funkcje zdaniowe (z których pierwsza ma jedną a druga dwie zmienne wolne) oraz jedna stała:

$$\bar{B}(x), \quad \bar{E}(x,y), \quad \bar{0}. \tag{1}$$

Funkcje zdaniowe (1) i definicja stałej $\bar{0}$ należą przy tym do pewnego systemu (N), którym może być np. arytmetyka liczb naturalnych albo jeden z systemów (S) lub (S^*).

Układ (1) złożony z dwu funkcji zdaniowych $\bar{B}$ i $\bar{E}$ i ze stałej nazywamy *modelem*. Funkcje zdaniowe tworzące model mogą zawierać prócz x i y jeszcze inne zmienne wolne, grające rolę parametrów.

Załóżmy teraz, że Φ jest funkcją zdaniową systemu (S). Utwórzmy funkcję zdaniową $\bar{\Phi}$ w następujący sposób: funkcje zdaniowe rzędu 0, występujące w Φ, a mianowicie funkcje zdaniowe kształtu

$$x \in y \quad \text{i} \quad x = y,$$

zastępujemy przez

$$\bar{E}(x,y) \quad \text{i} \quad x = y,$$

zachowując te same litery x i y, które występowały w Φ. Stałą 0 zastępujemy przez $\bar{0}$. Kwantyfikatory postaci Π_x i Σ_x występujące w Φ zastępujemy odpowiednio przez

$$(2) \qquad \prod_x [\bar{B}(x) \to \ldots] \quad \text{i} \quad \sum_x [\bar{B}(x) \cdot \ldots].$$

Operacja ta nosi nazwę relatywizowania kwantyfikatorów do funkcji zdaniowej $\bar{B}(x)$.

W ten sposób z funkcji zdaniowej Φ systemu (S) powstaje funkcja zdaniowa $\bar{\Phi}$ systemu (N) [1]).

Będziemy mówili, że model (1) spełnia funkcję zdaniową Φ w systemie (N), jeśli $\bar{\Phi}$ jest twierdzeniem systemu (N).

Dowody niesprzeczności i niezależności oprzemy na następujących dwu twierdzeniach znanych z logiki [2]).

Twierdzenie 1. *Jeśli system (N) jest niesprzeczny i istnieje model, spełniający w (N) wszystkie aksjomaty systemu (T), to system (T) jest niesprzeczny.*

[1]) Aby przy opisanym tu postępowaniu, prowadzącym od Φ do $\bar{\Phi}$, były spełnione twierdzenia 1 i 2, muszą zmienne występujące w Φ być różne od zmiennych związanych (por. str. 42) i od parametrów, występujących w funkcjach zdaniowych modelu, tj. w funkcjach zdaniowych (1).

Gdyby np. w Φ występowało wyrażenie $p \in q$ a zmienne p i q po wstawieniu na miejscu x i y do $\bar{E}(x,y)$ stawały się związane, to nie możemy wstawiać do Φ zamiast $p \in q$ wyrażenia $\bar{E}(p,q)$.

Będziemy zatem stale zakładali, że zmienne występujące w rozpatrywanych przez nas funkcjach zdaniowych systemu (S) są różne od zmiennych związanych i od parametrów, występujących w funkcjach zdaniowych (1) tworzących model. Założenie to nie jest istotnym ograniczeniem nałożonym na rozpatrywane funkcje zdaniowe, gdyż wybór liter służących za zmienne jest zupełnie dowolny i nie wpływa na sens funkcji zdaniowych.

[2]) Por. np. A. Mostowski, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne **18** (1948), str. 274 i 280.

Twierdzenie 2. *Jeśli system (N) jest niesprzeczny, Φ jest aksjomatem systemu (T) i istnieje model spełniający w (N) zdanie Φ' oraz wszystkie różne od Φ aksjomaty systemu (T), to aksjomat Φ jest niezależny od różnych od Φ aksjomatów systemu (T).*

§ 3. Niesprzeczność systemu (S) bez pewnika nieskończoności.

Używać będziemy następujących oznaczeń:

$\mu(x)$ oznaczać będzie wartość bezwzględną funkcji Möbiusa (tj. $\mu(x)=0$, jeśli x jest podzielne przez kwadrat liczby pierwszej, a $\mu(1)=\mu(q_1 \ldots q_k)=1$, gdzie $q_1,\ldots,q_k$ są różnymi liczbami pierwszymi).

p_n lub $p(n)$ oznaczać będzie n-tą liczbę pierwszą.

$\bar{E}(x,y)$ oznacza, że $p(x)|y$, tj. że $p(x)$ jest dzielnikiem y.

O liczbie x mówimy, że jest dziedzicznie wolna od kwadratów, jeśli $\mu(x) \neq 0$ i przy tym dla dowolnych $x_1,\ldots,x_n$

$$[p(x_1)|x_2] \cdot [p(x_2)|x_3] \cdot \ldots \cdot [p(x_{n-1})|x_n] \cdot [p(x_n)|x] \to [\mu(x_1) \neq 0].$$

Piszemy wówczas $\bar{B}(x)$.

Przyjmujemy wreszcie $\bar{0}=1$.

Udowodnimy przy tych oznaczeniach

Twierdzenie 1. *Funkcje zdaniowe $\bar{B}$, $\bar{E}$ i stała $\bar{0}$ stanowią model dla aksjomatów I—IV, VI i VII.*

Dowód. Przeprowadzimy najpierw relatywizację kwantyfikatorów w funkcjach zdaniowych 1—7 podanych w § 1, str. 252. Oznaczając kreską tę operację i zakładając, że x, y i z są dziedzicznie wolne od kwadratów, stwierdzamy z łatwością, że

$$(1) \qquad \bar{Z}(x) \equiv \bar{B}(x),$$

$$(2) \qquad \bar{R}(x) \equiv \bar{B}(x),$$

$$(3) \qquad \overline{x \subset y} \equiv x|y \quad \text{(tj. } x \text{ jest dzielnikiem } y\text{)},$$

$$(4) \qquad \overline{x = S(y)} \equiv \{x \text{ jest najmniejszą wspólną wielokrotną liczb } z_1,\ldots,z_k \text{ określonych równaniem } y = p(z_1)\ldots p(z_k) \text{ lub } x=1, \text{ o ile } y=1\},$$

$$(5) \qquad \overline{x = 2^y} \equiv \{x = p(t_1)\ldots p(t_k), \text{ gdzie } t_1,\ldots,t_k \text{ są wszystkimi dzielnikami } y\},$$

$$(6) \qquad \overline{x = y \cdot z} \equiv \{x = (y,z)\}, \text{ tj. } x \text{ jest największym wspólnym dzielnikiem } y \text{ i } z,$$

$$(7) \qquad \overline{1(x)} \equiv \{x \text{ jest liczbą pierwszą}\}.$$

Udowodnimy obecnie, że w rozpatrywanym przez nas modelu są spełnione aksjomaty I—IV i VI.

Aksjomat I. Jest on równoważny twierdzeniu

$$\prod_X \prod_Y [(X \subset Y) \cdot (Y \subset X) \to (X = Y)].$$

Po przeprowadzeniu w tym twierdzeniu relatywizacji kwantyfikatorów i uwzględnieniu (3) i (1) otrzymujemy twierdzenie arytmetyczne

$$\prod_X \prod_Y \{\bar{B}(X) \cdot \bar{B}(Y) \to [(X|Y) \cdot (Y|X) \to (X = Y)]\}.$$

Aksjomat II. Po przeprowadzeniu relatywizacji kwantyfikatorów otrzymujemy oczywiste twierdzenie

$$\prod_x [\bar{B}(x) \to (p(x)|1)'].$$

Aksjomat III. Po przeprowadzeniu relatywizacji kwantyfikatorów otrzymujemy

$$\prod_X \{\bar{B}(\boldsymbol{X}) \to \sum_Y [\bar{B}(X) \cdot \overline{(X = S(\boldsymbol{X}))}]\}.$$

Jest to twierdzenie arytmetyczne. Jeśli bowiem $\boldsymbol{X} = p(z_1) \dots p(z_k)$, to najmniejsza wspólna wielokrotna X liczb $z_1, \dots, z_k$ jest dziedzicznie wolna od kwadratów, a więc spełnia warunki $\bar{B}(X)$ i $\overline{X = S(\boldsymbol{X})}$.

Aksjomat IV. Dowód jest analogiczny jak dla aksjomatu III.

Aksjomat VI. Po przeprowadzeniu relatywizacji kwantyfikatorów otrzymamy wyrażenie równoważne następującemu

$$\prod_X [\bar{B}(\boldsymbol{X}) \cdot (p(1)|\boldsymbol{X})' \cdot (\boldsymbol{X} \neq 1) \cdot \prod_X \prod_Y [\bar{B}(X) \cdot \bar{B}(Y) \cdot (p(X)|\boldsymbol{X}) \cdot (p(Y)|\boldsymbol{X}) \cdot (X \neq Y) \to$$
$$\to \overline{X \cdot Y = 0}] \to \sum_W (\bar{B}(W) \cdot \prod_X \{\bar{B}(X) \to [p(X)|\boldsymbol{X} \to (W, X) \text{ jest liczbą pierwszą}]\})].$$

Jest to twierdzenie arytmetyczne. Jeśli bowiem $\boldsymbol{X} = p(X_1) \dots p(X_k)$ spełnia poprzednik powyższej implikacji, to obierając dla każdego X_l x_i czyniące zadość warunkowi $p(x_i)|X_l$ i przyjmując $W = p(x_1) \dots p(x_k)$, będziemy mieli spełniony następnik.

Aksjomat VII. Niech $\Phi(x, y, u_1, \dots, u_n)$ będzie dowolną funkcją zdaniową i niech $u_1, \dots, u_n$ będą liczbami dziedzicznie wolnymi od kwadratów. Załóżmy, że $\bar{J}_\Phi(u_1, \dots, u_n)$, tj. że

$$(8) \qquad \bar{\Phi}(x, y_1, u_1, \dots, u_n) \cdot \bar{\Phi}(x, y_2, u_1, \dots, u_n) \to y_1 = y_2$$

dla dowolnych liczb x, y_1, y_2 dziedzicznie wolnych od kwadratów.

Niech $X = p(x_1) \dots p(x_k)$ będzie dowolną liczbą $\neq 1$ dziedzicznie wolną od kwadratów. Dla każdego x_i istnieje w myśl (8) co najwyżej jedno y_l dziedzicznie wolne od kwadratów i takie, że $\bar{\Phi}(x, y_l, u_1, \dots, u_n)$.

Niech Y będzie iloczynem wszystkich różnych między sobą $p(y_l)$ lub też $Y = 1$, o ile takie y_l nie istnieją. Przyjmijmy nadto $Y = 1$, jeśli $X = 1$. W obu przypadkach Y jest liczbą dziedzicznie wolną od kwadratów i

$$p(y)|Y \equiv \sum_x [\bar{B}(x) \cdot (p(x)|X) \cdot \bar{\Phi}(x, y, u_1, \dots, u_n)].$$

Równoważność ta dowodzi, że relatywizując kwantyfikatory w aksjomacie VII otrzymujemy dla każdej funkcji zdaniowej Φ twierdzenie arytmetyki.

Twierdzenie 1 jest w ten sposób udowodnione.

Łatwo wykazać, że aksjomat V (nieskończoności) przechodzi przy relatywizowaniu kwantyfikatorów w zdanie, które na gruncie aksjomatów arytmetyki można obalić. Opierając się na twierdzeniach 1 i 2 z § 2, str. 258—259, otrzymujemy więc następujące

Twierdzenie 2. *Jeśli arytmetyka liczb naturalnych jest niesprzeczna, to pewniki I—IV, VI i VII są niesprzeczne, a pewnik V jest od nich niezależny.*

§ 4. Modele normalne. W obecnym paragrafie omówimy pewną kategorię modeli, którymi posługiwać się będziemy w dalszym ciągu.

Funkcję zdaniową M będziemy nazywali *zupełną*, jeśli w systemie (S) można udowodnić twierdzenia

$$M(0), \quad \prod_x \prod_y [M(x) \cdot (y \in x) \to M(y)].$$

Dla funkcji zdaniowej zupełnej M i dla dowolnej funkcji zdaniowej $\Psi(u)$ następujące twierdzenia dają się udowodnić w systemie (S):

$$\text{(i)} \qquad M(x) \to \{\sum_u [(u \in x) \cdot \Psi(u)] \equiv \sum_u [M(u) \cdot (u \in x) \cdot \Psi(u)]\},$$

$$\text{(ii)} \qquad M(x) \to (\prod_u [(u \in x) \to \Psi(u)] \equiv \prod_u \{M(u) \to [(u \in x) \to \Psi(u)]\}).$$

Z twierdzeń tych wynika, że relatywizując kwantyfikator Σ_u lub Π_u do funkcji zdaniowej M możemy pomijać czynnik $M(u)$, jeśli za znakiem Σ_u znajduje się koniunkcja postaci: $(u \in x) \cdot \dots$, a za znakiem Π_u implikacja postaci: $(u \in x) \to \dots$

Korzystając z tej uwagi możemy łatwo uprościć funkcje zdaniowe powstające z funkcji zdaniowych 1—7 (§ 1, str. 252) przez relatywizację występujących w nich kwantyfikatorów do funkcji zdaniowej zupełnej M. Zakładając, że $M(x)$, $M(y)$ i $M(z)$, otrzymujemy następujące równoważności (które dają się wyprowadzić w systemie (S)):

(iii) $\overline{Z}(x) \equiv Z(x)$,

(iv) $\overline{\overline{R}(x)} \equiv R(x)$,

(v) $\overline{x \subset y} \equiv x \subset y$,

(vi) $\overline{x = S(y)} \equiv (x = S(y))$,

(vii) $\overline{x = 2^y} \equiv \{x = \underset{u}{E}[(u \subset y) \cdot M(u)]\}$,

(viii) $\overline{x = y \cdot z} \equiv (x = y \cdot z)$,

(ix) $\overline{1(x)} \equiv 1(x)$.

Każdy model określony stałą $\overline{0} = 0$ i funkcjami zdaniowymi

$$\overline{B}(x) \equiv M(x), \quad \overline{E}(x,y) \equiv x \in y$$

będziemy nazywali normalnym, jeśli M jest funkcją zdaniową zupełną. Mówimy, że jest to model wyznaczony przez funkcję zdaniową M.

Z równoważności (iii)—(ix) wynikają następujące twierdzenia:

1. *Aksjomaty I i II są spełnione w każdym modelu normalnym.*

2. *Na to, by aksjomat III był spełniony w modelu normalnym, potrzeba i wystarcza, by dla każdej rodziny zbiorów $\boldsymbol{X}$ implikacja*

$$M(\boldsymbol{X}) \to M(S(\boldsymbol{X}))$$

dawała się udowodnić w systemie (S).

3. *Na to, by aksjomat IV był spełniony w modelu normalnym, potrzeba i wystarcza, by dla każdego zbioru X implikacja*

$$M(X) \to M(\underset{U}{E}[(U \subset X) \cdot M(U)])$$

dawała się udowodnić w systemie (S).

4. *Na to, by aksjomat V był spełniony w modelu normalnym, potrzeba i wystarcza, by w systemie (S) dawało się udowodnić następujące twierdzenie:*

Istnieje rodzina zbiorów $\boldsymbol{X}$ bez elementu nasyconego taka, że $M(\boldsymbol{X})$.

5. *Na to, by aksjomat VI był spełniony w modelu normalnym, potrzeba i wystarcza, by w systemie (S) dawało się udowodnić twierdzenie:*

Dla każdej rodziny $\boldsymbol{X}$ zbiorów niepustych i rozłącznych takiej, że $M(\boldsymbol{X})$, istnieje zbiór W spełniający warunek $M(W)$ i posiadający dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów $X \in \boldsymbol{X}$.

6. *Aksjomat VII jest spełniony w modelu, jeśli dla każdej funkcji zdaniowej $\Theta(x,y,u_1,\ldots,u_n)$ następujące twierdzenie daje się udowodnić w systemie (S):*

Jeśli $M(X) \cdot M(u_1) \cdot \ldots \cdot M(u_n)$ i dla każdego x takiego, że $M(x)$, istnieje co najwyżej jedno y takie, że $M(y)$ i $\overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n)$, to zbiór

$$Y = \underset{y}{E}[M(y) \cdot \sum_{x \in X} \overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n)]$$

spełnia warunek $M(Y)$.

Z 6 wynika następujący wniosek:

7. *Jeśli w (S) można udowodnić, że z założeń:*

(a) *Y jest obrazem jednoznacznym zbioru X takiego, że $M(X)$,*

(b) $(Z \in Y) \to M(Z)$,

wynika $M(Y)$,

to aksjomat VII jest spełniony w modelu.

Zastosowania.

Twierdzenie 1. *Jeśli system (S) jest niesprzeczny, to aksjomat III jest niezależny od pozostałych* [1]).

Dowód. Zdefiniujemy przez indukcję pozaskończoną ciąg zbiorów A_ξ, jak następuje:

$$A_0 = 0, \quad A_{\xi+1} = 2^{A_\xi}, \quad A_\lambda = \sum_{\xi < \lambda} A_\xi.$$

Przez indukcję względem ξ wykazujemy, że dla każdego ξ

$$\overline{\overline{A_{\omega+\xi}}} = \mathfrak{a}_\xi$$

(por. rozdział V, § 15, str. 242).

Mówimy, że zbiór $X \in A_\xi$ spełnia dziedzicznie funkcję zdaniową Φ jeśli 1^0 $\Phi(X)$ i 2^0 z $Y_0 \in Y_1 \in \ldots \in Y_n \in X$ wynika $\Phi(Y_0)$; czyli

$$\{X \text{ spełnia dziedzicznie warunek } \Phi\} \equiv$$
$$\equiv \Phi(X) \cdot \prod_n \prod_{Y_0} \ldots \prod_{Y_n} [Y_0 \in Y_1 \in \ldots \in Y_n \in X \to \Phi(Y_0)].$$

Z łatwością wykazujemy, że jeśli w (S) można udowodnić twierdzenie $\Phi(0)$, to funkcja zdaniowa

$$x \text{ spełnia dziedzicznie warunek } \Phi$$

jest zupełna.

---

[1]) Por. P. Bernays, *A system of axiomatic set-theory VI*, Journal of Symbolic Logic **13** (1948), str. 67—79.

Niech w szczególności $\Phi(X)$ będzie funkcją zdaniową

$$(*) \qquad \sum_{\xi}[(X \in A_\xi)\cdot(\overline{\overline{X}}<\mathfrak{a}_\omega)].$$

Wykażemy, że w modelu normalnym określonym funkcją zdaniową

$$M_1(x) \equiv \{x \text{ spełnia dziedzicznie warunek } (*)\}$$

spełnione są wszystkie aksjomaty z wyjątkiem aksjomatu III.

Aksjomaty I i II są spełnione (por. twierdzenie 1, str. 262).

Aksjomat IV. Niech $X \in A_\xi$ będzie zbiorem takim, że $M_1(X)$ i przyjmijmy $Y = E_U[(U \subset X)\cdot M_1(U)]$. Oczywiście $X \subset A_\xi$, a więc $Y \subset 2^{A_\xi} = A_{\xi+1}$, skąd $Y \in A_{\xi+2}$. Z $\overline{\overline{X}}<\mathfrak{a}_\omega$ wynika, że dla pewnego n jest $\overline{\overline{X}} \leqslant \mathfrak{a}_n$, a więc $\overline{\overline{2^X}} \leqslant \mathfrak{a}_{n+1}$, skąd $\overline{\overline{Y}}<\mathfrak{a}_\omega$. Zbiór Y spełnia dziedzicznie nierówność $\overline{\overline{Y}}<\mathfrak{a}_\omega$, gdyż z warunku

$$Y_0 \in Y_1 \in \ldots \in Y_n \in Y$$

wynika, że $M_1(Y_n)$, a więc Y_n i wszystkie zbiory Y_i dla $i<n$ spełniają funkcję zdaniową M_1.

Wykazaliśmy więc, że $M_1(Y)$, co w myśl twierdzenia 3 (str. 262) dowodzi, że aksjomat IV jest spełniony w modelu.

Aksjomat V. Wystarczy zauważyć, że zbiór A_ω spełnia warunek $M_1(A_\omega)$, przy czym zbiór ten jest rodziną bez elementu nasyconego.

Aksjomat VI. Niech $\boldsymbol{X} \in A_\xi$ będzie niepustą rodziną zbiorów rozłącznych niepustych taką, że $M_1(\boldsymbol{X})$. W systemie (S) można udowodnić, że istnieje zbiór W, który ma dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów $X \in \boldsymbol{X}$. Oczywiście $\overline{\overline{W}} = \overline{\overline{\boldsymbol{X}}} < \mathfrak{a}_\omega$ i $W \subset S(\boldsymbol{X}) \in A_\xi$, co dowodzi, że W spełnia warunek (*). Zbiór W spełnia ten warunek dziedzicznie, gdyż z $Z_0 \in Z_1 \in \ldots \in Z_n \in W$ wynika, że $M_1(Z_n)$, a więc $M_1(Z_0)$.

Aksjomat VII. Załóżmy, że X jest zbiorem takim, że $M_1(X)$, i niech Y będzie jednoznacznym obrazem X spełniającym warunek

$$(Z \in Y) \to M_1(Z).$$

Wynika stąd, że dla każdego $Z \in Y$ istnieje $\xi = \xi(Z)$ takie, że $Z \in A_\xi$; oznaczając przez η liczbę porządkową większą od wszystkich $\xi(Z)$, otrzymamy $Y \subset A_\eta$, a więc $Y \in A_{\eta+1}$. Nadto $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{X}} < \mathfrak{a}_\omega$. Wynika stąd, że zbiór Y spełnia warunek (*).

Y spełnia nadto ten warunek dziedzicznie, gdyż z $Z_0 \in Z_1 \in \ldots \in Z_n \in Y$ wynika na mocy założenia, że $M_1(Z_n)$, a więc $M_1(Z_0)$.

Aksjomat III nie jest spełniony w modelu.

Istotnie, rodzina $\boldsymbol{X} = \{A_\omega, A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, \ldots\}$ spełnia dziedzicznie warunek (*), lecz $S(\boldsymbol{X})$ tego warunku nie spełnia, gdyż $\overline{\overline{S(\boldsymbol{X})}} = \mathfrak{a}_\omega$.

Twierdzenie 2. *Jeśli system (S) jest niesprzeczny, to aksjomat IV jest niezależny od pozostałych* [1]).

Dowód. Rozpatrujemy funkcję zdaniową

$$\Psi(X) \equiv \sum_{\xi}[(X \in A_\xi)\cdot(\overline{\overline{X}} \leqslant \mathfrak{a}_0)].$$

Łatwo wykazać, że w modelu normalnym określonym przez funkcję zdaniową

$$M_2(x) \equiv \{x \text{ spełnia dziedzicznie warunek } \Psi(x)\}$$

spełnione są wszystkie aksjomaty z wyjątkiem IV.

Aksjomat IV nie jest spełniony w modelu, gdyż $M_2(A_\omega)$, lecz zbiór $E_U[(U \subset A_\omega)\cdot M_2(U)] = E_U[U \subset A_\omega] = A_{\omega+1}$ nie jest przeliczalny.

UWAGI. 1. W dowodach niezależności aksjomatów III i IV korzystaliśmy z pewnika wyboru (wykazując, że pewnik VI jest spełniony w rozpatrywanych modelach). Natomiast twierdzenia 1—7 (str. 262—263) były udowodnione bez pomocy pewnika VI.

2. Rozważania tego paragrafu pozostają w mocy, jeśli system (S) zastąpimy systemem obszerniejszym np. systemem (S^*). Również definicję zbiorów A_ξ można uogólnić, przyjmując za A_0 dowolny zbiór, którego elementy nie są zbiorami, a pozostawiając definicję zbiorów $A_{\xi+1}$ i A_λ niezmienioną. Jeśli zbiór A_0 jest nieskończony, to w modelach normalnych wyznaczonych funkcjami zdaniowymi M_1 i M_2 jest spełniony również aksjomat VIII (str. 254).

3. Definicje zbiorów A_ξ i funkcji zdaniowych M_1 i M_2 były sformułowane przy użyciu liczb naturalnych i porządkowych oraz definicji indukcyjnych. Teoria wyłożona w rozdziałach III (§ 9, str. 133—136) i V (§ 4, str. 198—199 i § 16, str. 247—250) pokazuje, że definicje te można sformułować równoważnie przy wyłącznym użyciu pojęć „zbiór" i „$\in$".

4. Niezależność aksjomatu I daje się dowieść przy użyciu modelu nie normalnego [2]). Niezależność pewnika II łatwo wykazać, interpretując 0 jako dowolny zbiór niepusty. Niezależność pewnika V była udowodniona w § 3, a niezależność pewnika VI będzie udowodniona w § 5. Odnośnie pewnika VII, który, jak wiemy, jest właściwie schematem dla nieskończonego ciągu aksjomatów, to udowodniono (por. str. 254, uwaga 1), że jakąkolwiek skończoną ilość przypadków szczególnych tego pewnika dołączyć do aksjomatów I—VI, to zawsze znaleźć można taki przypadek szczególny tego pewnika, który jest niezależny od pewników I—VI i dołączonych przypadków szczególnych pewnika VII.

[1]) Por. odsyłacz na str. 263.

[2]) A. Robinson, *On the independence of the axioms of definiteness* (*Axiome der Bestimmtheit*), Journal of Symbolic Logic **4** (1939), str. 69—72.

W ten sposób wszystkie zagadnienia niezależności dla systemu (S) są zasadniczo rozwiązane. Z niezależnością pewnika VI wiążą się jednak jeszcze pewne ważne zagadnienia, których dotychczas rozwiązać nie umiemy (por. uwaga 2, str. 272).

§ 5. Niezależność pewnika wyboru. W obecnym paragrafie zajmiemy się dowodem następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Jeśli system (S^*) jest niesprzeczny, to pewnik wyboru VI jest niezależny od pozostałych pewników systemu (S).*

Dowód [1]). Niech A będzie nieskończonym zbiorem, którego elementy nie są zbiorami. Rozpatrzmy zbiory A_ξ zdefiniowane przez indukcję pozaskończoną jak następuje (por. § 4, str. 263):

$$A_0 = A,$$
$$A_{\xi+1} = 2^{A_\xi},$$
$$A_\lambda = \sum_{\xi<\lambda} A_\xi \qquad \text{(dla } \lambda \text{ granicznych)}.$$

Niech f będzie funkcją, odwzorowującą zbiór A_0 na siebie w sposób wzajemnie jednoznaczny.

Dla elementów $x \in A_0$ wartość $f(x)$ jest więc określona. Rozszerzymy to określenie przez indukcję pozaskończoną na elementy $x \in A_\xi$, gdzie ξ jest dowolną liczbą porządkową. Możemy zakładać, że ξ nie jest liczbą graniczną, bo najmniejsza liczba ξ taka, że $x \in A_\xi$, nie jest graniczna.

Załóżmy więc, że $f(Y)$ jest określone jednoznacznie dla $Y \in \sum_{\eta<\xi+1} A_\eta$ i niech $X \in A_{\xi+1} - A_\xi$. Zatem $X \subset A_\xi$, a więc $f(Y)$ jest określone dla $Y \in X$; przyjmujemy

(1) $$f(X) = \underset{T}{F} \sum_{Y} [(Y \in X) \cdot (T = f(Y))].$$

W ten sposób wartość $f(X)$ jest określona dla $X \in A_{\xi+1}$.

UWAGA. Przy określaniu $f(Y)$ chodzi o zdefiniowanie ciągu pozaskończonego funkcji $\varphi_{\xi,f}$ takiego, żeby dziedziną $\varphi_{\xi,f}$ był zbiór A_ξ, i który czyniłby przy tym zadość następującym warunkom

$$\varphi_{0,f} = f,$$
$$\varphi_{\xi+1,f}(Y) = \varphi_{\xi,f}(Y) \qquad \text{dla } Y \in A_{\xi+1} \cdot A_\xi,$$
$$\varphi_{\xi+1,f}(Y) = \underset{T}{F} \sum_{Z} [(Z \in Y) \cdot (T = \varphi_{\xi,f}(Z))] \qquad \text{dla } Y \in A_{\xi+1} - A_\xi,$$
$$\varphi_{\lambda,f} = \sum_{\xi<\lambda} \varphi_{\xi,f}.$$

[1]) Myśl tego dowodu wywodzi się z pracy: A. Fraenkel, *Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse 1922, str. 253—257. Por. też A. Lindenbaum i A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und einiger seiner Folgerungen*, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, **31** (1938), str. 27—32.

Z twierdzenia o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną (rozdział V, § 4, str. 198) wynika, że taki ciąg pozaskończony istnieje i że jego definicja może być zapisana przy wyłącznym użyciu pojęć „zbiór" i „$\in$", a więc w postaci funkcji zdaniowej w rozumieniu § 1 (por. str. 251).

Lemat 1. *Jeśli $h = fg$ i $X \in A_\xi$, to $h(X) = f(g(X))$ dla każdego ξ.*

Dowód. Lemat jest oczywisty dla $\xi = 0$. Aby zastosować indukcję pozaskończoną, załóżmy, że α jest liczbą porządkową i że lemat jest słuszny dla wszystkich liczb $\xi < \alpha$. Załóżmy nadto, że $X \in A_\alpha$ i $X \operatorname{non} \in A_\eta$ dla $\eta < \alpha$.

Jeśli $\alpha = 0$, to lemat jest spełniony. Jeśli $\alpha > 0$, to

$$h(X) = \underset{T}{F} \sum_{Y} [(Y \in X) \cdot (T = h(Y))].$$

W myśl założenia i z uwagi, że $Y \in X \to Y \in \Sigma_{\eta<\alpha} A_\eta$, wnosimy, że dla $Y \in X$ jest $h(Y) = f(g(Y))$. Jeśli więc $Z \in h(X)$, to istnieje $Y \in X$ takie, że $Z = f(g(Y))$, skąd $Z \in f(g(X))$. Na odwrót, jeśli $Z \in f(g(X))$, to istnieje U takie, że $Z = f(U)$ i $U \in g(X)$, a więc $Z = f(U)$ i $U = g(Y)$, gdzie $Y \in X$. Stąd $Z = f(g(Y)) = h(Y) \in h(X)$. Zatem $h(X) = f(g(X))$, c. b. d. o.

UWAGA. Lemat 1 można zapisać wzorem: $\varphi_{\xi,h}(X) = \varphi_{\xi,f}(\varphi_{\xi,g}(X))$ (por. str. 266).

Wniosek 2. $f^{-1}(f(X)) = f(f^{-1}(X)) = X$.

Lemat 3. *Jeśli $X \in A_\xi$, to $f(X) \in A_\xi$.*

Dowód przez indukcję względem ξ nie nastręcza trudności.

Niech $A(x)$ będzie funkcją zdaniową $\Sigma_\xi(x \in A_\xi)$. Będziemy oznaczali gwiazdką obok symbolu funkcji zdaniowej operację relatywizowania kwantyfikatorów do funkcji zdaniowej A.

Lemat 4. *Dla każdej liczby porządkowej ξ, każdej funkcji zdaniowej $\Phi(x,y,\ldots,z)$ i każdej funkcji f odwzorowującej zbiór A na siebie w sposób wzajemnie jednoznaczny można udowodnić w (S^*), że*

$$\Phi^*(x,y,\ldots,z) \equiv \Phi^*(f(x),f(y),\ldots,f(z))$$

dla dowolnych $x,y,\ldots,z \in A_\xi$.

Dowód. Rozpatrzmy najpierw funkcje zdaniowe $x \in y$ i $x = y$.

Jeśli $x \in y$, to $f(x) \in f(y)$ wobec definicji funkcji f. Jeśli $f(x) \in f(y)$, to $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(y))$, a więc $x \in y$. Lemat jest zatem słuszny dla funkcji zdaniowej $x \in y$. Podobnie dowodzi się go dla funkcji zdaniowej $x = y$.

Jest jasne, że z prawdziwości lematu dla funkcji zdaniowych Φ i Ψ wynika jego prawdziwość dla funkcji zdaniowych Φ' i $\Phi + \Psi$, a więc też dla funkcji zdaniowych $\Phi \to \Psi$, $\Phi \cdot \Psi$ i $\Phi \equiv \Psi$ (gdyż dają się one zdefiniować przy pomocy alternatywy i negacji).

Rozpatrzmy funkcję zdaniową $\Sigma_x \Phi(x,y,\ldots,z)$, którą zapiszemy jako $\Psi(y,\ldots,z)$.

Jeśli $y,\ldots,z$ należą do jednego ze zbiorów A_ξ i $\Psi^*(y,\ldots,z)$, to istnieje takie x, że $\Lambda(x)$ i $\Phi^*(x,y,\ldots,z)$, skąd wynika na mocy założenia, że

$$\Phi^*(f(x),f(y),\ldots,f(z)). \tag{2}$$

Z lematu 3 wnosimy, że $\Lambda(x)\to\Lambda(f(x))$, co dowodzi, że z (2) wynika $\Psi^*(f(y),\ldots,f(z))$.

Na odwrót, jeśli $\Psi^*(f(y),\ldots,f(z))$, to wykazujemy w ten sam sposób, że $\Psi^*(f^{-1}(f(y)),\ldots,f^{-1}(f(z)))$, co daje $\Psi^*(y,\ldots,z)$.

Lemat 4 jest w ten sposób udowodniony dla funkcji zdaniowej $\Sigma_x\Phi(x,y,\ldots,z)$. Przypadek funkcji zdaniowej $\Pi_x\Phi(x,y,\ldots,z)$ sprowadzamy do poprzedniego przy pomocy wzorów de Morgana.

Dowód lematu 4 jest w ten sposób zakończony.

Zbiór $X\in A_\xi$ (lub — w przypadku gdy $\xi=0$ — element $x\in A$) nazywamy symetrycznym względem funkcji f, jeśli $f(X)=X$.

Niech G będzie grupą funkcji przekształcających zbiór A na siebie w sposób wzajemnie jednoznaczny i czyniącą zadość następującemu warunkowi:

(*) Dla każdego skończonego zbioru $H=\{x_1,\ldots,x_n\}\subset A$ i każdej pary elementów $x,y\in A-H$ istnieją w G takie funkcje f, że $f(x_i)=x_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$ i $f(x)=y$.

Zbiór funkcji f, które spełniają równości $f(x_i)=x_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$, będziemy oznaczali przez $G(x_1,\ldots,x_n)$ lub krócej $G(H)$, gdzie $H=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Przykładem grupy G spełniającej warunek (*) jest grupa wszystkich przekształceń wzajemnie jednoznacznych zbioru A na siebie. Innym przykładem jest grupa tych przekształceń f, które czynią zadość warunkowi

$$\overline{\overline{\underset{x}{E}[f(x)\neq x]}}<\mathfrak{a}.$$

Niech $\Phi(x)$ będzie następującą funkcją zdaniową:

$$\Lambda(x)\cdot\sum_{H\in 2^A}\{(\overline{\overline{H}}<\mathfrak{a})\cdot\prod_{f\in G(H)}[f(x)=x]\}$$

(słownie: istnieje liczba porządkowa ξ i zbiór skończony $H\subset A$ takie, że $x\in A_\xi$ i przy tym $f(x)=x$ dla każdej funkcji $f\in G(H)$).

Lemat 5. *Jeśli g jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem zbioru A na siebie, to $\Phi(x)\to\Phi(g(x))$ dla każdego $x\in A_\xi$ i każdej liczby porządkowej ξ.*

Dowód. Z $x\in A_\xi$ wynika na mocy lematu 3 $g(x)\in A_\xi$. Załóżmy, że H jest skończonym podzbiorem A i że $f(x)=x$ dla wszystkich $f\in G(H)$. Jeśli $f_1\in G(g(H))$, to $g^{-1}f_1g\in G(H)$, a więc $g^{-1}f_1g(x)=x$, skąd wynika, że $f_1(g(x))=g(x)$. Zatem

$$\prod_{f\in G(g(H))}[f(g(x))=g(x)],$$

co dowodzi, że $\Phi(g(x))$.

Oczywiście, zbiór pusty spełnia funkcję zdaniową Φ, gdyż $f(0)=0$ dla każdego f i przy tym $0\in A_1$. Wynika stąd (por. § 4, str. 263), że funkcja zdaniowa

$$M(x)\equiv\Phi(x)\cdot\prod_n\prod_{y_0}\ldots\prod_{y_n}[y_0\in y_1\in\ldots\in y_n\in x\to\Phi(y_0)]$$

(stwierdzająca, że x spełnia dziedzicznie funkcję zdaniową Φ) jest zupełna, a więc określa model normalny.

Wykażemy, że w tym modelu spełnione są wszystkie aksjomaty prócz VI. Wystarczy oczywiście zbadać tylko aksjomaty III—V i VII.

Aksjomat III. Zgodnie z twierdzeniem 2 z § 4 (str. 262) wystarczy okazać, że

$$M(\boldsymbol{X})\to M(S(\boldsymbol{X})). \tag{3}$$

Dowód. Jeśli $\boldsymbol{X}\in A_{\xi+1}-A_\xi$, to $S(\boldsymbol{X})\subset A_\xi$, a więc $S(\boldsymbol{X})\in A_{\xi+1}$. Jeśli $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$, to $f(S(\boldsymbol{X}))=S(\boldsymbol{X})$, gdyż na mocy (1) i wniosku 2

$$x\in f(S(\boldsymbol{X}))\equiv f^{-1}(x)\in S(\boldsymbol{X})\equiv\sum_Y[(f^{-1}(x)\in Y)\cdot(Y\in\boldsymbol{X})]$$
$$\equiv\sum_Y[(x\in f(Y))\cdot(f(Y)\in f(\boldsymbol{X}))]\equiv x\in S(f(\boldsymbol{X})).$$

Wynika stąd, że zbiór $S(\boldsymbol{X})$ spełnia funkcję zdaniową Φ. Jeśli $y_0\in y_1\in\ldots\in y_n\in S(\boldsymbol{X})$, to istnieje takie Y, że $y_n\in Y\in\boldsymbol{X}$, a więc na mocy założenia, że $\boldsymbol{X}$ spełnia dziedzicznie funkcję zdaniową Φ, otrzymujemy $\Phi(y_0)$.

Wzór (3) jest w ten sposób udowodniony.

Aksjomat IV. Załóżmy, że $X\in A_\xi$ i $M(X)$. W myśl twierdzenia 3 z § 4 (str. 262) wystarczy udowodnić, że

$$M\{\underset{U}{E}[(U\subset X)\cdot M(U)]\}.$$

Przyjmijmy $\boldsymbol{X}=E_U[(U\subset X)\cdot M(U)]$. Z $X\in A_\xi$ wynika, że $X\subset A_\xi$, a więc $\boldsymbol{X}\in A_{\xi+2}$. Jeśli $y_0\in\ldots\in y_n\in\boldsymbol{X}$, to $M(y_n)$, a więc $\Phi(y_0)$, gdyż y_n spełnia dziedzicznie warunek Φ. Pozostaje więc udowodnić, że istnieje zbiór skończony H taki, że $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$ dla każdego $f\in G(H)$.

Z założenia istnieje zbiór skończony $H \subset A$ taki, że $f(X)=X$ dla każdego $f \in G(H)$. Jeśli $U \in \boldsymbol{X}$, to $U \subset X$ i $M(U)$, skąd na mocy lematu 5 wynika, że dla $f \in G(H)$ jest $f(U) \subset f(X)=X$ i $M(f(U))$, a więc $f(U) \in \boldsymbol{X}$. Podobnie z $f(U) \in \boldsymbol{X}$ wynika, że $U \in \boldsymbol{X}$, co dowodzi, że $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$, c. b. d. o.

Aksjomat V. Niech $\boldsymbol{X}$ będzie rodziną skończonych podzbiorów zbioru A_0. Oczywiście $\boldsymbol{X} \subset A_1$, a więc $\boldsymbol{X} \in A_2$. Każdy zbiór $H \in \boldsymbol{X}$ spełnia funkcję zdaniową Φ, gdyż z $f \in G(H)$ wynika, że $f(H)=H$. Podobnie z $a \in H \in \boldsymbol{X}$ wynika, że $\Phi(a)$. Wreszcie sama rodzina $\boldsymbol{X}$ spełnia funkcję zdaniową Φ, gdyż dla każdego $f \in G$ jest $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$; każda funkcja f przekształca bowiem zbiory skończone w zbiory skończone.

Rodzina $\boldsymbol{X}$ nie ma elementu nasyconego, gdyż $\overline{\overline{A}}\,\mathrm{non} < \mathfrak{a}$. Dowodzi to, że aksjomat V jest spełniony w modelu (por. tw. 4, § 4, str. 262).

Aksjomat VII. Załóżmy, że $\Theta(x,y,u_1,\ldots,u_n)$ jest funkcją zdaniową i że spełnione są warunki $M(X)$, $M(u_1)$, $M(u_2),\ldots,M(u_n)$. Załóżmy dalej, że dla każdego x takiego, że $M(x)$, istnieje co najwyżej jedno y takie, że $M(y)$ i $\overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n)$ (kreska oznacza operację relatywizowania kwantyfikatorów do funkcji zdaniowej $M(x)$). Przyjmijmy

$$Y = \underset{y}{E}[M(y) \cdot \sum_{x \in X} \overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n)].$$

Aby udowodnić, że aksjomat VII jest spełniony w modelu, wystarczy udowodnić, że $M(Y)$ (por. § 4, twierdzenie 6, str. 263).

Każdy element zbioru Y spełnia funkcję zdaniową M; jeśli więc $z_0 \in z_1 \in \ldots \in z_k \in Y$, to $\Phi(z_0)$. Wystarczy zatem okazać, że $\Phi(Y)$, tj. że

$$(4) \qquad \sum_{\xi}(Y \in A_\xi),$$

(5) istnieje skończony zbiór $H \subset A$ taki, że $\prod_{f \in G(H)}[f(Y)=Y]$.

Dowód warunku (4). Z definicji Y wynika, że dla każdego $y \in Y$ istnieje $\xi=\xi(y)$ takie, że $y \in A_\xi$. Jeśli η jest liczbą porządkową przewyższającą wszystkie $\xi(y)$, to $Y \subset A_\eta$, a więc $Y \in A_{\eta+1}$.

Dowód warunku (5). Z założenia istnieją takie zbiory skończone $H_0, H_1, \ldots, H_n$, że

$$\prod_{f \in G(H_0)}[f(X)=X], \qquad \prod_{f \in G(H_i)}[f(u_i)=u_i] \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Przez indukcję względem rzędu Θ łatwo wykazać, że w (S^*) daje się udowodnić równoważność

$$(6) \qquad \overline{\Theta}^*(x,y,u_1,\ldots,u_n) \equiv \overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n).$$

Suma $H=H_0+H_1+\ldots+H_n$ jest skończonym podzbiorem A. Jeśli $f \in G(H)$, to $f \in G(H_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$, a więc $x \in X \equiv f(x) \in X$ oraz w myśl (6) i lematu 4

$$\overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n) \equiv \overline{\Theta}(f(x),f(y),u_1,\ldots,u_n).$$

Wnosimy stąd, że

$$\sum_{x \in X}\overline{\Theta}(x,y,u_1,\ldots,u_n) \equiv \sum_{x \in X}\overline{\Theta}(x,f(y),u_1,\ldots,u_n),$$

a ponieważ $M(y) \equiv M(f(y))$ na mocy lematu 5, więc

$$y \in Y \equiv f(y) \in Y,$$

tj. $Y=f(Y)$.

Dowód (5) jest w ten sposób zakończony.

Wykażemy wreszcie, że pewnik VI nie jest spełniony w modelu.

Z pewnika wyboru wynika, jak wiadomo, że każdy zbiór nieskończony daje się rozłożyć na sumę dwu zbiorów nieskończonych rozłącznych. Oznaczając więc przez $\mathrm{Inf}(X)$ funkcję zdaniową: *X jest zbiorem nieskończonym*, czyli przyjmując

$$\mathrm{Inf}(X) \equiv \sum_{X}\{(\boldsymbol{X} \subset 2^X)\cdot(\boldsymbol{X} \neq 0)\cdot\prod_{Y \in X}\sum_{Z \in X}[(Y \neq Z)\cdot(Y \subset Z)]\},$$

możemy z pewników I—VII wyprowadzić twierdzenie

$$(\mathrm{T}) \qquad \prod_{X}\{\mathrm{Inf}(X) \to \sum_{Y_1}\sum_{Y_2}[(Y_1 \cdot Y_2 = 0)\cdot\mathrm{Inf}(Y_1)\cdot\mathrm{Inf}(Y_2)\cdot(X=Y_1+Y_2)]\}.$$

Gdyby pewnik wyboru był spełniony w modelu, to i twierdzenie (T) byłoby w tym modelu spełnione. Inaczej mówiąc, w systemie (S^*) dawałoby się udowodnić twierdzenie

$$\prod_{X}\{\overline{\mathrm{Inf}(X)} \to \sum_{Y_1,Y_2}[M(Y_1)\cdot M(Y_2)\cdot(Y_1\cdot Y_2=0)\cdot\overline{\mathrm{Inf}(Y_1)}\cdot\overline{\mathrm{Inf}(Y_2)}\cdot(X=Y_1+Y_2)]\},$$

gdzie kreski oznaczają relatywizację kwantyfikatorów do funkcji zdaniowej M.

Ponieważ w systemie (S^*) daje się łatwo udowodnić implikację $\overline{\mathrm{Inf}(X)} \to \mathrm{Inf}(X)$, a nadto $\overline{\mathrm{Inf}(A)}$ jest twierdzeniem systemu (S^*) (por. dowód, że aksjomat V jest spełniony w modelu, str. 270), więc wnosimy stąd, że w systemie (S^*) można udowodnić twierdzenie:

$$\sum_{Y_1,Y_2}[M(Y_1)\cdot M(Y_2)\cdot(Y_1\cdot Y_2=0)\cdot\mathrm{Inf}(Y_1)\cdot\mathrm{Inf}(Y_2)\cdot(A=Y_1+Y_2)].$$

Z $M(Y_i)$ wynika istnienie zbiorów skończonych H_i takich, że $\prod_{f \in G(H_i)}[f(Y_i)=Y_i]$ dla $i=1,2$. Obierzmy dowolne elementy $x_1 \in Y_1-H_1$ i $x_2 \in Y_2-H_1$. Zgodnie z (*) istnieją $f \in G(H_1)$ takie, że $f(x_1)=x_2$. Wobec $f \in G(H_1)$ jest $f(Y_1)=Y_1$, a z drugiej strony $x_2=f(x_1) \in f(Y_1)=Y_1$, co dowodzi, że zbiory Y_1 i Y_2 zawierają wspólny element x_2, wbrew założeniu.

Przypuszczenie, że twierdzenie (T) jest spełnione w modelu prowadzi zatem do sprzeczności.

Dowód twierdzenia 1 jest w ten sposób zakończony.

UWAGI. 1. Obierając w różny sposób grupę G można uzyskać różne modele, w których spełnione są pewniki I—V i VII, lecz w których nie jest spełniony pewnik VI. Modele te mogą służyć do dowodów niezależności (od aksjomatów I—V i VII) różnych twierdzeń, dowodzonych przy pomocy pewnika wyboru. Np. można tą metodą wykazać, że równoważność zwykłej definicji zbiorów skończonych i definicji Dedekinda (por. rozdział III, § 9, str. 136) nie może być wyprowadzona z samych tylko aksjomatów I—V i VII [1]). Można również udowodnić w ten sposób, że na gruncie aksjomatów I—V i VII pewnik uporządkowania (por. rozdział V, § 10, str. 223) nie jest równoważny pewnikowi VI, lecz jest istotnie od niego słabszy [2]).

Ilość różnych zagadnień niezależności, które można tą metodą rozwiązać, jest znaczna. Istnieją jednak zagadnienia, do których metoda ta nie da się prawdopodobnie zastosować. Jako przykład podamy następujące — dotychczas nierozwiązane — zagadnienie: czy twierdzenie

$$m = m + m \text{ dla każdej nieskończonej liczby } m$$

jest równoważne pewnikowi VI (na gruncie aksjomatów I—V i VII), czy też jest od niego istotnie słabsze?

2. Dowód twierdzenia 1 można by w taki sposób zmodyfikować, aby nie korzystać z niesprzeczności systemu (S^*), lecz z niesprzeczności systemu (S). Wynika to stąd, że do aksjomatów systemu (S) można bez sprzeczności dołączyć aksjomat VIII [2]).

Jeśli natomiast wzmocnimy system (S) aksjomatem ustalającym ilość elementów nie będących zbiorami, a więc np. jednym z następujących aksjomatów:

(a) zbiór elementów nie będących zbiorami jest pusty,
(b) zbiór elementów nie będących zbiorami jest przeliczalny,
(c) zbiór elementów nie będących zbiorami jest mocy continuum,

to otrzymamy systemy, w których niezależności pewnika VI dowieść dotychczas nie potrafimy. W przypadkach (b) i (c) można w powstających systemach skonstruować modele dla systemu (S), nie spełniające aksjomatu VI, tą samą metodą, którą zastosowaliśmy wyżej, ale w modelach tych nie są spełnione nowe aksjomaty (b) lub (c), wobec czego nie uzyskujemy żądanego dowodu niezależności.

[1]) A. Mostowski, *O niezależności definicji skończoności w systemie logiki*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego **11** (1938), str. 47.

[2]) A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms vom Ordnungsprinzip*, Fundamenta Mathematicae **32** (1939), str. 201—252.

W związku z tym nie umiemy też dotychczas udowodnić niezależności (od pewników I—V i VII) żadnego z twierdzeń następujących:

(i) Jeśli $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{c}$, to istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór X,
(ii) Jeśli $\overline{\overline{X}} = 2^{\mathfrak{c}}$, to istnieje relacja porządkująca zbiór X,
(iii) $\mathfrak{c} < \aleph_\omega$,
(iv) Istnieją liczby nieosiągalne $m \leqslant \mathfrak{c}$,

i wielu innych.

Wykazanie niezależności tych twierdzeń od pewników I—V i VII należy do najważniejszych w tej chwili zagadnień podstaw teorii mnogości.

§ 6. Niesprzeczność pewnika wyboru [1]). W obecnym paragrafie zajmiemy się wykazaniem, że jeśli system (S) bez aksjomatu VI jest niesprzeczny, to pozostanie on niesprzeczny po dołączeniu aksjomatu VI. Rozpatrzymy w tym celu pewien rodzaj modeli normalnych.

Oznaczać będziemy przez (S') system powstający z (S) przez odrzucenie pewnika wyboru.

Niech F będzie przyporządkowaniem, na mocy którego każdej liczbie porządkowej α odpowiada rodzina zbiorów F_α. Załóżmy, że spełnione są warunki następujące:

(1) $$F_\alpha \subset F_\beta \quad \text{i} \quad F_\alpha \neq F_\beta \quad \text{dla} \quad \alpha < \beta,$$

(2) $$F_\lambda = \sum_{\xi < \lambda} F_\xi \quad \text{dla liczb } \lambda \text{ granicznych},$$

(3) $$\text{jeśli} \quad X \in F_\alpha, \quad \text{to} \quad X \subset F_\alpha,$$

(4) $$\text{dla każdego } \alpha \text{ istnieje takie } \beta > \alpha, \text{ że } F_\alpha \in F_\beta,$$

(5) $$\text{istnieją takie } \alpha, \text{ że } 0 \in F_\alpha.$$

Niech $\Phi(x)$ będzie funkcją zdaniową:

(6) $$\sum_{\xi} (x \in F_\xi).$$

Z (3) i (5) wynika, że funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ jest zupełna, a zatem określa ona model normalny. Nazywamy go modelem specjalnym wyznaczonym przez przyporządkowanie F.

[1]) Por. K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set-theory*, Annals of Mathematics Studies **3**, Princeton 1940.

Jak wykażemy, wystarczy, aby zbiory F_α spełniały pewien bardzo prosty warunek, aby w modelu specjalnym wyznaczonym przez przyporządkowanie F spełnione były wszystkie aksjomaty systemu (S) poza — być może — aksjomatem wyboru VI.

Używać będziemy następującej symboliki:

Kreska nad funkcją zdaniową oznaczać będzie relatywizację kwantyfikatorów do funkcji zdaniowej $\Phi(x)$. Wskaźnik β przy funkcji zdaniowej oznaczać będzie relatywizację do funkcji zdaniowej $x \in F_\beta$.

Niech φ będzie przyporządkowaniem, na mocy którego liczbie porządkowej α odpowiada liczba porządkowa $\varphi(\alpha)$. Przyporządkowanie takie nazywamy *rosnącym*, jeśli

$$\alpha<\beta \to \varphi(\alpha)<\varphi(\beta).$$

Liczbę graniczną α nazywamy *osobliwą* dla przyporządkowania φ, jeśli czyni ona zadość warunkowi

$$\xi<\alpha \to \varphi(\xi)<\alpha.$$

Lemat 1. *Dla każdego przyporządkowania rosnącego φ i każdej liczby β istnieje liczba osobliwa $\alpha>\beta$.*

Dowód. Przyjmijmy

$$\beta_0=\beta+1, \quad \beta_1=\varphi(\beta_0), \quad \ldots, \quad \beta_{n+1}=\varphi(\beta_n), \ldots$$

Ciąg ten jest rosnący. Niech α będzie najmniejszą liczbą przekraczającą wszystkie β_n. Jest to oczywiście liczba graniczna większa od β i

$$\xi<\alpha \to \sum_n (\xi<\beta_n) \to \sum_n (\varphi(\xi)<\beta_{n+1}) \to \varphi(\xi)<\alpha.$$

Lemat 1 jest w ten sposób udowodniony.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnej funkcji zdaniowej $\Theta(x,y,\ldots,z)$ istnieje przyporządkowanie rosnące φ takie, że w systemie (S') daje się udowodnić twierdzenie następujące: jeśli β jest liczbą porządkową, $x,y,\ldots,z \in F_\beta$ i α jest liczbą osobliwą dla przyporządkowania φ taką, że $\alpha>\beta$, to*

$$\overline{\Theta}(x,y,\ldots,z) \equiv \Theta_\alpha(x,y,\ldots,z). \tag{7}$$

Dowód. Jeśli Θ jest funkcją zdaniową bez kwantyfikatorów, to przyjąć możemy jako φ przyporządkowanie tożsamościowe, tj. takie, że $\varphi(\xi)=\xi$ dla każdego ξ. Istotnie, w tym przypadku zarówno $\overline{\Theta}(x,y,\ldots,z)$, jak $\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)$ są równoważne $\Theta(x,y,\ldots,z)$.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji zdaniowych $\Theta(x,y,\ldots,z)$ i $\Theta^{(1)}(x,y,\ldots,u,p,\ldots,s)$. Istnieją zatem przyporządkowania rosnące φ i φ_1 takie, że dla dowolnych $x,y,\ldots,z,p,\ldots,s \in F_\beta$ i dla każdej liczby α wzgl. α_1 osobliwej dla przyporządkowania φ wzgl. φ_1 daje się udowodnić w systemie (S') równoważność (7) wzgl.

$$\overline{\Theta^{(1)}}(x,\ldots,u,p,\ldots,s) \equiv \Theta^{(1)}_{\alpha_1}(x,\ldots,u,p,\ldots,s). \tag{8}$$

Z (7) wynika w (S') równoważność

$$\overline{\Theta}'(x,y,\ldots,z) \equiv \Theta'_\alpha(x,y,\ldots,z),$$

która świadczy o tym, że twierdzenie jest słuszne dla funkcji zdaniowej Θ'.

Niech $\psi(\xi)=\varphi(\xi)+\varphi_1(\xi)$. Przyporządkowanie to jest rosnące, gdyż

$$\xi<\eta \to [\varphi(\xi)<\varphi(\eta)]\cdot[\varphi_1(\xi)<\varphi_1(\eta)] \to [\varphi(\xi)+\varphi_1(\xi)<\varphi(\eta)+\varphi_1(\eta)].$$

Niech $\alpha>\beta$ będzie liczbą osobliwą dla przyporządkowania ψ. Jeśli $\xi<\alpha$, to $\varphi(\xi)\leqslant\psi(\xi)<\alpha$ i $\varphi_1(\xi)\leqslant\psi(\xi)<\alpha$, co dowodzi, że α jest liczbą osobliwą dla przyporządkowań φ i φ_1; a więc dla dowolnych $x,y,\ldots,z$, $p,\ldots,s \in F_\beta$ zachodzą równoważności (7) i (8). Wynika z nich równoważność

$$[\overline{\Theta}(x,y,\ldots,z)+\overline{\Theta^{(1)}}(x,\ldots,u,p,\ldots,s)] \equiv [\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)+\Theta^{(1)}_\alpha(x,\ldots,u,p,\ldots,s)],$$

która dowodzi twierdzenia dla funkcji zdaniowej $\Theta+\Theta^{(1)}$.

Pozostaje wykazać, że twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji zdaniowej $\Sigma_x\Theta(x,y,\ldots,z)$, którą dla skrótu zapiszemy jako $\Psi(y,\ldots,z)$.

Konstrukcja przyporządkowania ψ, spełniającego dla funkcji zdaniowej Ψ warunki wymienione w twierdzeniu, przebiega jak następuje. Niech β będzie dowolną liczbą porządkową. Rozpatrzmy układy $y,\ldots,z \in F_\beta$, dla których $\overline{\Psi}(y,\ldots,z)$. Dla każdego takiego układu $y,\ldots,z$ istnieją więc ξ i $x \in F_\xi$ takie, że $\overline{\Theta}(x,y,\ldots,z)$. Najmniejszą z liczb ξ o tej własności oznaczymy symbolem $\vartheta(y,\ldots,z)$. Niech $\zeta(\beta)$ będzie najmniejszą liczbą przekraczającą wszystkie liczby postaci $\vartheta(y,\ldots,z)$, gdzie $y,\ldots,z \in F_\beta$, i niech

$$\psi(\beta)=\zeta(\beta)+\varphi(\beta).$$

Bez trudności wykazujemy, że $\beta<\beta_1 \to \zeta(\beta)\leqslant\zeta(\beta_1)$. Ponieważ φ jest z założenia przyporządkowaniem rosnącym, więc $\beta<\beta_1 \to \psi(\beta)<\psi(\beta_1)$, tj. przyporządkowanie ψ jest rosnące.

Niech α będzie liczbą osobliwą dla tego przyporządkowania taką, że $\alpha>\beta$ i załóżmy, że $y,\ldots,z \in F_\beta$. Liczba α jest osobliwa dla przyporządkowania φ, gdyż $\xi<\alpha \to \varphi(\xi)\leqslant\psi(\xi)<\alpha$.

Jeśli $\overline{\Psi}(y,\ldots,z)$, to istnieje takie ξ (mianowicie $\xi=\vartheta(y,\ldots,z)$), że dla pewnego $x \in F_\xi$ jest

$$\overline{\Theta}(x,y,\ldots,z). \tag{9}$$

Z definicji przyporządkowania ζ wynika, że

$$\xi<\zeta(\beta)\leqslant\psi(\beta),$$

zaś $\psi(\beta)<\alpha$, gdyż α jest liczbą osobliwą dla ψ, a $\beta<\alpha$. Wobec (1) wynika stąd, że $x\in F_\alpha$. Z (7), (9) i z uwagi, że $x,y,\ldots,z\in F_{\max(\xi,\beta)}$ a α jest liczbą osobliwą dla przyporządkowania φ, przy czym $\alpha>\xi$ i $\alpha>\beta$, wynika, że

$$\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z).$$

Wobec tego, że $x\in F_\alpha$, wnosimy stąd, że $\Sigma_x[(x\in F_\alpha)\cdot\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)]$, tj. że $\Psi_\alpha(y,\ldots,z)$. Zatem

$$\overline{\Psi}(y,\ldots,z)\to\Psi_\alpha(y,\ldots,z).$$

Załóżmy, że $\Psi_\alpha(y,\ldots,z)$, tj. że istnieje takie $x\in F_\alpha$, że $\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)$. Ponieważ α jest liczbą graniczną, więc zgodnie z (2) istnieje takie $\xi<\alpha$, że $x\in F_\xi$. Wynika stąd, że jeśli $\gamma=\max(\xi,\beta)$, to $x,y,\ldots,z\in F_\gamma$ i $\gamma<\alpha$. Z (7) wynika więc wobec $\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)$, że $\overline{\Theta}(x,y,\ldots,z)$, a zatem $\overline{\Psi}(y,\ldots,z)$. Udowodniliśmy więc, że

$$\Psi_\alpha(y,\ldots,z)\to\overline{\Psi}(y,\ldots,z),$$

co łącznie z udowodnioną wyżej implikacją odwrotną daje żądaną równoważność

$$\overline{\Psi}(y,\ldots,z)\equiv\Psi_\alpha(y,\ldots,z).$$

Twierdzenie 2 jest więc udowodnione całkowicie.

Lemat 3. *Jeśli $\Theta(x,y,\ldots,z)$ jest dowolną funkcją zdaniową, to w (S') daje się udowodnić następujące twierdzenie: jeśli α jest liczbą porządkową i $x,y,\ldots,z\in F_\alpha$, to*

$$(*)\qquad \overline{\Theta}_\alpha(x,y,\ldots,z)\equiv\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z).$$

Funkcja zdaniowa $\overline{\Theta}_\alpha$ powstaje więc z Θ przez podwójną relatywizację kwantyfikatorów: najpierw do funkcji zdaniowej $x\in F_\alpha$, a potem do funkcji zdaniowej $\Phi(x)$.

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste, jeśli Θ jest funkcją zdaniową bez kwantyfikatorów, gdyż wtedy operacje relatywizowania Θ_α i $\overline{\Theta}_\alpha$ nie zmieniają w ogóle tej funkcji zdaniowej.

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla funkcji zdaniowych $\Theta(x,y,\ldots,z)$ i $\Theta^{(1)}(x,\ldots,u,q,\ldots,s)$. Prócz (*) zachodzi zatem dla dowolnych $x,\ldots,u,q,\ldots,s\in F_\alpha$ równoważność

$$(**)\qquad \overline{\Theta^{(1)}_\alpha}(x,\ldots,u,q,\ldots,s)\equiv\Theta^{(1)}_\alpha(x,\ldots,u,q,\ldots,s).$$

Z (*) i (**) wynikają równoważności

$$\dot{\overline{\Theta}}'_\alpha(x,y,\ldots,z)\equiv\Theta'_\alpha(x,y,\ldots,z),$$

$$[\overline{\Theta}_\alpha(x,y,\ldots,z)+\overline{\Theta^{(1)}_\alpha}(x,\ldots,u,q,\ldots,s)]\equiv[\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)+\Theta^{(1)}_\alpha(x,\ldots,u,q,\ldots,s)],$$

tzn. że lemat jest prawdziwy dla funkcji zdaniowych Θ' i $\Theta+\Theta^{(1)}$.

Pozostaje zatem rozpatrzyć funkcję zdaniową $\Psi(y,\ldots,z)$ postaci $\Sigma_x\Theta(x,y,\ldots,z)$.

Z definicji wynika, że

$$\overline{\Psi}_\alpha(y,\ldots,z)\equiv\Sigma_x[\Phi(x)\cdot(x\in F_\alpha)\cdot\overline{\Theta}_\alpha(x,y,\ldots,z)],$$
$$\Psi_\alpha(y,\ldots,z)\equiv\Sigma_x[(x\in F_\alpha)\cdot\Theta_\alpha(x,y,\ldots,z)].$$

Z (*) wynika więc, że

$$\overline{\Psi}_\alpha(y,\ldots,z)\equiv\Psi_\alpha(y,\ldots,z),$$

gdyż $(x\in F_\alpha)\to\Phi(x)$ wobec (6).

Twierdzenie 4. *Na to, aby w modelu specjalnym były spełnione aksjomaty I—V i VII potrzeba i wystarcza, by można było w (S') udowodnić, że dla dowolnej funkcji zdaniowej $\Theta(t;u_1,\ldots,u_k)$, dla dowolnej liczby porządkowej α i dla dowolnych $u_1,\ldots,u_k\in F_\alpha$ zbiór*

$$(*_*)\qquad b=\underset{t}{E}[(t\in F_\alpha)\cdot\Theta_\alpha(t;u_1,\ldots,u_k)]$$

spełnia warunek $\Phi(b)$, tzn. warunek $\Sigma_\xi(b\in F_\xi)$.

Dowód. Konieczność Z aksjomatów I—V i VII wynika pewnik podzbiorów (por. rozdział II, § 4, str. 51). Jeśli więc aksjomaty te są spełnione w modelu, to również spełniony jest pewnik podzbiorów. Znaczy to, że jeśli a jest zbiorem takim, że $\Phi(a)$, zaś $\Psi(t;w_1,\ldots,w_l)$ dowolną funkcją zdaniową i jeśli $\Phi(w_1),\ldots,\Phi(w_l)$, to istnieje taki zbiór b, że $\Phi(b)$ i

$$(10)\qquad \prod_t\{\Phi(t)\to[(t\in b)\equiv(t\in a)\cdot\overline{\Psi}(t;w_1,\ldots,w_l)]\}.$$

Wzór (10) daje się uprościć na podstawie twierdzeń (i), (ii) z § 4 (str. 261) i założeń $\Phi(a)$ i $\Phi(b)$. Otrzymamy wówczas

$$\prod_t[(t\in b)\equiv(t\in a)\cdot\overline{\Psi}(t;w_1,\ldots,w_l)],$$

czyli

$$b=\underset{t}{E}[(t\in a)\cdot\overline{\Psi}(t;w_1,\ldots,w_l)].$$

Przyjmijmy za $\Psi(t;w_1,\ldots,w_l)$ funkcję zdaniową $\Theta_\alpha(t;u_1,\ldots,u_k)$ traktując F_α (występujące w Θ_α) jako jeden z parametrów w_l. Z lematu 3 wynika, że

$$\overline{\Theta}_\alpha(t;u_1,\ldots,u_k)\equiv\Theta_\alpha(t;u_1,\ldots,u_k).$$

Zbiór b określony wzorem (*_*) spełnia więc warunek Φ.

Dostateczność. Załóżmy, że spełniony jest warunek wymieniony w twierdzeniu 4. Wystarczy udowodnić, że w modelu są spełnione aksjomaty III—V i VII.

Aby dowieść, że spełniony jest aksjomat III, należy wykazać (por. § 4, twierdzenie 2, str. 262), że $\Phi(\boldsymbol{X}) \to \Phi(S(\boldsymbol{X}))$.

Załóżmy w tym celu, że $\boldsymbol{X} \in F_\xi$. Ze wzoru (3) wynika, że każdy element $\boldsymbol{X}$ jest zawarty w F_ξ, a zatem $S(\boldsymbol{X}) \subset F_\xi$.

Oznaczmy przez $A(t,\boldsymbol{X})$ funkcję zdaniową

$$\sum_Y [(t \in Y) \cdot (Y \in \boldsymbol{X})].$$

Zgodnie z założeniem zbiór

$$Z = \underset{t}{E} [(t \in F_\xi) \cdot A_\xi(t,\boldsymbol{X})]$$

spełnia funkcję zdaniową Φ.

Mamy jednak

$$A_\xi(t,\boldsymbol{X}) \equiv \sum_Y [(Y \in F_\xi) \cdot (t \in Y) \cdot (Y \in \boldsymbol{X})],$$

skąd wobec wzoru (3) dla zbioru F_ξ i założenia $\boldsymbol{X} \in F_\xi$ wynika

$$A_\xi(t,\boldsymbol{X}) \equiv \sum_Y [(t \in Y) \cdot (Y \in \boldsymbol{X})] \equiv [t \in S(\boldsymbol{X})].$$

A więc $Z = F_\xi \cdot S(\boldsymbol{X}) = S(\boldsymbol{X})$, co wobec $\Phi(Z)$ daje $\Phi(S(\boldsymbol{X}))$, c. b. d. o.

Aby udowodnić, że spełniony jest aksjomat IV, załóżmy, że $X \in F_\xi$, i przyjmijmy

$$P = \underset{U}{E} [(U \subset X) \cdot \Phi(U)].$$

Należy wykazać (por. § 4, twierdzenie 3, str. 262), że $\Phi(P)$, tj. że istnieje takie β, że $P \in F_\beta$.

Każdy element zbioru P należy do pewnego F_η. Niech ζ będzie liczbą porządkową większą od każdej z tych liczb η. Dla liczby ζ zachodzi zatem inkluzja $P \subset F_\zeta$, która dowodzi, że

$$P = \underset{U}{E} [(U \in F_\zeta) \cdot (U \subset X)]. \tag{11}$$

Oznaczmy przez $B(T,X)$ funkcję zdaniową

$$\prod_Y [(Y \in T) \to (Y \in X)].$$

Zgodnie z założeniami twierdzenia zbiór

$$Q = \underset{T}{E} [(T \in F_\xi) \cdot B_\xi(T,X)]$$

spełnia funkcję zdaniową Φ.

Wykażemy, że $P = Q$. Istotnie, z (3) wynika, że

$$U \in F_\xi \to [(Y \in U) \equiv (Y \in F_\xi) \cdot (Y \in U)],$$

a zatem na mocy (11)

$$\begin{aligned} U \in P &\equiv (U \in F_\xi) \cdot (U \subset X) \equiv (U \in F_\xi) \cdot \prod_Y [(Y \in U) \to (Y \in X)] \\ &\equiv (U \in F_\xi) \cdot \prod_Y [(Y \in F_\xi) \cdot (Y \in U) \to (Y \in X)] \\ &\equiv (U \in F_\xi) \cdot B_\xi(U,X) \equiv U \in Q. \end{aligned}$$

Zatem wzór $\Phi(Q)$ daje $\Phi(P)$, c. b. d. o.

Aby sprawdzić, że spełniony jest aksjomat V wystarczy wykazać, że istnieje rodzina zbiorów $\boldsymbol{X}$ bez elementu nasyconego taka, że $\Phi(\boldsymbol{X})$.

W myśl (4) dla każdego ξ istnieje η takie, że $\eta > \xi$ i $\Pi_\xi[(\zeta \leqslant \xi) \to (F_\zeta \in F_\eta)]$. Oznaczając najmniejszą z tych liczb η przez $\varphi(\xi)$ otrzymujemy przyporządkowanie niemalejące i takie, że $\xi < \varphi(\xi)$.

Przyjmijmy $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_1 = \varphi(\alpha_0) + 1$, $\alpha_2 = \varphi(\alpha_1) + 1, \ldots$ Ciąg α_n jest więc rosnący. Niech β będzie najmniejszą liczbą porządkową przekraczającą wszystkie α_n. Oczywiście β jest liczbą graniczną i

$$\xi < \beta \to \sum_n (\xi < \alpha_n) \to \sum_n (\varphi(\xi) \leqslant \varphi(\alpha_n)) \to \sum_n (\varphi(\xi) < \alpha_{n+1}) \to \varphi(\xi) < \beta. \tag{12}$$

Zbiór F_β spełnia wobec (4) warunek $\Phi(F_\beta)$. Wykażemy, że nie ma on elementu nasyconego. Istotnie, jeśli $X \in F_\beta$, to zgodnie z (2) i uwagą, że β jest liczbą graniczną, istnieje takie $\xi < \beta$, że $X \in F_\xi$. Ponieważ zaś $F_\xi \in F_{\varphi(\xi)}$, więc ze wzoru (3) wynika, że $X \subset F_\xi \subset F_{\varphi(\xi)}$, przy czym $X \neq F_{\varphi(\xi)}$, gdyż z (1) wnosimy, że $F_\xi \neq F_{\varphi(\xi)}$.

Z (12) otrzymujemy $\varphi(\xi) < \beta$, a więc też $\varphi(\varphi(\xi)) < \beta$. Ponieważ zaś $F_{\varphi(\xi)} \in F_{\varphi\varphi(\xi)} \subset F_\beta$, więc

$$X \subset F_{\varphi(\xi)} \in F_\beta \qquad \text{i} \qquad X \neq F_{\varphi(\xi)},$$

co dowodzi, że X nie jest elementem nasyconym zbioru F_β.

Wykażemy wreszcie, że spełniony jest aksjomat VII.

Niech $\Theta(x,y;a_1,\ldots,a_k)$ będzie funkcją zdaniową o $k+2$ zmiennych wolnych, U — zbiorem takim, że $\Phi(U)$. Załóżmy, że $\Phi(a_1),\ldots,\Phi(a_k)$. Istnieje zatem taka liczba ξ, że

$$U, a_1, \ldots, a_k \in F_\xi.$$

Załóżmy, że dla każdego x takiego, że $\Phi(x)$, istnieje co najwyżej jeden element y taki, że $\Phi(y)$ i $\overline{\Theta}(x,y;a_1,\ldots,a_k)$. Przyjmijmy

$$V = \underset{y}{E} \{\Phi(y) \cdot \sum_x [(x \in U) \cdot \overline{\Theta}(x,y;a_1,\ldots,a_k)]\}. \tag{13}$$

Zgodnie z twierdzeniem 6 z § 4, str. 263, dla dowodu, że pewnik VII jest spełniony w modelu, wystarczy udowodnić, że $\Phi(V)$, tj. że istnieje liczba η taka, że $V \in F_\eta$.

W tym celu zauważmy przede wszystkim, że istnieje liczba $\zeta > \xi$ taka, że $V \subset F_\zeta$. Istotnie, każdy element zbioru V należy do pewnego F_τ; wystarczy więc obrać za ζ liczbę przekraczającą ξ i wszystkie liczby τ.

Weźmy dalej pod uwagę funkcję zdaniową

$$\sum_x [(x \in U) \cdot \Theta(x, y; a_1, \ldots, a_k)],$$

którą dla krótkości zapiszemy jako $\Gamma(U, y; a_1, \ldots, a_k)$.

Zgodnie z twierdzeniem 2 istnieje liczba porządkowa $\alpha > \zeta$ taka, że dla $U, y, a_1, \ldots, a_k \in F_\xi$ zachodzi równoważność

$$\overline{\Gamma}(U, y; a_1, \ldots, a_k) \equiv \Gamma_\alpha(U, y; a_1, \ldots, a_k),$$

czyli

$$\sum_x [\Phi(x) \cdot (x \in U) \cdot \overline{\Theta}(x, y; a_1, \ldots, a_k)] \equiv \Gamma_\alpha(U, y; a_1, \ldots, a_k).$$

Po lewej stronie możemy opuścić czynnik $\Phi(x)$ pod kwantyfikatorem, gdyż z $\Phi(U)$ wynika wobec zupełności funkcji zdaniowej Φ, że $(x \in U) \to \Phi(x)$. Otrzymujemy więc równoważność

$$\sum_x [(x \in U) \cdot \overline{\Theta}(x, y; a_1, \ldots, a_k)] \equiv \Gamma_\alpha(U, y; a_1, \ldots, a_k),$$

z której wynika równość

$$(14) \quad \underset{y}{E} \{(y \in F_\alpha) \cdot \sum_x [(x \in U) \cdot \overline{\Theta}(x, y; a_1, \ldots, a_k)]\} = \underset{y}{E} [(y \in F_\alpha) \cdot \Gamma_\alpha(U, y; a_1, \ldots, a_k)].$$

Zgodnie z założeniami twierdzenia zbiór

$$C = \underset{y}{E} [(y \in F_\alpha) \cdot \Gamma_\alpha(U, y; a_1, \ldots, a_k)]$$

spełnia funkcję zdaniową Φ. Z (13) i (14) wnosimy, że $C = F_\alpha \cdot V = V$, gdyż $V \subset F_\zeta \subset F_\alpha$. Otrzymujemy stąd $\Phi(V)$, c. b. d. o.

Definicja 1. Rodzina zbiorów $\boldsymbol{X}$ jest *zupełna*, jeśli $X \in \boldsymbol{X} \to X \subset \boldsymbol{X}$.

Definicja 2. Dla każdej zupełnej rodziny $\boldsymbol{X}$ oznaczamy przez $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$ najmniejszą rodzinę funkcji taką, że:

1. Każda funkcja należąca do $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$ ma skończoną liczbę argumentów przebiegających $\boldsymbol{X}$ i wartości jej są podzbiorami $\boldsymbol{X}$.

2. Funkcje (jednoargumentowe) F i G takie, że $F(a) = a$, $G(a) = \{a\}$ dla każdego $a \in \boldsymbol{X}$, należą do $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$.

3. Jeśli funkcja $F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ należy do $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$, to każda funkcja powstająca z F przez utożsamienie (wszystkich lub niektórych) argumentów, jak również każda funkcja powstająca z F przez dowolne permutacje argumentów też należy do $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$.

4. Jeżeli funkcje $F(a_1, \ldots, a_h)$ i $G(b_1, \ldots, b_k)$ należą do $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$, to następujące funkcje H, K, L też należą do $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$:

$$H(a_1, \ldots, a_h) = \boldsymbol{X} - F(a_1, \ldots, a_h),$$
$$K(a_1, \ldots, a_h, b_1, \ldots, b_k) = F(a_1, \ldots, a_h) \cdot G(b_1, \ldots, b_k),$$
$$L(a_2, \ldots, a_h) = \sum_{a_1 \in \boldsymbol{X}} F(a_1, \ldots, a_h).$$

Rodzina $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$ jest oczywiście przeliczalna. Można bez trudności zdefiniować ciąg nieskończony utworzony ze wszystkich jej elementów.

Funkcje należące do rodziny $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$ są matematycznymi odpowiednikami funkcji zdaniowych zrelatywizowanych do funkcji zdaniowej $x \in \boldsymbol{X}$. Wynika to z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5. *Niech $\boldsymbol{X}$ będzie rodziną zupełną, K rodziną zbiorów postaci $F(a_1, \ldots, a_h)$, gdzie $F \in \mathcal{F}(\boldsymbol{X})$, zaś $a_1, \ldots, a_h \in \boldsymbol{X}$. Przy tych założeniach można dla każdej funkcji zdaniowej $\Theta(t; u_1, \ldots, u_h)$ udowodnić w systemie (S'), że*

$$\underset{x}{E} [(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_h)] \in K,$$

gdzie symbol $\Theta_{\boldsymbol{X}}$ oznacza funkcję zdaniową Θ o kwantyfikatorach zrelatywizowanych do funkcji zdaniowej $x \in \boldsymbol{X}$.

Dowód. Twierdzenie zachodzi dla funkcji zdaniowej Θ kształtu $t \in u_1$, gdyż wtedy $E_x[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta_{\boldsymbol{X}}(x, a_1)] = \boldsymbol{X} \cdot a_1 = a_1$, zaś funkcja $F(a_1) = a_1$ należy do rodziny $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$. Podobnie wykazuje się, że twierdzenie zachodzi dla funkcji zdaniowej Θ kształtu $t = u_1$. Bowiem $E_x[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta_{\boldsymbol{X}}(x, a_1)] = E_x[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot (x = a_1)] = \{a_1\} \in K$.

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla funkcji zdaniowych $\Theta^{(1)}(t; u_1, \ldots, u_h)$ i $\Theta^{(2)}(t; v_1, \ldots, v_k)$. Wynika stąd, że

$$\text{(i)} \qquad \underset{x}{E} [(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta^{(1)}_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_h)] = F(a_1, \ldots, a_h),$$

$$\text{(ii)} \qquad \underset{x}{E} [(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta^{(2)}_{\boldsymbol{X}}(x; b_1, \ldots, b_k)] = G(b_1, \ldots, b_k),$$

gdzie F i G są pewnymi funkcjami należącymi do rodziny $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$.

Z (i) wynika, że

$$\underset{x}{E} \{(x \in \boldsymbol{X}) \cdot [\Theta^{(1)}_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_h)]'\} = \boldsymbol{X} - F(a_1, \ldots, a_h),$$

a więc twierdzenie zachodzi dla funkcji zdaniowej $[\Theta^{(1)}]'$.

Rozpatrzmy następnie funkcję zdaniową $\Theta = \Theta^{(1)} \cdot \Theta^{(2)}$. Aby rozumować w przypadku zupełnie ogólnym załóżmy, że zmienne wolne funkcji zdaniowej $\Theta^{(1)}$ częściowo pokrywają się ze zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej $\Theta^{(2)}$. Załóżmy zatem, że

$$\Theta^{(1)} = \Theta^{(1)}(t; u_1, \ldots, u_h),$$
$$\Theta^{(2)} = \Theta^{(2)}(t; u_1, \ldots, u_j, v_{j+1}, \ldots, v_k),$$
$$\Theta = \Theta(t; u_1, \ldots, u_h, v_{j+1}, \ldots, v_k).$$

Przyjmijmy

$$B = \underset{x}{E}[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_h, b_{j+1}, \ldots, b_k)].$$

Ponieważ $\Theta = \Theta^{(1)} \cdot \Theta^{(2)}$, więc

$$B = \underset{x}{E}[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta^{(1)}_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_h)] \cdot \underset{x}{E}[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta^{(2)}_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k)].$$

Wynika stąd na mocy założeń (i) i (ii), że

$$B = F(a_1, \ldots, a_h) \cdot G(a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k).$$

Zgodnie z punktami 3 i 4 definicji rodziny $\mathcal{F}(\boldsymbol{X})$ wynika stąd, że $\boldsymbol{B} \in K$. Istotnie, funkcja

$$F(a_1, \ldots, a_h) \cdot G(a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k)$$

powstaje z funkcji o $h+k$ argumentach $F(a_1, \ldots, a_h) \cdot G(b_1, \ldots, b_k)$ przez utożsamienie pewnych argumentów.

Rozpatrzmy wreszcie funkcję zdaniową $\Theta = \Sigma_{u_j} \Theta^{(1)}$. Z (i) wynika, że

$$\underset{x}{E}[(x \in \boldsymbol{X}) \cdot \Theta_{\boldsymbol{X}}(x; a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_h)] = \sum_{a_j \in \boldsymbol{X}} F(a_1, \ldots, a_h),$$

a więc zbiór ten należy do K na mocy 3 i 4.

Twierdzenie 5 jest więc udowodnione całkowicie.

Twierdzenie 6. *W systemie* (S') *można udowodnić istnienie modelu specjalnego, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty systemu* (S) *łącznie z aksjomatem VI.*

Dowód. W całym poniższym dowodzie powołujemy się tylko na aksjomaty systemu (S'), tj. nie korzystamy z pewnika wyboru.

Niech R będzie jakąkolwiek relacją dobrze porządkującą swe pole, które oznaczymy przez C. Załóżmy, że elementami C są zbiory i że $X \in C \to X \subset C$ (tj. że C jest rodziną zupełną).

Jeśli $\boldsymbol{X} \in C$ i $\boldsymbol{X}$ jest niepustą rodziną zbiorów rozłącznych i niepustych, to przez $\Gamma_R(\boldsymbol{X})$ oznaczymy zbiór, który ma z każdym ze zbiorów $Z \in \boldsymbol{X}$ dokładnie jeden element wspólny, a mianowicie ten element, który jest najwcześniejszy w Z ze względu na relację R. Jeśli $\boldsymbol{X}$ i R nie spełniają wymienionych tu założeń, to przyjmiemy $\Gamma_R(\boldsymbol{X}) = 0$.

Oznaczmy przez C^* zbiór składający się:

(i) ze wszystkich zbiorów $F(a_1, \ldots, a_k)$, gdzie F jest dowolną funkcją o k argumentach, należącą do $\mathcal{F}(C)$, i $a_1, \ldots, a_k \in C$,

(ii) ze wszystkich zbiorów $\Gamma_R(\boldsymbol{X})$, gdzie $\boldsymbol{X} \in C$.

Udowodnimy, że

(15) $$C \subset C^*,$$

(16) $$C \in C^*.$$

Istotnie, jeśli $A \in C$, to biorąc za F funkcję $F_1(x) = x$, otrzymamy $F(A) = A$, co dowodzi, że $A \in C^*$. Biorąc zaś za F funkcję $C - x \cdot (C - x)$, otrzymamy $F(x) = C$, skąd wynika, że $C \in C^*$.

Zbiór C^* spełnia warunek $X \in C^* \to X \subset C^*$. Istotnie, jeśli $U \in C^*$, to U jest albo podzbiorem C, albo $U = \Gamma_R(\boldsymbol{X})$, gdzie $\boldsymbol{X} \in C$. W obydwu wypadkach $U \subset C$, gdyż $\Gamma_R(\boldsymbol{X}) \subset S(\boldsymbol{X})$, $S(\boldsymbol{X}) \subset C$, bo z $x \in X \in \boldsymbol{X} \in C$ wynika $x \in C$.

Zbiór $U \in C^*$ nazwiemy *zbiorem pierwszego rodzaju* jeśli ma on postać (i) dla pewnej funkcji $F \in \mathcal{F}(C)$ i pewnych $a_1, \ldots, a_k \in C$. Zbiór, który nie jest pierwszego rodzaju nazwiemy *zbiorem drugiego rodzaju*.

Wszystkie funkcje należące do $\mathcal{F}(C)$ możemy ustawić w ciąg nieskończony

(17) $$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$$

Możemy przyjąć, że pierwszą funkcją w ciągu (17) jest $F_1(x) = x$.

Każdemu zbiorowi U pierwszego rodzaju przyporządkujemy najwcześniejszą funkcję z ciągu (17), dla której przy pewnych $a_1, \ldots, a_k \in C$ zachodzi równość

(18) $$U = F(a_1, \ldots, a_k).$$

Porządkując leksykograficznie układy $(a_1, \ldots, a_k)$, dla których zachodzi równość (18), przyporządkujemy każdemu U pierwszego rodzaju jednoznacznie funkcję F i układ $(a_1, \ldots, a_k)$, dla których zachodzi równość (18).

Jeśli $U \in C$, to najwcześniejszą funkcją, dla której zachodzi wzór (18), jest F_1, a układ $(a_1, \ldots, a_k)$ redukuje się do jednego zbioru U. Istotnie, $F_1(U) = U$.

Niech ϱ będzie relacją porządkującą leksykograficznie zbiór $\mathfrak{Z}$ wszystkich układów $(F_l, a_1, \ldots, a_k)$, gdzie $a_1, \ldots, a_k \in C$. Relacja ta ustala dobre uporządkowanie zbioru $\mathfrak{Z}$, jak to wynika z własności uporządkowania leksykograficznego.

Jeśli U jest zbiorem drugiego rodzaju należącym do C, to istnieje $\boldsymbol{X} \in C$ takie, że $U = \Gamma_R(\boldsymbol{X})$. Każdemu zbiorowi U drugiego rodzaju mo-

żemy więc przyporządkować najwcześniejszy zbiór $X \in C$, dla którego $U = \Gamma_R(X)$.

Definiujemy teraz następującą relację R^* między elementami zbioru C^*: UR^*V zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $U, V \in C^*$ i gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

(19) U jest pierwszego rodzaju a V drugiego;

(20) U i V są pierwszego rodzaju i układ $(F_i, a_1, \ldots, a_k)$ przyporządkowany zbiorowi U pozostaje w relacji ϱ do układu $(F_j, a'_1, \ldots, a'_l)$ przyporządkowanego zbiorowi V;

(21) U i V są drugiego rodzaju i rodzina X_1 przyporządkowana zbiorowi U pozostaje w relacji R do rodziny X_2 przyporządkowanej zbiorowi V.

Relacja R^* dobrze porządkuje zbiór C^*. Istotnie, relacja ta ustala uporządkowanie zbioru wszystkich elementów pierwszego rodzaju podobne do uporządkowania, jakie relacja ϱ ustala w pewnym podzbiorze zbioru $\mathfrak{Z}$. W zbiorze elementów drugiego rodzaju relacja R^* ustala uporządkowanie podobne do uporządkowania, jakie relacja R ustala w pewnym podzbiorze C. Ponieważ relacje ϱ i R dobrze porządkują swe pola, więc R^* ustala istotnie dobre uporządkowanie zbioru C.

Niech R_1 i R_2 będą dwiema relacjami porządkowymi.

Mówić będziemy, że relacja R_1 jest *zawarta* w R_2, jeśli pole R_1 jest odcinkiem pola R_2 i dla dowolnych x, y zachodzi wynikanie $xR_1y \to xR_2y$.

Wykażemy, że relacja R jest zawarta w R^*. Istotnie, pole C relacji R jest podzbiorem pola C^* relacji R^*. Jeśli xRy, to x i y są elementami C, a więc też elementami pierwszego rodzaju zbioru C^*. Przyporządkowane elementom x i y układy $(F_i, a_1, \ldots, a_k)$ i $(F_j, a'_1, \ldots, a'_l)$ są równe odpowiednio (F_1, x) i (F_1, y), co dowodzi, wobec xRy, że xR^*y.

Z określenia relacji R^* wynika przy tym, że jeśli U poprzedza w C^* zbiór należący do C, to U musi samo należeć do C. Zatem zbiór C jest odcinkiem C^*, c. b. d. o.

Niech Y będzie rodziną relacji dobrze uporządkowaną przez stosunek zawierania.

Bez trudności dowodzi się, że jeśli wszystkie relacje należące do rodziny Y dobrze porządkują swe pola, to suma S wszystkich relacji (pojmowanych jako zbiory par uporządkowanych) należących do Y też dobrze porządkuje swe pole i pole to jest sumą pól relacji należących do Y.

Stosując twierdzenie o indukcji pozaskończonej wnosimy stąd, że istnieje przyporządkowanie R takie, że

(22) $$R_0 = \{\langle 0, 0\rangle\},$$

(23) $$R_{\xi+1} = R^*_\xi,$$

(24) $$R_\lambda = \sum_{\eta<\lambda} R_\eta \quad \text{dla liczb granicznych } \lambda > 0.$$

Niech F_ξ będzie polem relacji R_ξ. Z (22) wnosimy, że

(25) $$F_0 = 0,$$

zaś z (23) i (24), że

(26) $$F_{\xi+1} = F^*_\xi,$$

(27) $$F_\lambda = \sum_{\eta<\lambda} F_\eta \quad \text{dla liczb granicznych } \lambda > 0.$$

Wynika stąd na mocy (15) i (16), że

(28) $$F_\xi \subset F_\eta \quad \text{i} \quad F_\xi \in F_\eta \quad \text{dla} \quad \xi < \eta.$$

Wykażemy przez indukcję względem ξ, że nie zachodzi żaden związek postaci

$$F_\xi \in Y_1 \in Y_2 \in \ldots \in Y_k \in F_\xi.$$

Istotnie, dla $\xi = 0$ żaden taki związek zachodzić nie może, gdyż $F_0 = 0$. Przypuśćmy, że μ jest najmniejszą liczbą porządkową taką, że dla pewnych $Y_1, \ldots, Y_k$ zachodzi wzór

$$F_\mu \in Y_1 \in \ldots \in Y_k \in F_\mu.$$

Gdyby μ było liczbą graniczną, to mielibyśmy dla pewnego $\xi < \mu$

$$F_\mu \in Y_1 \in \ldots \in Y_k \in F_\xi,$$

skąd wobec (28) wynikałoby, że

$$F_\xi \in F_\mu \in Y_1 \in \ldots \in Y_k \in F_\xi,$$

wbrew określeniu liczby μ.

Gdyby natomiast μ było postaci $\nu+1$, to mielibyśmy

$$F_\mu \in Y_1 \in \ldots \in Y_k \in F^*_\nu,$$

skąd wynikałoby, że Y_k jest bądź podzbiorem zbioru F_ν, bądź też ma postać $\Gamma_R(X)$, gdzie $X \in F_\nu$. W obu przypadkach wnosimy stąd, że dla pewnych $Z_1, \ldots, Z_h$ jest

$$F_\mu \in Z_1 \in \ldots \in Z_h \in F_\nu,$$

a więc wobec (28)

$$F_\nu \in F_\mu \in Z_1 \in \ldots \in Z_h \in F_\nu.$$

Otrzymujemy w ten sposób znów sprzeczność z definicją liczby μ.

Z udowodnionego w ten sposób twierdzenia wynika na mocy (28) wzór

$$F_\xi \neq F_{\xi+1}. \tag{29}$$

Przez indukcję względem ξ dowodzimy, że

$$X \in F_\xi \to X \subset F_\xi. \tag{30}$$

Istotnie, jeśli α jest liczbą porządkową i wzór (30) zachodzi dla $\xi<\alpha$, to bądź $F_\alpha=F_{\beta+1}=F_\beta^*$, bądź też $F_\alpha=\Sigma_{\eta<\alpha}F_\eta$. W obu przypadkach zachodzi wzór (30) dla $\xi=\alpha$; jest tak w pierwszym przypadku, bo jeśli C spełnia ten warunek, to i C^* go spełnia; jest tak w drugim przypadku, gdyż suma rosnącej rodziny zbiorów spełniających warunek (30) spełnia też ten warunek.

Wzory (25)—(30) stwierdzają, że zbiory F_ξ czynią zadość warunkom (1)—(5). Zbiory te wyznaczają zatem model specjalny.

Wykażemy, że jeśli α jest liczbą porządkową, $\Theta(t; u_1,\dots,u_k)$ dowolną funkcją zdaniową i $u_1,\dots,u_k \in F_\alpha$, to

$$B=\underset{t}{P}[(t \in F_\alpha)\cdot\Theta_\alpha(t; u_1,\dots,u_k)] \in F_{\alpha+1}.$$

Istotnie, z twierdzenia 5 wnosimy, że istnieje funkcja G o k argumentach należąca do rodziny $\mathcal{F}(F_\alpha)$ i taka, że $B=G(u_1,\dots,u_k)$, co zgodnie z definicją operacji X^* i ze wzorem (26) dowodzi, że $B \in F_{\alpha+1}$.

Na mocy twierdzenia 4 w modelu specjalnym wyznaczonym przez zbiory F_α spełnione są wszystkie aksjomaty systemu (S) z wyjątkiem, być może, pewnika wyboru VI.

Aby udowodnić, że i pewnik wyboru jest spełniony w tym modelu, wystarczy wykazać, że dla każdej rodziny $\boldsymbol{X} \neq 0$, złożonej ze zbiorów rozłącznych i niepustych, z warunku $\boldsymbol{X} \in F_\xi$ wynika, że istnieje liczba η i zbiór $Y \in F_\eta$ zawierający dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów należących do $\boldsymbol{X}$ (por. § 4, twierdzenie 5, str. 262). Otóż zbiór $\Gamma_R(\boldsymbol{X})$ ma dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów należących do $\boldsymbol{X}$, a nadto $\Gamma_R(\boldsymbol{X}) \in F_\xi^*=F_{\xi+1}$.

Twierdzenie 6 jest w ten sposób udowodnione, przy czym w dowodzie jego nie korzystaliśmy z pewnika wyboru.

Z udowodnionych twierdzeń wynika łatwo zasadniczy wynik tego paragrafu:

Twierdzenie 7. *Jeśli aksjomaty I—V i VII nie zawierają sprzeczności, to i system (S) oparty na aksjomatach I—VII również nie zawiera sprzeczności.*

Dowód. Przyjmujemy w twierdzeniu 1 z § 2 (str. 258) za (N) system (S'), a za (T) system (S) i stosujemy twierdzenie 6.

Z twierdzenia 7 wynika, że konstrukcje wykonywane przy pomocy pewnika wyboru nie prowadzą do sprzeczności przy założeniu, że nie tkwi ona w pozostałych aksjomatach. Nawet więc nie przyjmując pewnika wyboru można korzystać z niego dla konstruowania kontrprzykładów, tj. przykładów wykazujących niemożność udowodnienia pewnych hipotez mających postać zdań ogólnych (jak np. hipotezy dotyczącej ogólnego rozwiązania zagadnienia miary, por. rozdział V, § 12, str. 234).

Podobny dowód niesprzeczności można też przeprowadzić dla uogólnionej hipotezy continuum[1]). Natomiast niezależność tej hipotezy pozostaje dotąd zagadnieniem otwartym.

[1]) Por. książkę K. Gödla cytowaną w odsyłaczu na str. 273.