Opisane tu działanie pozwala na tworzenie nowych pierścieni Boole'a z danego pierścienia. Postępowanie to znajduje zastosowanie m. in. w teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, gdzie nieraz „utożsamia się" zbiory różniące się o zbiór miary 0. Znaczy to, że od pierścienia $2^{\mathcal{C}}$ wszystkich podzbiorów przestrzeni $\mathcal{C}$ przechodzimy do pierścienia $2^{\mathcal{C}}/I_0$, gdzie I_0 jest ideałem zbiorów miary 0.

ĆWICZENIA. 1) Wykazać, że jeśli I_0 jest ideałem zbiorów miary 0, to pierścień $2^{\mathcal{C}}/I_0$ nie ma atomów.

2) Jeśli I jest ideałem pierwszym pierścienia Boole'a A, to pierścień A/I ma 2 elementy, i na odwrót.

3) Jeśli I jest ideałem wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathcal{J}$, to pierścień $2^{\mathcal{J}}/I$ zawiera continuum klas $[X_t]$ takich, że $[X_t] \odot [X_s] = I$ dla $s \neq t$.

ROZDZIAŁ V.

Zbiory dobrze uporządkowane.

§ 1. Definicje. Zasada indukcji pozaskończonej. Mówimy, że relacja R *dobrze porządkuje* zbiór X, jeśli relacja ta porządkuje X i przy tym każdy niepusty podzbiór zbioru X zawiera element najwcześniejszy (ze względu na R)[1]).

PRZYKŁADY. 1) Każdy zbiór typu ω jest dobrze uporządkowany.

2) Zbiór złożony z liczby 1 oraz z liczb postaci $1-\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$, jest dobrze uporządkowany w typ $\omega+1$ przez relację $\leqslant$.

3) Niech $\alpha(n)$ będzie liczbą różnych czynników pierwszych liczby n. Relacja $E_{xy}\{[\alpha(x)<\alpha(y)]+[\alpha(x)=\alpha(y)]\cdot[x\leqslant y]\}$ dobrze porządkuje zbiór liczb naturalnych w typ ω^2 (por. rozdział IV, str. 141 i str. 160, ćw. 6).

4) Suma uporządkowana (por. str. 161) $S=\Sigma_{x\in T}F_x$, gdzie zbiór T i składniki F_x są dobrze uporządkowane, jest dobrze uporządkowana.

Istotnie, niech Y będzie niepustym podzbiorem S. Zbiór tych x, dla których $Y\cdot F_x\neq 0$, jest niepustym podzbiorem zbioru T, a więc ma on element pierwszy x_0. Iloczyn $Y\cdot F_{x_0}$ jest niepustym podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego F_{x_0}, a więc ma element pierwszy. Ten element jest oczywiście pierwszym elementem zbioru Y.

5) Produkt dwu (a więc też i produkt skończonej liczby) zbiorów dobrze uporządkowanych jest dobrze uporządkowany przez relację porządku leksykograficznego lub antyleksykograficznego.

Wynika to z przykładu 4 i twierdzenia 6 rozdziału IV, § 5, str. 166.

6) Każdy podzbiór zbioru dobrze uporządkowanego jest dobrze uporządkowany.

---

[1]) Pojęcie zbioru dobrze uporządkowanego pochodzi od Cantora, który wprowadził je po raz pierwszy w pracy *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Nr 5, Mathematische Annalen **21** (1883), § 3. Jest ciekawe, że Cantor wprowadził pojęcie zbiorów uporządkowanych później (w pracy ogłoszonej w r. 1895), najwidoczniej przy systematyzowaniu swych wyników z teorii zbiorów dobrze uporządkowanych.

Następujące dwa twierdzenia wynikają bezpośrednio z definicji:

Twierdzenie 1. *W zbiorze dobrze uporządkowanym istnieje element pierwszy; każdy element prócz ostatniego (o ile taki istnieje) ma następnik.*

Twierdzenie 2'. *Żaden podzbiór zbioru dobrze uporządkowanego nie ma typu ω^*.*

° ***Twierdzenie 2''.*** *Jeśli zbiór uporządkowany A nie jest dobrze uporządkowany, to zawiera podzbiór typu ω^*.*

Dowód. Niech P będzie podzbiorem zbioru A, niepustym i nie zawierającym pierwszego elementu. Niech

$$Q(x) = \underset{y}{E}[(y \prec x)(y \in P)].$$

Mamy więc $Q(x) \neq 0$ dla każdego $x \in P$. Na mocy ogólnej zasady wyboru (ob. rozdział II, § 10, twierdzenie 4, str. 74) istnieje funkcja f określona dla każdego $x \in P$ i taka, że $f(x) \in Q(x)$.

Niech p_0 będzie dowolnym elementem zbioru P. Określamy ciąg $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ indukcyjnie przyjmując, że $p_n = f(p_{n-1})$ dla $n > 0$.

Ponieważ $f(x) \prec x$, więc ciąg ten ma typ ω^*.

Twierdzenia 2' i 2'' dają łącznie:

° ***Twierdzenie 2.*** *Na to, żeby zbiór uporządkowany był dobrze uporządkowany, potrzeba i wystarcza, aby nie zawierał podzbioru typu ω^*.*

W rozdziale IV (§ 2, str. 145) zdefiniowaliśmy odcinek zbioru uporządkowanego A jako taki podzbiór właściwy X zbioru A, że z $x \in X$ i $y \prec x$ wynika $y \in X$. Oczywiście, dla każdego $x \in A$ zbiór $O(x)$ wszystkich y poprzedzających x jest odcinkiem.

Dla zbiorów dobrze uporządkowanych twierdzenie to można odwrócić:

Twierdzenie 3. *Jeśli zbiór A jest dobrze uporządkowany, to dla każdego jego odcinka X istnieje element $x \in A$ taki, że*

$$(y \in X) \equiv (y \prec x),$$

tzn. X jest postaci $X = O(x)$.

Istotnie, za x obrać należy pierwszy element różnicy $A - X$.

Dowód następujących dwu twierdzeń nie przedstawia trudności.

Twierdzenie 4. *Suma dowolnej rodziny odcinków zbioru A jest bądź równa A, bądź jest odcinkiem A* [1]).

[1]) Twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnych zbiorów uporządkowanych.

Twierdzenie 5. *Jeśli A nie ma ostatniego elementu, to $A = \Sigma_x O(x)$, jeśli zaś A ma ostatni element a_0, to $A = O(a_0) + \{a_0\}$.*

Znaczenie zbiorów dobrze uporządkowanych pochodzi w znacznej mierze stąd, że obowiązują dla nich dwa twierdzenia, stanowiące bezpośrednie uogólnienie znanych z arytmetyki zasad dowodzenia i definiowania przez indukcję.

Pierwsze z tych twierdzeń, zwane *zasadą indukcji pozaskończonej*, podamy obecnie, drugie — dotyczące definiowania przez indukcję pozaskończoną, podamy w § 4.

Twierdzenie 6. *Jeśli zbiór A jest dobrze uporządkowany, $B \subset A$ i zbiór B spełnia dla każdego $x \in A$ warunek*

$$[O(x) \subset B] \to (x \in B), \tag{0}$$

to $B = A$.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że $A - B \neq 0$. Istnieje więc pierwszy element x zbioru $A - B$. Znaczy to, że jeśli $y \prec x$, to y non $\in A - B$, czyli $y \in B$, co dowodzi, że $O(x) \subset B$. Z (0) wynika więc $x \in B$ wbrew założeniu, że $x \in A - B$.

UWAGI. 1. Aby bliżej objaśnić znaczenie udowodnionego twierdzenia, przypuśćmy, że B jest zbiorem elementów spełniających funkcję zdaniową $\Phi(s)$. Przyjmując w (0) za x pierwszy element zbioru A, wnosimy (wobec $0 \subset B$), że $x \in B$; pierwszy element zbioru A spełnia więc funkcję zdaniową $\Phi(s)$.

Załóżmy dalej, że x jest elementem A i że wszystkie elementy poprzedzające x spełniają funkcję zdaniową $\Phi(s)$. Z (0) wynika, że wówczas x też spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$.

Wnosimy stąd, że założenia twierdzenia 6 mogą być wypowiedziane w następującej postaci:

1° pierwszy element zbioru A spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$;

2° jeśli każdy element poprzedzający x spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$, to x również spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$.

Teza twierdzenia 6 orzeka, że wówczas każdy element zbioru A spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$ [1]).

Twierdzenie 6 pozostaje, jak widać, w ścisłym związku z arytmetyczną zasadą indukcji, której można nadać następującą postać: jeśli liczba 1 spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$ i jeśli z założenia, że każda liczba mniejsza od n spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$ wynika, że n spełnia tę

[1]) Z tej postaci twierdzenia o indukcji pozaskończonej korzystał implicite już Cantor; ob. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen **49** (1897), str. 336—339. Wyraźne sformułowanie twierdzenia pochodzi od Hessenberga; ob. *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Getynga, 1906, str. 53.

funkcję, — to każda liczba naturalna spełnia funkcję zdaniową $\Phi(s)$. Ta zasada indukcji jest mianowicie szczególnym przypadkiem twierdzenia 6 (dla $A=\mathcal{J}$).

*2. W podanej na wstępie definicji dobrego uporządkowania (str. 186), orzekającej, że każdy niepusty podzbiór danego zbioru zawiera element pierwszy, posługujemy się *zmiennym* zbiorem. Pod tym względem definicja dobrego uporządkowania, ściślej mówiąc — definicja klasy relacyj ustalających dobre uporządkowanie — różni się od rozważanych w rozdziale IV, § 1, definicyj takich klas, jak klasa relacyj przechodnich, relacyj zwrotnych, porządkujących itp., które dają się zapisać przy użyciu zmiennych przebiegających jedynie elementy, tj. zmiennych najniższego typu. Wykażemy, że różnica ta jest *istotna*, mianowicie, że klasa $\mathfrak{R}$ relacyj dobrze porządkujących podzbiory zbioru $\mathcal{J}$, *nie może być zdefiniowana przy użyciu zmiennych jedynie najniższego typu* [1]). W tym celu wystarczy wykazać — w myśl rozdziału II, str. 79 i 76, (β) — że *klasa* $\mathfrak{R}$ *nie jest borelowska w przestrzeni* $2^{\mathcal{J}^2}$ (tj. w przestrzeni relacyj zachodzących między liczbami naturalnymi).

Oprzemy się na następujących trzech twierdzeniach z teorii operacji ($\mathcal{A}$) [2]):

1° rzut zbioru borelowskiego (położonego na płaszczyźnie) daje się przedstawić jako wynik operacji ($\mathcal{A}$) dokonanej na zbiorach domkniętych;

2° istnieje (na linii prostej) zbiór Z, który daje się przedstawić jako wynik operacji ($\mathcal{A}$) dokonanej na zbiorach domkniętych, ale którego uzupełnienie nie daje się w ten sposób przedstawić;

3° jeśli zbiór $B\subset\mathcal{C}$ jest borelowski, to zbiór $B\times\mathcal{C}$ jest również borelowski (por. rozdział II, str. 78, ćwiczenie 1 (c)).

Stosownie do twierdzenia udowodnionego w rozdziale II, str. 85, istnieje funkcja F_r, która każdej liczbie (dwójkowo) wymiernej r przyporządkowuje zbiór domknięty $\subset\mathcal{C}$ w taki sposób, że punkt x należy do zbioru Z (z twierdzenia 2°) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg liczb wymiernych $\mathfrak{z}^{(1)}<\mathfrak{z}^{(2)}<\ldots$ taki, że $x\in F_{\mathfrak{z}^{(1)}}\cdot F_{\mathfrak{z}^{(2)}}\cdot\ldots$, tj.

$$(x\in Z)\equiv\sum_{\mathfrak{z}}\prod_{n}[\mathfrak{z}^{(n)}<\mathfrak{z}^{(n+1)}][x\in F_{\mathfrak{z}^{(n)}}].$$

Warunek występujący po prawej stronie tej równoważności może być wyrażony jak następuje (por. tw. 2): zbiór $E_r(x\in F_r)$ nie jest dobrze

[1]) Ob. A. Tarski, *Grundzüge des Systemenkalküls*, Fundamenta Mathematicae **26** (1936), str. 301. Podany tu dowód pochodzi od K. Kuratowskiego; ob. *Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens*, Fundamenta Mathematicae **28** (1937), str. 97—100.

[2]) Ob. np. K. Kuratowski, *Topologie I*, 2-e wyd., str. 390, 368 i 253.

uporządkowany ze względu na relację $\geqslant$. Inaczej mówiąc — przyjmując, że $r_1, r_2, \ldots$ jest ciągiem złożonym ze wszystkich liczb zbioru $\mathcal{R}_0$ (dwójkowo wymiernych) — relacja

$$(mR_xn)\equiv(r_m\geqslant r_n)(x\in F_{r_m}\cdot F_{r_n})$$

nie jest relacją dobrze porządkującą swe pole (przy założeniu, że $x\in Z$).

A zatem

$$x\in Z'\equiv R_x\in\mathfrak{R}\equiv\sum_K[(K\in\mathfrak{R})(K=R_x)]$$
$$\equiv\sum_K\{(K\in\mathfrak{R})\prod_{m,n}[(mKn)\equiv(r_m\geqslant r_n)(x\in F_{r_m}\cdot F_{r_n})]\}.$$

Przyjmijmy

$$\Phi_{m,n}(x,K)\equiv[(mKn)\equiv(r_m\geqslant r_n)(x\in F_{r_m}\cdot F_{r_n})]$$
$$\equiv[(mKn)(r_m\geqslant r_n)(x\in F_{r_m}\cdot F_{r_n})]+$$
$$+(mKn)'[(r_m<r_n)+(x\in F_{r_m})'+(x\in F_{r_n})'].$$

Zbiór $\underset{x,K}{E}\Phi_{m,n}(x,K)$ jest więc sumą zbioru domkniętego

$$\underset{x,K}{E}[(mKn)(r_m\geqslant r_n)(x\in F_{r_m}\cdot F_{r_n})]$$

i zbioru otwartego

$$\underset{x,K}{E}(mKn)'[(r_m<r_n)+(x\in F_{r_m})'+(x\in F_{r_n})'],$$

bowiem zbiór $E_K(mKn)$ jest domknięty (ob. rozdział II, str. 76, β).

Jest to więc zbiór borelowski (klasy G_δ). Na mocy wzoru (ii) z rozdziału II, str. 79, zbiór

$$\underset{x,K}{E}\prod_{m,n}\Phi_{m,n}(x,K)=\prod_{m,n}\underset{x,K}{E}\Phi_{m,n}(x,K)$$

jest również borelowski.

Udowodnimy obecnie, że zbiór $\mathfrak{R}$ nie jest borelowski. Przypuśćmy przeciwnie, że zbiór $\mathfrak{R}$ jest borelowski (w przestrzeni $2^{\mathcal{J}^2}$). Wówczas zbiór $\mathfrak{R}\times\mathcal{C}=E_{K,x}(K\in\mathfrak{R})$ jest borelowski w przestrzeni $2^{\mathcal{J}^2}\times\mathcal{J}$ (na mocy 3°), a więc zbiór

$$B=\underset{K,x}{E}[(K\in\mathfrak{R})\prod_{m,n}\Phi_{m,n}(x,K)]=(\mathfrak{R}\times\mathcal{C})\cdot\underset{K,x}{E}\prod_{m,n}\Phi_{m,n}(x,K)$$

jest — jako iloczyn dwóch zbiorów borelowskich — również borelowski (ob. rozdział II, ćw. 1, str. 78). Wreszcie zbiór

$$Z'=\underset{x}{E}\sum_K[(K\in\mathfrak{R})\prod_{m,n}\Phi_{m,n}(x,K)],$$

jako rzut zbioru B na oś $\mathcal{C}$ (ob. rozdział II, str. 54, twierdzenie), byłby w myśl 1° wynikiem operacji ($\mathcal{A}$) dokonanej na zbiorach domkniętych [1]); przeczy to jednak założeniu, że zbiór Z spełnia warunek 2°.

*3. Weźmy pod uwagę rodzinę relacji $\mathfrak{R}$, rozważaną w rozdziale II, str. 82 (b), i oznaczmy przez $\mathfrak{P}$ rodzinę wszystkich relacyj porządkujących podzbiory zbioru liczb naturalnych. *Rodzina $\mathfrak{R}$ jest nieborelowska.* Istotnie, gdyby tak nie było, to ponieważ rodzina $\mathfrak{P}$ jest borelowska (por. rozdział IV, str. 144, ćwiczenie 1), rodzina $\mathfrak{P}-\mathfrak{R}$ również byłaby borelowska (bo różnica dwóch zbiorów borelowskich jest borelowska). Lecz na mocy twierdzenia 2, $\mathfrak{P}-\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$, rodzina $\mathfrak{R}$ zaś nie jest borelowska — jak to powyżej udowodniliśmy.

ĆWICZENIA. *Zastosowania do monotonicznych rodzin zbiorów.* Niech dany będzie zbiór E, jego podzbiór A oraz funkcja F określona dla wszystkich $X\subset E$ i spełniająca warunek

(i) $$F(X)\subset X.$$

Niech $\boldsymbol{Z}$ będzie dowolną rodziną podzbiorów zbioru E, spełniającą warunki:

(ii) $A\in\boldsymbol{Z}$, (iii) jeśli $X\in\boldsymbol{Z}$, to $F(X)\in\boldsymbol{Z}$,

(iv) jeśli $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{Z}$, to $P(\boldsymbol{R})\in\boldsymbol{Z}$.

1. Udowodnić, że wśród rodzin $\boldsymbol{Z}$ istnieje *najmniejsza*. Oznaczać ją będziemy w dalszym ciągu przez $\boldsymbol{M}(A)$.

2. Niech A^* oznacza najmniejszy zbiór rodziny $\boldsymbol{M}(A)$. Udowodnić, że $F(A^*)=A^*$.

3. Dowieść, że jeśli funkcja F jest rosnąca (tj. $X\subset Y\to F(X)\subset F(Y)$), to zbiór A^* jest *największym* podzbiorem zbioru A spełniającym równość $X=F(X)$.

4. Udowodnić (tw. Hessenberga) [2]): *rodzina $\boldsymbol{M}(A)$ jest monotoniczna.*

Wskazówka. Udowodnić, że rodzina $\boldsymbol{Z}$ złożona ze zbiorów H należących do $\boldsymbol{M}(A)$ i spełniających warunek

$$\prod_{X,Y}\{(H\subset X\in\boldsymbol{M}(A))(Y\in\boldsymbol{M}(A))\to[(X\subset Y)+(Y\subset F(X))]\},$$

czyni zadość warunkom (ii)—(iv).

[1]) Wprawdzie zbiór $\mathfrak{R}\times\mathcal{C}$ leży w produkcie $2^{\mathcal{J}^2}\times\mathcal{C}$ a nie na płaszczyźnie $\mathcal{C}^2$ (jak tego wymaga warunek 1°), to jednak warunek 1° można stosować, ponieważ przestrzeń $2^{\mathcal{J}^2}$ możemy identyfikować ze zbiorem $\mathcal{C}$ Cantora, a więc z podzbiorem przestrzeni $\mathcal{C}$. Dodajmy, że twierdzenie 1° prawdziwe jest w produktach dowolnych przestrzeni zupełnych ośrodkowych.

[2]) Journal für die reine und angewandte Mathematik **135** (1908), str. 127, lub też K. Kuratowski, Fundamenta Mathematicae **3** (1922), str. 83.

5. Wyprowadzić stąd, że *rodzina $\boldsymbol{M}(A)$ jest dobrze uporządkowana ze względu na stosunek $\supset$ i że $F(X)$ następuje bezpośrednio po X.*

6. W ćwiczeniach 1—5 zakładaliśmy, że funkcja F spełnia warunek (i). Zastąpimy obecnie to założenie przez warunek

(i′) $$X\subset F(X)$$

oraz warunek (iv) przez

(iv′) jeśli $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{Z}$, to $S(\boldsymbol{R})\in\boldsymbol{Z}$.

Oznaczmy przez $\boldsymbol{N}(A)$ najmniejszą rodzinę podzbiorów zbioru E spełniającą warunki (ii), (iii) oraz (iv′).

Udowodnić, że rodzina $\boldsymbol{N}(A)$ jest dobrze uporządkowana ze względu na stosunek $\subset$ i że $F(X)$ następuje bezpośrednio po X.

§ 2. Twierdzenia o podobieństwie zbiorów dobrze uporządkowanych.

Niech A będzie zbiorem uporządkowanym przez relację R. Każdą funkcję f, która ustala podobieństwo między A i zbiorem $f(A)$ zawartym w A, tj. spełniającą warunek

(1) $$x\prec y\to f(x)\prec f(y),$$

nazywamy funkcją *rosnącą*.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja f określona na zbiorze dobrze uporządkowanym A jest rosnąca, to dla każdego x jest $xRf(x)$ (tzn. $x\prec f(x)$ lub $x=f(x)$).*

Dowód. Niech $B=E_x[xRf(x)]$. Niech $O(x)\subset B$. Udowodnimy, że $x\in B$.

Niech więc $y\in O(x)$, tj. $y\prec x$. Na mocy (1) wynika stąd: $f(y)\prec f(x)$. Ponieważ zaś $y\in B$, więc $yRf(y)$, skąd $y\prec f(x)$. Element $f(x)$ następuje więc po każdym elemencie y odcinka $O(x)$, tzn. $f(x)\in A-O(x)$. Ponieważ zaś x jest pierwszym elementem zbioru $A-O(x)$, więc $xRf(x)$, tj. $x\in B$.

Wzór (0) z twierdzenia 6, str. 187, jest w ten sposób udowodniony. Wynika zeń na mocy tego twierdzenia, że $A=B$. A więc $xRf(x)$ dla każdego $x\in A$.

Wniosek 2. *Jeśli zbiory dobrze uporządkowane A i B są podobne, to istnieje jedna tylko funkcja ustalająca ich podobieństwo.*

Dowód. Załóżmy, że zbiory A i B dobrze uporządkowane przez relacje R i S są podobne i że funkcje f i g ustalają ich podobieństwo. Funkcja $g^{-1}f$ jest oczywiście rosnąca w A (por. rozdz. IV, § 1, str. 142, tw. 2). Zgodnie z twierdzeniem 1 jest więc $xRg^{-1}f(x)$ dla każdego $x\in A$. A zatem $g(x)Sf(x)$. Rozpatrując funkcję $f^{-1}g$ zamiast $g^{-1}f$, otrzymamy podobnie $f(x)Sg(x)$. Wynika stąd, że $f(x)=g(x)$, ponieważ relacja S jest słabo asymetryczna.

Wniosek 3. *Żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny do swego odcinka.*

Istotnie, gdyby zbiory A i $O(x)$ były podobne, to funkcja f ustalająca to podobieństwo byłaby rosnąca i czyniłaby zadość warunkowi $f(x) \in O(x)$, tj. $f(x) \prec x$, co przeczy twierdzeniu 1.

Wniosek 4. *Żadne dwa odcinki zbioru dobrze uporządkowanego nie są podobne.*

Dla dowodu wystarczy zastosować wniosek 3, biorąc pod uwagę, że z dwu różnych odcinków jeden jest zawsze odcinkiem drugiego.

Twierdzenie 5 [1]). *Jeśli zbiory A i B są dobrze uporządkowane, to albo są one podobne, albo zbiór A jest podobny do odcinka zbioru B, albo zbiór B jest podobny do odcinka zbioru A; przy tym możliwości te wykluczają się wzajemnie.*

Dowód. Niech R i S będą relacjami ustalającymi dobre uporządkowanie zbiorów A i B i niech

$$Z = \underset{x \in A}{E} \sum_{y \in B} [\overline{O_R(x)} = \overline{O_S(y)}],$$

inaczej mówiąc (ob. znakowanie na str. 145):

$(x \in Z) \equiv$ {odcinek $O_R(x)$ zbioru A jest podobny do jakiegoś odcinka $O_S(y)$ zbioru B}.

Ze względu na wniosek 4, dla danego $x \in Z$, odcinek taki istnieje tylko jeden; istnieje więc taka funkcja f określona na Z, że odcinkiem tym jest $O_S(f(x))$.

Udowodnimy przede wszystkim, że zachodzą dwie możliwości: albo $Z = A$, albo Z jest odcinkiem zbioru A, tj. istnieje element a zbioru A taki, że $Z = O_R(a)$. Niech bowiem $x \prec x' \in Z$. Ponieważ zbiór $O_R(x)$ jest odcinkiem zbioru $O_R(x')$, więc funkcja przekształcająca w sposób podobny $O_R(x')$ w $O_S(f(x'))$ przekształca $O_R(x)$ w odcinek zbioru $O_S(f(x'))$, a zatem w odcinek zbioru B; stąd $x \in Z$.

Podobnie: bądź $f(Z) = B$, bądź też $f(Z)$ jest odcinkiem zbioru B: $f(Z) = O_S(b)$. Wystarczy w tym celu zauważyć, że

$$f(Z) = \underset{y \in B}{E} \sum_{x \in Z} [y = f(x)] = \underset{y \in B}{E} \sum_{x \in A} [\overline{O_S(y)} = \overline{O_R(x)}];$$

jeśli bowiem zbiór $O_S(y)$ jest podobny do jakiegoś odcinka zbioru A, to y jest postaci $y = f(x)$, gdzie $x \in Z$.

Zauważmy wreszcie, że funkcja f ustala podobieństwo zbiorów Z i $f(Z)$. Jak już bowiem udowodniliśmy, z warunku $x \prec x' \in Z$ wynika, że zbiór $O_S(f(x))$ jest odcinkiem $O_S(f(x'))$, a więc, że $f(x) \prec f(x')$.

[1]) Twierdzenie to pochodzi od Cantora; por. Mathematische Annalen **49** (1897), str. 216.

A priori zachodzić mogą 4 możliwości:

1^0 $Z = A$ i $f(Z) = B$, 2^0 $Z = A$ i $f(Z) = O_S(b)$,
3^0 $Z = O_R(a)$ i $f(Z) = B$, 4^0 $Z = O_R(a)$ i $f(Z) = O_S(b)$.

Pierwsze 3 możliwości odpowiadają trzem możliwościom przewidzianym w twierdzeniu. Natomiast czwarta możliwość nie może zachodzić. Mielibyśmy bowiem w tym wypadku $\overline{O_R(a)} = \overline{O_S(b)}$, a więc (na mocy definicji zbioru Z) $a \in Z$, tj. $a \in O_R(a)$, co przeczy definicji odcinka.

Wniosek 6. *Jeśli zbiory A i B są dobrze uporządkowane, to albo $\overline{A} \leqslant \overline{B}$, albo $\overline{B} \leqslant \overline{A}$. Moce zbiorów dobrze uporządkowanych podlegają więc prawu trichotomii.*

Dowód analogicznego twierdzenia dla dowolnych mocy wymaga odwołania się do pewnika wyboru (por. rozdział II, § 5, str. 113, i rozdział niniejszy, § 10, str. 222).

§ 8. Liczby porządkowe i ich zbiory.

Liczbami porządkowymi nazywamy typy zbiorów dobrze uporządkowanych [1]). Liczba 0 (typ zbioru pustego) jest więc też liczbą porządkową. Twierdzenie 5 z § 2 pozwala na określenie dla liczb porządkowych stosunku mniejszości (którego nie można w zadawalający sposób określić dla dowolnych typów porządkowych).

Definicja 1. Mówimy, że liczba porządkowa α jest ***mniejsza*** od liczby porządkowej β, jeśli zbiór typu α jest podobny do odcinka zbioru typu β. Piszemy wówczas $\alpha < \beta$ albo $\beta > \alpha$.

Piszemy $\alpha \leqslant \beta$ zamiast „$\alpha < \beta$ lub $\alpha = \beta$".

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych liczb porządkowych α i β jest $\alpha < \beta$, lub $\alpha = \beta$, lub $\alpha > \beta$ i przypadki te wykluczają się wzajemnie.*

Twierdzenie to wynika z twierdzenia 5, § 2.

Twierdzenie 2. *Jeśli α, β i γ są liczbami porządkowymi i $\alpha < \beta$ i $\beta < \gamma$, to $\alpha < \gamma$.*

Dowód. Niech A, B i C będą zbiorami typów α, β i γ. W myśl założenia zbiór A jest podobny do odcinka zbioru B, a zbiór B — do odcinka zbioru C. Zatem zbiór A jest podobny do odcinka zbioru C, c. b. d. o.

Z łatwością dowodzimy następujących twierdzeń o relacji $\leqslant$:

$$(\alpha \leqslant \beta) \cdot (\beta \leqslant \alpha) \rightarrow (\alpha = \beta), \qquad (\alpha \leqslant \beta) \cdot (\beta \leqslant \gamma) \rightarrow (\alpha \leqslant \gamma).$$

[1]) Pojęcie liczb porządkowych wprowadził Cantor. Ob. Mathematische Annalen **21** (1883), str. 548.

Twierdzenie 3. *Jeśli zbiory A i B są dobrze uporządkowane w typy α i β i zbiór A jest podobny do podzbioru B_1 zbioru B, to $\alpha \leqslant \beta$.*

Dowód. W przeciwnym wypadku byłoby $\beta < \alpha$, a więc zbiór B byłby podobny do odcinka zbioru B_1, co przeczy twierdzeniu 1 z § 2.

Przejdziemy teraz do badania zbiorów złożonych z liczb porządkowych.

Twierdzenie 4. *Zbiór $W(\alpha)$ złożony ze wszystkich liczb porządkowych mniejszych od α jest dobrze uporządkowany w typ α przez relację $\leqslant$.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem dobrze uporządkowanym, którego typem jest α. Przyporządkowując elementowi a zbioru A typ odcinka $O(a)$, wnosimy (na mocy aksjomatu zastępowania, str. 49), że istnieje zbiór $W(\alpha)$, i otrzymujemy zarazem wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru A na ten zbiór. Przy tym następujące warunki są równoważne:

1^0 a_1 poprzedza a_2 lub $a_1 = a_2$,

2^0 $O(a_1)$ jest odcinkiem zbioru $O(a_2)$ lub $O(a_1) = O(a_2)$,

3^0 typ zbioru $O(a_1)$ jest niewiększy niż typ zbioru $O(a_2)$.

Dowodzi to, że relacja $\leqslant$ porządkuje zbiór $W(\alpha)$ w typ α.

PRZYKŁADY. Każdy zbiór typu ω jest podobny do zbioru składającego się z liczb $0,1,2,\ldots$ w naturalnym uporządkowaniu; każdy zbiór typu $\omega+5$ jest podobny do zbioru: $0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,\omega+4$.

Twierdzenie 5. *Każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany przez relację $\leqslant$. Inaczej mówiąc: w każdym niepustym zbiorze Z liczb porządkowych istnieje liczba najmniejsza.*

Dowód. Niech $\alpha \in Z$. Jeśli α nie jest najmniejszą liczbą zbioru Z, to znaczy to, że $Z \cdot W(\alpha) \neq 0$. Istnieje wówczas w zbiorze $Z \cdot W(\alpha)$ liczba najmniejsza β, bo zbiór $W(\alpha)$ jest dobrze uporządkowany (na mocy tw. 4). Liczba β jest równocześnie najmniejszą liczbą w zbiorze Z, jeśli bowiem $\xi \in Z - W(\alpha)$, to $\xi \geqslant \alpha$, skąd $\xi > \beta$.

Twierdzenie 6. *Dla każdego zbioru Z liczb porządkowych istnieje liczba porządkowa większa od każdej liczby należącej do Z.*

Dowód. Zgodnie z pewnikiem zastępowania istnieje zbiór $\boldsymbol{K}$, którego elementami są wszystkie zbiory $W(\alpha)$ odpowiadające liczbom α należącym do Z:

$$W(\alpha) \in \boldsymbol{K} \equiv \alpha \in Z.$$

Utwórzmy sumę S wszystkich zbiorów należących do $\boldsymbol{K}$:

$$S = \sum_{\alpha \in Z} W(\alpha).$$

Zbiór ten jest w myśl twierdzenia 5 dobrze uporządkowany przez relację $\leqslant$; niech σ będzie jego typem porządkowym.

Dla $\alpha \in Z$ zbiór $W(\alpha)$ jest albo odcinkiem zbioru S, albo pokrywa się z S, w każdym więc razie $\alpha \leqslant \sigma$. Wynika stąd, że $\alpha < \sigma+1$ dla każdej liczby $\alpha \in Z$; liczba $\sigma+1$ jest więc większa od każdej liczby zbioru Z.

Wniosek 7. *Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych* [1]).

Liczby porządkowe mają więc podobną własność co liczby kardynalne: jest ich „za dużo" na to, by można z nich było utworzyć zbiór (por. rozdział III, § 3, str. 109).

Wniosek 8. *Wśród liczb porządkowych nie należących do danego zbioru Z istnieje liczba najmniejsza.*

Niech bowiem α non $\in Z$ (liczba taka istnieje na mocy wniosku 7). Jeśli α nie jest najmniejszą spośród liczb nie należących do Z, to zbiór $W(\alpha) - Z$ jest niepusty. Najmniejsza z liczb tego zbioru (por. tw. 5) jest zarazem najmniejszą liczbą nie należącą do Z.

Wniosek 9. *Jeśli zbiór Z liczb porządkowych ma tę własność, że $(\gamma < \xi \in Z) \to (\gamma \in Z)$, to istnieje taka liczba α, że $Z = W(\alpha)$.*

Mianowicie, tą liczbą α jest najmniejsza spośród liczb porządkowych nie należących do Z.

Istotnie, jeśli $\xi \in Z$, to $\xi < \alpha$, bo nierówność $\alpha \leqslant \xi$ pociągałaby za sobą $\alpha \in Z$. A więc $Z \subset W(\alpha)$.

Jeśli zaś $\beta \in W(\alpha)$, to $\beta < \alpha$ i wówczas $\beta \in Z$ na mocy definicji liczby α. A więc $W(\alpha) \subset Z$.

§ 4. Ciągi pozaskończone. Definicje przez indukcję pozaskończoną.

Liczbę porządkową nazywamy liczbą *graniczną*, jeśli nie ma ona poprzednika.

Twierdzenie 1. *Każda liczba porządkowa jest sumą $\lambda+n$, gdzie λ jest liczbą graniczną, a n liczbą naturalną lub zerem.*

Dowód. Niech α_0 będzie liczbą porządkową, A_0 — zbiorem typu α_0. Jeśli A_0 nie ma ostatniego elementu, to α_0 jest liczbą graniczną. Jeśli A_0 ma ostatni element a_0, to rozpatrujemy typ α_1 zbioru $A_1 = A_0 - \{a_0\}$; jeśli zbiór ten nie ma ostatniego elementu, to α_1 jest liczbą graniczną i $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$. Jeśli zaś A_1 ma ostatni element a_1, to rozpatrujemy typ α_2 zbioru $A_2 = A_1 - \{a_1\}$ itd. Postępowanie to musi zakończyć się po skoń-

[1]) Wniosek 7 uważany był przed zaksjomatyzowaniem teorii mnogości za antynomię. Antynomię tę podał C. Burali-Forti w pracy *Una questione sui numeri transfiniti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **11** (1897), str. 154—164.

czonej liczbie kroków, gdyż $a_{i+1} \prec a_i$, zaś zbiór dobrze uporządkowany nie zawiera podzbiorów typu ω^*. Zatem dla pewnego n liczba a_n jest liczbą graniczną; przyjmując $\lambda = a_n$, otrzymujemy $\alpha_0 = \lambda + n$, c. b. d. o.

Ciągiem pozaskończonym typu α nazywamy funkcję φ, której zbiorem argumentów jest $W(\alpha)$. Jeśli wartości tego ciągu (zwane też wyrazami ciągu) są liczbami porządkowymi i jeśli z $\gamma < \beta < \alpha$ wynika $\varphi(\gamma) < \varphi(\beta)$, to mówimy, że ciąg ten jest *rosnący*.

Niech φ będzie ciągiem pozaskończonym typu $\geqslant \lambda$, gdzie λ jest liczbą graniczną. Na mocy twierdzenia 6 z § 3 istnieją liczby większe od każdej z liczb $\varphi(\gamma)$, gdzie $\gamma < \lambda$; najmniejszą spośród nich (por. § 3, wniosek 8) nazywamy *granicą* ciągu $\varphi(\gamma)$ dla $\gamma < \lambda$ i oznaczamy symbolem $\lim\limits_{\gamma<\lambda} \varphi(\gamma)$.

Np. $\omega = \lim\limits_{n<\omega} n = \lim\limits_{n<\omega} n^2$.

O liczbie λ mówimy, że jest *współkońcowa* z liczbą graniczną α, jeśli λ jest granicą rosnącego ciągu typu α:

$$\lambda = \lim_{\xi<\alpha} \varphi(\xi). \tag{0}$$

Liczba współkońcowa z liczbą graniczną jest, oczywiście, liczbą graniczną.

Związek powyższej definicji z pojęciem współkońcowości zbiorów (rozdział IV, § 2, str. 146) ustala następujące

Twierdzenie 2. *Na to, by liczba λ była współkońcowa z liczbą graniczną α, potrzeba i wystarcza, aby zbiór $W(\lambda)$ zawierał współkońcowy z nim podzbiór typu α.*

Dowód. Niech A będzie współkońcowym z $W(\lambda)$ podzbiorem zbioru $W(\lambda)$ takim, że $\bar{A} = \alpha$. Dla każdej liczby $\xi < \alpha$ istnieje w A liczba $\varphi(\xi)$ taka, że zbiór $E_\eta[(\eta \in A) \cdot (\eta < \varphi(\xi))]$ ma typ ξ. Ciąg $\varphi(\xi)$ jest oczywiście rosnący i $\varphi(\xi) < \lambda$ dla $\xi < \alpha$, gdyż $\varphi(\xi) \in A \subset W(\lambda)$. Jeśli $\mu < \lambda$, to istnieje liczba $\xi \in A$ taka, że $\mu < \xi$, gdyż zbiory A i $W(\lambda)$ są współkońcowe. Zatem $\mu < \xi \leqslant \varphi(\xi)$ (ob. str. 191, tw. 1), co dowodzi, że λ jest najmniejszą liczbą przewyższającą wszystkie liczby $\varphi(\xi)$, skąd wzór (0).

Załóżmy z kolei, że wzór (0) zachodzi. Niech A będzie zbiorem wszystkich wyrazów ciągu φ. Jest więc $\eta < \lambda$ dla $\eta \in A$, a zatem (z uwagi, że liczba λ jest graniczna) istnieje takie $\zeta \in W(\lambda)$, że $\eta < \zeta$. Na odwrót, jeśli $\zeta \in W(\lambda)$, to $\zeta < \lambda$ i (na mocy definicji granicy) istnieje takie $\xi < \alpha$, że $\zeta < \varphi(\xi)$, tj. pewna liczba zbioru A przewyższa ζ. Zatem zbiory A i $W(\lambda)$ są współkońcowe.

Z definicji granicy łatwo wynikają dwa wzory następujące:

$$\lim_{\gamma<\lambda} \varphi(\gamma) > \varphi(\gamma) \quad \text{dla} \quad \gamma < \lambda, \tag{1}$$

$$\{\prod_{\gamma<\lambda} [\mu > \varphi(\gamma)]\} = \{\mu \geqslant \lim_{\gamma<\lambda} \varphi(\gamma)\}. \tag{2}$$

Twierdzenie 3. *Jeśli φ i ψ są ciągami pozaskończonymi rosnącymi, λ jest liczbą graniczną i $\xi = \lim\limits_{\gamma<\lambda} \psi(\gamma)$, to $\lim\limits_{\delta<\xi} \varphi(\delta) = \lim\limits_{\gamma<\lambda} \varphi(\psi(\gamma))$.*

Dowód. Jeśli $\gamma < \lambda$, to w myśl (1) $\psi(\gamma) < \xi$, a więc (znów w myśl (1)) $\varphi(\psi(\gamma)) < \lim\limits_{\delta<\xi} \varphi(\delta)$. Stosując wzór (2) otrzymamy

$$\lim_{\gamma<\lambda} \varphi(\psi(\gamma)) \leqslant \lim_{\delta<\xi} \varphi(\delta). \tag{3}$$

Jeśli $\delta < \xi$, to stosując (2) wnosimy, że dla pewnej liczby $\gamma < \lambda$ jest $\psi(\gamma) \geqslant \delta$. Ponieważ ciąg φ jest rosnący, więc $\varphi(\psi(\gamma)) \geqslant \varphi(\delta)$, skąd na mocy (1) wynika, że $\lim\limits_{\gamma<\lambda} \varphi(\psi(\gamma)) > \varphi(\delta)$. Stosując wzór (2) otrzymamy

$$\lim_{\gamma<\lambda} \varphi(\psi(\gamma)) \geqslant \lim_{\delta<\xi} \varphi(\delta),$$

co wobec (3) dowodzi twierdzenia 3.

Z twierdzenia 3 wynika, że jeśli liczba graniczna η jest współkońcowa z liczbą graniczną ξ, a ξ jest współkońcowa z liczbą graniczną λ, to liczba η jest współkońcowa z λ.

Mówimy, że ciąg pozaskończony φ typu α jest *ciągły*, jeśli dla każdej liczby granicznej $\lambda < \alpha$ zachodzi równość

$$\varphi(\lambda) = \lim_{\gamma<\lambda} \varphi(\gamma).$$

Twierdzenie 4. *Niech φ będzie ciągiem pozaskończonym rosnącym i ciągłym typu α. Dla danej liczby $\gamma < \alpha$ przyjmijmy*

$$\varkappa_\gamma = \lim_{n<\omega} \gamma_n, \quad \textit{gdzie} \quad \gamma_0 = \gamma \quad \textit{i} \quad \gamma_{n+1} = \varphi(\gamma_n). \tag{4}$$

Wówczas $\varphi(\varkappa_\gamma) = \varkappa_\gamma$ (o ile $\varkappa_\gamma < \alpha$ oraz $\gamma_n < \alpha$ dla $n = 1, 2, \ldots$).

Dowód. Na mocy (4) mamy $\varkappa_\gamma > \gamma_{n+1} = \varphi(\gamma_n)$, skąd wobec (2):

$$\varkappa_\gamma \geqslant \lim_{n<\omega} \varphi(\gamma_n) = \varphi(\lim_{n<\omega} \gamma_n) = \varphi(\varkappa_\gamma).$$

Z drugiej strony $\varkappa_\gamma \leqslant \varphi(\varkappa_\gamma)$, gdyż ciąg φ jest rosnący (por. § 2, tw. 1).

UWAGA. Każdą liczbę ξ spełniającą równanie $\varphi(\xi) = \xi$ nazywamy liczbą *krytyczną* ciągu φ. Twierdzenie 4 orzeka więc, że jeśli γ należy do zbioru argumentów ciągu φ rosnącego i ciągłego, to istnieje liczba krytyczna tego ciągu większa niż γ, o ile ciąg ten jest określony dla dostatecznie dużych liczb porządkowych. To ostatnie założenie można — rzecz jasna — pominąć, jeśli założyć, że φ jest przyporządkowaniem określonym dla wszystkich liczb porządkowych.

***Twierdzenie 5** (*o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną*) [1]). *Dany jest zbiór Z i liczba α. Oznaczmy przez Φ zbiór wszystkich ciągów o typach $\xi \leqslant \alpha$ i o wartościach należących do Z. Dla każdej funkcji $h \in Z^{\Phi}$ istnieje wówczas jeden i tylko jeden ciąg pozaskończony f określony dla $\xi \leqslant \alpha$ i taki, że*

$$f(\xi)=h[f|W(\xi)] \quad \textit{dla każdego} \quad \xi \leqslant \alpha. \tag{5}$$

W szczególności:

$$f(0)=h(0)\ [2]), \quad f(1)=h[(f(0))]\ [3]), \quad f(2)=h[f(0),f(1)],\ldots$$

Dowód. Wykażemy najpierw, że istnieje co najwyżej jeden ciąg f spełniający warunek (5). Załóżmy zatem, że g jest ciągiem określonym na zbiorze $W(\alpha+1)$ i spełniającym warunek

$$g(\xi)=h[g|W(\xi)] \quad \text{dla każdego} \quad \xi \leqslant \alpha. \tag{6}$$

Niech $B=E_{\xi}\{f(\xi)=g(\xi)\}$. Jeśli $\xi \leqslant \alpha$ i $W(\xi) \subset B$, to $f|W(\xi)=g|W(\xi)$, a więc w myśl (5) i (6) $f(\xi)=g(\xi)$, tj. $\xi \in B$. Wykazaliśmy więc, że warunek $W(\xi) \subset B$ pociąga za sobą $\xi \in B$. Wnosimy stąd na mocy zasady indukcji pozaskończonej (tw. 6 z § 1, str. 187), że $W(\alpha+1) \subset B$, tj. że dla każdego $\xi \leqslant \alpha$ zachodzi $f(\xi)=g(\xi)$, czyli że funkcje f i g są identyczne.

Udowodnimy obecnie istnienie funkcji f spełniającej wzór (5).

Przypuśćmy, że dla danej liczby α taka funkcja nie istnieje; możemy, oczywiście, przyjąć, że α jest najmniejszą liczbą o tej własności (bo w przeciwnym razie w zbiorze $W(\alpha)$ znajdziemy najmniejszą liczbę o tej własności). A zatem dla każdego $\xi < \alpha$ istnieje funkcja f_{ξ} spełniająca warunek:

$$f_{\xi}(\gamma)=h[f_{\xi}|W(\gamma)] \quad \text{dla każdego} \quad \gamma \leqslant \xi. \tag{7}$$

Z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że dla danego ξ istnieje jedna tylko funkcja f_{ξ} spełniająca warunek (7). Wnosimy stąd, że jeśli $\gamma \leqslant \xi$, to $f_{\xi}|W(\gamma+1)=f_{\gamma}$. A zatem $f_{\gamma}(\zeta)=f_{\xi}(\zeta)$ o ile $\zeta<\gamma$; stąd

$$[f_{\gamma}|W(\gamma)]=[f_{\xi}|W(\gamma)] \quad \text{dla} \quad \gamma \leqslant \xi. \tag{8}$$

Przyjmijmy

$$f(\xi)=f_{\xi}(\xi) \quad \text{dla} \quad \xi<\alpha \quad \text{i} \quad f(\alpha)=h(C_{\alpha}), \tag{9}$$

gdzie C_{α} oznacza ciąg $f_0(0), f_1(1), \ldots, f_{\xi}(\xi), \ldots$, $\xi<\alpha$.

[1]) Przyjmując $\alpha=\omega$, można stąd łatwo wyprowadzić twierdzenie o definiowaniu przez indukcję skończoną (niesłusznie pomijane w wielu podręcznikach arytmetyki teoretycznej). Jasne sformułowanie tego twierdzenia (w przypadku szczególnym) znajduje się już u Cantora; ob. Mathematische Annalen **49** (1897), str. 231.

[2]) We wzorze tym zero po lewej stronie oznacza liczbę, po prawej — zbiór pusty.

[3]) $(f(0))$ oznacza tu ciąg jednoelementowy, którego jedynym elementem jest $f(0)$.

Funkcja f czyni zadość warunkowi (5). Istotnie, jeśli $\gamma \leqslant \xi < \alpha$, to zgodnie z (9), (7) i (8)

$$f(\gamma)=h[f_{\gamma}|W(\gamma)]=h[f_{\xi}|W(\gamma)]=f_{\xi}(\gamma), \tag{10}$$

skąd $f|W(\xi)=f_{\xi}|W(\xi)$ i w rezultacie na mocy (9) i (7)

$$f(\xi)=h[f_{\xi}|W(\xi)]=h[f|W(\xi)] \quad \text{dla} \quad \xi<\alpha.$$

Wreszcie $f(\alpha)=h[f|W(\alpha)]$, bo na mocy (10) $f|W(\alpha)=C_{\alpha}$.

UWAGI. 1°. Twierdzenie 5 można uogólnić zastępując funkcję h przez przyporządkowanie h. W dalszym ciągu (§ 6) korzystać będziemy z modyfikacji twierdzenia 5, polegającej na pominięciu zbiorów Z i Φ i na założeniu, że przyporządkowanie h określone jest dla każdego ciągu liczb porządkowych typu $\xi \leqslant \alpha$. Dowód pozostaje bez zmian.

2°. W zastosowaniach funkcja h bywa często określona trzema wzorami; pierwszy podaje wartość $h(\varphi)$ dla ciągu φ typu 0 (tj. wartość $h(0)$), drugi — wartość $h(\varphi)$ dla ciągów $\varphi \in Z^{\Phi}$, których typ nie jest liczbą graniczną (tj. ma postać $\xi+1$), trzeci — wartość $h(\varphi)$ dla ciągów, których typ λ jest liczbą graniczną. Np. pierwszy wzór ma postać

$$h(0)=A,$$

drugi ma postać

$$h(\varphi)=F(\varphi(\xi)),$$

a trzeci — postać

$$h(\varphi)=G\Big(\sum_{\eta<\lambda}\varphi(\eta)\Big) \quad \text{lub} \quad h(\varphi)=G\Big(\prod_{\eta<\lambda}\varphi(\eta)\Big),$$

gdzie F i G są danymi funkcjami, zaś A danym zbiorem.

Ciąg f istniejący na mocy twierdzenia 5 czyni wówczas zadość warunkom

$$\begin{cases} f(0)=A, \\ f(\xi+1)=F(f(\xi)), \\ f(\lambda)=G\Big(\sum_{\eta<\lambda} f(\eta)\Big) \quad \text{lub} \quad f(\lambda)=G\Big(\prod_{\eta<\lambda} f(\eta)\Big). \end{cases}$$

Zazwyczaj, stosując twierdzenie 5 do dowodu istnienia ciągu f, podajemy tylko te trzy wzory.

PRZYKŁADY. 1. *Pochodna rzędu α* [1]). Niech A będzie zbiorem położonym na linii prostej (lub ogólniej: $A \subset \mathcal{E}^n$). Pochodna rzędu α,

[1]) Przypomnijmy, że pochodna rzędu 1, czyli A', jest to zbiór punktów skupienia zbioru A.

Pochodne rzędu α rozważał już Cantor; ob. *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **15** (1879), str. 1—7.

zbioru A, tj. $A^{(\alpha)}$, określona jest za pomocą ciągu pozaskończonego $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(\xi)}, \ldots$, gdzie $\xi \leqslant \alpha$, zdefiniowanego przez indukcję jak następuje:

$$A^{(0)}=\bar{A}, \quad A^{(\xi+1)}=A^{(\xi)'}, \quad A^{(\lambda)}=\prod_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}, \tag{11}$$

gdy λ jest liczbą graniczną $\leqslant \alpha$.

W danym wypadku mamy $Z=2^A$, $h(0)=\bar{A}$, $h(\varphi)=[\varphi(\xi)]'$, jeśli φ jest typu $\xi+1$, $h(\varphi)=\prod_{\gamma<\lambda}\varphi(\gamma)$, jeśli φ jest typu λ (granicznego).

2. *Zbiory borelowskie rzędu* α [1]. Rodzinę $\boldsymbol{F}_\alpha$, zbiorów borelowskich rzędu α, określamy przez indukcję jak następuje:

(i) $\boldsymbol{F}_0$ jest rodziną wszystkich zbiorów domkniętych (danej przestrzeni),

(ii) $$\boldsymbol{F}_\xi=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\boldsymbol{F}_\gamma\Big)_\delta \text{ lub } \boldsymbol{F}_\xi=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\boldsymbol{F}_\gamma\Big)_\sigma \text{ dla } 0<\xi\leqslant\alpha,$$

w zależności od tego, czy ξ jest liczbą parzystą, czy nieparzystą (liczby kształtu $\lambda+n$, gdzie λ jest liczbą graniczną, nazywamy parzystymi, gdy n jest parzyste); przy tym oznaczamy ogólnie przez $\boldsymbol{R}_\sigma$ (względnie $\boldsymbol{R}_\delta$) rodzinę sum (względnie iloczynów) przeliczalnych ciągów zbiorów należących do rodziny $\boldsymbol{R}$.

W tym wypadku mamy

$$h(0)=\boldsymbol{F}_0 \text{ i } h(\varphi)=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\varphi(\gamma)\Big)_\delta \text{ lub } h(\varphi)=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\varphi(\gamma)\Big)_\sigma$$

w zależności od tego, czy typ ξ ciągu φ jest liczbą parzystą, czy nieparzystą.

Analogicznie określamy rodzinę $\boldsymbol{G}_\alpha$ przez warunki:

(iii) $\boldsymbol{G}_0$ jest rodziną zbiorów otwartych,

(iv) $$\boldsymbol{G}_\xi=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\boldsymbol{G}_\gamma\Big)_\sigma \text{ lub } \boldsymbol{G}_\xi=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\boldsymbol{G}_\gamma\Big)_\delta \text{ dla } 0<\xi\leqslant\alpha,$$

w zależności od parzystości liczby ξ.

3. *Funkcje przedstawialnie analitycznie klasy* α [2]. Zbiór tych funkcyj oznaczamy symbolem Φ_α i określamy indukcyjnie jak następuje:

a) Φ_0 jest zbiorem wszystkich funkcyj ciągłych (rzeczywistych zmiennej rzeczywistej),

b) $$\Phi_\xi=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\Phi_\gamma\Big)_\Delta \text{ dla } 0<\xi\leqslant\alpha,$$

gdzie ogólnie A_Δ oznacza zbiór wszystkich funkcyj, będących granicami zbieżnych ciągów funkcyj należących do klasy A.

[1] Zbiory borelowskie wprowadził E. Borel; ob. *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paryż 1898.

[2] Tę klasę funkcji rozważał pierwszy R. Baire; ob. *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paryż 1905.

W rozważanym przykładzie mamy:

$$Z=2^{(\mathcal{C}^{\mathcal{C}})}, \quad h(0)=\Phi_0, \quad h(\varphi)=\Big(\sum_{\gamma<\xi}\varphi(\gamma)\Big)_\Delta,$$

gdzie ξ jest typem ciągu φ.

4. *Bazy zbiorów liczb rzeczywistych* [1]. Niech φ będzie ciągiem pozaskończonym (typu α) liczb rzeczywistych takim, że $\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi_2)$ dla $\xi_1+\xi_2$. Niech Z będzie zbiorem wyrazów ciągu φ.

Zbiór Z jest oczywiście dobrze uporządkowany przez relację

$$\varphi(\xi)\,R\,\varphi(\eta) \equiv \xi\leqslant\eta.$$

Załóżmy, że

$$\varphi(0)=1,$$

$$x,y\in Z \to x+y\in Z,$$

$$x\in Z \to rx\in Z \quad \text{dla każdej liczby wymiernej } r.$$

Z twierdzenia 5 wynika istnienie takiego ciągu f typu α, że

(i) $$f(0)=\varphi(0)=1,$$

(ii) $f(\xi)$ jest najwcześniejszym wyrazem $\varphi(\eta)$ ciągu φ (tj. wyrazem o możliwie małym argumencie η), który nie spełnia następującego warunku $\Phi_\xi(\varphi(\eta))$: istnieją takie $n\in\mathcal{J}$, $r_i\in\mathcal{R}$, $\zeta_i<\xi$ $(i=1,2,\ldots,n)$, że

$$(*) \qquad \varphi(\eta)=\sum_{i=1}^{n} r_i f(\zeta_i)$$

(o ile wyraz taki nie istnieje, przyjmujemy $f(\xi)=1$).

Z (ii) wynika, że

(iii) jeśli $f(\xi)\neq 1$, to $f(\xi)$ jest najwcześniejszym wyrazem $\varphi(\zeta)$ takim, że non-$\Phi_\xi(\varphi(\zeta))$.

Zbiór B wszystkich wyrazów ciągu f nazywamy *bazą* zbioru Z. Jeśli $Z=\mathcal{R}$, to baza zawiera tylko liczbę 1, jeśli zaś Z zawiera choć jedną liczbę niewymierną, to $B\neq\{1\}$.

Załóżmy, że $Z\neq\mathcal{R}$. Z definicji wynika, że jeśli $f(\gamma)=1$ dla pewnego $\gamma\neq 0$, to dla $\gamma<\xi<\alpha$ jest $f(\xi)=1$, gdyż wówczas dla każdego elementu $y\in Z$ jest $\Phi_\gamma(y)$, a więc też $\Phi_\xi(y)$. Niech γ będzie najmniejszą liczbą taką, że $f(\gamma)=1$ i $0<\gamma<\alpha$. Jeśli liczba taka nie istnieje, to przyjmujemy $\gamma=\alpha$.

Ciąg f ma następujące własności:

(iv) $$\varphi(\xi)\prec f(\xi) \text{ lub } \varphi(\xi)=f(\xi) \text{ dla każdego } \xi<\gamma.$$

[1] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y)=f(x)+f(y)$, Mathematische Annalen **60** (1905), str. 459—462.

Istotnie, niech A będzie zbiorem tych $\xi<\gamma$, dla których spełniony jest warunek (iv), i załóżmy, że $W(\eta)\subset A$ dla jakiegoś $\eta<\gamma$. Jeśli $\xi<\eta$, to $\xi\in A$, a więc zgodnie z (iii) i (iv) jest $\Phi_{\xi+1}(\varphi(\xi))$, a więc też $\Phi_\eta(\varphi(\xi))$.

Jeśli non-$\Phi_\eta(\varphi(\eta))$, to $f(\eta)=\varphi(\eta)$ na mocy (iii). Jeśli zaś $\Phi_\eta(\varphi(\eta))$, to $f(\eta)$ nie jest równe ani $\varphi(\eta)$ ani żadnemu $\varphi(\xi)$ dla $\xi<\eta$, a więc $\varphi(\eta)\prec f(\eta)$.

Wynika stąd, że $\eta\in A$, co na mocy zasady indukcji dowodzi wzoru (iv).

(v) Dla każdej liczby $z\in Z$ jest $\Phi_\gamma(z)$.

Istotnie, załóżmy, że istnieją elementy $z=\varphi(\eta)$ takie, że non-$\Phi_\gamma(z)$ i niech $z_0=\varphi(\eta_0)$ będzie najwcześniejszym z nich. Na mocy (i) jest więc $\varphi(\eta_0)\neq 1$.

Rozpatrzmy dwa przypadki. Jeśli $\gamma<\alpha$, to stosując wzór (ii) dla $\xi=\gamma$ wnosimy, że $f(\gamma)=\varphi(\eta_0)\neq 1$ wbrew definicji γ. Jeśli $\gamma=\alpha$, to $f(\eta_0)\neq 1$ a nadto $\varphi(\eta_0)\neq f(\eta_0)$, gdyż oczywiście $\Phi_\gamma(f(\eta_0))$. Stąd wobec (iv) wynika $\varphi(\eta_0)\prec f(\eta_0)$, a więc zgodnie z (iii) otrzymujemy $\Phi_{\eta_0}(\varphi(\eta_0))$, skąd $\Phi_\gamma(\varphi(\eta_0))$, wbrew założeniu.

(vi) Jeśli $\Sigma r'_i f(\zeta_i)=\Sigma r''_i f(\zeta_i)$, gdzie $\zeta_1<\zeta_2<\ldots<\zeta_n<\gamma$, to $r'_i=r''_i$.

Istotnie, przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę, otrzymamy równanie

$$r_1 f(\zeta_1)+r_2 f(\zeta_2)+\ldots+r_n f(\zeta_n)=0, \quad \text{gdzie } r_i=r'_i-r''_i.$$

Przypuśćmy, że $r_n\neq 0$. Wynika stąd, że

$$f(\zeta_n)=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{r_i}{r_n}f(\zeta_i),$$

czyli $\Phi_{\zeta_n}(f(\zeta_n))$ wbrew wzorowi (iii). Podobnie: $r_j=0$ dla $j<n$.

Otrzymany wynik można wysłowić jak następuje: przyjmując dla $z\in Z$

(vii) $z=\sum_{i=1}^{n} r_i b_i$, gdzie $n\in\mathcal{J}$, $r_i\in\mathcal{R}$, $b_i\in B$ oraz $b_i\neq b_j$ dla $i\neq j$,

wyznaczamy współczynniki r_i *jednoznacznie* (mogą one zresztą znikać).

Oczywiście, ze wzorów

$$z_1=\sum_{i=1}^{n} r_i^{(1)} b_i, \qquad z_2=\sum_{i=1}^{n} r_i^{(2)} b_i$$

wynika, że

(viii) $$z_1+z_2=\sum_{i=1}^{n}(r_i^{(1)}+r_i^{(2)})\,b_i.$$

Niech b będzie dowolną liczbą niewymierną należącą do B. Oznaczmy przez $F(z)$ współczynnik liczby b we wzorze (vii) (jest więc $F(z)=0$, jeśli b nie figuruje we wzorze (vii) wśród liczb $b_1,\ldots,b_n$). Ze wzoru (viii) wynika, że

$$F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2) \quad \text{dla} \quad z_1,z_2\in Z.$$

Funkcja $F(z)$ nie jest przy tym liniowa, tj. nie jest postaci $c\cdot z$. W przeciwnym bowiem razie, wobec $F(b)=1$, mielibyśmy

$$c=\frac{1}{b}, \quad \text{a więc} \quad F(1)=c=\frac{1}{b},$$

podczas gdy na mocy definicji F jest $F(1)=0$.

Twierdzenie 6. *Każda liczba graniczna postaci* $\lambda=\lim_{\xi<\alpha}\varphi(\xi)$, *jest współkońcowa z jakąś liczbą* $\gamma\leqslant\alpha$ [1]).

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 5 istnieje ciąg ψ typu α taki, że

(i) $\psi(\xi)$ jest najmniejszą liczbą ζ taką, że $\varphi(\xi)<\zeta<\lambda$ oraz $\prod_{\eta<\xi}(\psi(\eta)<\zeta)$, o ile taka liczba istnieje,

(ii) $\psi(\xi)=\lambda$ w przeciwnym wypadku.

Rozróżniamy dwa przypadki.

I. Nie istnieje $\xi<\alpha$ takie, że $\psi(\xi)=\lambda$. Ciąg ψ jest w tym wypadku rosnący na mocy (i), a nadto (jak wynika przez indukcję) $\psi(\xi)>\varphi(\xi)$ dla wszystkich ξ. Ponieważ λ jest najmniejszą liczbą przewyższającą wszystkie $\varphi(\xi)$, więc wnosimy stąd, że $\lim_{\xi<\alpha}\psi(\xi)=\lambda$. Liczba λ jest więc współkońcowa z α.

II. Istnieją liczby $\xi<\alpha$ takie, że $\psi(\xi)=\lambda$. Niech γ będzie najmniejszą wśród tych liczb ξ, tj. $\psi(\gamma)=\lambda$, zaś $\psi(\eta)<\lambda$ dla $\eta<\gamma$. Wynika stąd, że γ jest liczbą graniczną. Istotnie, gdyby $\gamma=\delta+1$, to $\psi(\delta)<\lambda$, a więc istniałaby liczba ζ taka, że $\psi(\delta)<\zeta<\lambda$ i $\varphi(\delta)<\zeta<\lambda$, tj. nie byłoby $\psi(\gamma)=\lambda$. Z (i) wynika, że dla $\xi_1<\xi_2<\gamma$ jest $\psi(\xi_1)<\psi(\xi_2)$, tj. że ciąg $\psi|W(\gamma)$ jest rosnący. Niech $\varrho=\lim_{\xi<\gamma}\psi(\xi)$. Wykażemy, że $\varrho=\lambda$. Istotnie, przypuśćmy, że $\varrho<\lambda$. Liczba ϱ jest większa od wszystkich $\psi(\eta)$ dla $\eta<\gamma$, a zatem istnieją liczby $<\lambda$ przewyższające zarówno $\varphi(\gamma)$, jak i każdą z liczb $\psi(\eta)$ dla $\eta<\gamma$ (mianowicie, każda z liczb zawartych między większą z liczb ϱ i $\varphi(\gamma)$ a liczbą λ czyni zadość tym warunkom). Otrzymujemy w ten sposób sprzeczność z założeniem, że $\psi(\gamma)=\lambda$. A więc $\varrho\geqslant\lambda$. Ponieważ zaś $\varrho\leqslant\lambda$, bo $\psi(\xi)<\lambda$ dla $\xi<\gamma$, więc $\lambda=\varrho=\lim_{\xi<\gamma}\psi(\xi)$, tj. λ jest współkońcowe z γ.

---

[1]) O funkcji φ nie zakładamy, że jest to funkcja rosnąca.

§ 5. Arytmetyka liczb porządkowych [1]. Z określeń podanych w rozdziale IV, § 4, str. 159, wynika z łatwością

Twierdzenie 1. *Suma i iloczyn dwu liczb porządkowych są liczbami porządkowymi.*

Na podstawie przykładu 4, § 1, str. 185, otrzymujemy

Twierdzenie 2. *Suma uporządkowana liczb porządkowych według argumentu dobrze uporządkowanego jest liczbą porządkową.*

Z twierdzenia 2 wynika twierdzenie 1. Przyjmując bowiem jako argument zbiór o dwu elementach wnosimy, że suma dwu liczb porządkowych jest liczbą porządkową. Przyjmując zaś, że argument ma typ β, a wszystkie składniki są równe α, otrzymamy wniosek, że $\alpha\beta$ jest liczbą porządkową.

Udowodnimy kilka praw arytmetycznych dla sum i iloczynów.

Pierwsze prawo monotoniczności dla dodawania:

$$(\alpha<\beta)\to(\gamma+\alpha<\gamma+\beta). \tag{1}$$

Dowód. Niech $\bar{C}=\gamma$, $\bar{B}=\beta$ oraz $B\cdot C=0$. Ponieważ $\alpha<\beta$, zbiór B zawiera odcinek A typu α. Suma uporządkowana $C+A$, która ma typ $\gamma+\alpha$, jest odcinkiem sumy $C+B$, która ma typ $\gamma+\beta$. A zatem $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

Z (1) wynika (dla $\alpha=0$), że

$$(\beta>0)\to(\gamma+\beta>\gamma). \tag{2}$$

Zatem suma dwu liczb porządkowych różnych od 0 jest zawsze większa od pierwszego składnika.

Drugie prawo monotoniczności dla dodawania:

$$(\alpha\leqslant\beta)\to(\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma). \tag{3}$$

Istotnie, przyjmując $\bar{A}=\alpha$, $\bar{B}=\beta$, $\bar{C}=\gamma$, $A\subset B$ i $BC=0$ i stosując twierdzenie 3 z § 3 (str. 194) do sum uporządkowanych $A+C$ i $B+C$, otrzymujemy (ze względu na inkluzję $A+C\subset B+C$) wzór (3).

Z (3) wynika w szczególności:

$$\beta+\gamma\geqslant\gamma. \tag{4}$$

Zatem suma dwu liczb porządkowych nie może być mniejsza od drugiego składnika; zarazem z równości $1+\omega=\omega$ wnosimy, że suma nie musi być większa od drugiego składnika (mimo że pierwszy składnik nie jest zerem).

[1]) Określenia i twierdzenia podane w §§ 5—7 pochodzą od Cantora; ob. Mathematische Annalen **21** (1873).

Twierdzenie 3. *Jeśli $\alpha\geqslant\beta$, to istnieje dokładnie jedna liczba porządkowa γ taka, że $\alpha=\beta+\gamma$.*

Dowód. Niech $\bar{A}=\alpha$, niech B będzie odcinkiem A typu β i niech $\gamma=\overline{A-B}$. Oczywiście $\alpha=\beta+\gamma$. Dla dowodu jednoznaczności załóżmy, że $\beta+\gamma_1=\beta+\gamma_2$. Na podstawie (1) wnosimy stąd, że $\gamma_1\not<\gamma_2$ i $\gamma_2\not<\gamma_1$, a więc $\gamma_1=\gamma_2$ w myśl twierdzenia 1 z § 3, str. 193, c. b. d. o.

Z twierdzenia 3 i ze wzoru (2) wynika, że koniecznym i dostatecznym warunkiem rozwiązalności równania $\alpha=\beta+x$ jest nierówność $\alpha\geqslant\beta$. Natomiast równanie $\alpha=x+\beta$ nie zawsze jest rozwiązalne; np. nierówność $\omega\neq x+2$ zachodzi dla każdej liczby porządkowej x.

W związku z twierdzeniem 3 przyjmujemy definicję:

Różnicą liczb porządkowych α i β $(\alpha\geqslant\beta)$ nazywamy (jedyną) liczbę γ taką, że $\alpha=\beta+\gamma$. Liczbę tę oznaczamy symbolem $\alpha-\beta$. A zatem

$$\alpha=\beta+(\alpha-\beta). \tag{5}$$

Np. $\omega-n=\omega$, gdyż $n+\omega=\omega$; podobnie $\omega^2-\omega=\omega^2$, gdyż $\omega+\omega^2=\omega^2$.

Prawa monotoniczności dla odejmowania:

$$(\alpha>\alpha_1)\to(\alpha-\beta>\alpha_1-\beta), \tag{6}$$

$$(\beta>\beta_1)\to(\alpha-\beta\leqslant\alpha-\beta_1), \tag{7}$$

przy czym, ze względu na wykonalność odejmowania, zakładamy we wzorze (6), że $\alpha_1\geqslant\beta$, zaś we wzorze (7), że $\alpha\geqslant\beta$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\alpha-\beta\leqslant\alpha_1-\beta$. Z (5) i (1) wynika wówczas $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)\leqslant\beta+(\alpha_1-\beta)=\alpha_1$ wbrew założeniu, że $\alpha>\alpha_1$.

Przypuśćmy podobnie, że $\alpha-\beta>\alpha-\beta_1$. Z (5) i (1) wynika wówczas $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)>\beta+(\alpha-\beta_1)$. Przeczy to założeniu, że $\beta>\beta_1$, z którego wynika na mocy (3), że $\beta+(\alpha-\beta_1)\geqslant\beta_1+(\alpha-\beta_1)=\alpha$; otrzymalibyśmy bowiem $\alpha>\alpha$.

Równość $\omega-2=\omega-3=\omega$ dowodzi, że w następniku implikacji (7) nie można zastąpić symbolu $\leqslant$ przez $<$.

Pierwsze prawo monotoniczności dla mnożenia:

$$(\alpha<\beta)\to(\gamma\alpha<\gamma\beta)\quad dla\quad \gamma>0. \tag{8}$$

Istotnie, $\gamma\beta$ jest typem sumy uporządkowanej $S=\sum_{x\in B}F_x$, gdzie $\bar{B}=\beta$, $\bar{F}_x=\gamma$ i gdzie zbiory F_x są rozłączne. Niech $\bar{A}=\alpha$ i niech A będzie odcinkiem zbioru B. Wówczas suma $\sum_{x\in A}F_x$ jest odcinkiem zbioru S. Stąd $\gamma\alpha<\gamma\beta$.

Drugie prawo monotoniczności dla mnożenia:

$$(\alpha\leqslant\beta)\to(\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma). \tag{9}$$

Istotnie, niech $\overline{F}_x=\alpha$, $\overline{G}_x=\beta$, $\overline{X}=\gamma$ i niech $F_x\subset G_x$ dla $x\in X$, przy czym zbiory G_x są rozłączne. Wówczas

$$\overline{\sum_{x\in X}F_x}=\alpha\gamma \quad , \quad \overline{\sum_{x\in X}G_x}=\beta\gamma \quad \text{i} \quad \sum_x F_x\subset\sum_x G_x.$$

A zatem $\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$.

Z tożsamości $1\cdot\omega=2\cdot\omega$ wynika, że znak $\leqslant$ we wzorze (9) nie może być zastąpiony znakiem $<$.

Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania:

$$\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma \quad \textit{dla} \quad \beta\geqslant\gamma. \tag{10}$$

Dowód. Z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania (str. 160) wynika wobec (5), że $\alpha\beta=\alpha[\gamma+(\beta-\gamma)]=\alpha\gamma+\alpha(\beta-\gamma)$, skąd wynika wzór (10) na mocy definicji odejmowania.

Udowodnimy teraz twierdzenie o *dzieleniu* liczb porządkowych:

Twierdzenie 4. *Jeśli β jest liczbą porządkową >0, to dla każdej liczby porządkowej α istnieją liczby γ i ϱ takie, że*

$$\alpha=\beta\gamma+\varrho \quad i \quad \varrho<\beta. \tag{11}$$

Liczby γ i ϱ są przy tym wyznaczone jednoznacznie przez α i β.

Dowód. Ponieważ $1\leqslant\beta$, więc na mocy (9) jest $\alpha\leqslant\beta\alpha$.

Jeśli $\alpha=\beta\alpha$, to wystarczy przyjąć $\gamma=\alpha$ i $\varrho=0$. Załóżmy zatem, że $\alpha<\beta\alpha$.

Niech $S=\sum_{x\in X}F_x$, gdzie $\overline{X}=\alpha$ i $\overline{F}_x=\beta$ dla każdego $x\in X$, przy czym zbiory F_x są rozłączne. $\overline{S}=\beta\alpha$, a więc — wobec nierówności $\alpha<\beta\alpha$ — zbiór S zawiera odcinek typu α. Niech s będzie takim elementem zbioru S, że odcinek $O(s)$ ma typ α, i niech x_0 będzie tym elementem X, dla którego $s\in F_{x_0}$. Przyjmijmy jako γ typ odcinka $Y=O(x_0)$ zbioru X, zaś jako ϱ typ zbioru $F_{x_0}\cdot O(s)$, tj. typ odcinka zbioru F_{x_0}, wyznaczonego przez s. Jest jasne, że

$$O(s)=\sum_{x\in Y}F_x+F_{x_0}\cdot O(s), \quad \text{skąd} \quad \alpha=\beta\gamma+\varrho.$$

Nadto $\varrho<\beta$, gdyż ϱ jest typem pewnego odcinka zbioru F_{x_0}.

Udowodniliśmy w ten sposób istnienie liczb γ i ϱ, spełniających warunki (11).

Dla dowodu jednoznaczności załóżmy, że

$$\beta\gamma+\varrho=\beta\gamma_1+\varrho_1, \quad \varrho<\beta, \quad \varrho_1<\beta. \tag{12}$$

Przypuśćmy, że $\gamma>\gamma_1$. Stąd $\gamma=\gamma_1+(\gamma-\gamma_1)$, a więc

$$\beta\gamma+\varrho=\beta[\gamma_1+(\gamma-\gamma_1)]+\varrho=\beta\gamma_1+\beta(\gamma-\gamma_1)+\varrho \tag{13}$$

oraz $\gamma-\gamma_1\geqslant 1$, a więc na mocy (8)

$$\beta(\gamma-\gamma_1)\geqslant\beta. \tag{14}$$

Z (12) i (13) wynika, że

$$\beta\gamma_1+\varrho_1\geqslant\beta\gamma_1+\beta(\gamma-\gamma_1),$$

skąd wobec (14)

$$\beta\gamma_1+\varrho_1\geqslant\beta\gamma_1+\beta. \tag{15}$$

Ponieważ $\beta>\varrho_1$, więc $\beta\gamma_1+\beta>\beta\gamma_1+\varrho_1$ na mocy (1). Jest to jednak niemożliwe, bo ze wzoru (15) wynikało by, że $\beta\gamma_1+\varrho_1>\beta\gamma_1+\varrho_1$.

Założenie, że $\gamma>\gamma_1$, prowadzi zatem do sprzeczności. Podobnie dowodzi się, że nie może być $\gamma_1>\gamma$. A zatem $\gamma=\gamma_1$.

Z tej równości i ze wzoru (12) wynika, że $\beta\gamma+\varrho=\beta\gamma+\varrho_1$; zgodnie z (1) wzór ten pociąga za sobą równość $\varrho=\varrho_1$.

Twierdzenie 4 jest w ten sposób udowodnione całkowicie.

Liczbę γ ze wzoru (11) nazywamy *ilorazem*, zaś ϱ — *resztą*.

Z twierdzenia 4 wyprowadzimy algorytm Euklidesa dla liczb porządkowych:

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych dwu liczb porządkowych α_0 i α_1 różnych od 0 istnieje liczba naturalna $n\geqslant 1$ i liczby $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots,\beta_n$ takie, że $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n>0$ i*

$$\alpha_0=\alpha_1\beta_1+\alpha_2, \quad \alpha_1=\alpha_2\beta_2+\alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-2}=\alpha_{n-1}\beta_{n-1}+\alpha_n, \quad \alpha_{n-1}=\alpha_n\beta_n.$$

Dowód. Stosując do liczb α_0 i α_1 twierdzenie 4 wnosimy, że istnieją liczby β_1 i α_2 takie, że $\alpha_0=\alpha_1\beta_1+\alpha_2$ i $\alpha_2<\alpha_1$. Jeśli przy tym $\alpha_2\neq 0$, to stosując to samo twierdzenie do liczb α_1 i α_2, wnosimy, że istnieją liczby β_2 i α_3 takie, że $\alpha_1=\alpha_2\beta_2+\alpha_3$ i $\alpha_3<\alpha_2$. Rozumując dalej w ten sposób otrzymujemy dwa ciągi liczb α_i, β_i takie, że $\alpha_{i-1}=\alpha_i\beta_i+\alpha_{i+1}$ i $\alpha_{i+1}<\alpha_i$ dla $i=1,2,\ldots$ Ciągi te są skończone, ponieważ nie istnieje ciąg nieskończony liczb porządkowych malejących (na mocy twierdzenia 5 z § 3, str. 194), tzn. dla pewnego naturalnego n musi być $\alpha_{n+1}=0$, c. b. d. o.

Ustalimy obecnie wzory, w których występuje operacja przejścia do granicy (por. § 4, str. 196). Zakładamy, że λ jest liczbą graniczną, a φ ciągiem pozaskończonym rosnącym typu λ. Mamy wówczas:

$$\lim_{\xi<\lambda}[\alpha+\varphi(\xi)]=\alpha+\lim_{\xi<\lambda}\varphi(\xi). \tag{16}$$

Dowód. Przyjmijmy $\beta=\lim_{\xi<\lambda}\varphi(\xi)$. Jeśli $\xi<\lambda$, to $\varphi(\xi)<\beta$, a więc $\alpha+\varphi(\xi)<\alpha+\beta$. Niech $\zeta<\alpha+\beta$; udowodnimy, że istnieje takie $\xi<\lambda$, że $\zeta<\alpha+\varphi(\xi)$. Istotnie, jeśli $\zeta<\alpha$, to $\zeta<\alpha+\varphi(0)$; jeśli zaś $\zeta\geqslant\alpha$, to $\zeta=\alpha+(\zeta-\alpha)$ i $\zeta-\alpha<(\alpha+\beta)-\alpha\leqslant\beta$, skąd wnosimy, że dla pewnego $\xi<\lambda$ jest $\zeta-\alpha<\varphi(\xi)$, a więc $\zeta<\alpha+\varphi(\xi)$. Liczba $\alpha+\beta$ jest więc najmniejszą z liczb większych od wszystkich $\alpha+\varphi(\xi)$ dla $\xi<\lambda$, co dowodzi wzoru (16).

(17) $$\lim_{\xi<\lambda}[\alpha\cdot\varphi(\xi)]=\alpha\cdot\lim_{\xi<\lambda}\varphi(\xi).$$

Dowód. Możemy oczywiście założyć, że $\alpha\neq 0$. Niech $\beta=\lim_{\xi<\lambda}\varphi(\xi)$. Dla $\xi<\lambda$ jest $\varphi(\xi)<\beta$, a więc $\alpha\cdot\varphi(\xi)<\alpha\beta$. Niech $\zeta<\alpha\cdot\beta$; wyznaczamy na mocy twierdzenia 4 liczby γ i ϱ takie, że $\zeta=\alpha\gamma+\varrho$ i $\varrho<\alpha$. Gdyby przypuścić, że $\gamma\geqslant\beta$, to mielibyśmy $\zeta\geqslant\alpha\beta+\varrho\geqslant\alpha\beta$ wbrew założeniu. A więc $\gamma<\beta$, skąd wynika, że dla pewnego $\xi<\lambda$ jest $\gamma\leqslant\varphi(\xi)$. A zatem

$$\zeta\leqslant\alpha\cdot\varphi(\xi)+\varrho\leqslant\alpha\cdot\varphi(\xi)+\alpha=\alpha\cdot[\varphi(\xi)+1],\quad\text{skąd}\quad\zeta\leqslant\alpha\cdot\varphi(\xi+1),$$

gdyż funkcja φ jest z założenia rosnąca. Ponieważ λ jest liczbą graniczną, więc $\xi+1<\lambda$ i wzór $\zeta\leqslant\alpha\cdot\varphi(\xi+1)$ dowodzi, że ζ jest niewiększa od pewnej liczby postaci $\alpha\cdot\varphi(\eta)$, gdzie $\eta<\lambda$. Liczba $\alpha\beta$ jest więc najmniejszą liczbą większą od wszystkich liczb $\alpha\cdot\varphi(\eta)$ dla $\eta<\lambda$, co dowodzi wzoru (17).

UWAGI. Przyjmując $\varphi(\xi)=\xi$ wnosimy z (1) i (16), że *funkcja* $s(\xi)=\alpha+\xi$ *jest rosnąca i ciągła* (na zbiorze $W(\beta)$ dla każdego β). Z (8) i (17) wynika, że tę samą własność ma też funkcja $p(\xi)=\alpha\cdot\xi$. Z twierdzenia 4 z § 4, str. 197, wnosimy, że istnieją liczby krytyczne zarówno dla funkcji s, jak i dla funkcji p. Liczbą krytyczną funkcji s jest $\xi=\alpha\cdot\omega$ i ogólniej, każda liczba postaci $\alpha\cdot\omega+\varrho$, gdzie ϱ jest dowolną liczbą porządkową. Istotnie,

$$s(\alpha\cdot\omega+\varrho)=\alpha+\alpha\cdot\omega+\varrho=\alpha(1+\omega)+\varrho=\alpha\cdot\omega+\varrho.$$

Liczbą krytyczną funkcji p jest np. $\lim_{n<\omega}\alpha^n$, gdzie α^n jest n-krotnym iloczynem α przez siebie. Wszystkie liczby krytyczne funkcji p wyznaczymy w następnym paragrafie.

ĆWICZENIA [1]). 1. Zbadać, czy $\lim[\varphi(\xi)+\psi(\xi)]=\lim\varphi(\xi)+\lim\psi(\xi)$.

2. Zbadać, czy $\lim[\varphi(\xi)\cdot\alpha]=[\lim\varphi(\xi)]\cdot\alpha$.

3. Jeśli $\alpha_1+\beta_1=\alpha+\beta$ i $\beta_1>\beta$, to $\alpha_1<\alpha$.

4. Dla każdej liczby α istnieje skończona ilość liczb β takich, że równanie $\alpha=\xi+\beta$ jest rozwiązalne względem ξ (każda z takich liczb β nazywa się *resztą* liczby α).

5. Jeśli ciąg φ jest rosnący, $\alpha=\lim_{\xi<\lambda}\varphi(\xi)$ i $\alpha=\varphi(\xi)+\varrho(\xi)$, to istnieje taka liczba $\mu<\lambda$, że $\varrho(\xi)$ ma wartość stałą dla $\mu<\xi<\lambda$. Wartość ta jest równa najmniejszej reszcie liczby α [2]).

[1]) Wiele materiału do ćwiczeń czytelnik znajdzie w książkach W. Sierpińskiego: *Zarys teorii mnogości* wyd. 3-e, Warszawa 1928, rozdział X, oraz *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1950 (Collection Borel), nowe wydanie, rozdział X.

[2]) Por. A. Hoborski, Fundamenta Mathematicae **2** (1921), str. 193.

***§ 6. Potęgowanie liczb porządkowych.** Potęgę γ^α, o zasadzie $\gamma>1$ i wykładniku α, określamy przez indukcję pozaskończoną jak następuje:

(1) $\gamma^0=1$, (2) $\gamma^{\xi+1}=\gamma^\xi\cdot\gamma$, (3) $\gamma^\lambda=\lim_{\xi<\lambda}\gamma^\xi$,

gdy λ jest liczbą graniczną.

Aby móc zastosować twierdzenie 5 z § 4, str. 198, określamy h jak następuje: niech φ będzie dowolnym ciągiem liczb porządkowych typu $\xi\leqslant\alpha$; niech

$$h(0)=1,\quad h(\varphi)=\begin{cases}\varphi(\eta)\cdot\gamma, & \text{jeśli}\quad\xi=\eta+1,\\ \lim\limits_{\eta<\xi}\varphi(\eta), & \text{jeśli}\quad\xi\text{ jest liczbą graniczną.}\end{cases}$$

Z definicji wynika natychmiast, że potęga jest funkcją rosnącą, tj.

(4) $$\alpha<\beta\to\gamma^\alpha<\gamma^\beta.$$

Udowodnimy, że

(5) $$\gamma^{\xi+\eta}=\gamma^\xi\cdot\gamma^\eta.$$

Dowód. Dla danej liczby ξ niech B będzie zbiorem tych $\zeta\in W(\eta+1)$, dla których $\gamma^{\xi+\zeta}=\gamma^\xi\cdot\gamma^\zeta$. Wykażemy, że jeśli $\zeta\leqslant\eta$, to

(*) $$W(\zeta)\subset B\to\zeta\in B.$$

Istotnie, możliwe są przypadki: (i) $\zeta=0$; (ii) ζ nie jest liczbą graniczną; (iii) ζ jest liczbą graniczną >0. W przypadku (i) $\zeta\in B$, gdyż $\gamma^{\xi+0}=\gamma^\xi=\gamma^\xi\cdot 1=\gamma^\xi\cdot\gamma^0$. W przypadku (ii) $\zeta=\zeta_1+1$, gdzie $\zeta_1\in W(\zeta)$, a więc w myśl założenia $\zeta_1\in B$. Mamy więc $\gamma^{\xi+\zeta_1}=\gamma^\xi\cdot\gamma^{\zeta_1}$, skąd

$$\gamma^{\xi+\zeta}=\gamma^{\xi+(\zeta_1+1)}=\gamma^{(\xi+\zeta_1)+1}=\gamma^{\xi+\zeta_1}\cdot\gamma=(\gamma^\xi\cdot\gamma^{\zeta_1})\cdot\gamma=\gamma^\xi\cdot(\gamma^{\zeta_1}\cdot\gamma)=\gamma^\xi\cdot\gamma^{\zeta_1+1}=\gamma^\xi\cdot\gamma^\zeta,$$

co dowodzi, że $\zeta\in B$. Wreszcie w przypadku (iii) $\xi+\zeta$ jest liczbą graniczną, a więc

$$\gamma^{\xi+\zeta}=\lim_{\alpha<\xi+\zeta}\gamma^\alpha.$$

Stosując twierdzenie 3 z § 4, str. 197, do funkcji $\varphi(\alpha)=\gamma^\alpha$ i $\psi(\alpha)=\xi+\alpha$ wnosimy, że

$$\lim_{\alpha<\xi+\zeta}\gamma^\alpha=\lim_{\alpha<\zeta}\gamma^{\xi+\alpha},\quad\text{skąd}\quad\gamma^{\xi+\zeta}=\lim_{\alpha<\zeta}\gamma^{\xi+\alpha}.$$

Ponieważ dla $\alpha<\zeta$ mamy $\alpha\in W(\zeta)$, a więc $\alpha\in B$, tj. $\gamma^{\xi+\alpha}=\gamma^\xi\cdot\gamma^\alpha$, przeto

$$\gamma^{\xi+\zeta}=\lim_{\alpha<\zeta}(\gamma^\xi\cdot\gamma^\alpha)=\gamma^\xi\cdot\lim_{\alpha<\zeta}\gamma^\alpha=\gamma^\xi\cdot\gamma^\zeta,$$

skąd $\zeta\in B$.

Implikacja (*) jest w ten sposób udowodniona. Na mocy zasady indukcji (por. § 1, twierdzenie 6, str. 187) z implikacji tej wynika, że $B=W(\eta+1)$, a więc $\eta\in B$, co dowodzi wzoru (5).

(6) $$(\gamma^{\xi})^{\eta}=\gamma^{\xi\eta}.$$

Dowód przebiega analogicznie do dowodu wzoru (5). Niech B będzie zbiorem tych $\zeta \in W(\eta+1)$, dla których $(\gamma^{\xi})^{\zeta}=\gamma^{\xi\zeta}$; wystarczy udowodnić, że spełniona jest implikacja (*). Rozpatrujemy jak poprzednio przypadki (i), (ii), (iii). W przypadku (i) jest $\zeta \in B$, gdyż $(\gamma^{\xi})^{0}=1=\gamma^{0}=\gamma^{\xi\cdot 0}$. W przypadku (ii) mamy $\zeta=\zeta_1+1$, gdzie ζ_1 czyni zadość równości $(\gamma^{\xi})^{\zeta_1}=\gamma^{\xi\zeta_1}$, z której wynika, że

$$(\gamma^{\xi})^{\zeta}=(\gamma^{\xi})^{\zeta_1+1}=(\gamma^{\xi})^{\zeta_1}\cdot\gamma^{\xi}=\gamma^{\xi\zeta_1}\cdot\gamma^{\xi}=\gamma^{\xi\zeta_1+\xi}=\gamma^{\xi(\zeta_1+1)}=\gamma^{\xi\zeta},$$

co dowodzi, że $\zeta \in B$. Jeśli wreszcie ζ jest liczbą graniczną >0, to

$$(\gamma^{\xi})^{\zeta}=\lim_{\alpha<\zeta}(\gamma^{\xi})^{\alpha}=\lim_{\alpha<\zeta}\gamma^{\xi\alpha}.$$

Ponieważ zaś z twierdzenia 3 z § 4, str. 197, wynika, że

$$\lim_{\alpha<\zeta}\gamma^{\xi\alpha}=\lim_{\eta<\xi\zeta}\gamma^{\eta}=\gamma^{\xi\zeta},$$

więc $\zeta \in B$. Wzór (6) jest w ten sposób udowodniony.

(7) $$\gamma^{\xi}\geqslant\xi.$$

Wzór ten wynika ze wzoru (4) na mocy twierdzenia 1 z § 2, str. 191.

Działanie potęgowania pozwala na wyznaczenie liczb krytycznych przyporządkowania $p(\xi)=\alpha\cdot\xi$ (por. § 5, str. 208). Są to mianowicie wszystkie potęgi postaci $\alpha^{\omega+\sigma}$, gdzie σ jest dowolną liczbą porządkową. Istotnie

$$p(\alpha^{\omega+\sigma})=\alpha\cdot\alpha^{\omega+\sigma}=\alpha^{1+(\omega+\sigma)}=\alpha^{(1+\omega)+\sigma}=\alpha^{\omega+\sigma}.$$

Funkcja $f(\xi)=\gamma^{\xi}$ jest — zgodnie z (3) i (4) — rosnąca i ciągła (na każdym zbiorze $W(\alpha)$), funkcja ta ma zatem liczby krytyczne na mocy twierdzenia 4 z § 4, str. 197. Zgodnie z tym twierdzeniem liczby te uzyskujemy jako granice ciągów α_n, gdzie α_0 jest liczbą dowolną, a $\alpha^{n+1}=\gamma^{\alpha_n}$.

Przyjmując np. $\gamma=\omega$, $\alpha_0=1$, mieć będziemy

$$\alpha_1=\omega,\quad \alpha_2=\omega^{\omega},\quad \alpha_3=\omega^{\omega^{\omega}},\quad \ldots$$

Granica tego ciągu

$$\varepsilon=\lim_{n<\omega}\alpha_n$$

jest najmniejszą liczbą krytyczną funkcji ω^{ξ}, tzn. najmniejszą liczbą czyniącą zadość równości

(8) $$\omega^{\varepsilon}=\varepsilon.$$

Liczby ε spełniające równanie (8) nazywają się *epsilonowymi*.

ĆWICZENIA. 1. Niech λ będzie liczbą graniczną. Jeśli funkcja φ jest ciągła na zbiorze $W(\lambda)$ i spełnia warunki $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=\gamma$, $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$ dla $\alpha,\beta,\alpha+\beta<\lambda$, to $\varphi(\xi)=\gamma^{\xi}$ dla $\xi<\lambda$.

2. Jeśli $\omega^{\xi}=\alpha+\beta$ i $\beta\neq 0$, to $\beta=\omega^{\xi}$.

3. Dla każdej liczby porządkowej α istnieje liczba epsilonowa większa od α.

*§ 7. Rozwinięcia liczb porządkowych o dowolnej zasadzie.

Operację potęgowania można wykorzystać dla przedstawiania liczb porządkowych w postaci przypominającej przedstawianie liczb naturalnych w systemie dziesiętnym. Aby uzyskać to przedstawienie, udowodnimy najpierw pomocnicze

Twierdzenie 1. *Jeśli $\gamma>1$ i $1\leqslant\alpha<\gamma^{\xi}$, to istnieją liczby η,β i ϱ takie, że*

$$\alpha=\gamma^{\eta}\cdot\beta+\varrho,\quad 0\leqslant\eta<\xi,\quad \beta<\gamma\quad i\quad \varrho<\gamma^{\eta}.$$

Dowód. Niech ζ będzie najmniejszą liczbą porządkową taką, że $\alpha<\gamma^{\zeta}$. Oczywiście $0<\zeta\leqslant\xi$. Gdyby ζ było liczbą graniczną, to mielibyśmy $\gamma^{\zeta}=\lim_{\lambda<\zeta}\gamma^{\lambda}$ i $\gamma^{\lambda}\leqslant\alpha$ dla $\lambda<\zeta$, skąd $\gamma^{\zeta}\leqslant\alpha$ wbrew definicji liczby ζ. Zatem $\zeta=\eta+1$, gdzie

$$0\leqslant\eta<\xi,\quad \gamma^{\eta}\leqslant\alpha<\gamma^{\eta+1}.$$

W myśl twierdzenia 4 z § 5 (str. 206) istnieją liczby β i ϱ takie, że

$$\alpha=\gamma^{\eta}\cdot\beta+\varrho,\quad \varrho<\gamma^{\eta}.$$

Gdyby było $\beta\geqslant\gamma$, to mielibyśmy $\alpha\geqslant\gamma^{\eta}\cdot\gamma+\varrho\geqslant\gamma^{\eta+1}$. Zatem $\beta<\gamma$ i liczby β, η i ϱ czynią zadość wszystkim żądanym warunkom.

Twierdzenie 2. *Jeśli $\gamma>1$ i $1\leqslant\alpha<\gamma^{\eta}$, to istnieje liczba naturalna n i liczby porządkowe $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$, oraz $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ takie, że*

(1) $$\alpha=\gamma^{\eta_1}\beta_1+\gamma^{\eta_2}\beta_2+\ldots+\gamma^{\eta_n}\beta_n,$$

(2) $$\eta>\eta_1>\eta_2>\ldots>\eta_n,\quad 0\leqslant\beta_i<\gamma\quad dla\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Dowód. Z twierdzenia 1 wynika, że istnieją takie liczby η_1, β_1 i α_1, że

(3) $$\alpha=\gamma^{\eta_1}\beta_1+\alpha_1,\quad 0\leqslant\beta_1<\gamma,\quad \alpha_1<\gamma^{\eta_1},\quad 0\leqslant\eta_1<\eta.$$

Jeśli $\alpha_1\neq 0$, to, stosując powtórnie twierdzenie 1, wnosimy, że istnieją liczby η_2, β_2 i α_2 takie, że

(4) $$\alpha_1=\gamma^{\eta_2}\beta_2+\alpha_2,\quad 0\leqslant\beta_2<\gamma,\quad \alpha_2<\gamma^{\eta_2},\quad 0\leqslant\eta_2<\eta_1.$$

Ogólnie, z założenia, że $\alpha_{t-1} \neq 0$, wynika istnienie liczb η_t, β_t i α_t takich, że

$$\alpha_{t-1} = \gamma^{\eta_t}\beta_t + \alpha_t, \quad 0 \leqslant \beta_t < \gamma, \quad \alpha_t < \gamma^{\eta_t}, \quad 0 \leqslant \eta_t < \eta_{t-1}. \tag{5}$$

Wobec tego, że liczby η_t tworzą ciąg malejący, ciąg ten jest skończony. Istnieje więc takie n, że $\alpha_n = 0$. Związki (3), (4) i (5) dają (1) i (2).

Wzór (1) dla liczb β_t i η_t spełniających warunki (2) nazywamy *rozwinięciem liczby α przy zasadzie γ*. Liczby β_t nazywają się *cyframi*, a liczby η_t *wykładnikami* tego rozwinięcia.

Jeśli $\gamma = 2$, to wszystkie cyfry są równe 0 lub 1 (przy czym można pominąć składniki, w których cyfry są równe 0). Jeśli $\gamma = \omega$, to cyfry są liczbami naturalnymi.

PRZYKŁADY. $\alpha = \omega^2 + \omega \cdot 5 + 9$ jest rozwinięciem liczby α przy zasadzie ω. Aby rozwinąć tę samą liczbę przy zasadzie 2, wystarczy zauważyć, że $\omega = \lim_{n<\omega} 2^n = 2^\omega$, a więc $\omega^2 = (2^\omega)^2 = 2^{\omega \cdot 2}$ oraz $\omega \cdot 5 = 2^{\omega+2} + 2^\omega$. Mamy więc

$$\omega^2 + \omega \cdot 5 + 9 = 2^{\omega \cdot 2} + 2^{\omega+2} + 2^\omega + 2^3 + 2^0.$$

W podobny sposób otrzymamy

$$\omega^\omega = 2^{\omega^2}.$$

Dla liczb epsilonowych rozwinięciem przy zasadzie ω jest $\varepsilon = \omega^\varepsilon$. Liczby te nie dają się więc przedstawić w postaci (1) dla $\gamma = \omega$ przy użyciu wykładników mniejszych, niż one same.

Dwie liczby przedstawione w postaci (1) można łatwo porównywać co do wielkości na podstawie twierdzenia następującego:

Twierdzenie 3. *Jeśli $\eta > \xi_1 > \ldots > \xi_p$ i $\gamma > \vartheta_n$ dla $n \leqslant p$, to*

$$\gamma^\eta > \gamma^{\xi_1}\vartheta_1 + \gamma^{\xi_2}\vartheta_2 + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p.$$

Dowód. Z założenia wynika, że $\eta \geqslant \xi_1 + 1$ i $\gamma - \vartheta_1 > 0$, skąd

$$\gamma^\eta \geqslant \gamma^{\xi_1}\gamma = \gamma^{\xi_1}\vartheta_1 + \gamma^{\xi_1}(\gamma - \vartheta_1) \geqslant \gamma^{\xi_1}\vartheta_1 + \gamma^{\xi_1}.$$

Ponieważ $\gamma^{\xi_1} \geqslant \gamma^{\xi_2}\gamma$, mamy podobnie $\gamma^{\xi_1} \geqslant \gamma^{\xi_2}\vartheta_2 + \gamma^{\xi_2}$. Stąd

$$\gamma^\eta \geqslant \gamma^{\xi_1}\vartheta_1 + \gamma^{\xi_2}\vartheta_2 + \gamma^{\xi_2}.$$

Postępując tak dalej otrzymamy po p krokach nierówność

$$\gamma^\eta \geqslant \gamma^{\xi_1}\vartheta_1 + \gamma^{\xi_2}\vartheta_2 + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p + \gamma^{\xi_p},$$

z której wynika nierówność żądana (ponieważ $\gamma^{\xi_p} > 0$).

Twierdzenie 4. *Jeśli*

$$\alpha = \gamma^{\eta_1}\beta_1 + \ldots + \gamma^{\eta_{t-1}}\beta_{t-1} + \gamma^{\eta_t}\beta_t + \ldots + \gamma^{\eta_n}\beta_n,$$
$$\zeta = \gamma^{\eta_1}\beta_1 + \ldots + \gamma^{\eta_{t-1}}\beta_{t-1} + \gamma^{\xi_t}\vartheta_t + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p,$$

gdzie

$$\eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_n, \quad \eta_{t-1} > \xi_t > \ldots > \xi_p,$$
$$0 < \beta_1, \ldots, \beta_n < \gamma, \quad 0 < \vartheta_t, \ldots, \vartheta_p < \gamma,$$

przy czym $\gamma^{\eta_t}\beta_t \neq \gamma^{\xi_t}\vartheta_t$, to

$$(\alpha > \zeta) \equiv [(\eta_t > \xi_t) + (\eta_t = \xi_t) \cdot (\beta_t > \vartheta_t)].$$

Dowód. Załóżmy, że $\eta_t > \xi_t$. Z twierdzenia 3 wynika, że

$$\gamma^{\eta_t}\beta_t + \ldots + \gamma^{\eta_n}\beta_n \geqslant \gamma^{\eta_t} > \gamma^{\xi_t}\vartheta_t + \gamma^{\xi_{t+1}}\vartheta_{t+1} + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p,$$

a więc $\alpha > \zeta$, bo na mocy wzoru (1) z § 5 (str. 204)

$$\alpha = \gamma^{\eta_1}\beta_1 + \ldots + \gamma^{\eta_{t-1}}\beta_{t-1} + \gamma^{\eta_t}\beta_t + \ldots + \gamma^{\eta_n}\beta_n$$
$$> \gamma^{\eta_1}\beta_1 + \ldots + \gamma^{\eta_{t-1}}\beta_{t-1} + \gamma^{\xi_t}\vartheta_t + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p = \zeta.$$

Załóżmy teraz, że $\eta_t = \xi_t$ i $\beta_t > \vartheta_t$. Z twierdzenia 3 wynika, że

$$\gamma^{\eta_t}(\beta_t - \vartheta_t) \geqslant \gamma^{\eta_t} > \gamma^{\xi_{t+1}}\vartheta_{t+1} + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p,$$

skąd wnosimy, że

$$\gamma^{\eta_t}\vartheta_t + \gamma^{\eta_t}(\beta_t - \vartheta_t) > \gamma^{\xi_t}\vartheta_t + \gamma^{\xi_{t+1}}\vartheta_{t+1} + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p,$$

czyli

$$\gamma^{\eta_t}\beta_t > \gamma^{\xi_t}\vartheta_t + \gamma^{\xi_{t+1}}\vartheta_{t+1} + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p.$$

Tym bardziej więc

$$\gamma^{\eta_t}\beta_t + \ldots + \gamma^{\eta_n}\beta_n > \gamma^{\xi_t}\vartheta_t + \ldots + \gamma^{\xi_p}\vartheta_p,$$

skąd wnosimy, jak poprzednio, że $\alpha > \zeta$.

Jeśli $\eta_t < \xi_t$ albo też $\eta_t = \xi_t$ i $\beta_t < \vartheta_t$, to stosując analogiczne rozumowanie otrzymamy nierówność $\alpha < \zeta$. Dowód twierdzenia 4 jest w ten sposób zakończony.

Twierdzenie 4 wykazuje, że rozwinięcia liczb porządkowych mają własności podobne do rozwinięć liczb naturalnych przy dowolnej zasadzie, np. 10. W jednym i drugim przypadku, porównując dwie liczby co do wielkości, bierzemy pod uwagę pierwsze nieidentyczne składniki ich rozwinięć i porównujemy ze sobą wykładniki, a w przypadku równości wykładników — porównujemy współczynniki.

Twierdzenie 5. *Każda liczba porządkowa ma przy danej zasadzie tylko jedno rozwinięcie.*

Istotnie, w myśl twierdzenia 4, jeśli

$$\gamma^{\eta_1}\beta_1+\ldots+\gamma^{\eta_n}\beta_n=\gamma^{\xi_1}\vartheta_1+\ldots+\gamma^{\xi_p}\vartheta_p$$

(gdzie $\eta_1>\eta_2>\ldots>\eta_n$, $\xi_1>\xi_2>\ldots>\xi_p$, $0<\beta_1,\ldots,\beta_n<\gamma$, $0<\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p<\gamma$), to $n=p$ oraz $\eta_k=\xi_k$ i $\beta_k=\vartheta_k$ dla $k\leqslant n$.

Twierdzenie 4 pozwala ustalić związek pojęcia potęgi liczb porządkowych, którą zdefiniowaliśmy w § 6, z pojęciem uporządkowania leksykograficznego określonego w § 7 rozdziału IV.

Twierdzenie 6. *Potęga γ^η jest typem porządkowym zbioru tych funkcji, należących do zbioru $W(\gamma)^{W(\eta)}$ uporządkowanego leksykograficznie, które tylko dla skończonej liczby argumentów mają wartość $\neq 0$.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 4 z § 3 (str. 194) $\gamma^\eta=\overline{W(\gamma^\eta)}$. Każdej liczbie $\alpha\in W(\gamma^\eta)$ odpowiada jednoznacznie rozwinięcie

$$\gamma^{\eta_1}\beta_1+\gamma^{\eta_2}\beta_2+\ldots+\gamma^{\eta_n}\beta_n,$$

gdzie $\eta>\eta_1>\eta_2>\ldots>\eta_n$ i $0<\beta_1,\ldots,\beta_n<\gamma$. Rozwinięciu temu możemy z kolei przyporządkować funkcję $f_\alpha\in W(\gamma)^{W(\eta)}$ określoną jak następuje:

$$f_\alpha(\eta_i)=\beta_i \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n,$$
$$f_\alpha(\xi)=0 \quad \text{dla} \quad \xi\neq\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n.$$

Na odwrót, każdej funkcji $g\in W(\gamma)^{W(\eta)}$, przyjmującej wartości różne od 0 tylko dla skończonej liczby argumentów, odpowiada taka liczba $\alpha\in W(\gamma^\eta)$, że $g=f_\alpha$.

Wreszcie z twierdzenia 4 wynika, że f_α poprzedza f_ξ w uporządkowaniu leksykograficznym zbioru $W(\gamma)^{W(\eta)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha<\zeta$.

Jako inne zastosowanie rozwinięć postaci (1) ustalimy charakterystyczną własność potęg liczby ω.

Definicja. Liczba ϱ nazywa się *resztą* liczby α, jeśli $\varrho\neq 0$ i istnieje taka liczba σ, że $\alpha=\sigma+\varrho$.

Twierdzenie 7. *Na to, aby każda reszta liczby α była równa α, potrzeba i wystarcza, by liczba α była potęgą liczby ω.*

Dowód. Jeśli każda reszta liczby α jest równa α, to w rozwinięciu

$$\alpha=\omega^{\eta_1}\beta_1+\omega^{\eta_2}\beta_2+\ldots+\omega^{\eta_n}\beta_n$$

jest $n=1$ i $\beta_1=1$, tj. $\alpha=\omega^{\eta_1}$.

Załóżmy z kolei, że $\alpha\neq\omega^\beta$, i niech ϱ będzie resztą liczby α. Dla pewnego σ jest więc

$$\alpha=\sigma+\varrho \quad \text{i} \quad \sigma<\alpha, \quad \text{tj.} \quad \sigma<\omega^\beta. \tag{6}$$

Rozwińmy σ przy zasadzie ω:

$$\sigma=\omega^\eta n+\omega^{\eta_1}n_1+\ldots+\omega^{\eta_k}n_k.$$

A zatem $\eta<\beta$, tj. $\eta+1\leqslant\beta$. Przyjmijmy $\tau=\omega^\beta-\omega^{\eta+1}$. Otrzymujemy

$$\omega^\beta\leqslant\sigma+\omega^\beta\leqslant\omega^\eta\cdot(n+1)+\omega^\beta=\omega^\eta(n+1)+\omega^{\eta+1}+\tau=$$
$$=\omega^\eta(n+1+\omega)+\tau=\omega^\eta\cdot\omega+\tau=\omega^{\eta+1}+\tau=\omega^\beta,$$

skąd wnosimy, że $\omega^\beta=\sigma+\omega^\beta$, tzn. $\alpha=\sigma+\alpha$. Zgodnie z (6) otrzymujemy $\sigma+\varrho=\sigma+\alpha$, co dowodzi, że $\varrho=\alpha$, c. b. d. o.

Przy pomocy rozwinięć o zasadzie ω określić można dwa działania na liczbach porządkowych, zwane *naturalnym dodawaniem* i *naturalnym mnożeniem* [1]). Działania te wykazują więcej analogii z dodawaniem i mnożeniem liczb naturalnych, niż dodawanie i mnożenie liczb porządkowych, które rozpatrywaliśmy dotychczas.

Aby określić te działania, rozpatrzmy dwie liczby:

$$\alpha=\omega^{\eta_1}n_1+\omega^{\eta_2}n_2+\ldots+\omega^{\eta_k}n_k,$$
$$\beta=\omega^{\xi_1}m_1+\omega^{\xi_2}m_2+\ldots+\omega^{\xi_l}m_l.$$

Po uzupełnieniu tych rozwinięć potęgami ω ze współczynnikami 0, w każdym rozwinięciu występują te same potęgi ω:

$$\alpha=\omega^{\xi_1}p_1+\omega^{\xi_2}p_2+\ldots+\omega^{\xi_h}p_h, \tag{7}$$
$$\beta=\omega^{\xi_1}q_1+\omega^{\xi_2}q_2+\ldots+\omega^{\xi_h}q_h. \tag{8}$$

Naturalną sumę liczb α i β definiujemy jak następuje

$$\alpha(+)\beta=\omega^{\xi_1}(p_1+q_1)+\omega^{\xi_2}(p_2+q_2)+\ldots+\omega^{\xi_h}(p_h+q_h).$$

Naturalny iloczyn $\alpha(\cdot)\beta$ określamy jako liczbę, powstającą przez formalne pomnożenie rozwinięć (7) i (8) tak, jak gdyby były to wielomiany względem ω, przy czym mnożąc dwie potęgi ω tworzymy naturalną sumę wykładników zaś wyrazy otrzymane z mnożenia ustawiamy w porządku malejących wykładników.

Naturalne dodawanie i naturalne mnożenie są działaniami ***przemiennymi.***

PRZYKŁADY. 1. Naturalna suma może być różna od zwykłej, np.

$$[\omega^2+\omega+1](+)[\omega^3+\omega]=\omega^3+\omega^2+\omega\cdot 2+1,$$
$$[\omega^2+\omega+1]+[\omega^3+\omega]=\omega^3+\omega.$$

[1]) G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Getynga 1906, str. 591—594.

2. $[\omega^2+\omega+1](\cdot)[\omega^3+\omega]=\omega^5+\omega^4+\omega^3\cdot 2+\omega^2+\omega$.

3. $[\omega^{\omega+1}+\omega^\omega+1](\cdot)[\omega^{\omega+1}+\omega^\omega+\omega]=$
$=\omega^{\omega\cdot 2+2}+\omega^{\omega\cdot 2+1}\cdot 2+\omega^{\omega\cdot 2}+\omega^{\omega+2}+\omega^{\omega+1}\cdot 2+\omega^\omega+\omega$.

4. Rozwinięcia (7) i (8) można przedstawić w postaci

$$\alpha=\omega^{\xi_1}p_1(+)\,\omega^{\xi_2}p_2(+)\,\ldots\,(+)\,\omega^{\xi_h}p_h,$$
$$\beta=\omega^{\xi_1}q_1(+)\,\omega^{\xi_2}q_2(+)\,\ldots\,(+)\,\omega^{\xi_h}q_h.$$

ĆWICZENIA. 1. Suma $\alpha(+)\beta$ jest funkcją rosnącą ze względu na α i ze względu na β.

2. Dla każdej liczby γ istnieje skończona liczba takich par α, β, że $\alpha(+)\beta=\gamma$.

3. Jeśli $\xi<\omega^{\omega^\alpha}$ i $\eta<\omega^{\omega^\alpha}$, to $\xi\cdot\eta<\omega^{\omega^\alpha}$.

Na odwrót, jeśli liczba ζ spełnia warunek

$$(9)\qquad (\xi<\zeta)\cdot(\eta<\zeta)\to(\xi\cdot\eta<\zeta),$$

to istnieje takie α, że $\zeta=\omega^{\omega^\alpha}$.

UWAGA. Liczby ζ spełniające dla wszystkich ξ i η warunek (9) nazywają się *liczbami głównymi mnożenia* [1]).

§ 8. Liczby porządkowe mocy $\mathfrak{a}$ [2]).

Mocą liczby porządkowej ξ nazywamy moc dowolnego zbioru uporządkowanego typu ξ. Moc tę oznaczamy symbolem $\bar{\xi}$. Mamy więc

$$\bar{\xi}=\overline{\overline{W(\xi)}}.$$

Liczby porządkowe mocy $\mathfrak{a}$ można określić jako typy zbiorów dobrze uporządkowanych utworzonych z liczb naturalnych, lub też — w myśl uwagi z rozdziału IV, § 1, str. 143, jako takie klasy relacyj dobrze porządkujących i mających zbiór liczb naturalnych jako pole, które zawierają wraz z daną relacją te i tylko te relacje, które są z nią izomorficzne. Wynika stąd

Twierdzenie 1. *Istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych mocy* $\mathfrak{a}$.

Definicja 1. Najmniejszą liczbę porządkową, większą od każdej liczby mocy $\mathfrak{a}$, oznaczamy symbolem Ω.

Istnienie liczby Ω wynika z twierdzenia 1 (por. § 3, twierdzenie 6, str. 194).

[1]) Liczby główne dla innych działań określił i badał E. Jacobsthahl; ob. Mathematische Annalen **66** (1907), str. 149.

[2]) Liczby te nazywał Cantor liczbami *klasy drugiej*; klasa pierwsza według terminologii Cantora jest utworzona z liczb skończonych.

Twierdzenie 2. $(\xi<\Omega)\equiv(\bar{\xi}\leqslant\mathfrak{a})$.

Dowód. Jeśli $\bar{\xi}\leqslant\mathfrak{a}$, to $\xi<\Omega$ na mocy definicji 1. Na odwrót, jeśli $\xi<\Omega$, to istnieje liczba ζ taka, że $\xi\leqslant\zeta$ i $\bar{\zeta}=\mathfrak{a}$, skąd wynika, że $\bar{\xi}\leqslant\bar{\zeta}=\mathfrak{a}$.

Definicja 2 [1]). $\aleph_1=\overline{\Omega}$, tj. $\aleph_1=\overline{\overline{W(\Omega)}}$.

Przyjmując w twierdzeniu 2: $\xi=\Omega$, otrzymamy $\aleph_1\,\mathrm{non}\leqslant\mathfrak{a}$. Ponieważ zaś oczywiście $\mathfrak{a}\leqslant\aleph_1$, więc wynika stąd

Wniosek 3. $\aleph_1>\mathfrak{a}$.

Zbiór liczb ξ takich, że $\bar{\xi}\leqslant\mathfrak{a}$, tj. zbiór $W(\Omega)$, jest więc nieprzeliczalny.

Twierdzenie 4. *Jeśli* $\mathfrak{m}<\aleph_1$, *to* $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{a}$.

Inaczej mówiąc: *między* $\mathfrak{a}$ *i* $\aleph_1$ *nie ma liczb pośrednich.*

Dowód. Niech $\mathfrak{m}<\aleph_1$. Istnieje więc zbiór $M\subset W(\Omega)$ taki, że $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$. Niech $\overline{M}=\xi$. Mamy więc $\xi\leqslant\Omega$. Zarazem $\xi\neq\Omega$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $\bar{\xi}=\overline{\Omega}$, tj. $\mathfrak{m}=\aleph_1$. A zatem $\xi<\Omega$, skąd na mocy twierdzenia 2: $\bar{\xi}\leqslant\mathfrak{a}$, czyli $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{a}$, c. b. d. o.

Dla liczb porządkowych $\xi<\Omega$ obowiązuje następująca forma zasady indukcji.

Twierdzenie 5. *Niech zbiór liczb porządkowych* A *czyni zadość trzem następującym warunkom*:

$$(1)\qquad 0\in A,\qquad (2)\qquad \xi\in A\to(\xi+1)\in A,$$

$$(3)\qquad \textit{jeśli } \varphi(1)<\varphi(2)<\ldots \textit{ oraz } \varphi(n)\in A,\ \textit{to } [\lim_{n<\omega}\varphi(n)]\in A.$$

Wówczas $W(\Omega)\subset A$.

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech α będzie najmniejszą liczbą taką, że $\alpha<\Omega$ i $\alpha\,\mathrm{non}\in A$. Z (1) wynika, że $\alpha\neq 0$. Gdyby α nie było liczbą graniczną, tj. gdyby $\alpha=\xi+1$, to mielibyśmy $\xi\in A$ i z (2) wynikałoby, że $(\xi+1)\in A$, czyli $\alpha\in A$ wbrew definicji α. Pozostaje zatem do rozpatrzenia wypadek, gdy α jest liczbą graniczną.

Ponieważ $\overline{\alpha}\leqslant\mathfrak{a}$, więc istnieje relacja R dobrze porządkująca zbiór $\mathcal{J}$ liczb naturalnych w typ α.

Określimy przez indukcję ciąg $k_0, k_1, \ldots$ liczb naturalnych jak następuje: niech k_0 będzie najwcześniejszym elementem zbioru $\mathcal{J}$ ze względu na relację R i niech k_{n+1} będzie najmniejszą spośród liczb $k>k_n$ taką, że $\overline{O_R(k_n)}<\overline{O_R(k)}$ (gdzie $O_R(k)$ oznacza, jak zawsze, odcinek zbioru $\mathcal{J}$ wyznaczony przez k); ponieważ α jest liczbą graniczną, taka liczba k istnieje.

[1]) $\aleph$ jest to hebrajska litera alef.

Niech $\varphi(n)=\overline{O_R(k_n)}$. Mamy więc $\varphi(n)<\varphi(n+1)$. Ponadto $\varphi(n)<\alpha$ dla $n=0,1,2,\ldots$, gdyż $O_R(k_n)$ jest odcinkiem zbioru typu α. Jeśli $\xi<\alpha$, to istnieje liczba m taka, że $\overline{O_R(m)}=\xi$. Z uwagi na to, że ciąg $k_0,k_1,\ldots$ jest rosnący wnosimy, że dla pewnego n jest $O_R(m)\subset O_R(k_n)$, a więc $\xi\leqslant\varphi(n)$. Wynika stąd, że $\alpha=\lim\limits_{n<\omega}\varphi(n)$. Ponieważ zaś $\varphi(n)<\alpha$, więc $\varphi(n)\in A$ dla $n=0,1,2,\ldots$, a zatem na mocy (3) $\alpha\in A$. Przeczy to jednak definicji liczby α, c. b. d. o.

Zbiór $W(\Omega)$ czyni oczywiście zadość warunkom (1) i (2). Zachodzi ogólniejsze

Twierdzenie 6. *Jeśli $\xi<\Omega$ i $\eta<\Omega$, to $\xi+\eta<\Omega$ i $\xi\cdot\eta<\Omega$.*

Istotnie, $\overline{\xi+\eta}=\bar{\xi}+\bar{\eta}$ i $\overline{\xi\cdot\eta}=\bar{\xi}\cdot\bar{\eta}$; skoro zatem $\bar{\xi}\leqslant\alpha$ i $\bar{\eta}\leqslant\alpha$, to (wobec równości $\alpha+\alpha=\alpha=\alpha\cdot\alpha$) mamy $\overline{\xi+\eta}\leqslant\alpha$ i $\overline{\xi\cdot\eta}\leqslant\alpha$.

Przy pomocy pewnika wyboru okażemy, że zbiór $W(\Omega)$ spełnia warunek (3):

° ***Twierdzenie 7.*** *Jeśli $\varphi(1)<\varphi(2)<\ldots$ i $\varphi(n)<\Omega$, to $\lim\limits_{n<\omega}\varphi(n)<\Omega$.*

Istotnie, niech $\alpha=\lim\limits_{n<\omega}\varphi(n)$. Stąd $W(\alpha)=\Sigma_n W(\varphi(n))$. Zbiór $W(\alpha)$ jest więc przeliczalny, jako suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych (por. rozdział III, § 2, str. 104). A zatem $\alpha<\Omega$.

° ***Twierdzenie 8.*** *Jeśli $\alpha<\Omega$ i $\beta<\Omega$, to $\alpha^\beta<\Omega$.*

Dowód. Przy danym $\alpha>1$ niech $A=\sum\limits_\xi(\alpha^\xi<\Omega)$. Ponieważ $\alpha^0=1$ i $\alpha^{\xi+1}=\alpha^\xi\cdot\alpha$, więc na mocy twierdzenia 6 zbiór A spełnia warunki (1) i (2). Warunek (3) również jest spełniony. Jeśli bowiem $\varphi(1)<\varphi(2)<\ldots$ i $\varphi(n)\in A$, to $\alpha^{\varphi(1)}<\alpha^{\varphi(2)}<\ldots$ i $\alpha^{\varphi(n)}<\Omega$, a więc przyjmując $\lambda=\lim\limits_{n<\omega}\varphi(n)$ mamy w myśl twierdzenia 7 i wzoru (3), str. 209,

$$\alpha^\lambda=\lim_{n<\omega}\alpha^{\varphi(n)}<\Omega,\quad\text{tj.}\quad\lambda\in A.$$

Stąd na mocy twierdzenia 5, $W(\Omega)\subset A$; w szczególności zatem $\beta\in A$.

ZASTOSOWANIA I ĆWICZENIA. 1. Niech $F_0,F_1,\ldots,F_\xi,\ldots$ będzie ciągiem pozaskończonym rosnącym zbiorów domkniętych położonych na linii prostej (lub ogólniej w przestrzeni $\mathcal{E}^n$), tj.

$$F_\xi\subset F_\eta\neq F_\xi\quad\text{dla}\quad\xi<\eta.$$

Dowieść, że ciąg ten jest przeliczalny.

Wskazówka: Stosownie do ćwiczenia III z § 6, str. 123, przedziały o obu końcach wymiernych dają się ustawić w ciąg nieskończony (typu ω): $P_1,P_2,\ldots,P_m,\ldots$ Niech ξ będzie dowolną liczbą porządkową, której przy-

porządkowany został zbiór F_ξ (byle nie ostatnią). Niech $p_\xi\in(F_{\xi+1}-F_\xi)$ (stosujemy tu pewnik wyboru [1])). Istnieje więc taka liczba całkowita m, że

$$p_\xi\in P_m\quad\text{oraz}\quad P_m\cdot F_\xi=0,\quad\text{tj. że}\quad P_m\cdot F_{\xi+1}\neq 0=P_m\cdot F_\xi.$$

Oznaczmy przez $m(\xi)$ najmniejszą liczbę m spełniającą te warunki. Należy dowieść, że funkcja $m(\xi)$ jest różnowartościowa.

2. Udowodnić analogiczne twierdzenie dla ciągu pozaskończonego zbiorów domkniętych malejących, tj. takich, że

$$F_\xi\supset F_\eta\neq F_\xi\quad\text{dla}\quad\xi<\eta.$$

3. Niech A będzie zbiorem położonym na linii prostej (lub ogólniej: $A\subset\mathcal{E}^n$). Niech $A^{(0)},A^{(1)},\ldots,A^{(\xi)},\ldots$ będzie ciągiem pochodnych wszystkich rzędów zbioru A (ob. § 4, przykład 1, str. 199). Dowieść, że istnieje taka liczba $\beta<\Omega$, że $A^{(\beta)}=A^{(\beta+1)}=\ldots$

Wskazówka: aby móc zastosować ćwiczenie 2, należy dowieść, że pochodne wszystkich rzędów są zbiorami domkniętymi.

4. Opierając się na poprzednim ćwiczeniu oraz na ćwiczeniu 7, str. 124, udowodnić *twierdzenie Cantora-Bendixsona*: każdy zbiór domknięty jest sumą zbioru (co najwyżej) przeliczalnego i zbioru doskonałego (tj. równego swej pochodnej).

5. Niech $\boldsymbol{B}$ będzie rodziną podzbiorów borelowskich danej przestrzeni (ob. rozdział II, § 12, str. 77). Udowodnić, że

$$\boldsymbol{B}=\sum_{\alpha<\Omega}\boldsymbol{F}_\alpha=\sum_{\alpha<\Omega}\boldsymbol{G}_\alpha,$$

gdzie $\boldsymbol{F}_\alpha$ i $\boldsymbol{G}_\alpha$ oznaczają klasy borelowskie rzędu α (ob. § 4, str. 200).

6. *Funkcje przedstawialne analitycznie.* Niech Ψ będzie dowolną rodziną funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, spełniającą warunki:

1° każda funkcja ciągła należy do Ψ,

2° jeśli $f_n\in\Psi$ dla $n=1,2,\ldots$ i jeśli $f(x)=\lim\limits_{n=\infty}f_n(x)$ dla każdego x, to $f\in\Psi$.

Dowieść, że

(a) wśród rodzin Ψ spełniających warunki 1° i 2° istnieje rodzina najmniejsza (oznaczymy ją przez Φ i nazywać będziemy rodziną funkcji przedstawialnych analitycznie);

(b) $\Phi=\sum\limits_{\alpha<\Omega}\Phi_\alpha$,

gdzie Φ_α jest rodziną funkcji przedstawialnych analitycznie klasy α (ob. § 4, str. 200, przykład 3).

[1]) W danym przypadku pewnik wyboru może być pominięty, por. § 10, uwaga 5, str. 224.

§ 9. Liczba $\aleph(\mathfrak{m})$. Uogólnimy obecnie konstrukcję, przeprowadzoną w § 8 dla liczby kardynalnej $\mathfrak{a}$, na przypadek dowolnej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$.

Twierdzenie 1. *Dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ istnieje zbiór*

$$Z(\mathfrak{m}) = \underset{\xi}{E}(\overline{\overline{\xi}} \leqslant \mathfrak{m}). \tag{1}$$

Dowód. Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$. Każda relacja R, której pole jest zawarte w A, jest podzbiorem produktu $A \times A$, tj. $R \in 2^{A \times A}$. Istnieje zatem zbiór $\mathfrak{R}$ wszystkich relacji $R \in 2^{A \times A}$, które dobrze porządkują swe pola.

Przyporządkujmy każdej relacji $R \in \mathfrak{R}$ jej typ. Na mocy pewnika zastępowania otrzymamy zbiór $Z(\mathfrak{m})$ liczb porządkowych taki, że

$$\xi \in Z(\mathfrak{m}) \to \overline{\overline{\xi}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Na odwrót, jeśli $\overline{\overline{\xi}} \leqslant \mathfrak{m}$, to istnieje relacja R porządkująca pewien podzbiór zbioru A w typ ξ, co dowodzi, że $\xi \in Z(\mathfrak{m})$.

Twierdzenie 1 jest w ten sposób udowodnione.

UWAGA. Aksjomaty VII i X dają się wyeliminować z dowodu; por. str. 50 i str. 143, uwaga 2.

Twierdzenie 2. *Jeśli $\xi \in Z(\mathfrak{m})$, to $W(\xi) \subset Z(\mathfrak{m})$.*

Bowiem z $\eta < \xi$ wynika, że $\overline{\overline{\eta}} \leqslant \overline{\overline{\xi}}$.

Definicja. $\aleph(\mathfrak{m}) = \overline{\overline{Z(\mathfrak{m})}}$.

Twierdzenie 3. $\aleph(\mathfrak{m}) \not\leqslant \mathfrak{m}$.

Dowód. Zbiór $Z(\mathfrak{m})$, jako zbiór liczb porządkowych, jest dobrze uporządkowany przez relację $\leqslant$ (por. § 3, twierdzenie 5, str. 194). Niech $\xi = \overline{Z(\mathfrak{m})}$. Przypuśćmy, że $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$, tj. $\overline{\overline{\xi}} \leqslant \mathfrak{m}$; a więc $\xi \in Z(\mathfrak{m})$, co wobec twierdzenia 2 dowodzi, że zbiór $W(\xi)$ jest odcinkiem zbioru $Z(\mathfrak{m})$. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ na mocy twierdzenia 5 z § 3, str. 194, mamy $\overline{W(\xi)} = \xi = \overline{Z(\mathfrak{m})}$, żaden zaś zbiór nie jest podobny do swego odcinka (por. § 2, wniosek 3, str. 192).

Twierdzenie 4. *Jeśli istnieją liczby ξ mocy $\mathfrak{m}$, to $\aleph(\mathfrak{m}) > \mathfrak{m}$.*

Dowód. Niech $\xi \in Z(\mathfrak{m})$. Wynika stąd na mocy twierdzenia 2, że $W(\xi) \subset Z(\mathfrak{m})$, a więc $\aleph(\mathfrak{m}) \geqslant \overline{\overline{\xi}} = \mathfrak{m}$, skąd wobec twierdzenia 3, $\aleph(\mathfrak{m}) > \mathfrak{m}$.

UWAGA. Założenie twierdzenia 4 jest istotne ze względu na brak twierdzenia o trychotomii dla liczb kardynalnych (którego nie można dowieść bez pewnika wyboru; ob. § 10, str. 223).

* ***Twierdzenie 5.*** *Dla każdego zbioru X liczb porządkowych istnieje liczba porządkowa α taka, że dla każdej liczby $\xi \in X$ jest $\overline{\overline{\xi}} < \overline{\alpha}$.*

Dowód. Niech: $S = \sum_{\xi \in X} W(\xi)$, $\mathfrak{m} = \overline{\overline{S}}$ oraz $\alpha = \overline{Z(\mathfrak{m})}$. Ponieważ $\xi = \overline{W(\xi)}$ oraz $W(\xi) \subset S$ dla każdego $\xi \in X$, zatem (na mocy twierdzenia 4)

$$\overline{\overline{\xi}} = \overline{\overline{W(\xi)}} \leqslant \overline{\overline{S}} = \mathfrak{m} < \aleph(\mathfrak{m}) = \overline{\overline{Z(\mathfrak{m})}} = \overline{\alpha}.$$

*UWAGA. Wyprowadzimy bez pewnika wyboru następujące oszacowanie liczby $\aleph(\mathfrak{m})$:

$$\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}}. \tag{2}$$

Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$ i niech X oznacza zbiór wszystkich relacji R zawartych w $A \times A$ i dobrze porządkujących swe pola. A zatem $X \subset 2^{A \times A}$. Przyporządkujmy liczbie $\xi \in Z(\mathfrak{m})$ podzbiór X_ξ zbioru X, składający się z tych relacji R, które porządkują swe pole w typ ξ. Mamy więc

$$X = \sum_{\xi \in Z(\mathfrak{m})} X_\xi, \tag{3}$$

przy czym zbiory X_ξ są oczywiście niepuste i rozłączne.

Z inkluzji $X_\xi \subset X$ wynika, że $X_\xi \in 2^X \subset 2^{2^{A \times A}}$. Zbiór $2^{2^{A \times A}}$ zawiera zatem podzbiór równoliczny ze zbiorem $Z(\mathfrak{m})$. Wynika stąd wzór (2), ponieważ

$$\overline{\overline{2^{2^{A \times A}}}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}} \quad \text{i} \quad \overline{\overline{Z(\mathfrak{m})}} = \aleph(\mathfrak{m}).$$

ĆWICZENIE. Korzystając z pewnika wyboru wzmocnić nierówność (1) jak następuje:

$$\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}. \tag{4}$$

Wskazówka. Ze wzoru (3) wnosimy na mocy pewnika wyboru, że istnieje zbiór T, zawierający po jednym elemencie z każdego ze zbiorów X_ξ.

Z równości $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, którą podamy w § 13, str. 238, wzór (i), wynikać będzie nierówność mocniejsza niż (4), a mianowicie

$$\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}. \tag{5}$$

Wynika ona też stąd, że nie istnieje liczba kardynalna większa niż $\mathfrak{m}$ a mniejsza niż $\aleph(\mathfrak{m})$; ob. str. 234.

§ 10. Twierdzenie Zermeli o dobrym uporządkowaniu.

° ***Twierdzenie 1.*** *Dla każdego zbioru istnieje relacja ustalająca jego dobre uporządkowanie* [1]).

Dowód. Niech $\mathfrak{m} = \overline{\overline{A}}$ i $\alpha = \overline{Z(\mathfrak{m})}$. Stosownie do ogólnej zasady wyboru, przyjmijmy $e(X) \in X$, gdzie $0 \neq X \subset A$ (ob. rozdział II, str. 74). Przypuśćmy, że zbiór A nie daje się dobrze uporządkować. Wówczas, oznа-

[1]) Dowód tego twierdzenia podał pierwszy E. Zermelo w pracy *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Mathematische Annalen **59** (1904), str. 514—516.

czając przez g dowolny ciąg pozaskończony typu $\leqslant\alpha$ o wyrazach należących do A, zaś przez $V(g)$ zbiór tych wyrazów, mamy $A-V(g)\neq 0$, bo w przeciwnym razie zbiór A byłby podzbiorem zbioru $V(g)$ dobrze uporządkowanego; istnieje więc element $e[A-V(g)]$. Określamy przez indukcję pozaskończoną ciąg $f(\xi)$ dla $\xi\leqslant\alpha$ w sposób następujący:

$$f(0)=e(A), \qquad f(\xi)=e[A-f(W(\xi))],$$

gdzie — jak zwykle — $f(W(\xi))$ oznacza zbiór wszystkich $f(\gamma)$ dla $\gamma<\xi$.

W szczególności więc $f(1)=e[A-\{e(A)\}]$, $f(2)=e[A-\{f(0),f(1)\}]$,...

Ciąg f istnieje na mocy twierdzenia 5 z § 4, str. 198, w którym przyjmujemy, że $h(g)=e[A-V(g)]$ dla każdego ciągu g typu $\xi\leqslant\alpha$.

Ciąg f jest różnowartościowy. Jeśli bowiem $\gamma<\xi$, to przyjmując $V_\xi=f(W(\xi))$, mamy $f(\gamma)\in V_\xi$, zaś $f(\xi)=e(A-V_\xi)\in(A-V_\xi)$; więc $f(\gamma)\neq f(\xi)$.

Funkcja f ustala zatem równoliczność zbiorów $W(\alpha)$ i V_α. Stąd $\overline{\overline{W(\alpha)}}=\overline{\overline{V_\alpha}}$, a ponieważ $\overline{\overline{W(\alpha)}}=\overline{\alpha}=\aleph(\mathfrak{m})$ i $V_\alpha\subset A$, więc $\aleph(\mathfrak{m})=\overline{\overline{V_\alpha}}\leqslant\mathfrak{m}$.

Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności z twierdzeniem 3, str. 220.

UWAGI. 1. W dowodzie powyższym użycie liczb kardynalnych i porządkowych jest nieistotne. Można je bowiem wyeliminować określając liczby porządkowe jako rodziny relacyj między sobą izomorficznych i ustalających dobre uporządkowanie swego pola (zawartego w A, por. rozdział IV, str. 143); $Z(\mathfrak{m})$ zastępujemy przez zbiór tych rodzin.

W ten sposób twierdzenie Zermeli daje się wyprowadzić z aksjomatów I—VI.

2. Dowód twierdzenia 1 jest *nieefektywny*, nie podaliśmy bowiem żadnej definicji dobrego uporządkowania zbioru A. W szczególnie ważnym wypadku, gdy A oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, takiej definicji również nie potrafimy podać.

° ***Twierdzenie 2*** *(o trychotomii). Dla dowolnych liczb kardynalnych* $\mathfrak{m}$ *i* $\mathfrak{n}$ *jest bądź* $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$, *bądź* $\mathfrak{m}<\mathfrak{n}$, *bądź* $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$.

Istotnie, niech $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{m}$ i $\overline{\overline{B}}=\mathfrak{n}$. Na mocy twierdzenia 1 można uważać A i B za zbiory dobrze uporządkowane; na mocy wniosku 6 z § 2, str. 193, mamy wówczas bądź $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$, bądź $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}$.

° ***Wniosek.*** $\mathfrak{c}\geqslant\aleph_1$.

Istotnie $\mathfrak{c}\not<\aleph_1$, bo jedyną liczbą nieskończoną mniejszą niż $\aleph_1$ jest $\mathfrak{a}$, zaś $\mathfrak{c}>\mathfrak{a}$.

UWAGI. 1. Nie znamy *efektywnego* dowodu nierówności $\mathfrak{c}\geqslant\aleph_1$, tzn. nie znamy definicji zbioru mocy $\aleph_1$ położonego na linii prostej.

2. Pytanie, czy $\mathfrak{c}=\aleph_1$ jest nierozstrzygnięte. Przypuszczenie, że równość ta zachodzi nazywamy *hipotezą continuum* (por. twierdzenie 4, str. 217, oraz rozdział III, § 3, str. 106).

3. Z pewników I—IV wynika *równoważność pewnika wyboru, twierdzenia o dobrym uporządkowaniu i prawa trychotomii* [1]).

Dowód. Z pewnika wyboru wynika twierdzenie o dobrym uporządkowaniu; wykazaliśmy to dowodząc twierdzenia 1. Na odwrót, z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu wynika pewnik wyboru. Istotnie, niech $\boldsymbol{K}$ będzie rodziną zbiorów niepustych i rozłącznych. Z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu wynika istnienie relacji R dobrze porządkującej sumę $S(\boldsymbol{K})$. Niech W będzie zbiorem złożonym z pierwszych elementów każdego ze zbiorów $X\in\boldsymbol{K}$. Zbiór W realizuje tezę pewnika wyboru.

W dowodzie twierdzenia 2 okazaliśmy, że z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu wynika prawo trychotomii. Aby udowodnić wynikanie odwrotne, załóżmy, że $\mathfrak{m}$ jest dowolną liczbą kardynalną i że $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{m}$. Na mocy twierdzenia 3 z § 9, str. 220, $\aleph(\mathfrak{m})\not\leqslant\mathfrak{m}$, skąd na mocy prawa trychotomii wnosimy, że $\mathfrak{m}<\aleph(\mathfrak{m})$. A więc A, jako zbiór równej mocy z pewnym podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego (mocy $\aleph(\mathfrak{m})$), daje się dobrze uporządkować.

4. Następujące twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 1: *dla każdego zbioru Z istnieje relacja porządkująca zbiór Z.*

Twierdzenie to (nazywane czasem pewnikiem uporządkowania) jest istotnie słabsze od twierdzenia 1. Znaczy to, że ani twierdzenie 1, ani też pewnik wyboru nie mogą być wyprowadzone z pewnika uporządkowania i aksjomatów I—V oraz VII i VIII [2]). Natomiast z pewnika uporządkowania i aksjomatów I—V wynika następująca osłabiona postać pewnika wyboru: dla każdej rodziny $\boldsymbol{A}$ zbiorów skończonych i niepustych istnieje taka funkcja f, że $f(X)\in X$ dla wszystkich $X\in\boldsymbol{A}$.

Ta osłabiona postać pewnika wyboru nie jest jednak równoważna pewnikowi uporządkowania [3]).

5. *Rola pewnika wyboru w niektórych dowodach.* Użycie pewnika wyboru w dowodzie twierdzenia o dobrym uporządkowaniu (lub w dowodzie prawa trychotomii) jest istotne: bez pewnika wyboru twierdzenie to nie daje się udowodnić.

---

[1]) Por. F. Hartogs, *Über das Problem der Wohlordnung*, Mathematische Annalen **76** (1915), str. 442.

[2]) A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fundamenta Mathematicae **32** (1939), str. 201—252.

[3]) A. Fraenkel, *Über eine abgeschwächte Form des Auswahlaxioms*, Journal of Symbolic Logic **2** (1937), str. 1—25.

Niekiedy jednak pewnik wyboru daje się wyeliminować z dowodów, które z niego robią użytek. Jako przykład przytoczymy dowód następującego twierdzenia (Cantora):

Jeśli $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ jest zstępującym ciągiem podzbiorów domkniętych i niepustych odcinka, to $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \cdot \ldots \neq 0$.

Na mocy ogólnej zasady wyboru istnieje ciąg $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ taki, że $p_n \in F_n$. Ponieważ jest to ciąg ograniczony, przeto zawiera podciąg zbieżny. Niech więc

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} p_{k_n} = p.$$

Ponieważ zbiory $F_1, F_2, \ldots$ są domknięte, więc zawierają punkt p.

Użyty tu w pierwszym zdaniu dowodu pewnik wyboru może być wyeliminowany. Można, mianowicie, określić p_n jako kres dolny zbioru F_n.

Nieco bardziej skomplikowane byłoby określenie punktu p_n, gdybyśmy zakładali, że zbiory F_n są podzbiorami kostki k-wymiarowej; ale i w tym wypadku byłoby to możliwe, można bowiem efektywnie przyporządkować każdemu zbiorowi domkniętemu (niepustemu) punkt, który do niego należy [1]).

Analogiczne zagadnienie w odniesieniu do zbiorów *przeliczalnych* nie jest rozwiązane; tzn. nie potrafimy określić funkcji, która by każdemu przeliczalnemu (niepustemu) podzbiorowi zbioru liczb rzeczywistych przyporządkowywała jakiś element tego podzbioru.

Wskutek tego nie potrafimy wyeliminować pewnika wyboru z następującego rozumowania (Vitaliego) [2]):

Podzielmy zbiór liczb rzeczywistych na podzbiory, zaliczając do tego samego podzbioru dwie liczby wtedy i tylko wtedy, gdy różnica tych liczb jest wymierna. Jak łatwo sprawdzić, jest to podział na zbiory rozłączne przeliczalne. Na mocy pewnika wyboru istnieje zbiór V zawierający dokładnie po jednym punkcie z każdego z tych zbiorów.

Ma on tę paradoksalną własność, że zbiór liczb rzeczywistych daje się przedstawić jako suma zbiorów rozłącznych V_r takich, że V_r przystaje do V przez przesunięcie $x' = x + r$, przy czym r przybiera wszystkie wartości wymierne [3]).

[1]) Ogólniej: własność ta przysługuje podzbiorom kostki, które są równocześnie zbiorami F_σ i G_δ.

[2]) G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna 1905.

[3]) Stąd z łatwością wyprowadzamy wniosek, że nie wszystkie podzbiory ograniczone linii prostej są mierzalne w sensie Lebesgue'a.

6. *Zastosowanie twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.* Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ i niech $\boldsymbol{M}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru A, z których każdy ma moc $\mathfrak{m}$, przy czym $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant \mathfrak{m}$. Istnieje wówczas zbiór Z taki, że

(1) $Z \subset A$, $\overline{\overline{Z}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{A - Z}} = \mathfrak{m}$ oraz $ZX \neq 0 \neq X - Z$ dla każdego $X \in \boldsymbol{M}$.

Niech α będzie (w myśl twierdzenia o dobrym uporządkowaniu) najmniejszą liczbą porządkową mocy $\mathfrak{m}$. Niech $M_1, M_2, \ldots, M_\xi, \ldots$ będzie ciągiem typu α złożonym ze wszystkich zbiorów należących do rodziny $\boldsymbol{M}$ (nie wymagamy, aby ciąg ten składał się z samych różnych wyrazów). Niech $x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots$ będzie ciągiem typu α bez powtórzeń złożonym ze wszystkich elementów zbioru A.

Określamy przez indukcję pozaskończoną dwa ciągi $p_1, p_2, \ldots, p_\gamma, \ldots$ i $q_1, q_2, \ldots, q_\gamma, \ldots$, gdzie $\gamma < \alpha$. Mianowicie:

1) p_1 jest pierwszym wyrazem ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots$ należącym do M_1, q_1 zaś jest pierwszym wyrazem tego ciągu należącym do $M_1 - \{p_1\}$;

2) niech S_γ oznacza zbiór wszystkich p_η i q_η takich, że $\eta < \gamma$; ponieważ $\overline{\overline{S_\gamma}} < \mathfrak{m}$, zaś $\overline{\overline{M_\gamma}} = \mathfrak{m}$, więc $M_\gamma - S_\gamma \neq 0$ (nawet $\overline{\overline{M_\gamma - S_\gamma}} \geqslant \aleph_0$, bo $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, por. str. 138, ćwicz. 2); otóż przez p_γ oznaczamy pierwszy wyraz ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots$ należący do $M_\gamma - S_\gamma$, zaś przez q_γ pierwszy wyraz tegoż ciągu należący do $M_\gamma - S_\gamma - \{p_\gamma\}$.

Zbiór Z złożony ze wszystkich p_γ, gdzie $\gamma < \alpha$, spełnia warunki (1).

Twierdzenie powyższe ma interesujące zastosowanie topologiczne [1]): Niech $A = \mathcal{E}$ (a zatem $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$) i niech $\boldsymbol{M}$ będzie rodziną zbiorów niepustych doskonałych, tj. identycznych ze swą pochodną (zbiory te są mocy $\mathfrak{c}$) [2]). Istnieje więc zbiór Z, *który z każdym podzbiorem doskonałym zbioru $\mathcal{E}$ ma punkt wspólny i którego uzupełnienie ma tę samą własność.*

Zbiór taki, jak można dowieść, jest niemierzalny w sensie Lebesgue'a.

Dodajmy, że powyższy dowód jest dowodem *istnienia* zbioru Z; nie daje on jednak żadnej metody zdefiniowania takiego zbioru (czyli jest to dowód *nieefektywny*).

7. *Baza Hamela* [3]). Z przykładu 4 podanego w § 4, str. 201 (ob. wzór (vii), str. 202), wynika istnienie zbioru B liczb rzeczywistych takiego, że każda liczba rzeczywista $\neq 0$ daje się dokładnie w jeden sposób przedstawić w postaci $r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n$, gdzie $0 \neq r_i \in \mathcal{R}$, $b_i \in B$. Można bowiem w cytowanym przykładzie przyjąć $Z = \mathcal{E}$ w myśl twierdzenia 1.

[1]) Ob. F. Bernstein, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, Leipziger Berichte **60** (1908), str. 329.

[2]) Por. K. Kuratowski, *Topologie I*, wyd. 2-e, str. 351, V.

[3]) Por. odsyłacz 3 na str. 201.

Wynika stąd też (por. str. 203) istnienie funkcji $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}}$ (tj. funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych), spełniającej tożsamość

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$, ale nie mającej postaci $c \cdot x$.

W podobny (choć nieco bardziej skomplikowany) sposób można też dowieść istnienia funkcji zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych, czyniącej zadość tożsamościom

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2), \qquad f(z_1 z_2)=f(z_1)\,f(z_2)$$

dla wszystkich zespolonych z_1 i z_2, ale różnej od funkcyj: $f_0(z)=0$, $f_1(z)=z$ i $f_2(z)=\bar{z}$ [1]).

8. *Zastosowanie hipotezy continuum (Łuzin)* [2]). *W zbiorze $\mathcal{E}$ liczb rzeczywistych istnieje zbiór nieprzeliczalny Z, którego iloczyn z każdym zbiorem nigdziegęstym jest mocy $\leqslant \aleph_0$.*

Niech $\boldsymbol{R}$ oznacza rodzinę domkniętych podzbiorów nigdziegęstych zbioru $\mathcal{E}$ (ob. str. 31). Ponieważ $\overline{\overline{\boldsymbol{R}}}=\mathfrak{c}$ (ob. str. 124, ćw. 9), możemy zbiory te ustawić, na mocy hipotezy continuum, w ciąg $F_1, F_2, \ldots, F_\xi, \ldots$ typu Ω.

Przyjmijmy $E_\xi = F_\xi - \sum_{\eta<\xi} F_\eta$. Istnieje nieprzeliczalnie wiele wskaźników ξ takich, że $E_\xi \neq 0$; w przeciwnym bowiem razie istniałaby taka liczba $\alpha<\Omega$, że

$$\sum_{\eta<\alpha} F_\eta = \sum_{\eta<\alpha+1} F_\eta = \sum_{\eta<\alpha+2} F_\eta = \ldots,$$

i mielibyśmy $\sum_{\eta<\alpha} F_\eta = \mathcal{E}$ (biorąc pod uwagę, że zbiory jednopunktowe należą do $\boldsymbol{R}$). Zbiór $\mathcal{E}$ byłby więc sumą przeliczalnej mnogości zbiorów nigdziegęstych, wbrew jednemu z podstawowych twierdzeń topologii (Baire'a) [3]).

Niech $\boldsymbol{S}$ oznacza rodzinę zbiorów E_ξ niepustych. Na mocy aksjomatu wyboru istnieje zbiór Z zawierający po jednym punkcie z każdego z tych zbiorów.

[1]) H. Lebesgue, Acc. reale delle Sc. di Torino 1906—1907, lub tegoż autora *Leçons sur les constructions géométriques*, Paryż 1950, str. 296—300.

Omówione w przykładach 1—7 zastosowania pewnika wyboru nie wyczerpują oczywiście wszystkich ważnych zastosowań jakie ten pewnik znalazł w matematyce. Szczegółowej analizy zastosowań pewnika wyboru dokonał W. Sierpiński w pracy cytowanej na str. 133.

[2]) N. Łuzin, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paryż **158** (1914), str. 1259.

[3]) Por. K. Kuratowski, l. cit., str. 320.

Mamy więc $\overline{\overline{Z}} > \aleph_0$. Zarazem niech N będzie podzbiorem nigdziegęstym zbioru $\mathcal{E}$. Ponieważ domknięcie $\overline{N}$ zbioru N jest również nigdziegęste, a zatem należy do $\boldsymbol{R}$, więc $\overline{N}=F_\xi$ dla pewnego $\xi<\Omega$. Ponieważ zaś $\overline{\overline{Z \cdot F_\xi}} \leqslant \aleph_0$, więc tym bardziej $\overline{\overline{Z \cdot N}} \leqslant \aleph_0$ [1]).

9. Wprowadzając pojęcie liczby kardynalnej, przyporządkowaliśmy każdemu zbiorowi jedną i tylko jedną liczbę kardynalną (mianowicie moc tego zbioru). Odwrotnie — stosownie do twierdzenia 1 — możemy każdej liczbie kardynalnej $\mathfrak{m}$ przyporządkować zbiór, którego mocą jest $\mathfrak{m}$; mianowicie, zbiorem tym jest $W(\alpha)$, gdzie α jest najmniejszą liczbą porządkową mocy $\mathfrak{m}$.

Wynika stąd, że każda funkcja $\mathfrak{f}$ przyjmująca jako wartości liczby kardynalne czyni zadość warunkowi (W) z rozdziału III, § 7, str. 125.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić bez pewnika wyboru nierówność $2^{\mathfrak{c}} \geqslant \aleph_1$.

Wskazówka: oprzeć się na rozkładzie przestrzeni $2^{\mathcal{J}^2}$ omówionym w rozdziale II, § 11, str. 76, przykład 4, lub w rozdziale IV, § 3, str. 157, przykłady 2 i 3.

2. Opierając się na wspomnianym rozkładzie wyprowadzić bezpośrednio z pewnika wyboru (nie posługując się twierdzeniem 1) nierówność $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$.

3. Jaka jest moc: rodziny wszystkich podzbiorów borelowskich linii prostej, rodziny wszystkich funkcji przedstawialnych analitycznie o argumentach i wartościach rzeczywistych?

a

*§ 11. Pewnik wyboru a zbiory częściowo uporządkowane.

Niech A będzie zbiorem częściowo uporządkowanym (por. rozdział IV, § 7, str. 171). Funkcję f o wartościach należących do A nazywamy *regularną*, jeśli $f_{t_1} \leqslant f_{t_2}$ lub $f_{t_1} \geqslant f_{t_2}$ dla dowolnych dwu wartości argumentu.

Zbiór częściowo uporządkowany nazywamy *zamkniętym*, jeśli dla każdej regularnej funkcji f o wartościach należących do A istnieje $\cup_t f_t$.

Element $a \in A$ nazywamy *maksymalnym* (albo nasyconym), jeśli nie istnieje $x \in A$ takie, że $a<x$.

° ***Twierdzenie 1*** *(zasada maksimum)* [2]). *W każdym zamkniętym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje element maksymalny.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór częściowo uporządkowany i zamknięty A nie ma elementu maksymalnego. Korzystając z ogólnej zasady wyboru stwierdzamy, że istnieje funkcja $e \in A^A$ taka, że $e(a)>a$ dla $a \in A$.

[1]) Wiele innych zastosowań hipotezy continuum i wszechstronną jej analizę zawiera monografia: W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4** (1934).

[2]) M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society **41** (1935), str. 667—670. Ob. też odsyłacz na stronie następnej.

Niech a_0 będzie dowolnym elementem zbioru A. Z twierdzenia o definicjach indukcyjnych wynika, że istnieje ciąg pozaskończony typu α (gdzie $\alpha=\overline{Z(\mathfrak{m})}$ oraz $\mathfrak{m}=\overline{\overline{A}}$) taki, że

$$f(0)=a_0, \qquad f(\xi+1)=e(f(\xi)),$$
$$f(\lambda)=\cup_{\xi<\lambda} f(\xi) \quad \text{lub} \quad f(\lambda)=a_0,$$

w zależności od tego, czy rozważany kres górny istnieje, czy nie istnieje.

Udowodnimy przez indukcję, że $f(\xi_1)<f(\xi_2)$ dla $\xi_1<\xi_2<\alpha$. Niech

$$M=\underset{\eta}{E}\prod_{\xi_1\xi_2}[\xi_1<\xi_2\leqslant\eta\to f(\xi_1)<f(\xi_2)]$$

i załóżmy, że $W(\eta)\subset M$. Jeśli η nie jest liczbą graniczną, tj. $\eta=\gamma+1$, to $f(\eta)=e(f(\gamma))$, a więc $f(\eta)>f(\gamma)$, a ponieważ $\gamma\in M$, więc $f(\xi_1)>f(\xi_2)$ dla $\gamma\geqslant\xi_1>\xi_2$, co dowodzi, że $\eta\in M$. Jeśli η jest liczbą graniczną, to (z uwagi na to, że ciąg $f|W(\eta)$ jest rosnący) wnosimy, że $f(\eta)=\cup_{\xi<\eta}f(\xi)$, gdyż ten kres górny istnieje na podstawie założenia, że zbiór A jest zamknięty. Wynika stąd, że $f(\eta)\geqslant f(\xi)$ dla $\eta>\xi$, skąd wobec założenia, że $W(\eta)\subset M$ wnosimy z łatwością, że $f(\eta)>f(\xi_1)>f(\xi_2)$ dla $\eta>\xi_1>\xi_2$.

Ciąg f, jako rosnący, jest różnowartościowy, zatem zbiór jego wartości jest równoliczny z $W(\alpha)$. Otrzymujemy w ten sposób wniosek, że $\aleph(\mathfrak{m})=\overline{\alpha}\leqslant\overline{\overline{A}}$, wbrew twierdzeniu 3 z § 9.

ZASTOSOWANIE. Rodzina $\boldsymbol{A}$ ideałów dowolnej struktury rozdzielnej jest częściowo uporządkowana przez stosunek inkluzji i jest zamknięta (por. rozdział IV, § 8, str. 179, wzór (7)). Z zasady maksimum wynika więc istnienie ideału maksymalnego w rodzinie $\boldsymbol{A}$.

Ogólniej, można w ten sposób wyprowadzić istnienie ideału maksymalnego w rodzinie $\boldsymbol{P}_{a,b}$ tych ideałów I, dla których $a\in I$ i b non $\in I$, przy czym a i b są dowolnymi elementami struktury takimi, iż b non$\leqslant a$ (por. rozdział IV, str. 179, wzór (10))

Zasada maksimum w odniesieniu do rodzin zbiorów daje się sformułować jako

°***Twierdzenie 2***[1]. *Jeśli rodzina zbiorów $\boldsymbol{A}$ ma następującą własność:*

(*) *dla każdej monotonicznej rodziny $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{A}$ suma $S(\boldsymbol{B})$ należy do $\boldsymbol{A}$, — to rodzina $\boldsymbol{A}$ ma element nasycony.*

Dowód. Rodzina $\boldsymbol{A}$ jest częściowo uporządkowana przez stosunek inkluzji; z warunku (*) wynika nadto, że rodzina ta jest zamknięta. W myśl twierdzenia 1 istnieje więc element nasycony rodziny $\boldsymbol{A}$.

[1]) Twierdzenie 2 udowodnione było przez K. Kuratowskiego w pracy *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fundamenta Mathematicae **3** (1922), str. 89.

Por. też ćwiczenia do § 1.

Wykażemy teraz, że twierdzenie 2 jest równoważne pewnikowi wyboru (na gruncie aksjomatów I—V). Wynika stąd oczywiście, że *twierdzenia 1, 2 i pewnik wyboru są równoważne między sobą.*

W tym celu wystarczy udowodnić bez pewnika wyboru

Twierdzenie 3. *Jeśli każda rodzina zbiorów posiadająca własność (*) ma element nasycony, to dla każdej niepustej rodziny $\boldsymbol{Z}$ zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje funkcja f taka, że $f(X)\in X$ dla wszystkich $X\in\boldsymbol{Z}$.*

Dowód. Niech $\boldsymbol{A}$ będzie rodziną funkcji f takich, że

1^0 zbiorem argumentów funkcji f jest pewna rodzina $\boldsymbol{C}_f\subset\boldsymbol{Z}$;

2^0 $f(X)\in X$ dla wszystkich $X\in\boldsymbol{C}_f$.

Przypomnijmy, że funkcja f o zbiorze argumentów $\boldsymbol{C}_f$ jest zbiorem par $\langle X,f(X)\rangle$, gdzie $X\in\boldsymbol{C}_f$. Wzór $f_1\subset f_2$ oznacza zatem, że $\boldsymbol{C}_{f_1}\subset\boldsymbol{C}_{f_2}$ i $f_1(X)=f_2(X)$ dla wszystkich $X\in\boldsymbol{C}_{f_1}$:

$$f_1\subset f_2 \equiv \{(\boldsymbol{C}_{f_1}\subset\boldsymbol{C}_{f_2})\cdot\prod_{X\in\boldsymbol{C}_{f_1}}[f_1(X)=f_2(X)]\}, \tag{1}$$

tj. że funkcja f_2 jest przedłużeniem funkcji f_1.

Wykażemy, że rodzina $\boldsymbol{A}$ czyni zadość warunkowi (*).

Załóżmy w tym celu, że $\boldsymbol{B}$ jest monotoniczną rodziną zawartą w $\boldsymbol{A}$ i oznaczmy przez F sumę $S(\boldsymbol{B})$.

Elementami zbioru F są pary postaci $\langle X,y\rangle$, gdzie $X\in\boldsymbol{Z}$, gdyż każdy składnik f sumy F jest zbiorem takich par. Jeśli $\langle X,y_1\rangle\in F$ i $\langle X,y_2\rangle\in F$, to istnieją takie f_1 i f_2, że $\langle X,y_1\rangle\in f_1\in\boldsymbol{B}$ i $\langle X,y_2\rangle\in f_2\in\boldsymbol{B}$, skąd $y_1=f_1(X)$ i $y_2=f_2(X)$.

Ponieważ rodzina $\boldsymbol{B}$ jest monotoniczna, więc albo $f_1\subset f_2$ albo $f_2\subset f_1$. Na mocy (1) wnosimy stąd w obu przypadkach, że $y_1=f_1(X)=f_2(X)=y_2$.

Zbiór F czyni więc zadość warunkowi

$$[\langle X,y_1\rangle\in F]\cdot[\langle X,y_2\rangle\in F]\to(y_1=y_2),$$

tzn. jest funkcją. Zbiorem argumentów tej funkcji jest $\Sigma_{f\in\boldsymbol{B}}\boldsymbol{C}_f$, a więc pewna rodzina zawarta w $\boldsymbol{Z}$.

Jeśli $\langle X,y\rangle\in F$, to istnieje taka fukcja $f\in\boldsymbol{B}$, że $\langle X,y\rangle\in f$, skąd wynika, że $y=f(X)$, a więc $y=F(X)=f(X)\in X$. Funkcja F należy zatem do rodziny $\boldsymbol{A}$, co dowodzi, że rodzina ta spełnia warunek (*).

W myśl założeń twierdzenia istnieje element maksymalny f_0 rodziny $\boldsymbol{A}$. Wykażemy, że $\boldsymbol{C}_{f_0}=\boldsymbol{Z}$. Istotnie, gdyby istniał element X różnicy $\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{C}_{f_0}$, to byłby to zbiór niepusty, a więc istniałby element $x\in X$. Przyjmując $f=f_0+\{\langle X,x\rangle\}$, otrzymalibyśmy więc $f_0\subset f$, $f_0\neq f$ i $f\in\boldsymbol{A}$, wbrew założeniu, że f_0 jest elementem maksymalnym rodziny $\boldsymbol{A}$.

Funkcja f_0 czyni zatem zadość warunkowi $f_0(X)\in X$ dla wszystkich $X\in\boldsymbol{Z}$, c. b. d. o.

ĆWICZENIA. 1. Rodzinę zbiorów $\boldsymbol{A}$ nazywamy *induktywną*, jeśli ma ona następujące własności:

(i) jeśli $X \in \boldsymbol{A}$, to każdy skończony zbiór $Y \subset X$ należy do $\boldsymbol{A}$,

(ii) jeśli każdy skończony zbiór $Y \subset X$ należy do $\boldsymbol{A}$, to $X \in \boldsymbol{A}$.

Wykazać (bez pomocy pewnika wyboru), że zasada maksimum jest równoważna następującemu twierdzeniu: każda induktywna rodzina $\boldsymbol{A} \neq 0$ ma element nasycony [1]).

2. Wykazać (bez pomocy pewnika wyboru), że zasada maksimum jest równoważna następującemu twierdzeniu: każdy monotoniczny podzbiór Z zbioru częściowo uporządkowanego A (tzn. że $x, y \in Z \to [(x \leqslant y) + (y \leqslant x)]$) jest zawarty w maksymalnym zbiorze uporządkowanym zawartym w A [2]).

3. Rodzina $\mathfrak{R}$ relacji $R \in 2^{A \times A}$ częściowo porządkujących zbiór A i zawierających daną relację $R_0 \in 2^{A \times A}$ częściowo porządkującą zbiór A jest zamknięta. Udowodnić, że maksymalny element rodziny $\mathfrak{R}$ jest relacją porządkującą zbiór A.

§ 12. Liczby początkowe. Liczbę porządkową nieskończoną φ nazywamy *liczbą początkową*, jeśli φ jest najmniejszą spośród liczb ξ takich, że $\overline{\xi} = \overline{\varphi}$; inaczej mówiąc, jeśli zachodzi wynikanie:

$$\gamma < \varphi \to \overline{\gamma} < \overline{\varphi}. \tag{1}$$

Np. liczby ω i Ω są liczbami początkowymi. Liczby te oznaczać będziemy również symbolami ω_0 i ω_1 ze względu na jednolitość symboliki liczb początkowych, którą w tym paragrafie wprowadzimy.

Twierdzenie 1. *Dla każdej liczby kardynalnej nieskończonej* $\mathfrak{m}$ *typ* φ *zbioru* $Z(\mathfrak{m})$ *(tj. zbioru wszystkich liczb* γ *mocy* $\leqslant \mathfrak{m}$*) jest liczbą początkową.*

Ponieważ warunek $\xi < \gamma \in Z(\mathfrak{m})$ pociąga za sobą $\xi \in Z(\mathfrak{m})$, przeto (por. § 9, str. 220) $Z(\mathfrak{m}) = W(\varphi)$. Ponieważ zaś φ non $\in W(\varphi)$, więc φ non $\in Z(\mathfrak{m})$, tj. $\overline{\varphi} \nleqslant \mathfrak{m}$. Ponieważ $\mathfrak{m} \geqslant \overline{\gamma}$, więc $\overline{\varphi} > \overline{\gamma}$. Stąd wynika (1).

Podobnie dowodzi się ogólniejsze

Twierdzenie 2. *Typ* $\overline{\sum_x Z(\mathfrak{m}_x)}$, *gdzie* $\mathfrak{m}_x \geqslant \aleph_0$, *jest liczbą początkową (przy dowolnym zakresie zmienności* x*).*

Dla danej liczby początkowej φ oznaczmy przez $P(\varphi)$ zbiór liczb początkowych $\psi < \varphi$ i przyjmijmy

$$\iota(\varphi) = \overline{P(\varphi)}. \tag{2}$$

[1]) Powyższe sformułowanie zasady maksimum podaje Teichmüller w pracy *Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom?* Deutsche Mathematik **4** (1939), str. 567—577. Praca ta zawiera też różne inne formy zasady maksimum.

[2]) Ob. Garrett Birkhoff, *Lattice theory*, 2-e wydanie, New York 1948, str. 42.

Definicja 1. Liczbę $\iota(\varphi)$ nazywamy *indeksem* liczby początkowej φ.

Jak widać $\iota(\omega) = 0$, $\iota(\Omega) = 1$.

Twierdzenie 3. *Jeśli* ψ *i* φ *są dwiema liczbami początkowymi, przy czym* $\psi < \varphi$, *to* $\iota(\psi) < \iota(\varphi)$.

Istotnie, z założenia mamy $\psi \in P(\varphi)$, a zatem $P(\psi)$ jest odcinkiem zbioru $P(\varphi)$, skąd $\overline{P(\psi)} < \overline{P(\varphi)}$.

Twierdzenie 4. *Różnym liczbom początkowym odpowiadają różne indeksy.*

Wynika to z twierdzenia 3.

Twierdzenie 5. *Każda liczba porządkowa* α *jest indeksem jakiejś liczby początkowej.*

Przypuśćmy, że α nie jest indeksem żadnej liczby początkowej. Załóżmy przy tym, że α jest najmniejszą liczbą o tej własności. Doprowadzi to nas do sprzeczności z twierdzeniami 1 i 2.

Istotnie, jeśli $\alpha = \beta + 1$, to niech ψ będzie liczbą początkową taką, że $\iota(\psi) = \beta$. Przyjmijmy $\varphi = \overline{Z(\overline{\psi})}$. Na mocy twierdzenia 1, φ jest liczbą początkową; przy tym

$$W(\varphi) = Z(\overline{\psi}) = W(\psi) + \underset{\overline{\gamma} = \overline{\psi}}{E}(\overline{\gamma} = \overline{\psi}), \quad \text{skąd} \quad P(\varphi) = P(\psi) + \{\psi\}.$$

A zatem $\iota(\varphi) = \iota(\psi) + 1 = \alpha$.

Pozostaje do rozważenia wypadek, gdy α jest liczbą graniczną > 0. Na mocy założenia każdej liczbie $\xi < \alpha$ odpowiada jedna (i na mocy tw. 4 tylko jedna) liczba ψ_ξ taka, że $\iota(\psi_\xi) = \xi$. Przyjmijmy $\varphi = \overline{\sum_{\xi < \alpha} Z(\overline{\psi}_\xi)}$. Na mocy tw. 2, φ jest liczbą początkową. Ponadto $\psi_\xi \in P(\varphi)$ dla $\xi < \alpha$. Wreszcie, jeśli $\psi \in P(\varphi)$, to $\psi \in Z(\overline{\psi}_\xi)$ dla jakiegoś $\xi < \alpha$, a zatem $\psi < \psi_{\xi+1}$, co na mocy tw. 3 daje $\iota(\psi) < \xi + 1 < \alpha$, a więc liczba ψ należy do ciągu $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Wynika stąd, że $\overline{P(\varphi)} = \alpha$, tj. $\iota(\varphi) = \alpha$.

Opierając się na tw. 5 przyjmujemy następującą definicję:

Definicja 2. ω_α *oznacza liczbę początkową, której indeksem jest* α, tj. $\iota(\omega_\alpha) = \alpha$.

W ten sposób każdej liczbie porządkowej przyporządkowaliśmy pewną liczbę początkową. Każda liczba początkowa została zaopatrzona w indeks, wreszcie różne liczby początkowe mają różne indeksy.

Jak łatwo sprawdzić, zachodzą twierdzenia następujące:

Twierdzenie 6. $(\alpha < \beta) \equiv (\omega_\alpha < \omega_\beta) \equiv (\overline{\omega}_\alpha < \overline{\omega}_\beta)$.

Twierdzenie 7. $Z(\overline{\omega}_\alpha) = W(\omega_{\alpha+1})$, *skąd* $\aleph(\overline{\omega}_\alpha) = \overline{\omega}_{\alpha+1}$; $\overline{\sum_{\xi < \lambda} Z(\overline{\omega}_\xi)} = W(\omega_\lambda)$, *gdy* λ *jest liczbą graniczną.*

Twierdzenie 8. *Jeśli λ jest liczbą graniczną, to* $\omega_\lambda = \lim_{\xi<\lambda} \omega_\xi$.

A zatem funkcja ω_ξ jest ciągła. Wynika też stąd, że liczba ω_λ jest współkońcowa z λ.

Twierdzenie 9. *Każda liczba początkowa jest potęgą liczby ω.*

Dowód. Załóżmy, że $\alpha > 0$ oraz, że

$$\omega_\alpha = \omega^{\gamma_1}\cdot n_1 + \omega^{\gamma_2}\cdot n_2 + \ldots + \omega^{\gamma_k}\cdot n_k, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k.$$

Z twierdzenia 4 z § 7 (str. 213) otrzymujemy łatwo nierówność

$$\omega^{\gamma_1} \leqslant \omega_\alpha < \omega^{\gamma_1}(n_1+1). \tag{3}$$

Ponieważ $\gamma_1 \neq 0$, możemy przedstawić γ_1 w postaci $1+\delta$, co daje

$$\omega^{\gamma_1}\cdot(n_1+1) = \omega^{1+\delta}\cdot(n_1+1) = \omega\cdot\omega^\delta\cdot(n_1+1).$$

Moc liczby porządkowej $\xi\eta$ jest równa mocy liczby $\eta\xi$, gdyż jedna jest mocą produktu $W(\xi)\times W(\eta)$, a druga — mocą produktu $W(\eta)\times W(\xi)$. Mamy zatem

$$\overline{\omega^{\gamma_1}(n_1+1)} = \overline{(n_1+1)\,\omega\cdot\omega^\delta} = \overline{\omega\cdot\omega^\delta} = \overline{\omega^{\gamma_1}}$$

i wzór (3) daje $\overline{\omega^{\gamma_1}} = \overline{\omega_\alpha}$. Ponieważ zaś $\omega^{\gamma_1} \leqslant \omega_\alpha$, więc z (1) wynika, że

$$\omega_\alpha = \omega^{\gamma_1}.$$

****Twierdzenie 10.*** *Każda liczba porządkowa graniczna λ jest współkońcowa z jakąś liczbą początkową α; tą liczbą α jest najmniejsza spośród liczb porządkowych, z którymi λ jest współkońcowa.*

Dowód. Należy wykazać, że α jest liczbą początkową. Niech $\gamma < \alpha$. Należy więc dowieść (ob. wzór (1)), że $\overline{\gamma} \neq \overline{\alpha}$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\overline{\gamma} = \overline{\alpha}$. Istnieje wówczas ciąg φ typu γ, który przyjmuje jako wartości wszystkie liczby $\xi < \alpha$, a więc $\alpha = \lim_{\zeta<\gamma} \varphi(\zeta)$. Stąd na mocy twierdzenia 6 z § 4, str. 203, wynika, że liczba α jest współkońcowa z jakąś liczbą $\beta \leqslant \gamma$; a zatem liczba λ jest współkońcowa z β, co przeczy definicji liczby α.

Dla każdej liczby granicznej α oznaczamy przez $cf(\alpha)$ najmniejszą liczbę ξ taką, że liczba α jest współkońcowa z ω_ξ. Mamy więc np.

$$cf(\omega) = 0, \quad cf(\Omega) = 1, \quad cf(\omega_\omega) = 0, \quad cf(\omega_\Omega) = 1.$$

Oczywiście

$$cf(\omega_\alpha) \leqslant \alpha \quad \text{i} \quad cf(\alpha) \leqslant \alpha, \tag{4}$$

gdyż $\alpha \leqslant \omega_\alpha$, a więc liczba α jest współkońcowa z ω_ξ dla pewnego $\xi \leqslant \alpha$.

W § 13 udowodnimy, że

$$cf(\omega_{\alpha+1}) = \alpha+1. \tag{5}$$

Definicja 3 [1]. Liczbę początkową ω_α nazywamy liczbą *regularną*, jeśli $cf(\omega_\alpha) = \alpha$.

Liczby regularne ω_α nie są więc granicami ciągów pozaskończonych, których typ jest mniejszy niż ω_α.

Z (5) wynika, że jeśli $\beta = \alpha+1$, to liczba $\omega_\beta = \omega_{\alpha+1}$ jest regularna.

Definicja 4 [2]. Liczby ω_α regularne, których wskaźnik jest liczbą graniczną, nazywamy *nieosiągalnymi*.

Twierdzenie 11. *Jeśli liczba ω_α jest nieosiągalna, to $\omega_\alpha = \alpha$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 8, liczba ω_α jest granicą ciągu typu α. Gdyby było $\omega_\alpha > \alpha$, to liczba ω_α nie byłaby regularna.

UWAGI. 1. Liczby nieosiągalne są zatem liczbami krytycznymi funkcji ω_ξ. Istnieją jednak również liczby krytyczne funkcji ω_ξ, które nie są nieosiągalne. Istotnie, funkcja ω_ξ jest rosnąca i ciągła, a więc istnienie jej liczb krytycznych wynika z twierdzenia 4 z rozdziału V, § 4, str. 197. Najmniejszą z nich jest liczba (nieregularna)

$$\lim_{n<\omega} \omega^{(n)}, \quad \text{gdzie} \quad \omega^{(0)} = \omega, \quad \omega^{(1)} = \omega_\omega, \quad \omega^{(2)} = \omega_{\omega_\omega}, \ldots$$

2. Zagadnienie, *czy istnieją liczby nieosiągalne*, nie daje się rozstrzygnąć na podstawie przyjętych przez nas aksjomatów [3].

Można by „zagwarantować" sobie ich istnienie, przyjmując odpowiedni aksjomat egzystencjalny podobnie, jak przyjęliśmy aksjomat nieskończoności gwarantujący istnienie liczby ω, oraz aksjomat zastępowania, gwarantujący istnienie liczby ω_ω. Stanęlibyśmy jednak wówczas przed problematem przyjęcia dalszych aksjomatów egzystencjalnych.

Uwagi powyższe wskazują na to, że aksjomatyka teorii mnogości — w zakresie zagadnień egzystencjalnych — daleka jest od zupełności.

---

[1]) Por. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914, str. 129.

[2]) Pojęcie to wprowadził F. Hausdorff; ob. *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annalen **65** (1908), str. 443. Na innym miejscu (*Grundzüge der Mengenlehre*, str. 131) Hausdorff pisze: „jeśli w ogóle istnieją liczby nieosiągalne, to najmniejsza z nich jest tak niezwykle wielka, że zapewne nie będzie wchodzić w rachubę dla zwykłych celów teorii mnogości". Pogląd ten trudno dziś uznać za trafny. Por. A. Tarski, *Über unerreichbare Kardinalzahlen*, Fundamenta Mathematicae **30** (1938), str. 68—89, W. Sierpiński i A. Tarski, *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles*, Fundamenta Mathematicae **15** (1930), str. 292—300, oraz prace cytowane niżej w odsyłaczu 1, str. 234.

[3]) Dołączenie do pewników teorii mnogości założenia, że wszystkie liczby kardynalne są osiągalne, nie prowadzi do sprzeczności. Dowód tego szkicują K. Kuratowski, Annales de la Société Polonaise de Mathématique **3** (1924), str. 146, oraz D. Firestone i J. B. Rosser, Journal of Symbolic Logic **14** (1949), str. 79.

3. Nie jest również udowodniona (ani obalona) hipoteza następująca: wśród liczb porządkowych mocy $\leqslant \mathfrak{c}$ nie ma liczb nieosiągalnych.

Hipoteza ta jest oczywiście słabsza od hipotezy continuum. Może ona jednak w wielu wypadkach zastąpić hipotezę continuum.

Np. przy pomocy tej hipotezy można udowodnić[1]), że nie istnieje funkcja, która by każdemu podzbiorowi X odcinka 01 przyporządkowywała liczbę rzeczywistą $m(X)$ w taki sposób, aby spełnione były trzy warunki następujące:

(i) jeśli X składa się z jednego punktu, to $m(X)=0$,

(ii) jeśli $X_n \cdot X_{n'}=0$ dla $n \neq n'$, to $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m(X_n)$,

(iii) jeśli X jest odcinkiem 01, to $m(X)=1$.

§ 13. Alefy i ich arytmetyka. Alefami nazywają się moce zbiorów dobrze uporządkowanych nieskończonych, tzn. (por. § 8, str. 216) moce liczb porządkowych $\geqslant \omega$.

Z aksjomatu wyboru wynika, że każda liczba kardynalna jest alefem (ob. § 10, twierdzenie 1, str. 221). Wiele jednak twierdzeń o alefach nie wymaga odwoływania się do aksjomatu wyboru; w szczególności w obrębie alefów obowiązuje prawo trychotomii (por. str. 193, wniosek 6).

Dla każdej liczby porządkowej α przyjmujemy

$$\aleph_\alpha=\overline{\omega_\alpha}, \quad \text{tj.} \quad \aleph_\alpha=\overline{\overline{W(\omega_\alpha)}}.$$

W szczególności $\aleph_0=\mathfrak{a}$, $\aleph_1=\overline{\Omega}$ (ob. str. 217, def. 2). Na mocy tw. 7 (str. 231)

(0) $$\aleph(\aleph_\alpha)=\aleph_{\alpha+1}.$$

Twierdzenie 1. *Jeśli* $\alpha<\beta$, *to* $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$.

Twierdzenie to wynika z twierdzenia 6 z § 12, str. 231.

Twierdzenie 2. *Jeśli* $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_\alpha$, *to* $\mathfrak{m}$ *jest alefem.*

Istotnie, $\mathfrak{m}$ jest wówczas mocą pewnego podzbioru zbioru dobrze uporządkowanego.

Twierdzenie 3. *Liczba* $\aleph_{\alpha+1}$ *następuje bezpośrednio po* $\aleph_\alpha$, *tzn. nie istnieje liczba kardynalna* $\mathfrak{m}$ *taka, że* $\aleph_\alpha<\mathfrak{m}<\aleph_{\alpha+1}$.

[1]) Ob. S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fundamenta Mathematicae **16** (1930), str. 140—150. Ten sam wynik przy użyciu hipotezy continuum uzyskany był przez Banacha i Kuratowskiego w pracy *Sur une généralisation du problème de la mesure*, ib. **14** (1929), str. 128—131; stanowił on rozwiązanie tzw. ogólnego problematu miary, postawionego przez Lebesgue'a. Wynik ten pociąga za sobą natychmiast istnienie zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a, udowodnione uprzednio przez Vitali'ego (ob. § 10, uwaga 5, str. 224).

Dowód. Jeśli $\mathfrak{m}<\aleph_{\alpha+1}$, to $\mathfrak{m}$ jest mocą podzbioru zbioru $W(\omega_{\alpha+1})$, a więc mocą pewnego zbioru dobrze uporządkowanego. Zatem $\mathfrak{m}$ jest alefem: $\mathfrak{m}=\aleph_\beta$ i z twierdzenia 1 wynika, że gdyby było $\aleph_\alpha<\mathfrak{m}<\aleph_{\alpha+1}$, to mielibyśmy $\alpha<\beta<\alpha+1$, co nie jest możliwe.

W podobny sposób można udowodnić

Twierdzenie 4. *Jeśli* α *jest liczbą graniczną i* $\aleph_\xi<\mathfrak{m}$ *dla każdego* $\xi<\alpha$, *to* $\mathfrak{m} \not< \aleph_\alpha$.

Twierdzenia 3 i 4 wykazują, że skala alefów jest w pewnym sensie zupełna: nie można jej zagęścić przez wstawienie nowych wyrazów pomiędzy wyrazy już w niej zawarte.

Twierdzenie 5[1]). *Dla każdej liczby* α *jest* $\aleph_\alpha^2=\aleph_\alpha$.

Dowód. Niech $\xi<\omega_\alpha$ i $\eta<\omega_\alpha$, przy czym $\xi \neq 0$ lub $\eta \neq 0$. Rozwijając liczby ξ i η przy zasadzie ω (ob. twierdzenie 5, str. 214) i uzupełniając rozwinięcie potęgami ω opatrzonymi we współczynniki 0, możemy liczby te przedstawić jednoznacznie w postaci

(1) $$\xi=\omega^{\gamma_1}\cdot m_1+\omega^{\gamma_2}\cdot m_2+\ldots+\omega^{\gamma_k}\cdot m_k, \quad \eta=\omega^{\gamma_1}\cdot n_1+\omega^{\gamma_2}\cdot n_2+\ldots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k,$$

w której występują te same potęgi ω, przy czym $\gamma_1>\gamma_2>\ldots>\gamma_k$ oraz $m_l>0$ lub $n_l>0$ dla każdego $i \leqslant k$.

Na mocy twierdzenia 9 z § 12, str. 232, ω_α jest potęgą liczby ω, tj. $\omega_\alpha=\omega^\lambda$; ponieważ zaś $\xi<\omega_\alpha$ i $\eta<\omega_\alpha$, więc z (1) wynika (por. § 7, twierdzenie 4, str. 213), że $\lambda>\gamma_1$.

Przyjmijmy $\Phi(0,0)=0$ oraz

(2) $$\Phi(\xi,\eta)=\omega^{\gamma_1}\cdot[2^{m_1}(2n_1+1)-1]+\ldots+\omega^{\gamma_k}\cdot[2^{m_k}(2n_k+1)-1].$$

Przyporządkowaliśmy w ten sposób każdej parze liczb ξ, η mniejszych od ω_α liczbę $\Phi(\xi,\eta)<\omega_\alpha$ (wobec tego, że $\gamma_1<\lambda$).

Udowodnimy, że

(3) $$[\Phi(\xi,\eta)=\Phi(\zeta,\tau)] \rightarrow (\xi=\zeta)\cdot(\eta=\tau).$$

Jest tak istotnie, gdy $\Phi(\xi,\eta)=0=\Phi(\zeta,\tau)$, bo wówczas $\xi=\eta=0=\zeta=\tau$. Niech więc $\Phi(\xi,\eta)=\Phi(\zeta,\tau)>0$. Wówczas $\xi>0$ lub $\eta>0$, oraz $\zeta>0$ lub $\tau>0$. Niech rozwinięciami liczb ζ i τ będą

(4) $$\zeta=\omega^{\delta_1}\cdot p_1+\omega^{\delta_2}\cdot p_2+\ldots+\omega^{\delta_l}\cdot p_l \qquad \tau=\omega^{\delta_1}\cdot q_1+\omega^{\delta_2}\cdot q_2+\ldots+\omega^{\delta_l}\cdot q_l;$$

wówczas

(5) $$\Phi(\zeta,\tau)=\omega^{\delta_1}\cdot[2^{p_1}(2q_1+1)-1]+\ldots+\omega^{\delta_l}\cdot[2^{p_l}(2q_l+1)-1].$$

[1]) Pierwszy dowód tego twierdzenia podał G. Hessenberg; ob. *Grundbegriffe der Mengenlehre*, str. 593, Getynga 1906.

Ponieważ wszystkie współczynniki w rozwinięciach (2) i (5) są >0, wynika — wobec jednoznaczności rozwinięć przy zasadzie ω (por. tw. 5, str. 214) — że

$$k=l, \quad \gamma_i=\delta_i \quad \text{oraz} \quad 2^{m_i}(2n_i+1)=2^{p_i}(2q_i+1) \quad \text{dla } i=1,2,\ldots,k.$$

Wynika stąd, że $m_i=p_i$ oraz $n_i=q_i$, a zatem, w myśl (1) i (4), $\xi=\zeta$ i $\eta=\tau$. Wzór (3) jest w ten sposób udowodniony.

Zarazem, każda liczba $\vartheta<\omega_\alpha$ jest wartością funkcji Φ. Jeśli bowiem $\vartheta=\omega^{\gamma_1}\cdot r_1+\omega^{\gamma_2}\cdot r_2+\ldots+\omega^{\gamma_k}\cdot r_k$, gdzie liczby $r_1,r_2,\ldots,r_k$ są >0, to wystarczy za ξ i η przyjąć liczby (1), określając m_i oraz n_i jako takie liczby całkowite, że $2^{m_i}(2n_i+1)=r_i+1$ dla $i=1,2,\ldots,k$. Jeśli zaś $\vartheta=0$, to $\xi=0=\eta$.

Funkcja Φ ustala zatem wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między elementami zbioru $W(\omega_\alpha)$ a parami elementów tego zbioru, co dowodzi, że zbiory $W(\omega_\alpha)$ i $W(\omega_\alpha)\times W(\omega_\alpha)$ są równoliczne, c. b. d. o.

Wniosek 6. $\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}=\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta$,
gdzie $\max(\alpha,\beta)=\alpha$, jeśli $\alpha\geqslant\beta$, i $\max(\alpha,\beta)=\beta$, jeśli $\beta\geqslant\alpha$.

Dowód. Załóżmy, że $\max(\alpha,\beta)=\alpha$. Mamy wówczas $\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha$, a więc

$$\aleph_\alpha\leqslant\aleph_\alpha+\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha+\aleph_\alpha=2\aleph_\alpha\leqslant\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha,$$
$$\aleph_\alpha\leqslant\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha,$$

skąd na mocy twierdzenia 2, str. 117, wynikają żądane równości.

Twierdzenie 7. *Jeśli $\alpha>\beta$, to różnica $\aleph_\alpha-\aleph_\beta$ istnieje i równa się $\aleph_\alpha$.*

Dowód. Zgodnie z definicją różnicy (rozdział III, § 4, str. 112) dowód sprowadza się do wykazania, że jeśli $\overline{\overline{A}}=\aleph_\alpha$, $B\subset A$ oraz $\overline{\overline{B}}=\aleph_\beta$, to $\overline{\overline{A-B}}=\aleph_\alpha$. Jako A przyjąć możemy zbiór $W(\omega_\alpha)$. Różnica $A-B$ jest więc zbiorem dobrze uporządkowanym, a więc moc jej jest alefem, który oznaczymy przez $\aleph_\gamma$. Z tożsamości $A=(A-B)+B$ wynika zatem, że $\aleph_\alpha=\aleph_\gamma+\aleph_\beta=\aleph_{\max(\gamma,\beta)}$, skąd $\alpha=\max(\gamma,\beta)$. Ponieważ $\beta<\alpha$, więc równość ta dowodzi, że $\alpha=\gamma$.

Wniosek 8. $\overline{\overline{W(\omega_{\alpha+1})-W(\omega_\alpha)}}=\aleph_{\alpha+1}$.

°***Lemat.*** $\overline{\overline{\sum_{t\in T}F_t}}\leqslant\sum_{t\in T}\overline{\overline{F_t}}$, *gdzie F jest dowolną funkcją mającą zbiory jako wartości.*

Dowód. Istotnie

$$\sum_{t\in T}\overline{\overline{F_t}}=\overline{\overline{\underset{tx}{E}(t\in T)(x\in F_t)}}, \tag{6}$$

zaś zbiór $\sum_{t\in T}F_t$ daje się otrzymać ze zbioru $\underset{tx}{E}(t\in T)(x\in F_t)$ przez przekształcenie $x=f(t,x)$, ma więc moc od niego mniejszą lub równą (por. tw. 5, str. 119).

*°***Twierdzenie 9.** $cf(\omega_{\alpha+1})=\alpha+1$.

Przyjmijmy $\beta=cf(\omega_{\alpha+1})$. Liczba ω_β jest więc współkońcowa z $\omega_{\alpha+1}$, a zatem istnieje ciąg pozaskończony φ typu ω_β, którego granicą jest $\omega_{\alpha+1}$. Wynika stąd, że jeśli $\xi<\omega_{\alpha+1}$, to istnieje liczba $\zeta<\omega_\beta$ taka, że $\xi<\varphi(\zeta)$, czyli w innym sformułowaniu

$$W(\omega_{\alpha+1})\subset\sum_{\zeta<\omega_\beta}W(\varphi(\zeta)). \tag{7}$$

Ponieważ $\overline{\overline{W(\omega_\beta)}}=\aleph_\beta$ oraz dla każdego $\zeta<\omega_\beta$ jest

$$\overline{\overline{W(\varphi(\zeta))}}<\aleph_{\alpha+1}, \quad \text{tj.} \quad \overline{\overline{W(\varphi(\zeta))}}\leqslant\aleph_\alpha,$$

więc na mocy (7), lematu i tw. 8, str. 128,

$$\aleph_{\alpha+1}=\overline{\overline{W(\omega_{\alpha+1})}}\leqslant\overline{\overline{\sum_{\zeta<\omega_\beta}W(\varphi(\zeta))}}\leqslant\sum_{\zeta<\omega_\beta}\overline{\overline{W(\varphi(\zeta))}}\leqslant\aleph_\beta\cdot\aleph_\alpha=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}.$$

Wynika stąd, że $\alpha+1\leqslant\max(\alpha,\beta)$, a więc $\alpha+1\leqslant\beta$. Zarazem (ob. str. 232, (4)) $cf(\omega_{\alpha+1})\leqslant\alpha+1$, czyli $\beta\leqslant\alpha+1$; a więc $\beta=\alpha+1$.

*°***Twierdzenie 10.** *Dla dowolnej liczby α jest*

$$\sum_{\xi\leqslant\alpha}\aleph_\xi=\aleph_\alpha. \tag{8}$$

Dowód. Ponieważ $(\xi\leqslant\alpha)\to(\aleph_\xi\leqslant\aleph_\alpha)$ oraz

$$\overline{\overline{\underset{\xi}{E}(\xi\leqslant\alpha)}}\leqslant\aleph_\alpha,$$

więc na mocy twierdzenia 8, str. 128, mamy

$$\sum_{\xi\leqslant\alpha}\aleph_\xi\leqslant\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha.$$

Stąd otrzymujemy żądaną równość, ponieważ

$$\aleph_\alpha\leqslant\sum_{\xi\leqslant\alpha}\aleph_\xi.$$

*°***Twierdzenie 11.** *Jeśli $\alpha=\beta+1$, to*

$$\sum_{\xi<\alpha}\aleph_\xi=\aleph_\beta. \tag{9}$$

Jeśli zaś α jest liczbą graniczną >0, to

$$\sum_{\xi<\alpha}\aleph_\xi=\aleph_\alpha. \tag{10}$$

Dowód. Niech $\alpha=\beta+1$. Wówczas $(\xi<\alpha)\equiv(\xi\leqslant\beta)$ i na mocy (8)

$$\sum_{\xi<\alpha}\aleph_\xi=\sum_{\xi\leqslant\beta}\aleph_\xi=\aleph_\beta.$$

Załóżmy z kolei, że α jest liczbą graniczną. Wówczas

$$W(\omega_\alpha)=\sum_{\xi<\alpha}W(\omega_\xi),$$

skąd (por. lemat ze str. 236)

$$\aleph_\alpha = \overline{\overline{W(\omega_\alpha)}} = \overline{\overline{\sum_{\xi<\alpha} W(\omega_\xi)}} \leqslant \sum_{\xi<\alpha} \overline{\overline{W(\omega_\xi)}} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi .$$

Stąd otrzymujemy równość (10), ponieważ na mocy (8)

$$\sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi \leqslant \aleph_\alpha .$$

W podobny sposób udowodnić można twierdzenie ogólniejsze:

*°***Twierdzenie 12.*** *Jeśli α jest liczbą graniczną, φ jest ciągiem pozaskończonym rosnącym typu α i $\lambda = \lim_{\xi<\alpha} \varphi(\xi)$, to*

$$\sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\varphi(\xi)} = \aleph_\lambda .$$

UWAGI. Posługując się aksjomatem wyboru możemy twierdzeniu 5 nadać postać następującą:

(i) $$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m},$$

gdzie $\mathfrak{m}$ jest dowolną liczbą kardynalną nieskończoną.

Bowiem w myśl twierdzenia 1 z § 10 (wynikającego z aksjomatu wyboru) każda liczba kardynalna jest alefem.

Jest rzeczą interesującą, że równość (i) jest równoważna aksjomatowi wyboru (na gruncie układu aksjomatów I—V) [1].

Również każda z następujących zależności między liczbami kardynalnymi jest równoważna aksjomatowi wyboru:

(ii) $$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n},$$

(iii) $$(\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{n}^2) \to (\mathfrak{m} = \mathfrak{n}),$$

(iv) $$(\mathfrak{m} < \mathfrak{n}) \cdot (\mathfrak{p} < \mathfrak{q}) \to (\mathfrak{m} + \mathfrak{p} < \mathfrak{n} + \mathfrak{q}),$$

(v) $$(\mathfrak{m} < \mathfrak{n}) \cdot (\mathfrak{p} < \mathfrak{q}) \to (\mathfrak{m}\mathfrak{p} < \mathfrak{n}\mathfrak{q}),$$

(vi) $$(\mathfrak{m} + \mathfrak{p} < \mathfrak{n} + \mathfrak{p}) \to (\mathfrak{m} < \mathfrak{n}),$$

(vii) $$(\mathfrak{m}\mathfrak{p} < \mathfrak{n}\mathfrak{p}) \to (\mathfrak{m} < \mathfrak{n}).$$

***14. Potęgowanie alefów.** Zanotujemy przede wszystkim elementarne

Twierdzenie 1. *Jeśli $\alpha \leqslant \beta$, to $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.*

Istotnie, z nierówności $2 < \aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$ i praw potęgowania dla liczb kardynalnych (rozdział III, § 4, str. 111, i § 5, str. 113) otrzymujemy

$$2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta},$$

skąd wynika natychmiast żądana równość.

[1] Ob. A. Tarski, *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix*, Fundamenta Mathematicae **5** (1924), str. 147—154.

°***Twierdzenie 2*** *(wzór rekurencyjny Hausdorffa)* [1].

(1) $$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

Dla dowodu rozpatrzymy dwa przypadki.

Przypadek I: $\alpha+1 \leqslant \beta$. Z twierdzenia 1 otrzymujemy wówczas

(2) $$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

Ponieważ zaś $\aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta}$, więc

(3) $$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\beta} \cdot 2^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta + \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}.$$

Ze wzorów (2) i (3) wynika, że

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta},$$

skąd natychmiast wynika wzór (1).

Przypadek II: $\beta < \alpha+1$. W tym przypadku

(4) $$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta + 1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}.$$

Pozostaje wykazać, że prawdziwa jest też nierówność odwrotna. Rozpatrzmy w tym celu zbiór $W(\omega_{\alpha+1})^{W(\omega_\beta)}$, tj. zbiór ciągów pozaskończonych typu ω_β, o wyrazach mniejszych niż $\omega_{\alpha+1}$. Wykażemy, że

(5) $$W(\omega_{\alpha+1})^{W(\omega_\beta)} \subset \sum_{\xi<\omega_{\alpha+1}} W(\xi)^{W(\omega_\beta)}.$$

Istotnie, jeśli φ jest ciągiem pozaskończonym typu $\omega_\beta < \omega_{\alpha+1}$, to (por. § 13, tw. 9, str. 237) zbiór jego wyrazów nie jest współkońcowy z $W(\omega_{\alpha+1})$. Istnieje więc liczba $\xi < \omega_{\alpha+1}$, która przekracza wszystkie wyrazy ciągu φ, skąd wynika, że $\varphi \in W(\xi)^{W(\omega_\beta)}$. Wzór (5) jest w ten sposób udowodniony.

Ponieważ dla $\xi < \omega_{\alpha+1}$ mamy $\overline{\overline{W(\xi)}} = \overline{\xi} \leqslant \aleph_\alpha$, więc $\overline{\overline{W(\xi)^{W(\omega_\beta)}}} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Z (5) wynika zatem na mocy lematu ze str. 236 i tw. 8 ze str. 128, że

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \overline{\overline{W(\omega_{\alpha+1})^{W(\omega_\beta)}}} \leqslant \overline{\overline{\sum_{\xi<\omega_{\alpha+1}} W(\xi)^{W(\omega_\beta)}}} \leqslant \sum_{\xi<\omega_{\alpha+1}} \overline{\overline{W(\xi)^{W(\omega_\beta)}}} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1},$$

co łącznie z (4) dowodzi wzoru (1).

°***Twierdzenie 3*** *(wzór rekurencyjny Tarskiego)* [2]. *Jeśli α jest liczbą graniczną i $\beta < cf(\alpha)$, to*

(6) $$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

[1] F. Hausdorff, *Der Potenzbegriff in der Mengenlehre*, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung **13** (1904), str. 570.

[2] A. Tarski, *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fundamenta Mathematicae **7** (1925), str. 7.

Dowód. Dla $\xi<\alpha$ mamy $\aleph_\xi<\aleph_\alpha$, a więc $\aleph_\xi^{\aleph_\beta}\leqslant\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, skąd otrzymujemy na mocy twierdzenia 8, str. 128,

$$\sum_{\xi<\alpha}\aleph_\xi^{\aleph_\beta}\leqslant\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}. \tag{7}$$

Dla dowodu nierówności odwrotnej rozumujemy podobnie jak w twierdzeniu 2. Z nierówności $\beta<cf(\alpha)$ wynika mianowicie, że

$$W(\omega_\alpha)^{W(\omega_\beta)}\subset\sum_{\xi<\omega_\alpha}W(\xi)^{W(\omega_\beta)},$$

skąd bezpośrednio wynika nierówność odwrotna do (7) a wraz z nią równość (6).

°***Twierdzenie 4*** *(uogólniony wzór Hausdorffa). Dla n skończonych jest*

$$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+n}. \tag{8}$$

Dowód. Dla $n=1$ wzór (8) pokrywa się z (1). Załóżmy, że wzór (8) jest prawdziwy dla pewnego n. Podstawiając w (1) $\alpha+n$ zamiast α otrzymamy

$$\aleph_{\alpha+n+1}^{\aleph_\beta}=\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+n+1},$$

skąd na mocy założenia indukcyjnego i wniosku 6 ze str. 236 wynika

$$\aleph_{\alpha+n+1}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+n}\cdot\aleph_{\alpha+n+1}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+n+1}.$$

Wzór (8) jest więc prawdziwy dla liczby $n+1$, a więc jest ogólnie prawdziwy.

Przyjmując we wzorze (8) $\alpha=0$ i powołując się na twierdzenie 1, otrzymujemy

°***Twierdzenie 5*** *(wzór F. Bernsteina)*[1]*. Dla n skończonych jest*

$$\aleph_n^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_n. \tag{9}$$

PRZYKŁADY. 1. Z (9) otrzymujemy

$$\aleph_1^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}\cdot\aleph_1.$$

2. Z twierdzenia 1 wynika, że

$$\aleph_0^{\aleph_1}=2^{\aleph_1}.$$

3. Przyjmijmy we wzorze (6) $\alpha=\omega_1=\Omega$, $\beta=0$. Ponieważ $cf(\omega_1)=1$, więc założenia twierdzenia 3 są spełnione i otrzymujemy

$$\aleph_\Omega^{\aleph_0}=\sum_{\xi<\Omega}\aleph_\xi^{\aleph_0}.$$

[1]) F. Bernstein, *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Mathematische Annalen **61** (1905), str. 150.

Obecnie wyprowadzimy twierdzenie, w którego dowodzie korzystać będziemy z twierdzenia Königa (str. 131):

°***Twierdzenie 6.*** *Jeśli α jest liczbą graniczną i $\beta\geqslant cf(\alpha)$, to dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ zachodzi nierówność*

$$\aleph_\alpha\neq\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}. \tag{10}$$

Dowód. Przyjmijmy $\xi=cf(\alpha)$. Liczba ω_ξ jest więc współkońcowa z α, tzn. istnieje ciąg rosnący φ typu ω_ξ taki, że

$$\lim_{\zeta<\omega_\xi}\varphi(\zeta)=\alpha.$$

Na podstawie twierdzenia 9 z § 13 (str. 238) wynika stąd, że

$$\aleph_\alpha=\sum_{\zeta<\omega_\xi}'\aleph_{\varphi(\zeta)}. \tag{11}$$

Z twierdzenia Königa wynika, że

$$\sum_{\zeta<\omega_\xi}\aleph_{\varphi(\zeta)}<\prod_{\zeta<\omega_\xi}\aleph_{\varphi(\zeta)}. \tag{12}$$

Ponieważ zaś $\aleph_{\varphi(\zeta)}<\aleph_\alpha$ oraz $\overline{\omega}_\xi=\aleph_\xi\leqslant\aleph_\beta$, więc

$$\prod_{\zeta<\omega_\xi}\aleph_{\varphi(\zeta)}\leqslant\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}. \tag{13}$$

Ze wzorów (11), (12) i (13) wynika, że

$$\aleph_\alpha<\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}. \tag{14}$$

Gdyby istniała liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ taka, że $\aleph_\alpha=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}$, to mielibyśmy

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta\aleph_\beta}=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha$$

wbrew (14).

Nierówność (10) jest w ten sposób udowodniona.

°***Wniosek 7.*** *Jeśli $\beta\geqslant cf(\alpha)$, to $\aleph_\alpha<\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.*

Z twierdzenia 6 wynika w szczególności, że dla żadnych $\mathfrak{m}$ i β nie zachodzą równości $\aleph_\omega=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}$, $\aleph_{\omega_\omega}=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}$, $\aleph_\varepsilon=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}$ (ob. definicję liczby ε na str. 210); istotnie (ob. str. 232) $cf(\omega)=cf(\omega_\omega)=cf(\varepsilon)=0$.

Z twierdzenia 6 wynika także, że jeśli $\aleph_{\omega_n}=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}$, to β przyjmować może tylko jedną z wartości $0,1,\ldots,n-1$. Istotnie, $cf(\omega_n)=n$, a zatem dla $\beta\geqslant n$ wzór $\aleph_{\omega_n}=\mathfrak{m}^{\aleph_\beta}$ nie zachodzi.

°***Wniosek 8.*** $\aleph_\omega\neq 2^{\aleph_0}$.

Istotnie, z $\aleph_\omega=2^{\aleph_0}$ wynikało by w szczególności, że $\aleph_\omega^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_\omega$, podczas gdy z wniosku 7 wynika, że $\aleph_\omega^{\aleph_0}>\aleph_\omega$.

***§ 15. Skala alefów a skala potęgowa.** Alefy stanowią rosnącą skalę mocy, zupełną w dwu znaczeniach: po pierwsze, pomiędzy jej wyrazy nie można wstawić żadnych wyrazów pośrednich (por. § 13, twierdzenia 3 i 4, str. 234 i 235), po drugie zaś moc każdego zbioru, dla którego istnieje relacja dobrze porządkująca ten zbiór, występuje w tej skali.

W rozdziale III, § 3, str. 108, zapoznaliśmy się z inną skalą mocy, którą obecnie — posługując się liczbami porządkowymi — możemy opisać dokładniej. Opierając się, mianowicie, na twierdzeniu o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną (§ 4, uwaga na str. 199) oznaczamy przez A_α zbiór określony przez warunki:

$$A_0=\mathcal{J},\quad A_{\xi+1}=2^{A_\xi},\quad A_\lambda=\sum_{\xi<\lambda}A_\xi \qquad (\lambda\text{ — liczba graniczna}). \tag{1}$$

Niech

$$\mathfrak{a}_\alpha=\overline{\overline{A}}_\alpha.$$

Wykazujemy łatwo przez indukcję, że

$$\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a},\quad \mathfrak{a}_{\xi+1}=2^{\mathfrak{a}_\xi},\quad \mathfrak{a}_\lambda=\sum_{\xi<\lambda}\mathfrak{a}_\xi \quad (\lambda\text{ — liczba graniczna}). \tag{2}$$

UWAGA. Opieramy się tu na pewniku wyboru ze względu na posługiwanie się nieskończoną sumą liczb kardynalnych.

Liczby $\mathfrak{a}_\alpha$ tworzą zatem również pewną skalę mocy, rozpoczynającą się od liczb kardynalnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ i $2^{\mathfrak{c}}$. Skalę tę nazwiemy *skalą potęgową*.

Jest ona oczywiście rosnąca:

$$\alpha<\beta \equiv \mathfrak{a}_\alpha<\mathfrak{a}_\beta. \tag{3}$$

Udowodnimy, że

$$\overline{\xi}\leqslant\mathfrak{a}_\xi. \tag{4}$$

Istotnie, załóżmy, że α jest liczbą porządkową i że każda liczba $\xi<\alpha$ spełnia wzór (4). Jeśli $\alpha=0$, to oczywiście α spełnia wzór (4). Jeśli $\alpha=\beta+1$, to $\overline{\beta}\leqslant\mathfrak{a}_\beta$ w myśl założenia. Ponieważ $\mathfrak{a}_\alpha=2^{\mathfrak{a}_\beta}>\mathfrak{a}_\beta$, więc

$$\mathfrak{a}_\alpha\geqslant\mathfrak{a}_\beta+1\geqslant\overline{\beta}+1=\overline{\beta+1}=\overline{\alpha}.$$

Jeśli wreszcie α jest liczbą graniczną, to $\mathfrak{a}_\alpha\geqslant\overline{\alpha}$ na mocy (2) i twierdzenia 5 ze str. 127.

Zgodnie z zasadą indukcji (§ 1, twierdzenie 6, str. 187) wzór (4) jest w ten sposób udowodniony.

**Twierdzenie 1.* *Jeśli λ jest liczbą graniczną $\geqslant 0$, to*

$$\aleph_{\lambda+n}\leqslant\mathfrak{a}_{\lambda+n} \quad \textit{dla} \quad n=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Dowód. Załóżmy, że istnieją liczby λ i n, dla których nierówność (5) jest fałszywa. Wśród tych liczb λ istnieje liczba najmniejsza λ_0; istnieje też najmniejsza liczba n_0 taka, że dla $\lambda=\lambda_0$ i $n=n_0$ nierówność (5) jest fałszywa.

Nie może być równocześnie $\lambda_0=0$ i $n_0=0$, gdyż $\aleph_0=\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0$.

Wykażemy, że $n_0=0$. Istotnie, jeśli $n_0=n_1+1$, to z określenia liczby n_0 wynika, że

$$\aleph_{\lambda_0+n_1}\leqslant\mathfrak{a}_{\lambda_0+n_1},$$

skąd na podstawie wzoru (5) z § 9 (str. 221) wynika, że

$$\aleph(\aleph_{\lambda_0+n_1})\leqslant 2^{\mathfrak{a}_{\lambda_0+n_1}},$$

a zatem

$$\aleph(\aleph_{\lambda_0+n_1})\leqslant\mathfrak{a}_{\lambda_0+n_1+1}=\mathfrak{a}_{\lambda_0+n_0}.$$

Ponieważ zaś $\aleph(\aleph_{\lambda_0+n_1})=\aleph_{\lambda_0+n_1+1}=\aleph_{\lambda_0+n_0}$ (por. § 13, wzór (0), str. 234), więc wnosimy stąd, że

$$\aleph_{\lambda_0+n_0}\leqslant\mathfrak{a}_{\lambda_0+n_0},$$

wbrew określeniu liczby n_0. Założenie, że $n_0\neq 0$ prowadzi zatem do sprzeczności.

Każda liczba $\xi<\lambda_0$ może być przedstawiona w postaci $\gamma+n$, gdzie γ jest liczbą graniczną mniejszą od λ_0 (por. § 4, twierdzenie 1, str. 195). W myśl określenia liczby λ_0 mamy zatem

$$\aleph_\xi=\aleph_{\gamma+n}\leqslant\mathfrak{a}_{\gamma+n}<\mathfrak{a}_{\lambda_0},$$

skąd wynika, że

$$\sum_{\xi<\lambda_0}\aleph_\xi\leqslant\overline{\lambda}_0\cdot\mathfrak{a}_{\lambda_0},$$

a więc na mocy wzoru (4) i równości $\mathfrak{a}_{\lambda_0}^2=\mathfrak{a}_{\lambda_0}$,

$$\sum_{\xi<\lambda_0}\aleph_\xi\leqslant\mathfrak{a}_{\lambda_0}^2=\mathfrak{a}_{\lambda_0}.$$

Ponieważ $\aleph_{\lambda_0}=\sum_{\xi<\lambda_0}\aleph_\xi$, otrzymujemy ostatecznie $\aleph_{\lambda_0}\leqslant\mathfrak{a}_{\lambda_0}$, wbrew określeniu λ_0. Założenie, że istnieją liczby λ i n, dla których wzór (5) nie zachodzi, prowadzi zatem do sprzeczności.

UWAGI. 1. Można udowodnić nie opierając się na pewniku wyboru, że dla wszystkich liczb porządkowych ξ i η zachodzą wzory

$$\mathfrak{a}_\xi^2=\mathfrak{a}_\xi, \tag{6}$$

$$\mathfrak{a}_\xi+\mathfrak{a}_\eta=\mathfrak{a}_{\max(\xi,\eta)}=\mathfrak{a}_\xi\cdot\mathfrak{a}_\eta. \tag{7}$$

Dowód wzoru (6) jest efektywny, tzn. można (przez indukcję pozaskończoną) zdefiniować przyporządkowanie φ takie, że φ_ξ jest funkcją odwzorowującą wzajemnie jednoznacznie zbiór $A_\xi \times A_\xi$ na A_ξ.

2. Twierdzenia 1 nie umiemy udowodnić nie powołując się na pewnik wyboru. Można natomiast bez powoływania się na ten pewnik udowodnić, że jeśli λ jest liczbą graniczną, to zbiór $A_{\lambda+2n}$ zawiera podzbiór równoliczny z $W(\omega_{\lambda+n})$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Wynika stąd nierówność

$$\aleph_{\lambda+n} \leqslant \mathfrak{a}_{\lambda+2n}. \tag{8}$$

Dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 1; korzysta się ze wzoru (1) z § 9 (str. 221) i ze wzoru (6).

3. Wzory (5) i (8) podają oszacowanie alefów „od góry" przy pomocy skali potęgowej. Natomiast żadne oszacowanie liczb $\mathfrak{a}_\xi$ przy pomocy skali alefów nie jest znane. Więcej nawet: nie znamy żadnego oszacowania przy pomocy alefów dla liczby $\mathfrak{c}$ (tj. dla drugiego wyrazu skali potęgowej). Jedynym znanym wynikiem w tym kierunku jest

° ***Twierdzenie 2.*** *Jeśli* $\mathfrak{a}_{\xi+1}=\aleph_\alpha$, *to* $cf(\alpha)\neq 0$.

Dowód. Jeśli $cf(\alpha)=0$, to z wniosku 7 z § 14, str. 241, otrzymujemy $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\mathfrak{a}_0}$. Gdyby zatem było $\aleph_\alpha = \mathfrak{a}_{\xi+1}$, to mielibyśmy $\mathfrak{a}_{\xi+1} < \mathfrak{a}_{\xi+1}^{\mathfrak{a}_0}$, co jest niemożliwe, gdyż

$$\mathfrak{a}_{\xi+1}^{\mathfrak{a}_0} = (2^{\mathfrak{a}_\xi})^{\mathfrak{a}_0} = 2^{\mathfrak{a}_\xi \cdot \mathfrak{a}_0} = 2^{\mathfrak{a}_\xi} = \mathfrak{a}_{\xi+1}.$$

UWAGI. 1. Z twierdzenia 2 wynika w szczególności, że

$$\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega, \quad \mathfrak{c} \neq \aleph_{\omega_\omega}, \quad \mathfrak{c} \neq \aleph_\varepsilon, \ldots$$

2. Z aksjomatu wyboru wynika istnienie takiej liczby α, że $\mathfrak{c}=\aleph_\alpha$. Liczby α nie potrafimy jednak bliżej scharakteryzować.

Jak wspominaliśmy, przypuszczenie, że $\alpha=1$, nosi nazwę *hipotezy continuum* (§ 10, str. 223). Ogólniejszą hipotezą — tzw. *uogólnioną hipotezą continuum* — jest hipoteza, zgodnie z którą skala alefów i skala potęgowa są identyczne: $\mathfrak{a}_\alpha=\aleph_\alpha$ dla każdej liczby porządkowej α. Jest ona równoważna — jak łatwo dowieść — hipotezie: $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$.

Hipotezy powyższe (Cantora) nie zostały ani potwierdzone ani obalone; udało się natomiast wykazać, że *uogólniona hipoteza continuum nie prowadzi do sprzeczności* (o ile przyjęte przez nas aksjomaty teorii mnogości są niesprzeczne) [1]. Gdyby okazało się również, że i zaprzeczenie hipotezy Cantora jest niesprzeczne, to wynikałoby stąd, że aksjomatyka teorii mnogości nie jest zupełna [1].

W blizkim związku z uogólnioną hipotezą continuum jest hipoteza następująca:

(C) *Dla żadnej liczby kardynalnej* $\mathfrak{m}$ *nie istnieje liczba kardynalna* $\mathfrak{x}$ *taka, że* $\mathfrak{m}<\mathfrak{x}<2^{\mathfrak{m}}$.

Twierdzenie 3. *Hipoteza* (C) *jest równoważna (na gruncie pewników I—V i VII) koniunkcji pewnika wyboru VI i uogólnionej hipotezy continuum* [2].

Dowód. Załóżmy pewnik wyboru i uogólnioną hipotezę continuum. Niech $\mathfrak{m}$ będzie dowolną liczbą kardynalną. Z pewnika wyboru wnosimy, że $\mathfrak{m}$ jest alefem: $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$, skąd na mocy uogólnionej hipotezy continuum otrzymujemy

$$\mathfrak{m}=\aleph_\alpha=\mathfrak{a}_\alpha, \quad 2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{a}_\alpha}=\mathfrak{a}_{\alpha+1}=\aleph_{\alpha+1}.$$

Wynika stąd, że żadna liczba kardynalna $\mathfrak{x}$ nie spełnia nierówności $\mathfrak{m}<\mathfrak{x}<2^{\mathfrak{m}}$, gdyż mielibyśmy $\aleph_\alpha<\mathfrak{x}<\aleph_{\alpha+1}$.

Załóżmy z kolei hipotezę (C). Wyprowadzimy stąd najpierw pewnik wyboru.

Niech $\mathfrak{n}$ będzie dowolną liczbą kardynalną nieskończoną; przyjmijmy $\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n}}$. A zatem

$$\mathfrak{m}^2=2^{2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n}}=2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n}}=\mathfrak{m}, \tag{9}$$
$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2\geqslant 2\cdot\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{m};$$

skąd wynika na podstawie twierdzenia 2, str. 117, że

$$\mathfrak{m}=2\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{m}, \tag{10}$$
$$2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}+\mathfrak{m}}\geqslant 2\cdot 2^{\mathfrak{m}}\geqslant 2^{\mathfrak{m}},$$
$$2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}}+2^{\mathfrak{m}}. \tag{11}$$

[1]) K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set-theory*. Annals of Mathematics Studies **3**, Princeton 1940.

[1]) Aksjomatyka teorii mnogości nie jest zresztą zupełna również i z tego powodu, że nie pozwala rozstrzygnąć zagadnień egzystencjalnych dotyczących istnienia zbiorów bardzo wysokiej mocy, liczb nieosiągalnych itp. (por. uwaga 2, str. 233). Jest ciekawe, że wynika stąd niezupełność aksjomatyki w odniesieniu do pewnych zagadnień teoriolicznowych, a także pewnych zagadnień z teorii liczb rzeczywistych (por. np. A. Mostowski, *An undecidable arithmetical statement*, Fundamenta Mathematicae **36** (1949), str. 143—164). Niezależność hipotezy continuum wskazywałaby zapewne na niezupełność nie dającą się usunąć przez dodanie założeń egzystencjalnych wymienionego powyżej typu. Por. K. Gödel, *What is Cantor's continuum hypothesis*, American Mathematical Monthly **54** (1947), str. 515—525.

[2]) Por. A. Lindenbaum i A. Tarski, *Communication sur les recherches de la Théorie des ensembles*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et de Lettres de Varsovie, Classe III, **19** (1926), str. 314. Podany tu dowód jest zaczerpnięty z pracy W. Sierpińskiego, *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*, Fundamenta Mathematicae **34** (1947), str. 1—5.

Zgodnie z wynikiem ustalonym w § 9 (str. 221, wzór (1)) oraz ze wzorami (9) i (11) zachodzą nierówności

$$2^{\mathfrak{m}} \leqslant \aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}} \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}} + 2^{\mathfrak{m}} \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}} + 2^{2^{\mathfrak{m}}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}} \cdot 2 \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}+2^{\mathfrak{m}}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}}.$$

Z hipotezy (C) wynika zatem, że możliwe są dwa przypadki:

(i) $\aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}}$, (ii) $2^{\mathfrak{m}} = \aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}}$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek (i). Wobec (11) możemy zastosować twierdzenie 4 z § 5 rozdziału III (str. 118); wnosimy w ten sposób, że $\aleph(\mathfrak{m}) = 2^{2^{\mathfrak{m}}} - 2^{\mathfrak{m}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}}$. Wynika stąd, że $\aleph(\mathfrak{m}) = 2^{2^{\mathfrak{m}}} > 2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$, a więc że liczba $\mathfrak{m}$ jest mniejsza od liczby kardynalnej $\aleph(\mathfrak{m})$ zbioru dobrze uporządkowanego. Liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ sama jest więc też mocą zbioru dobrze uporządkowanego, tj. sama jest alefem.

W przypadku (ii) rozpatrujemy liczbę $\mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m})$. Oczywiście

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}} + \aleph(\mathfrak{m}),$$

a więc w myśl (ii)

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}.$$

Z hipotezy (C) wynika zatem, że

$$\text{albo} \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}), \quad \text{albo} \quad \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}) = 2^{\mathfrak{m}}.$$

Pierwszy przypadek zachodzić nie może, bo mielibyśmy $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$, (por. § 9, twierdzenie 3, str. 220). W drugim przypadku stosując (wobec (10)) twierdzenie 4 z § 5 rozdziału III, otrzymujemy $\aleph(\mathfrak{m}) = 2^{\mathfrak{m}} - \mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{m}}$. Wynika stąd, że $\aleph(\mathfrak{m}) > \mathfrak{m}$, a więc liczba $\mathfrak{m}$ jest alefem.

Z hipotezy (C) wynika zatem w obu przypadkach, (i) i (ii), że $\mathfrak{m}$ jest alefem. Ponieważ $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{n}} > \mathfrak{n}$, więc i $\mathfrak{n}$ jest alefem. Wobec dowolności $\mathfrak{n}$ wnosimy stąd, że dla każdego zbioru istnieje dobre uporządkowanie, co pociąga za sobą pewnik wyboru (por. § 10, uwaga 3, str. 223).

Wyprowadzimy obecnie z (C) uogólnioną hipotezę continuum. Zastosujemy rozumowanie *ad absurdum*.

Załóżmy więc, że istnieją liczby porządkowe α takie, że $\mathfrak{a}_\alpha \neq \aleph_\alpha$ i niech α będzie najmniejszą z spośród nich. Oczywiście $\alpha \neq 0$. Liczba α nie może być liczbą graniczną, bo mielibyśmy

$$\mathfrak{a}_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{a}_\xi = \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha$$

(por. § 13, twierdzenie 8, str. 237), wbrew definicji liczby α.

Niech więc $\alpha = \beta + 1$. A zatem

$$\mathfrak{a}_\alpha = 2^{\mathfrak{a}_\beta} = 2^{\aleph_\beta}.$$

Ze wzoru (5), § 9, str. 221, wynika, że

$$2^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph(\aleph_\beta) = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\alpha,$$

otrzymujemy więc

$$\mathfrak{a}_\alpha = 2^{\mathfrak{a}_\beta} \geqslant \aleph_{\beta+1} > \aleph_\beta = \mathfrak{a}_\beta.$$

Przypuszczenie, że $2^{\mathfrak{a}_\beta} > \aleph_{\beta+1}$, przeczy hipotezie (C), zatem

$$\mathfrak{a}_\alpha = 2^{\mathfrak{a}_\beta} = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\alpha,$$

co znów stoi w sprzeczności z definicją liczby α.

W ten sposób sprowadziliśmy do sprzeczności założenie, że istnieją liczby α, dla których $\mathfrak{a}_\alpha \neq \aleph_\alpha$. Znaczy to, że uogólniona hipoteza continuum wynika z hipotezy (C).

Twierdzenie 3 jest w ten sposób udowodnione.

***§ 16. Eliminacja liczb porządkowych metodą v. Neumanna.** W rozdziale IV, § 1, str. 143—144, wskazywaliśmy na to, że pojęcie typu porządkowego przeliczalnego jest zasadniczo zbędne, gdyż typy takie można wyeliminować zastępując je przez klasy izomorficznych między sobą relacji porządkujących o polu przeliczalnym. W analogiczny sposób można wyeliminować pojęcie typu porządkowego dowolnej mocy. Natomiast eliminacja pojęcia typu porządkowego w ogóle (bez ograniczenia mocy) nie jest na tej drodze możliwa.

Okazuje się jednak, że eliminacja liczb porządkowych daje się przeprowadzić w całej rozciągłości przy użyciu aksjomatu VIII. Można, mianowicie, opierając się wyłącznie na aksjomatach I—V, VII i VIII, dowieść istnienia zbiorów posiadających dokładnie te same własności co liczby porządkowe: każdej relacji dobrze porządkującej odpowiada jeden i tylko jeden taki zbiór i przy tym relacjom izomorficznym odpowiada ten sam zbiór, a relacjom nieizomorficznym odpowiadają różne zbiory.

Definicja [1]. Zbiór A nazywa się *liczbą porządkową w sensie v. Neumanna* (w skróceniu l. p. N.) jeśli ma on następujące własności:

1. *Każdy element A jest zbiorem.*
2. *Jeśli $X \in A$, to $X \subset A$.*
3. *Jeśli $X, Y \in A$, to $X = Y$ lub $X \in Y$ lub $Y \in X$.*
4. *Jeśli $0 \neq B \subset A$, to istnieje takie X, że $X \in B$ i $X \cdot B = 0$.*

[1]) J. v. Neumann, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Acta Litt. ac Scientiarum r. Univ. Hung. Franc. Joseph., Sectio sc. math. **1** (1923), str. 199—208.

Przykłady l. p. N.:

(i) zbiór pusty $N_0=0$,
(ii) zbiór $N_1=\{0\}$,
(iii) zbiór $N_2=\{0,\{0\}\}=\{N_0,N_1\}$,
(iv) zbiór $N_3=\{N_0,N_1,N_2\}$,
(v) zbiór $N_\omega=\{N_0,N_1,N_2,\ldots\}$,
(vi) zbiór $N_{\omega+1}=N_\omega+\{N_\omega\}$.

Wyprowadzimy kilka własności l. p. N.

5. *Jeśli A jest l. p. N., to nie istnieje żaden skończony ciąg zbiorów $X_1,\ldots,X_k$ taki, że $X_k\in X_1\in X_2\in\ldots\in X_{k-1}\in X_k\in A$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieją zbiory $X_1,\ldots,X_k$ posiadające wymienioną własność. Niech $B=\{X_1,\ldots,X_k\}$. Ponieważ $X_k\in A$, więc na mocy 2 $X_k\subset A$, a więc $X_{k-1}\in A$, skąd podobnie wyprowadzamy, że $X_{k-2}\in A$ itd. Zatem zbiory $X_1,\ldots,X_k$ należą do A, czyli $B\subset A$. Żaden ze zbiorów X_i nie spełnia tezy warunku 4; istotnie, dla $i>1$ jest $X_{i-1}\in X_i\cdot B$, zaś dla $i=1$ jest $X_k\in X_1\cdot B$.

6. *Jeśli A jest l. p. N. i $M\in A$, to M jest l. p. N.*

Dowód. Wykażemy, że M czyni zadość warunkom 1—4.

1°. Jeśli $X\in M$, to z uwagi na wzór $M\subset A$ wynikający z 2, mamy $X\in A$, a więc X jest zbiorem.

2°. Załóżmy, że $X\in M$ i $Y\in X$. Mamy więc

$$Y\in X\in M\in A,$$

skąd wobec inkluzji $M\subset A$ wynika, że $Y\in X\in A$, a zatem $Y\in A$ na mocy 2. W myśl 3 jest więc albo $Y=M$, albo $M\in Y$, albo $Y\in M$. W pierwszym przypadku mielibyśmy

$$M\in X\in M\in A,$$

w drugim zaś

$$M\in Y\in X\in M\in A,$$

co przeczy twierdzeniu 5. Zatem $Y\in M$. Wobec dowolności Y wnosimy stąd, że $X\subset M$. Zbiór M spełnia więc warunek 2.

3°. Jeśli $X,Y\in M$, to $X,Y\in A$, gdyż $M\subset A$. Z 3 wynika zatem, że albo $X=Y$, albo $X\in Y$, albo $Y\in X$.

4°. Załóżmy, że $0\neq B\subset M$. Zbiór B jest więc niepustym podzbiorem A, a zatem w myśl 4 zawiera taki element X, że $XB=0$. Dowodzi to, że M spełnia warunek 4.

7. *Jeśli A i B są l. p. N., to*

$$(A\in B)\equiv(A\subset B)\cdot(A\neq B).$$

Dowód. Jeśli $A\in B$, to $A\subset B$ na mocy 2; przy tym $A\neq B$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $B\in B$ wbrew 5.

Załóżmy, że $A\neq B$ i $A\subset B$. Zbiór $B-A$ jest więc niepustym podzbiorem B, a zatem w myśl 4 istnieje zbiór $X\in B-A$ taki, że $X(B-A)=0$. Wykażemy, że $X=A$; ponieważ $X\in B$, wyniknie stąd, że $A\in B$ i twierdzenie będzie w ten sposób udowodnione.

Z warunku $X\in B$ wynika $X\subset B$, a ponieważ $X(B-A)=0$, przeto $X-A=0$, tj. $X\subset A$. Przypuśćmy, że $A-X\neq 0$. Istnieje więc zbiór Y taki, że $Y\in A-X$ i $Y(A-X)=0$. Ponieważ $A-X\subset B$, wnosimy stąd, że $Y\in B$ a więc zgodnie z 3 jest albo $Y\in X$, albo $X\in Y$, albo $X=Y$. Pierwsza z tych możliwości jest wykluczona, gdyż $Y\in A-X$; druga jest wykluczona, gdyż daje ona $X\,\mathrm{non}\in A-X$, tj. (wobec $X\in A$) $X\in X\in A$ wbrew 5; wreszcie trzecia jest wykluczona, gdyż $Y\in A$ zaś $X\in B-A$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że $A-X=0$, tj. $A\subset X$, skąd $A=X$.

8. *Każda l. p. N. jest dobrze uporządkowana przez stosunek inkluzji.*

Dowód. Wystarczy okazać, że jeśli A jest l. p. N., to

(a) stosunek inkluzji jest spójny w A,
(b) każdy niepusty podzbiór A ma element najwcześniejszy.

(a) wynika z 3, 6 i 7, zaś (b) z 4 i 7.

9. *Jeśli A i B są l. p. N., to AB też jest l. p. N.*

Dowód. Wykażemy, że AB czyni zadość warunkom 1—4.

1°. Z $X\in AB$ wynika, że $X\in A$, a więc X jest zbiorem.

2°. Z $X\in AB$ wynika, że $X\in A$ i $X\in B$, a więc $X\subset A$ i $X\subset B$, a zatem $X\subset AB$.

3°. Z $X,Y\in AB$ wynika $X,Y\in A$, a więc $X=Y$ lub $X\in Y$ lub $Y\in X$.

4°. Z $0\neq M\subset AB$ wynika, że $0\neq M\subset A$, a więc istnieje X takie, że $X\in M$ i $XM=0$.

10. *Jeśli A i B są l. p. N.; to albo $A\subset B$, albo $B\subset A$.*

Istotnie, załóżmy, że $A\neq AB\neq B$. Z 9 i 7 wynika, że $AB\in A$ i $AB\in B$, skąd $AB\in AB$, co przeczy 5, gdyż AB jest l. p. N. w myśl 9. Zatem albo $A=AB$, albo $B=AB$.

11. *Jeśli A i B są różnymi l. p. N., to albo A jest odcinkiem B, albo B jest odcinkiem A; zbiory te nie są więc podobne (przy uporządkowaniu przez stosunek inkluzji).*

Dowód. Załóżmy, że $A\neq B$; w myśl 10 jest albo $A\subset B$, albo $B\subset A$. Załóżmy, że zachodzi pierwsza z tych inkluzji. Z 7 wnosimy stąd, że $A\in B$, co dowodzi, że elementy zbioru A poprzedzają w zbiorze B element A. Zbiór A jest więc odcinkiem zbioru B, a zatem nie może być podobny do B (por. wniosek 3, str. 192).

12. *Dla każdej relacji R dobrze porządkującej swe pole istnieje dokładnie jedna l. p. N. uporządkowana przez stosunek inkluzji podobnie do R.*

Dowód. Niech Z będzie polem relacji R zaś H zbiorem tych $z \in Z$, dla których istnieje dokładnie jedna l. p. N. N_z spełniająca warunek: N_z jest uporządkowane przez stosunek inkluzji podobnie do odcinka $O(z)$ zbioru Z; w skróceniu: $N_z \sim O(z)$.

Załóżmy, że $O(x) \subset H$. Wykażemy, że $x \in H$. Wobec 11 istnieje co najwyżej jedna l. p. N. podobna do $O(x)$; wystarczy zatem okazać, że co najmniej jedna taka l. p. N. istnieje.

Przyjmijmy

$$N_x = \underset{X}{E}[\sum_z (z \prec x) \cdot (X = N_z)].$$

Wykażemy, że N_x jest l. p. N. Istotnie, warunek 1 jest oczywiście spełniony.

Jeśli $N_z \in N_x$ i $Y \in N_z$, to Y jest l. p. N.; zarazem, ponieważ $Y \in N_z \sim O(z)$, więc na mocy 11 Y jest podobne do pewnego odcinka zbioru N_z, a więc do pewnego odcinka $O(t)$ zbioru $O(z)$. Wobec tego, że $t \prec z \prec x$, mamy $t \in O(x)$, a więc $t \in H$ i $Y \sim N_t$, skąd (wobec 11) $Y = N_t$; ponieważ zaś $N_t \in N_x$, więc $Y \in N_x$. A zatem $N_z \subset N_x$, tj. N_x spełnia warunek 2.

Warunek 3 wynika bezpośrednio z 10 i 7.

Niech B będzie niepustym zbiorem zawartym w N_x i niech z_0 będzie najwcześniejszym elementem Z takim, że $N_{z_0} \in B$. Gdyby istniało $Y \in N_{z_0}$ takie, że $Y \in B$, to byłoby $Y = N_z$, gdzie $z \prec z_0$ wbrew definicji z_0.

Zbiór N_x jest więc l. p. N. Jeśli $z_1 \prec z_2 \prec x$, to $N_{z_1} \sim O(z_1)$ i $N_{z_2} \sim O(z_2)$, a więc N_{z_1} jest podobne do odcinka N_{z_2}, skąd wnosimy na mocy 11, że $N_{z_1} \subset N_{z_2}$ i $N_{z_1} \neq N_{z_2}$. A zatem $N_x \sim O(x)$, co dowodzi, że $x \in H$.

W myśl zasady indukcji (§ 1, str. 187) mamy zatem $H = Z$. Zbiór

$$N = \underset{X}{E}[\sum_x (x \in Z) \cdot (X = N_x)]$$

jest l. p. N. uporządkowaną podobnie do Z. Dowód jest analogiczny do dowodu przeprowadzonego dla zbioru N_x.

Z twierdzeń 12, 11 i 8 wynika, że l. p. N. istotnie czynią zadość wszystkim wymaganiom stawianym liczbom porządkowym.

W związku z przeprowadzonym tu rozumowaniem warto zauważyć, że w dowodzie twierdzenia 12 czynimy istotny użytek z aksjomatu zastępowania (aksjomat VIII). Bez tego aksjomatu nie można by dowieść istnienia zbiorów N_x i N.

---

*ROZDZIAŁ VI.

Niesprzeczność i niezależność aksjomatów.

§ 1. Układ aksjomatów teorii mnogości. W wysłowieniu aksjomatów V i VIII (str. 44 i 49) występowało bliżej nie sprecyzowane pojęcie funkcji zdaniowej [1]). Obecnie podamy zupełnie precyzyjny opis układu aksjomatów dla teorii mnogości (jednego z wielu możliwych).

Pojęciami pierwotnymi systemu są

0 (zbiór pusty) i $\in$ (stosunek należenia).

Poza tymi dwoma pojęciami w systemie występują tylko pojęcia logiczne (m. in. identyczność).

Funkcją zdaniową *rzędu* 0 nazywamy wyrażenia postaci

$$x \in y, \quad x = y, \tag{1}$$

gdzie x i y są dowolnymi symbolami (tzw. zmiennymi). Litery x i y mogą być przy tym zastąpione symbolem 0 (dla zbioru pustego). O zmiennych x i y mówimy, że są *wolne* w wyrażeniach (1).

Załóżmy, że p jest liczbą naturalną i że określone już są funkcje zdaniowe rzędów $0, 1, \ldots, p-1$. Funkcją zdaniową *rzędu* p nazywamy każde wyrażenie jednej z następujących postaci:

$$\Phi', \quad \Phi + \Psi, \quad \Phi \cdot \Psi, \quad \Phi \to \Psi, \quad \Phi \equiv \Psi, \tag{2}$$

$$\prod_x \Phi, \quad \sum_x \Phi, \tag{3}$$

---

[1]) Pierwszy układ aksjomatów teorii mnogości podał E. Zermelo; ob. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Mathematische Annalen, **65** (1908), str. 261—281. Niejasne sformułowanie pewnika podzbiorów (por. rozdział II, § 2, str. 44) wywołało ożywione dyskusje, w wyniku których powstało kilka (nierównoważnych) metod uściślenia tego pewnika i spokrewnionego z nim pewnika zastępowania. Metoda, której używamy w tym rozdziale, pochodzi od Th. Skolema; ob. *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem V Kongress der Skandinavischen Mathematiker, Helsingfors 1923, str. 217—232.