

° **Twierdzenie 11** (odwrotne). Zbiór skończony w znaczeniu Dedekinda jest skończony w sensie definicji 2.

Dowód. Należy wykazać, że zbiór nieskończony (w sensie definicji 2) jest nieskończony w znaczeniu Dedekinda, tzn. zawiera ciąg nieskończony.

Założmy zatem, że zbiór  $A$  jest nieskończony, tj. że istnieje niepusta rodzina  $\mathcal{A}C^2A$  bez elementu nasyczonego. Dla każdego więc  $X \in \mathcal{A}$  rodzina  $\mathcal{M}(X)$  zbiorów  $Y$ , dla których  $Y \in \mathcal{A}$  i  $XCY \neq X$ , jest niepusta.

Z ogólnej zasady wyboru (rozdział II, § 10, str. 74) wynika, że istnieje taka funkcja  $f$ , że  $f(X) \in \mathcal{M}(X)$  dla  $X \in \mathcal{A}$ . A zatem

$$f(X) \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad XCf(X) \neq X.$$

Obierzmy teraz dowolny zbiór  $X_0 \in \mathcal{A}$  i utwórzmy ciąg zbiorów

$$X_1=f(X_0), \quad X_2=f(X_1), \quad \dots, \quad X_{n+1}=f(X_n), \dots$$

Mamy więc:

$$X_n \in \mathcal{A}, \quad X_n \neq X_{n+1}, \quad X_n \subset X_{n+1} \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\dots$$

Różnice  $X_{n+1} - X_n$  tworzą zatem ciąg zbiorów niepustych, rozłącznych i zawartych w  $A$ . Stosując pewnik wyboru wnosimy, że istnieje zbiór  $B$ , zawierający dokładnie po jednym elemencie z każdej z różnic  $X_{n+1} - X_n$ . Oznaczając ten element przez  $a_n$ , otrzymujemy nieskończony ciąg różnych elementów zbioru  $A$ , c. b. d. o.

Definicja Dedekinda mniej nadaje się niż definicja 2 do budowania na jej podstawie arytmetyki, gdyż już w najelementarniejszych twierdzeniach arytmetyki wymaga ona powoływania się na pewnik wyboru. Definicja ta odegrała jednak dużą rolę, jako pierwsza próba sprowadzenia pojęć arytmetycznych do pojęć teorio-mnogobściowych.

**ĆWICZENIA.** 1. Jeśli zbiory  $A$  i  $B$  są nieskończone, to  $\mathcal{M}(A) \sim \mathcal{M}(B)$ .

2. Na to, by zbiór  $X$  był nieskończony w znaczeniu Dedekinda potrzeba i wystarcza, by jego moc  $m$  czyniła zadość równaniu  $m + 1 = m$ .

3. Na to, by zbiór  $X$  był skończony (w sensie definicji 2), potrzeba i wystarcza, by zbiór  $2^{2^X}$  był skończony w znaczeniu Dedekinda.

[Russell-Whitehead].

4. Na to, by zbiór  $X$  był skończony (w sensie definicji 2), potrzeba i wystarcza, by każda rodzina jego podzbiorów, addytywna (tj. zawierająca sumę każdego dwóch zbiorów, które do niej należą) i zawierająca wszystkie zbiory jednostkowe  $\{x\}$ , gdzie  $x \in X$ , — zawierała jako elementy wszystkie podzbiory niepuste zbioru  $X$ .

## ROZDZIAŁ IV.

### Zbiory uporządkowane.

**§ 1. Relacje porządkujące.** Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem,  $R$  — relacją, której pole zawiera  $A$  (por. rozdział II, § 5, str. 54). Mówimy, że relacja  $R$  jest <sup>1)</sup>:

zwrotna w  $A$ , jeśli  $xRx$  dla każdego  $x \in A$ ,

przeciwzwrotna w  $A$ , jeśli  $x \text{ non } Rx$  dla każdego  $x \in A$ ,

symetryczna w  $A$ , jeśli dla dowolnych  $x, y \in A$  z  $xRy$  wynika  $yRx$ ,

przeciwsymetryczna (antysymetryczna) w  $A$ , jeśli dla dowolnych  $x, y \in A$  z  $xRy$  wynika  $y \text{ non } Rx$ ,

przechodnia w  $A$ , jeśli dla dowolnych  $x, y, z \in A$  z  $xRy$  i  $yRz$  wynika  $xRz$ ,

slabo asymetryczna w  $A$ , jeśli dla dowolnych  $x, y \in A$  z  $xRy$  i  $x \neq y$  wynika  $y \text{ non } Rx$  lub, co na jedno wychodzi, jeśli z  $xRy$  i  $yRx$  wynika  $x=y$  dla dowolnych  $x, y \in A$ ,

spójna w  $A$ , jeśli dla dowolnych dwu różnych elementów  $x, y \in A$  mamy bądź  $xRy$ , bądź  $yRx$ .

Zapisane wzorami logicznymi definicje te mają następującą postać:

|                                                           |                   |
|-----------------------------------------------------------|-------------------|
| $\prod_{x \in A} (xRx)$                                   | zwrotność,        |
| $\prod_{x \in A} (x \text{ non } Rx)$                     | przeciwzwrotność, |
| $\prod_{x, y \in A} (xRy \rightarrow yRx)$                | symetria,         |
| $\prod_{x, y \in A} (xRy \rightarrow y \text{ non } Rx)$  | antysymetria,     |
| $\prod_{x, y \in A} [(xRy)(yRx) \rightarrow (x=y)]$       | slaba asymetria,  |
| $\prod_{x, y, z \in A} [(xRy)(yRz) \rightarrow (xRz)]$    | przechodniość,    |
| $\prod_{x, y \in A} [(x \neq y) \rightarrow (xRy + yRx)]$ | spójność.         |

<sup>1)</sup> Systematyczne badania własności relacji (dwuczłonowych) zapoczątkowali Russell i Whitehead w dziele *Principia Mathematica*, tom I, 2-e wydanie, Cambridge 1925, część II.

**PRZYKŁADY.** Relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych jest przeciwwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Relacja podzielności w zbiorze liczb naturalnych jest zwrotna, słabo asymetryczna i przechodnia. Te same własności ma też relacja inkluzji w dowolnej rodzinie zbiorów. Relacja równości jest zwrotna, symetryczna, słabo asymetryczna i przechodnia w dowolnym zbiorze. Relacja różności jest przeciwwrotna i symetryczna w dowolnym zbiorze. Relacja prostopadłości jest też przeciwwrotna i symetryczna w dowolnym zbiorze prostych.

**Definicja 1.**  $R$  jest relacją porządkującą zbiór  $A$  (czyli zbiór  $A$  jest zbiorem uporządkowanym przez relację  $R$ ), jeśli relacja  $R$  jest spójna, zwrotna, słabo asymetryczna i przechodnia w  $A$ <sup>1)</sup>.

Mówimy, że  $x$  poprzedza  $y$ , gdy  $xRy$  i  $x \neq y$ ; piszemy wówczas  $x \prec_R y$  (lub krócej  $x \prec y$ , o ile nie zachodzi potrzeba wymieniania relacji  $R$ ), lub też  $y \succ_R x$  (lub  $y \succ x$ ).

Mówimy, że  $y$  leży między  $x$  i  $z$ , gdy

$$x \prec y \prec z \text{ lub } x \prec y \prec z.$$

Relację porządkującą swoje pole nazywamy krótko relacją porządkującą.

Mówimy często o zbiorach uporządkowanych nie wymieniając relacji  $R$ . Ma to miejsce wtedy, gdy wiadomo o jakiej relacji  $R$  jest mowa. Należy jednak pamiętać, że uporządkowanie nie jest własnością samego tylko zbioru (tak jak np. pojęcie mocy): istotną dla pojęcia uporządkowania jest relacja; jeden i ten sam zbiór może być bowiem uporządkowany przez różne relacje w różny sposób.

**PRZYKŁADY.** 1. Każdy zbiór liczb rzeczywistych jest uporządkowany przez relację  $\leq$ , jak również przez relację  $\geq$ .

2. Zbiór złożony z liczb  $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$  jest uporządkowany przez relację podzielności.

3. Zbiór liczb naturalnych jest uporządkowany przez relację

$$R = \bigcup_{xy} [(2|x) \cdot (2|y) \cdot (x \leq y) + (2|x) \cdot (2|y)' + (2|x)' \cdot (2|y)' \cdot (y \leq x)].$$

Przy uporządkowaniu relacją  $R$  każda liczba parzysta poprzedza każdą nieparzystą, z dwu liczb parzystych mniejsza poprzedza większą, a z dwu liczb nieparzystych większa poprzedza mniejszą.

Schematycznie przedstawiamy to uporządkowanie jak następuje:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots, 9, 7, 5, 3, 1.$$

<sup>1)</sup> Pojęcie zbioru uporządkowanego pochodzi od Cantora. Ob. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46 (1895), str. 481—512.

W schemacie tym każda liczba poprzedzająca dowolną liczbę  $x$  (ze względu na relację  $R$ ) jest wypisana na lewo od  $x$ .

4. Zbiór liczb zespolonych jest uporządkowany przez relację

$$E_{xy} \{ [R(x) < R(y)] + [R(x) = R(y)] \cdot [I(x) \leq I(y)] \}.$$

W tym uporządkowaniu liczba  $x$  poprzedza liczbę  $y$ , jeśli część rzeczywista  $R(x)$  liczby  $x$  jest mniejsza niż część rzeczywista  $R(y)$ , lub też gdy części rzeczywiste liczb  $x$  i  $y$  są równe a część urojona  $I(x)$  liczby  $x$  nie przekracza części urojonej  $I(y)$ .

5. Niech  $a(n)$  będzie liczbą różnych czynników pierwszych liczby naturalnej  $n$ . Zbiór liczb naturalnych jest uporządkowany przez relację

$$E_{xy} \{ [a(x) < a(y)] + [a(x) = a(y)] \cdot (x \leq y) \}.$$

6. Zbiór kół koncentrycznych jest uporządkowany przez relację inkluzji.

**Definicja 2.** Element  $x$  nazywa się elementem pierwszym zbioru uporządkowanego  $A$  (ze względu na relację  $R$ ), jeśli  $x \prec_R y$  dla wszystkich  $y \in A - \{x\}$ . Jeśli natomiast  $y \prec_R x$  dla wszystkich  $y$  różnych od  $x$ , to  $x$  nazywamy elementem ostatnim zbioru  $A$  (ze względu na relację  $R$ ). Nie w każdym zbiorze uporządkowanym istnieje element pierwszy, czy ostatni; jeśli jednak element taki istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie.

**Twierdzenie 1.** W każdym skończonym niepustym podzbiorze  $X$  zbioru uporządkowanego  $A$  istnieje element pierwszy i ostatni.

Dla dowodu stosujemy indukcję względem ilości elementów  $X$ . Jeśli  $X$  ma jeden element, to twierdzenie jest oczywiste. Jeśli twierdzenie jest słuszne dla zbiorów o  $n$  elementach, a zbiór  $X = Y + \{a\}$ , gdzie  $a \notin Y$ , ma  $n+1$  elementów, zaś  $b_1$  jest pierwszym a  $b_2$  ostatnim elementem zbioru  $Y$ , to wcześniejszy z elementów  $a$  i  $b_1$  jest pierwszym, a późniejszy z elementów  $a$  i  $b_2$  jest ostatnim elementem zbioru  $X$ .

**Definicja 3.** Dwa zbiory  $A$  i  $B$  uporządkowane przez relacje  $R$  i  $S$  są podobne, jeśli istnieje funkcja  $f$  odwzorowująca wzajemnie jednoznacznie zbiór  $A$  na  $B$  i spełniająca dla dowolnych  $x, y \in A$  równoważność

$$(0) \quad xRy = f(x)Sf(y).$$

O funkcji  $f$  mówimy, że ustala podobieństwo zbiorów  $A$  i  $B$ .

**UWAGA.** Pojęcie podobieństwa jest szczególnym przypadkiem pojęcia izomorfizmu. Mówimy, mianowicie, że dwie relacje  $R$  i  $S$  są izomorficzne, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie  $f$  pola relacji  $R$  na pole relacji  $S$ , które spełnia równoważność (0).

Widzimy więc, że dla relacji porządkujących pojęcie izomorfizmu pokrywa się z pojęciem podobnego uporządkowania pól relacji.

**Twierdzenie 2.** *Na to, by zbiory  $A$  i  $B$  uporządkowane przez relacje  $R$  i  $S$  były podobne, potrzeba i wystarcza, by istniała taka funkcja  $f$  odwzorowująca zbiór  $A$  wzajemnie jednoznacznie na zbiór  $B$ , że*

$$(1) \quad xRy \rightarrow f(x)Sf(y)$$

dla dowolnych  $x, y \in A$ .

Dowód. Wystarczy oczywiście okazać, że jeśli  $x, y \in A$  i  $f(x)Sf(y)$ , to  $xRy$ . Załóżmy, że tak nie jest. Niech  $x, y \in A$ ,  $f(x)Sf(y)$  i  $x \text{ non } Ry$ . Wobec spójności relacji  $R$  wnosimy stąd, że bądź  $x=y$ , bądź  $yRx$ . W pierwszym przypadku mamy  $xRy$ , gdyż relacja  $R$  jest zwrotna w  $A$ ; przeczy to jednak założeniu, że  $x \text{ non } Ry$ . W drugim przypadku wzór (1) daje  $f(y)Sf(x)$ , a więc  $f(x)=f(y)$ , gdyż relacja  $S$  jest słabo asymetryczna. Ponieważ  $f$  jest funkcją wzajemnie jednoznaczna, wynika stąd, że  $x=y$ , co, jak udowodniliśmy, jest niemożliwe. W obu przypadkach dochodzimy więc do sprzeczności.

Zbiory podobne są oczywiście równoliczne. Dla zbiorów skończonych twierdzenie to daje się odwrócić:

**Twierdzenie 3.** *Dwa zbiory skończone, uporządkowane i równoliczne są podobne.*

Dowód. Załóżmy, że zbiory  $A$  i  $B$  uporządkowane przez relacje  $R$  i  $S$  mają po  $n$  elementów. Dla  $n=1$  funkcja przyporządkowująca jedyny element zbioru  $A$  jednemu elementowi zbioru  $B$  czyni zadość warunkom wymienionym w twierdzeniu 2, a więc ustala izomorfizm relacji  $R$  i  $S$ .

Założmy słuszność twierdzenia dla zbiorów  $n$ -elementowych i przypuśćmy, że  $A$  i  $B$  mają po  $n+1$  elementów. Niech  $a$  będzie pierwszym elementem zbioru  $A$ ,  $b$  — pierwszym elementem zbioru  $B$ . Zgodnie z założeniem istnieje funkcja  $f_1$  ustalająca podobieństwo zbiorów  $A-\{a\}$  i  $B-\{b\}$ . Przyjmując

$$f(x)=f_1(x) \text{ dla } x \in A-\{a\} \text{ oraz } f(a)=b,$$

określamy funkcję, która, jak sprawdzamy z łatwością, ustala podobieństwo zbiorów  $A$  i  $B$ .

Twierdzenie 3 jest w ten sposób udowodnione przez indukcję.

Na przykładach można się przekonać, że jest ono fałszywe dla zbiorów nieskończonych, np. dla zbioru liczb naturalnych (por. str. 140, przykłady 1 i 3).

**Definicja 4.** O zbiorach podobnych mówimy, że mają ten sam *typ porządkowy*.

Można by wysłowić wszystkie niemal twierdzenia teorii mnogości nie posługując się pojęciem typu porządkowego, z wielu jednak względów korzystanie z tego pojęcia jest dogodne. Dlatego wprowadzimy typy porządkowe jako nowe pojęcia pierwotne teorii mnogości na podstawie następującego pewnika analogicznego do pewnika IX, dotyczącego liczb kardynalnych (por. rozdział III, § 1, str. 97).

**X. Aksjomat istnienia typów porządkowych.** *Istnieje przyporządkowanie, na podstawie którego każdej relacji  $R$  porządkującej swe pole odpowiada przedmiot  $\bar{R}$ , zwany typem porządkowym, przy czym zachodzi równoważność:*

$$(\bar{R}=\bar{S}) = (\text{relacje } R \text{ i } S \text{ są izomorficzne}).$$

Symbol  $\bar{R}$  stanowi więc nowy termin pierwotny. Stosują się tutaj bez zmian uwagi uczynione na str. 97 w związku z aksjomatem IX.

Symbolu  $\bar{A}$  używać również będziemy na oznaczenie typu porządkowego zbioru  $A$  uporządkowanego przez ustaloną relację  $R$ .

Z twierdzenia 3 wynika, że dla zbioru uporządkowanego skończonego o  $n$  elementach można przyjąć  $\bar{A}=n$ .

**UWAGI.** 1. Pojęcie podobieństwa odgrywa w teorii zbiorów uporządkowanych tę samą rolę, co pojęcie równoliczności w teorii mocy. Jeśli  $f$  ustala podobieństwo zbiorów  $A$  i  $B$ , to każda własność przysługująca zbiorowi  $A$  i wysłowiona wyłącznie przy pomocy pojęć logicznych i relacji  $R$  przysługuje też zbiorowi  $B$ .

Zbiory podobne są więc między sobą nierozróżnialne przez własności wyrażające się przez relacje porządkujące i pojęcia logiczne.

Założmy np., że  $A$  ma element pierwszy, ale nie ma elementu ostatniego. Wykażemy, że  $B$  ma tę samą własność. Istotnie, jeśli  $x$  jest pierwszym elementem zbioru  $A$ , to  $f(x)$  jest pierwszym elementem zbioru  $B$ , gdyż z  $y \prec_R f(x)$  wynikało by, że  $f^{-1}(y) \prec_R x$ , wbrew założeniu, że  $x$  jest pierwszym elementem  $A$ . Podobnie dowodzi się, że gdyby w  $B$  istniał element ostatni  $y$ , to element  $f^{-1}(y)$  byłby ostatnim elementem zbioru  $A$ .

Ze względu na nierozróżnialność zbiorów podobnych mówi się niekiedy nie o własnościach zbiorów, lecz o własnościach typów, np. o typach bez ostatniego elementu lub o typach z pierwszym elementem itp. Można też mówić o typach przeliczalnych, typach mocy c itp., gdyż zbiory podobne są zawsze równoliczne.

2. Jeśli ograniczamy zakres rozważanych zbiorów uporządkowanych do podzbiorów ustalonego zbioru  $A$ , to aksjomat X staje się zbędny.

Można bowiem w tym przypadku określić typ porządkowy. Podzielmy, mianowicie, wszystkie relacje porządkujące, których pola są podzbiorami zbioru  $A$ , na klasy, zaliczając dwie relacje do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy są one izomorficzne; klasy te nazwać można typami porządkowymi. Jeśli więc zbiór  $X$  zawarty w  $A$  jest uporządkowany przez relację  $R$  i stanowi jej pole, to jego typem porządkowym jest klasa, do której  $R$  należy<sup>1)</sup>.

Przy powyższej definicji typu porządkowego aksjomat  $X$  jest spełniony w obrębie relacji, których pola są podzbiorami zbioru  $A$ .

Rozważmy szczególny wypadek, gdy  $A = \mathcal{J}$  (zbiór liczb naturalnych). Jak widzieliśmy (rozdział II, § 11, str. 76), można „identyfikować” relacje zachodzące w zbiorze  $\mathcal{J}$  z punktami zbioru  $\mathcal{C}$  Cantora, a rodziny relacji z odpowiednimi podzbiorami zbioru  $\mathcal{C}$ . Odpowiednikiem geometrycznym typu porządkowego jest więc pewien podzbiór zbioru  $\mathcal{C}$ .

**ĆWICZENIA.** Interpretując relacje określone w zbiorze liczb naturalnych jako punkty przestrzeni  $2^{\mathcal{J}}$ , udowodnić, że

1. W przestrzeni relacji  $2^{\mathcal{J}}$  każdy z następujących ośmiu zbiorów jest domknięty: zbiór relacji zwrotnych, przeciwzwrotnych, symetrycznych, antysymetrycznych, słabo asymetrycznych, przechodnich, spójnych, porządkujących.

Dla przykładu przeprowadzimy dowód dla relacji symetrycznych. Niech  $A$  oznacza rodzinę tych relacji. Mamy więc na mocy definicji:

$$A = \bigcap_{R, m, n} [mRn \rightarrow nRm] = \bigcap_{R, m, n} [(mRn)' + nRm].$$

Stąd i ze wzorów o dwoistości operacji logicznych i teorio-mnogociowych (str. 45, (4)–(6) i str. 63, (ii)) wynika, że

$$A = \bigcap_{m, n} \bigcap_{R} [(mRn)' + nRm] = \bigcap_{m, n} \{ [E(mRn)]' + E(nRm) \}.$$

Na mocy twierdzenia ( $\beta$ ) podanego w rozdziale II, § 11, str. 76, zbiory  $[E(mRn)]'$  i  $E(nRm)$  są domknięte; suma tych dwóch zbiorów jest więc również zbiorem domkniętym; wreszcie  $A$ , jako iloczyn zbiorów domkniętych jest domknięty (por. rozdział II, § 9, str. 68).

2. Zbiór relacji  $R$  porządkujących  $\mathcal{J}$  w taki sposób, że  $\mathcal{J}$  ma element pierwszy, jest zbiorem  $E_e$  ale nie jest zbiorem domkniętym.

<sup>1)</sup> Por. uwagę 1<sup>o</sup> o określaniu liczb kardynalnych, rozdział III, § 1, str. 97.

**§ 2. Ogólne własności zbiorów uporządkowanych.** Niech  $A$  będzie zbiorem uporządkowanym przez relację  $R$ . Jeśli  $x \in A$  i w zbiorze  $E_y[x \prec y]$  istnieje element pierwszy, to element ten nazywamy *następnikiem* elementu  $x$  (ze względu na relację  $R$ ). Ostatni element zbioru  $E_y[y \prec x]$  (o ile istnieje) nazywamy *poprzednikiem* elementu  $x$ . Każdy element  $x \in A$  ma co najwyżej jeden poprzednik i co najwyżej jeden następnik.

Podzbiór właściwy  $X$  zbioru  $A$  nazywa się *odcinkiem* (resztą) zbioru  $A$ , jeśli z  $x \in X$  wynika, że każdy element wcześniejszy (późniejszy) od  $x$  należy do  $X$ .

Zbiór  $XCA$  nazywa się *przedziałem*, jeśli z warunku  $x, y \in X$  wynika, że każdy element leżący między  $x$  i  $y$  należy do  $X$ .

Przyjmijmy

$$O_R(x) = \bigcap_{y} [(yRx) \cdot (y \neq x)] = \bigcap_{y} [y \prec x].$$

Wskaźnik  $R$  będziemy niekiedy opuszczać.

Widać natychmiast, że  $O_R(x)$  jest odcinkiem. Nie każdy jednak odcinek jest postaci  $O_R(x)$ .

O dwu przedziałach  $X$  i  $Y$  zbioru uporządkowanego  $A$  mówimy, że pierwszy *poprzedza* drugi, jeśli

$$x \in X, y \in Y \rightarrow x \prec y.$$

Każda rodzina przedziałów rozłącznych jest uporządkowana przez stosunek: „ $X$  poprzedza  $Y$  lub  $X=Y$ ”.

O rodzinie zbiorów mówimy, że jest *monotoniczna*, jeśli jest uporządkowana ze względu na relację inkluzji.

**Twierdzenie 1.** *Każdy zbiór uporządkowany jest podobny do jakiejś monotonicznej rodziny zbiorów (uporządkowanej ze względu na inkluzję).*

Rodzina ta jest mianowicie rodzina odcinków  $O(x)$ .

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że  $x_1 R x_2 = O(x_1) \subset O(x_2)$ .

Zbiór  $A$  nazywamy *gęstym*, jeśli dla dowolnych dwu elementów  $x, y \in A$  z  $x \prec y$  wynika, że istnieje element  $z \in A$  taki, że  $x \prec z \prec y$ .

W zbiorze gęstym żaden element nie ma poprzednika ani następnika. Własność ta jest charakterystyczna dla zbiorów gęstych. Istotnie, jeśli żaden element zbioru  $A$  nie ma poprzednika i  $x, y \in A$  oraz  $x \prec y$ , to  $x$  nie może być ostatnim elementem zbioru  $E_z[x \prec z \prec y]$ , gdyż  $x$  byłoby wtedy poprzednikiem  $y$ . Musi zatem istnieć takie  $z$ , że  $x \prec z \prec y$ . Zbiór  $A$  jest zatem gęsty.

Zbiór o jednym tylko elemencie, jak również zbiór pusty, są gęste. Inne zbiory gęste mają nieskończenie wiele elementów.



Zbiór, który nie jest gęsty może zawierać gęsty podzbiór. Np. zbiór złożony ze wszystkich liczb dodatnich i z liczb całkowitych ujemnych, uporządkowany przez relację  $\leq$  nie jest gęsty, gdyż między  $-2$  a  $-1$  nie leży żaden element tego zbioru; zbiór ten jednak zawiera gęsty podzbiór, mianowicie zbiór liczb dodatnich.

Zbiór uporządkowany, który nie zawiera żadnego nieskończonego podzbioru gęstego nazywamy *rozproszonym*. Rozproszonym jest np. zbiór liczb całkowitych, jak również zbiór złożony ze wszystkich ułamków  $1/n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), o ile za relację porządkującą przyjmujemy  $\leq$ . Każdy podzbiór zbioru rozproszonego jest rozproszony.

**\*Twierdzenie 2.** Jeśli  $A$  i  $B$  są dwoma podzbiarami rozproszonymi zbioru uporządkowanego  $M$ , to suma  $A+B$  jest rozproszona.

Dowód. Załóżmy, że istnieje nieskończony gęsty podzbiór  $C$  zbioru  $A+B$ . Ponieważ  $C = CA + CB$ , jeden ze zbiorów  $CA$  lub  $CB$  jest nieskończony; niech to będzie np. zbiór  $CA$ . Ponieważ zbiór ten nie jest gęsty (jako podzbiór zbioru rozproszonego  $A$ ), więc istnieje taka para  $a_1, a_2$  elementów zbioru  $CA$ , że  $a_1 \prec a_2$  i że żaden element zbioru  $CA$  nie leży między  $a_1$  i  $a_2$ . Wynika stąd, że dla każdego  $x \in C$

$$(*) \quad (a_1 \prec x \prec a_2) \rightarrow x \in B.$$

Przyjmijmy  $B_1 = C \cdot E_x[a_1 \prec x \prec a_2]$ . Zbiór ten jest nieskończony, gdyż między elementami  $a_1$  i  $a_2$  leży nieskończenie wiele elementów zbioru  $C$ . Jeśli  $x_1, x_2 \in B_1$  i  $x_1 \prec x_2$ , to istnieje  $w \in C$  leżące między  $x_1$  i  $x_2$ , a więc  $w \in B_1$ . Wynika stąd, że zbiór  $B_1$  jest gęsty. Wobec (\*)  $B_1 \subset B$ , a więc  $B_1$  jest nieskończonym i gęstym podzbiorem  $B$ , co przeczy założeniu, że  $B$  jest zbiorem rozproszonym. Twierdzenie 2 jest w ten sposób udowodnione.

Zbiór  $X$  zawarty w zbiorze uporządkowanym  $A$  nazywamy *gęstym* w  $A$ , jeśli między każdymi dwoma elementami  $x$  i  $y$  zbioru  $A$  leży co najmniej jeden element  $z$  zbioru  $X$ . Np. zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych (o ile przyjmujemy  $\leq$  za relację porządkującą).

Jest jasne, że jeśli zbiór  $X$  jest gęsty w  $A$ , to zbiory  $A$  i  $X$  są gęste.

Mówimy, że zbiory  $X$  i  $Y$  zawarte w zbiorze uporządkowanym  $A$  są *współkońcowe*, jeżeli dla każdego  $w \in X$  istnieje takie  $y \in Y$ , że  $w \prec y$ , oraz dla każdego  $y \in Y$  istnieje takie  $x \in X$ , że  $y \prec x$ . Zastępując symbole  $\prec$  przez  $\succ$ , otrzymujemy określenie zbiorów *współpoczątkowych*.

Oczywiście, dwa zbiory  $X$  i  $Y$  gęste w  $A$  i nie mające ani pierwszego ani ostatniego elementu są zawsze współkońcowe i współpoczątkowe. Jeśli zbiór  $X$  jest współkońcowy z  $Y$ , a  $Y \subset Z$ , to zbiory  $X$  i  $Z$  są współkońcowe. Podobne prawo przechodniości zachodzi też dla zbiorów współpoczątkowych.

Niech  $X$  i  $Y$  będą takimi dwoma podzbiarami zbioru uporządkowanego  $A$ , że

$$X+Y=A, \quad X \cdot Y=0, \quad (x \in X)(y \in Y) \rightarrow (x \prec y).$$

Para zbiorów  $X, Y$  czyniąca zadość tym warunkom wyznacza przekrój zbioru  $A$ . Zbiór  $X$  nazywa się *dolną*, a zbiór  $Y$  *górną* klasą przekroju.

Jeśli żaden ze zbiorów  $X, Y$  nie jest pusty, to przekrój nazywa się *właściwym*, w przeciwnym wypadku — jest to przekrój *niewłaściwy*.

**PRZYKŁAD.** Para zbiorów  $O_R(x), A - O_R(x)$  (por. str. 145) jest przekrojem zbioru  $A$ . Przekrój ten jest niewłaściwy wtedy i tylko wtedy, gdy  $x$  jest pierwszym elementem zbioru  $A$ ; klasa dolna jest wtedy pusta.

Dla każdego przekroju zbioru  $A$  możliwe są następujące przypadki:

(1) klasa dolna ma element ostatni, a górna pierwszy;

(2) klasa dolna ma element ostatni, a górna nie ma elementu pierwszego;

(3) klasa dolna nie ma elementu ostatniego, a górna ma element pierwszy;

(4) klasa dolna nie ma elementu ostatniego, ani górna pierwszego.

W przypadkach (2) i (3) mówimy, że element  $w$  leży na przekroju.

W przypadku (1) mówimy, że przekrój wyznacza *skok*, a w przypadku (4), że przekrój wyznacza *lukę*.

**Twierdzenie 3.** Jeśli  $X_1, Y_1$  i  $X_2, Y_2$  są przekrojami zbioru  $A$ , to bądź  $X_1 \subset X_2$ , bądź  $X_2 \subset X_1$ .

Dowód. Załóżmy, że  $X_1 \text{ non } \subset X_2$  i  $X_2 \text{ non } \subset X_1$ . Istnieją zatem takie  $x_1$  i  $x_2$ , że

$$(5) \quad x_1 \in X_1 - X_2, \quad x_2 \in X_2 - X_1.$$

Z (5) wynika, że  $x_1 \in X_1$  i  $x_2 \in A - X_1 = Y_1$ , a więc  $x_1 \prec x_2$ . Podobnie  $x_2 \in X_2$  i  $x_1 \in A - X_2 = Y_2$ , a więc  $x_2 \prec x_1$ . Warunki te wykluczają się wzajemnie wobec tego, że relacja  $\prec$  jest antysymetryczna. Twierdzenie 3 jest w ten sposób udowodnione.

Jeśli  $x$  jest elementem ostatnim dolnej klasy przekroju, a  $y$  pierwszym elementem górnej, to z uwagi na to, że każdy element zbioru należy bądź do klasy dolnej, bądź do górnej, pomiędzy  $x$  i  $y$  nie leży żaden element. Wynika stąd, że przekroje dające skoki istnieją wtedy i tylko

wtedy, gdy istnieją pary elementów  $x, y$  takie, że  $x$  jest poprzednikiem  $y$  (albo, co wychodzi na jedno,  $y$  jest następnikiem  $x$ ). Nie istnieją takich par charakteryzuje zbiory gęste (ob. str. 145). Mamy zatem

**Twierdzenie 4.** W zbiorze gęstym żaden przekrój nie daje skoku. Własność ta jest charakterystyczna dla zbiorów gęstych.

Przekroje zbiorów gęstych mogą wyznaczać luki. Np. w zbiorze liczb wymiernych uporządkowanym przez relację  $\leq$  przekrój, którego klasą dolną jest zbiór  $E_x[x^2 < 2]$ , a górną — zbiór  $E_x[x^2 > 2]$ , wyznacza lukę. Istotnie, jeśli kwadrat liczby wymiernej  $x$  jest mniejszy niż 2, to istnieją liczby wymierne  $y > x$  takie, że  $y^2 < 2$ . W klasie dolnej nie ma więc elementu ostatniego i podobnie w klasie górnej nie ma elementu pierwszego.

Zbiór gęsty, w którym żaden przekrój właściwy nie daje luki, nazywamy ciągłym.

**Twierdzenie 5.** Każdy zbiór uporządkowany gęsty jest podobny do podzbioru jakiegoś zbioru ciągłego.

Dowód. Rozpatrzmy najpierw szczególny przypadek rodziny  $\mathcal{A}$ , której elementami są zbiory i która jest uporządkowana w sposób gęsty przez relację inkluzji.

Każdemu przekrojowi właściwemu  $X, Y$  rodziny  $\mathcal{A}$ , wyznaczającemu lukę, przyporządkujemy zbiór  $S(X)$ , tj. sumę zbiorów należących do  $X$ . Niech  $\mathcal{A}_1$  będzie rodziną wszystkich tych sum i niech  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} + \mathcal{A}_1$ .

Relacja inkluzji jest oczywiście zwrotna, słabo asymetryczna i przechodnia w  $\mathcal{A}_0$ . Wykażemy, że jest ona spójna w  $\mathcal{A}_0$ . Załóżmy w tym celu, że  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_0$ . Jeśli  $X_1 \in \mathcal{A}$  i  $X_2 \in \mathcal{A}$ , to  $X_1 \subset X_2$  lub  $X_2 \subset X_1$ , gdyż relacja inkluzji jest spójna w  $\mathcal{A}$ .

Jeśli  $X_1 \in \mathcal{A}_1$  i  $X_2 \in \mathcal{A}_1$ , to  $X_1 = S(X_1)$  i  $X_2 = S(X_2)$ , gdzie  $X_1$  i  $X_2$  są klasami dolnymi dwu przekrojów zbioru  $\mathcal{A}$ . Zgodnie z twierdzeniem 3 jest bądź  $X_1 \subset X_2$ , bądź  $X_2 \subset X_1$ , skąd wynika, że albo  $X_1 \subset X_2$ , albo  $X_2 \subset X_1$ . Jeśli wreszcie jeden ze zbiorów  $X_1, X_2$ , np. zbiór  $X_1$ , należy do  $\mathcal{A}$ , a drugi do  $\mathcal{A}_1$ , to  $X_2 = S(X)$ , gdzie  $X$  jest klasą dolną pewnego przekroju zbioru  $\mathcal{A}$ . Wnosimy stąd, że albo  $X_1 \in \mathcal{X}$ , albo  $X_1 \in \mathcal{A} - \mathcal{X}$ ; w pierwszym przypadku jest  $X_1 \subset X_2$ , a w drugim  $X_2 \subset X_1$ , gdyż każdy element klasy górnej  $\mathcal{A} - \mathcal{X}$  jest późniejszy od każdego elementu klasy dolnej  $\mathcal{X}$ .

Spójność relacji inkluzji w zbiorze  $\mathcal{A}_0$  została w ten sposób udowodniona. Wnosimy stąd, że relacja inkluzji porządkuje zbiór  $\mathcal{A}_0$ .

Wykażemy, że zbiór  $\mathcal{A}$  jest gęsty w  $\mathcal{A}_0$ . Załóżmy zatem, że  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_0$ ,  $X_1 \subset X_2$  i  $X_1 \neq X_2$ . Jeśli  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ , to między  $X_1$  i  $X_2$  leży element zbioru  $\mathcal{A}$ ,

gdyż sam zbiór  $\mathcal{A}$  jest gęsty. Jeśli  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_1$  i  $X_1, X_2$  są klasami dolnymi przekrojów takich, że  $X_1 = S(X_1)$  i  $X_2 = S(X_2)$ , to mamy  $X_1 \subset X_2$  i  $X_1 \neq X_2$ , gdyż w przeciwnym razie byłoby  $X_1 \supset X_2$ . Istnieje zatem zbiór  $Y \in \mathcal{X}_2 - X_1$ . Ponieważ klasa  $\mathcal{X}_2$  nie ma elementu ostatniego, więc istnieje taki zbiór  $Z$ , że  $Y \neq Z$ ,  $Y \subset Z$  i  $Z \in \mathcal{X}_2$ . Wynika stąd, że  $X_1 \subset Y \subset Z \subset X_2$ , a ponieważ między  $Y$  i  $Z$  leży co najmniej jeden zbiór należący do rodziny  $\mathcal{A}$ , więc zbiór ten leży też między  $X_1$  i  $X_2$ . Jeśli wreszcie jeden ze zbiorów  $X_1, X_2$  należy do  $\mathcal{A}$ , a drugi do  $\mathcal{A}_1$ , np.  $X_1 \in \mathcal{A}$  i  $X_2 \in \mathcal{A}_1$ , to wystarczy powtórzyć poprzednie rozumowanie, zastępując  $Y$  przez  $X_1$ .

Wykazaliśmy więc, że zbiór  $\mathcal{A}$  jest gęsty w  $\mathcal{A}_0$ . Wynika stąd, że zbiór  $\mathcal{A}_0$  jest gęsty.

Udowodnimy wreszcie, że zbiór  $\mathcal{A}_0$  jest ciągły. W tym celu rozpatrzmy dowolny przekrój właściwy  $X_0, Y_0$  zbioru  $\mathcal{A}_0$ . Oczywiście

$$(\mathcal{A} \cdot X_0) + (\mathcal{A} \cdot Y_0) = \mathcal{A}, \quad (\mathcal{A} \cdot X_0) \cdot (\mathcal{A} \cdot Y_0) = 0, \quad \mathcal{A} \cdot X_0 \neq 0 \neq \mathcal{A} \cdot Y_0,$$

$$(X \in \mathcal{A} \cdot X_0)(Y \in \mathcal{A} \cdot Y_0) \rightarrow (X \subset Y),$$

co dowodzi, że zbiory  $\mathcal{A} \cdot X_0$  i  $\mathcal{A} \cdot Y_0$  wyznaczają przekrój właściwy zbioru  $\mathcal{A}$ .

Z gęstości zbioru  $\mathcal{A}$  w  $\mathcal{A}_0$  wynika, że jeśli w klasie  $\mathcal{A} \cdot X_0$  istnieje element ostatni, to jest on też ostatnim elementem klasy  $X_0$ , jeśli zaś w klasie  $\mathcal{A} \cdot Y_0$  istnieje element pierwszy, to jest on też pierwszym elementem klasy  $Y_0$ .

Założmy teraz, że przekrój  $\mathcal{A} \cdot X_0, \mathcal{A} \cdot Y_0$  wyznacza lukę w  $\mathcal{A}$ . Niech  $X_0 = S(\mathcal{A} \cdot X_0)$ . Zgodnie z określeniem klasy  $\mathcal{A}_0$  mamy  $X_0 \in \mathcal{A}_0$ . Jeśli  $X \in X_0$  i  $Y \in Y_0$ , to istnieją takie zbiory  $X' \in \mathcal{A} \cdot X_0$  i  $Y' \in \mathcal{A} \cdot Y_0$ , że  $X \subset X' \subset Y' \subset Y$ , skąd wynika, że  $X \subset X' \subset X_0$  i  $X_0 \subset Y' \subset Y$ . Zbiór  $X_0$  jest więc albo pierwszym elementem klasy  $Y_0$  albo ostatnim elementem klasy  $X_0$ . A zatem przekrój  $X_0, Y_0$  nie wyznacza nigdy luki, tzn. zbiór  $\mathcal{A}_0$  jest ciągły.

Twierdzenie 5 jest więc udowodnione dla przypadku zbiorów uporządkowanych przez relację inkluzji.

Aby przejść stąd do przypadku ogólnego, wystarczy powołać się na twierdzenie 1.

UWAGA. Metoda użyta w dowodzie twierdzenia 5 nosi nazwę „metody zapelniania luk”. Od zbioru  $\mathcal{A}$  przechodzimy do szerszego zbioru  $\mathcal{A}_0$ , przyporządkowując każdej luce zbioru  $\mathcal{A}$  nowy element należący do  $\mathcal{A}_0$ ; ten nowy element „wypełnia” lukę istniejącą w  $\mathcal{A}$ , wskutek czego dochodzimy do zbioru, w którym już luk nie ma.

W przypadku zbioru liczb wymiernych metoda zapelniania luk prowadzi do zbioru uporządkowanego podobnego do zbioru liczb rzeczywistych. W teorii liczb niewymiernych Dedekinda utożsamia się po prostu luki w zbiorze liczb wymiernych, albo elementy zapelniające te luki, z liczbami niewymiernymi<sup>1)</sup>.

**ĆWICZENIA.** 1. Podać relację porządkującą zbiór liczb naturalnych w taki sposób, aby: a) każdy element miał poprzednik i następnik; b) zbiór ten był gęsty.

2. Uporządkować zbiór liczb wymiernych tak, by był on rozproszony, tj. nie zawierał podzbioru gęstego nieskończonego.

3. Podać przykład zbioru nieskończonego, który ma element pierwszy, nie ma ostatniego i w którym każdy element ma następnik i każdy — poza pierwszym — ma poprzednik; przy tym zbiór ten nie jest podobny do zbioru liczb naturalnych.

4. Wykazać, że jeśli zbiór  $X$  jest gęsty, a zbiory  $X_1$  i  $X_2$  są ciągle i zawierają części w nich gęste podobne do  $X$ , to zbiory  $X_1$  i  $X_2$  są podobne.

5. Niech  $\mathcal{M}$  będzie nasyconą rodziną monotoniczną (ob. str. 145) podzbiorów ustalonego zbioru  $Z$  (tzn. że rodzina  $\mathcal{M}$  nie jest zawarta w żadnej innej monotonicznej rodzinie podzbiorów zbioru  $Z$ , por. rozdział III, § 9, str. 133). Udowodnić, że relacja  $R$  określona przez równoważność

$$xRy = \{(x=y) + \sum_{E \in \mathcal{M}} [(x \in E)' \cdot (y \in E)]\}$$

jest relacją porządkującą zbiór  $Z$ .

Ponadto: rodzina reszt (ze względu na tę relację) pokrywa się z rodziną  $\mathcal{M}$ <sup>2)</sup>.

6. Niech  $\mathcal{M}$  będzie monotoniczną rodziną podzbiorów zbioru  $Z$ . Udowodnić, że rodzina wszystkich zbiorów  $S(X)$  oraz  $P(X)$ , gdzie  $X \in \mathcal{M}$ , jest monotoniczna.

7. Udowodnić, że zbiór  $\mathfrak{G}$  relacji  $R \in 2^{2^{\mathcal{A}}}$ , ustalających uporządkowanie gęste swych pól jest zbiorem  $G_3$  (w przestrzeni  $2^{2^{\mathcal{A}}}$ ).

Wskazówka. Relacje te są określone przez warunek:

$$(R \in \mathfrak{A}) \cdot \prod_{m,n} [(mRn) \cdot (m \neq n) \rightarrow \sum_k (mRk) \cdot (kRn) \cdot (m \neq k) \cdot (n \neq k)],$$

gdzie  $\mathfrak{A}$  jest zbiorem relacji porządkujących.

<sup>1)</sup> Metodę swą wyłożył Dedekind w książce *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872.

<sup>2)</sup> Ob. K. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, *Fundamenta Mathematicae* 2 (1921), str. 161—171.

Twierdzenie to wskazuje na możliwość zastąpienia teorii zbiorów uporządkowanych przez teorię monotonicznych rodzin zbiorów.

A zatem

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot E_R \left\{ \prod_{m \neq n} \sum_{k \neq m, n} [(mRn)' + (mRk)(kRn)] \right\}.$$

Aby oszacować klasę borelowską zbioru  $\mathfrak{G}$  (w przestrzeni  $2^{2^{\mathcal{A}}}$ ), przyjmijmy

$$\Phi'_{k,m,n}(R) = (mRn)' + (mRk)(kRn).$$

Mamy więc na mocy wzorów o двоistości (str. 45, (4) i (5)):

$$E_R \Phi_{k,m,n}(R) = E_R (mRn)' + E_R (mRk) \cdot E_R (kRn).$$

Każdy z trzech zbiorów występujących po prawej stronie tego wzoru jest równocześnie domknięty i otwarty (w przestrzeni  $2^{\mathcal{A}}$ ; ob. Rozdział II, § 11, str. 76). Zbiór  $E_R \Phi_{k,m,n}(R)$  jest więc otwarty. Biorąc pod uwagę, że zbiór  $\mathfrak{A}$  jest domknięty (ob. § 1, ćwiczenie 1, str. 144), wnosimy stąd, że zbiór (ob. str. 70, (1)):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot \prod_{m \neq n} \sum_{k \neq m, n} E_R \Phi_{k,m,n}(R)$$

jest zbiorem  $G_3$ .

**§ 3. Typy  $\omega$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ .** Typy porządkowe zbiorów liczb: naturalnych, wymiernych i rzeczywistych (uporządkowanych przez relację  $\leq$ ) oznaczamy symbolami

$$\omega = \overline{J}, \quad \eta = \overline{R}, \quad \lambda = \overline{E}.$$

**Twierdzenie 1.** Zbiór uporządkowany  $A$  ma typ  $\omega$  wtedy i tylko wtedy, gdy

1°  $A$  ma pierwszy element  $a_0$ ,

2° każdy element  $x$  zbioru  $A$  ma następnik  $x^*$ ,

3° jeśli  $a_0 \in XCA$  i zbiór  $X$  zawiera następnik każdego swego elementu, to  $X=A$ .

Dowód. Warunki 1°, 2°, 3° są niezmiennikami przekształceń podobnych. Ponieważ są one spełnione przez zbiór liczb naturalnych uporządkowany przez relację  $\leq$ , więc są one konieczne na to, by zbiór  $A$  miał typ  $\omega$ .

Załóżmy teraz, że zbiór  $A$  uporządkowany przez relację  $R$  spełnia warunki 1°, 2° i 3°. Określamy funkcję  $f$  ustalającą podobieństwo  $A$  ze zbiorem liczb naturalnych, jak następuje:

$$(1) \quad f(1) = a_0, \quad f(n+1) = [f(n)]^*.$$

Wzory te określają indukcyjnie funkcję  $f$ . Z określenia tego wynika, że zbiór wartości funkcji  $f$  zawiera  $a_0$ , jak również, że zawiera on następnik każdego swego elementu. Z warunku 3° wynika zatem, że zbiór wartości funkcji  $f$  pokrywa się z  $A$ .

Udowodnimy, że

$$(2) \quad m < n \rightarrow f(m) \prec f(n).$$

Istotnie, z (1) wynika, że wzór (2) jest słuszny dla  $n = m + 1$ . Jeśli założymy wzór (2) dla pewnej liczby  $n$ , to spełniony jest on też przez  $n + 1$ . Jeśli bowiem  $f(m) \prec f(n)$ , to tym bardziej  $f(m) \prec [f(n)]^*$ , gdyż  $f(n) \prec [f(n)]^*$ .

Z (2) wynika natomiast, że

$$m \neq n \rightarrow f(m) \neq f(n), \quad m \leq n \rightarrow f(m) R f(n).$$

Pierwszy z tych wzorów dowodzi, że funkcja  $f$  jest wzajemnie jednoznaczna, a łącznie z drugim (na mocy twierdzenia 2 z § 1, str. 142), że funkcja  $f$  ustala podobieństwo zbioru  $A$  i zbioru liczb naturalnych.

**Twierdzenie 2.** *Każdy zbiór typu  $\eta$  jest przeliczalny, gęsty i nie ma ani pierwszego, ani ostatniego elementu.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że zbiór liczb wymiernych, który ma typ  $\eta$ , spełnia te warunki i że warunki te są niezmiennikami przekształceń podobnych (por. § 1, str. 143).

Dowód twierdzenia odwrotnego oprzemy na następującym lemacie.

**Lemat 3.** *Jeśli zbiory  $A = A_1 + A_2 + \dots$  i  $B = B_1 + B_2 + \dots$  są uporządkowane,  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $B_n \subset B_{n+1}$ ,  $f_n$  jest funkcją ustalającą podobieństwo zbiorów  $A_n$  i  $B_n$ , przy czym  $f_{n+1}$  jest przedłużeniem  $f_n$  (por. rozdział II, § 6, str. 58), to zbiory  $A$  i  $B$  są podobne.*

Dowód. Niech  $n(x)$  będzie najmniejszą liczbą naturalną  $n$  taką, że  $x \in A_n$ , i przyjmijmy dla  $x \in A$

$$f(x) = f_{n(x)}(x).$$

Wykażemy, że funkcja  $f$  ustala podobieństwo zbiorów  $A$  i  $B$ .

Istotnie, założmy, że  $x, y \in A$  i że  $n$  jest większe od  $n(x)$  i  $n(y)$ . Ponieważ funkcja  $f_n$  jest przedłużeniem  $f_{n(x)}$  i  $f_{n(y)}$ , więc

$$(3) \quad f(x) = f_{n(x)}(x) = f_n(x), \quad f(y) = f_{n(y)}(y) = f_n(y).$$

Z założenia, że funkcja  $f_n$  ustala podobieństwo zbiorów  $A_n$  i  $B_n$ , wynika, że  $x \neq y \rightarrow f_n(x) \neq f_n(y)$  i że jeśli  $x$  poprzedza  $y$  w  $A_n$ , to  $f_n(x)$  poprzedza  $f_n(y)$  w  $B_n$ . Z (3) wynika zatem, że jeśli  $x \neq y$ , to  $f(x) \neq f(y)$  i że jeśli  $x$  poprzedza  $y$  w  $A$ , to  $f(x)$  poprzedza  $f(y)$  w  $B$ .

Funkcja  $f$  ustala zatem podobieństwo zbiorów  $A$  i  $f(A)$ .

Pozostaje wykazać, że  $f(A) = B$ . Zauważmy w tym celu, że dla  $\bar{x} \in A_{n+1} - A_n$  jest  $n(x) = n + 1$ , a więc  $f(x) = f_{n+1}(x)$ . Ze wzajemnej jednoznaczności funkcji  $f_{n+1}$  wnosiśmy, że

$$f(A_{n+1} - A_n) = f_{n+1}(A_{n+1} - A_n) = f_{n+1}(A_{n+1}) - f_{n+1}(A_n).$$

Ponieważ zaś  $f_{n+1}$  jest przedłużeniem  $f_n$ , więc  $f_{n+1}(A_n) = f_n(A_n)$  i otrzymujemy

$$f(A_{n+1} - A_n) = f_{n+1}(A_{n+1}) - f_n(A_n) = B_{n+1} - B_n.$$

Wzór ten pozostaje słuszny dla  $n = 0$ , o ile przyjmiemy, że  $B_0 = A_0 = 0$ . Aby wykazać, że  $f(A) = B$  wystarczy zauważyć, że

$$f(A) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A_{n+1} - A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_{n+1} - B_n) = B.$$

**Twierdzenie 4.** *Każdy zbiór  $A$  przeliczalny, gęsty, bez elementu pierwszego i ostatniego ma typ  $\eta$ .*

Dowód. Niech

$$(4) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad \text{gdzie } a_j \neq a_k \text{ dla } j \neq k,$$

będzie ciągiem nieskończonym utworzonym ze wszystkich elementów zbioru  $A$ , zaś

$$(5) \quad r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, \quad \text{gdzie } r_j \neq r_k \text{ dla } j \neq k,$$

ciągami utworzonymi ze wszystkich liczb wymiernych.

Przyjmijmy  $A_1 = \{a_1\}$ ,  $B_1 = \{r_1\}$  i niech  $f_1$  będzie funkcją odwzorowującą  $A_1$  na  $B_1$ .

Zbiory  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  i funkcję  $f_{n+1}$  określimy (indukcyjnie) zakładając, że  $A_n$  i  $B_n$  są to zbiory skończone, składające się z elementów ciągów (4) i (5) oraz, że funkcja  $f_n$  ustala podobieństwo zbiorów  $A_n$  i  $B_n$  (co jest prawdą dla  $n = 1$ ).

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

1°  $n$  jest parzyste. Niech  $k_n$  będzie najmniejszym wskaźnikiem takim, że  $a_{k_n} \notin A_n$ . Niech

$$A_n^- = E_x^-(x \in A_n) (x \prec a_{k_n}), \quad A_n^+ = E_x^+(x \in A_n) (a_{k_n} \prec x).$$

Oczywiście, każdy element zbioru  $A_n^-$  poprzedza każdy element zbioru  $A_n^+$ , skąd wynika, że każdy element zbioru  $f_n(A_n^-)$  poprzedza każdy element zbioru  $f_n(A_n^+)$ . Ponieważ zaś oba te zbiory są skończone, a zbiór liczb wymiernych jest gęsty i nie ma pierwszego ani ostatniego elementu, więc istnieją wyrazy ciągu (5), które są mniejsze od każdej liczby ze zbioru  $f_n(A_n^+)$  i większe od każdej liczby ze zbioru  $f_n(A_n^-)$ . Niech  $r_{n_1}$  będzie pierwszym wyrazem ciągu (5) o tych własnościach. W szczególności, jeśli zbiór  $A_n^-$  jest pusty, to jako  $r_{n_1}$  przyjmujemy pierwszy wyraz ciągu (5), który jest mniejszy od wszystkich elementów zbioru  $f_n(A_n^+)$ , a jeśli  $A_n^+ = 0$ , to jako  $r_{n_1}$  przyjmujemy pierwszy wyraz ciągu (5), który jest większy od wszystkich elementów zbioru  $f_n(A_n^-)$ .

Zbiory  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  i funkcję  $f_{n+1}$  określamy jak następuje:

$$(6) \quad A_{n+1} = A_n + \{a_{k_n}\}, \quad B_{n+1} = B_n + \{r_{n_1}\},$$



$$(7) \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) \quad \text{dla } x \in A_n, \quad f_{n+1}(a_{k_n}) = r_{l_n}.$$

Zbiory  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  i funkcja  $f_{n+1}$  spełniają oczywiście następujące warunki:

$$(8) \quad \text{zbiory } A_{n+1} \text{ i } B_{n+1} \text{ są skończone,}$$

$$(9) \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad B_n \subset B_{n+1},$$

$$(10) \quad f_{n+1} \text{ jest przedłużeniem } f_n,$$

$$(11) \quad \text{funkcja } f_{n+1} \text{ ustala podobieństwo zbiorów } A_{n+1} \text{ i } B_{n+1}.$$

Z określenia  $a_{k_n}$  jako pierwszego wyrazu ciągu (4), który nie należy do  $A_n$ , wynika nadto, że

$$(12) \quad \text{jeśli } a_p \text{ non } \in A_n, \text{ to } k_n \leq p \quad (\text{dla } n \text{ parzystych}).$$

$2^0$   $n$  jest nieparzyste. W tym przypadku definiujemy  $l_n$  jako najmniejszy wskaźnik taki, że  $r_{l_n} \text{ non } \in B_n$ , i przyjmujemy:

$$B_n^- = \bigcup_y (y \in B_n)(y < r_{l_n}), \quad B_n^+ = \bigcup_y (y \in B_n)(r_{l_n} < y).$$

Jak w przypadku  $1^0$ , dowodzimy, że istnieją elementy zbioru  $A$ , które poprzedzają każdy element zbioru  $f_n^{-1}(B_n^+)$  i następują po każdym elemencie zbioru  $f_n^{-1}(B_n^-)$ . Definiujemy następnie  $a_{k_{n+1}}$  jako pierwszy wyraz ciągu (4), spełniający ten warunek, po czym określamy zbiory  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  i funkcję  $f_{n+1}$  wzorami (6) i (7). Jest jasne, że spełnione są wówczas warunki (8)–(11). Z definicji  $l_n$  wynika nadto, że

$$(13) \quad \text{jeśli } r_q \text{ non } \in B_n, \text{ to } l_n \leq q \quad (\text{dla } n \text{ nieparzystych}).$$

Zbiory  $A_n$ ,  $B_n$  i funkcje  $f_n$  są więc określone indukcyjnie dla każdego  $n$  i czynią zadość warunkom (8)–(11).

Mamy wreszcie:

$$(14) \quad k_2 < k_4 < k_6 < \dots < k_{2n} < \dots$$

$$(15) \quad l_1 < l_3 < l_5 < \dots < l_{2n-1} < \dots$$

Istotnie,  $a_{k_{2n+2}} \text{ non } \in A_{2n+2}$ , skąd wobec (9)  $a_{k_{2n+2}} \text{ non } \in A_{2n}$ , a więc zgodnie z (12)  $k_{2n} \leq k_{2n+2}$ ; przy tym  $k_{2n} \neq k_{2n+2}$ , gdyż  $a_{k_{2n}} \in A_{2n+1} \subset A_{2n+2}$ .

Dowód wzoru (15) jest podobny.

Ze wzorów (9)–(11) wynika na mocy lematu 3, że zbiory  $\Sigma A_n$  i  $\Sigma B_n$  są podobne. Pozostaje zatem do wykazania, że zbiór  $\Sigma A_n$  zawiera każdy wyraz ciągu (4), a zbiór  $\Sigma B_n$  — każdy wyraz ciągu (5). Istotnie, gdyby  $a_p \text{ non } \in \Sigma A_n$ , to dla każdego parzystego  $n$  byłoby  $a_p \text{ non } \in A_n$ , skąd wobec (12)  $k_n \leq p$ . Przeczy to jednak warunkowi (14). Podobnie wykazuje się, że  $\Sigma B_n$  zawiera wszystkie wyrazy ciągu (5).

Twierdzenie 4 jest w ten sposób udowodnione.

Następującą własność zbioru liczb wymiernych można by nazwać „uniwersalnością” tego zbioru:

**Twierdzenie 5.** *Każdy zbiór uporządkowany przeliczalny  $A$  jest podobny do jakiegoś podzbioru zbioru liczb wymiernych.*

Dowód. Zachowajmy oznaczenia wprowadzone w dowodzie twierdzenia 4 (zakładając, że zbiór  $A$  jest nieskończony) i określmy zbiory  $A_n$  i  $B_n$  tak, jak w przypadku  $1^0$ , nie ograniczając się jednak tylko do parzystych wartości  $n$ , lecz nadając  $n$  wszystkie wartości naturalne. Spełnione są wówczas wzory (8)–(12) i (14). Z (8)–(11) wynika, że zbiór  $\Sigma A_n$  jest podobny do zbioru  $\Sigma B_n$ , tj. do pewnego zbioru złożonego z liczb wymiernych. Z (12) i (14) wynika, że  $\Sigma A_n = A$ . Twierdzenie 5 jest w ten sposób udowodnione.

**Twierdzenie 6.** *Zbiór uporządkowany  $A$  ma typ  $\lambda$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły, nie ma elementu pierwszego ani ostatniego i zawiera część przeliczalną gęstą w  $A$ .*

Dowód. Zbiór  $\mathcal{E}$  liczb rzeczywistych posiada własności wymienione w twierdzeniu. Jako zbiór przeliczalny gęsty w  $\mathcal{E}$  można przy tym przyjąć zbiór  $\mathcal{R}$  liczb wymiernych.

Ponieważ własności wymienione w twierdzeniu 6 są niezmiennikami przekształceń podobnych, więc każdy zbiór  $A$  podobny do  $\mathcal{E}$  posiada te własności. Są one zatem konieczne na to, by zbiór  $A$  miał typ  $\lambda$ .

Aby udowodnić, że są one dostateczne, załóżmy, że zbiór  $A$  jest ciągły, nie ma elementu pierwszego ani ostatniego i ma część  $C$  przeliczalną gęstą w  $A$ . Zbiór  $C$  ma zgodnie z twierdzeniem 4 typ  $\eta$ , istnieje więc funkcja  $f$  ustalająca podobieństwo zbiorów  $C$  i  $\mathcal{R}$ .

Należy określić funkcję  $g$  ustalającą podobieństwo zbiorów  $A$  i  $\mathcal{E}$ . W tym celu wykażemy najpierw, że

$$(16) \quad \text{zbiory } f(C \cdot O(x)) \text{ i } \mathcal{R} - f(C \cdot O(x)) \text{ wyznaczają przekrój właściwy zbioru } \mathcal{R}, \text{ w którym klasa dolna nie ma elementu ostatniego.}$$

Istotnie, zbiory te są rozłączne i suma ich daje  $\mathcal{R}$ . Zbiór  $C \cdot O(x)$  (tj. zbiór tych elementów zbioru  $C$ , które poprzedzają  $x$ ) jest niepusty, gdyż zbiór  $C$  jako gęsty w  $A$  zawiera elementy poprzedzające  $x$ . Tak samo przekonujemy się, że  $C - O(x) \neq \emptyset$ . A zatem

$$f(C \cdot O(x)) \neq \emptyset \neq \mathcal{R} - f(C \cdot O(x)).$$

Załóżmy z kolei, że  $t_1 \in f(C \cdot O(x))$  i  $t_2 \in \mathcal{R} - f(C \cdot O(x))$ . Istnieją więc takie elementy  $s_1, s_2 \in C$ , że  $t_1 = f(s_1)$ ,  $t_2 = f(s_2)$ ,  $s_1 \in O(x)$  i  $s_2 \text{ non } \in O(x)$ . Wnosimy stąd, że  $s_1 \prec x$  i że  $x \prec s_2$  lub  $x = s_2$ , co dowodzi, że  $s_1 \prec s_2$ , a więc  $f(s_1) < f(s_2)$ , tj.  $t_1 < t_2$ . Każdy element zbioru  $f(C \cdot O(x))$  poprzedza zatem każdy element zbioru  $\mathcal{R} - f(C \cdot O(x))$ .

Z gęstości zbioru  $C$  i z uwagi, że odcinek  $O(x)$  nie ma elementu, ostatniego wyniku, że zbiór  $C \cdot O(x)$ , a zatem też zbiór  $f(C \cdot O(x))$ , nie ma elementu ostatniego. Zdanie (16) jest więc udowodnione.

Udowodnimy z kolei, że

(17) jeśli  $X, Y$  jest przekrojem właściwym zbioru  $\mathcal{R}$  i  $X$  nie ma elementu ostatniego, to istnieje taki element  $x \in A$ , że

$$X = f(C \cdot O(x)) \quad \text{ i } \quad Y = \mathcal{R} - f(C \cdot O(x)).$$

Istotnie, przyjmijmy:

$$(18) \quad K_1 = \bigcup_{t \in A} \sum_{y \in X} [t \prec f^{-1}(y)], \quad K_2 = A - K_1.$$

Oczywiście  $K_1 + K_2 = A$  i  $K_1 \cdot K_2 = 0$ . Ponieważ  $X \neq 0$ , więc  $K_1 \neq 0$  (gdyż  $A$  nie posiada pierwszego elementu). Jeśli  $z \in Y$  i  $y \in X$ , to  $z \prec y$ , a więc  $f^{-1}(z) \text{ non } \prec f^{-1}(y)$ , co dowodzi, że  $f^{-1}(z) \in K_2$ . A zatem  $K_2 \neq 0$ .

Jeśli  $t_1 \in K_1$ , to istnieje  $y_1 \in X$  takie, że  $t_1 \prec f^{-1}(y_1)$ . Jeśli zaś  $t_2 \in K_2$ , to  $t_2 \text{ non } \prec f^{-1}(y_1)$ , a więc  $f^{-1}(y_1) \prec t_2$  lub  $f^{-1}(y_1) = t_2$ . Wynika stąd, że  $t_1 \prec t_2$ . Każdy więc element zbioru  $K_1$  poprzedza każdy element zbioru  $K_2$ . A zatem zbiory  $K_1$  i  $K_2$  tworzą przekrój właściwy zbioru  $A$ . Przy tym zbiór  $K_1$  nie ma ostatniego elementu, gdyż zbiór  $X$  z założenia nie ma takiego elementu.

Z ciągłości zbioru  $A$  wynika, że istnieje element  $x$  leżący na przekroju  $K_1, K_2$ . Ponieważ  $K_1$  nie ma elementu ostatniego, więc

$$(19) \quad K_1 = O(x), \quad K_2 = A - O(x).$$

Z (18) i (19) wynikają równoważności:

$$\begin{aligned} t \in f(C \cdot O(x)) &= \sum_s [(s \in C \cdot O(x)) \cdot (t = f(s))] \\ &= \sum_{s \in C} [(s \in O(x)) \cdot (t = f(s))] \\ &= \sum_{s \in O} [(s \in K_1) \cdot (t = f(s))] \\ &= \sum_{s \in O} \sum_{y \in X} [(s \prec f^{-1}(y)) \cdot (t = f(s))] \\ &= (t \in \mathcal{R}) \cdot \sum_{y \in X} [f^{-1}(t) \prec f^{-1}(y)] \\ &= (t \in \mathcal{R}) \cdot \sum_{y \in X} (t < y) \\ &= t \in X, \end{aligned}$$

tj.  $X = f(C \cdot O(x))$ . Ponieważ  $Y = \mathcal{R} - X$ , więc wynika stąd wzór (17).

Jak wiadomo z teorii liczb rzeczywistych, dla każdego właściwego przekroju zbioru liczb wymiernych istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista niemniejsza od każdej liczby z dolnej klasy przekroju a nie większa od każdej liczby z górnej klasy przekroju.

W szczególności, dla  $x \in A$  istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista — którą oznaczymy przez  $g(x)$  — taka, że

$$[t \in f(C \cdot O(x))] \rightarrow [t < g(x)], \quad [t \in \mathcal{R} - f(C \cdot O(x))] \rightarrow [g(x) \leq t].$$

Funkcja  $g$  odwzorowuje zbiór  $A$  na cały zbiór  $\mathcal{E}$ . Istotnie, jeśli  $y \in \mathcal{E}$ , to zbiory  $\mathcal{R} \cdot E_t[t < y]$  i  $\mathcal{R} \cdot E_t[y \leq t]$  wyznaczają przekrój zbioru  $\mathcal{R}$ , którego klasa dolna nie ma elementu ostatniego; w myśl więc (17) istnieje takie  $x \in A$ , że

$$f(C \cdot O(x)) = \bigcup_{t \in \mathcal{R}} [t < y] \quad \text{ i } \quad \mathcal{R} - f(C \cdot O(x)) = \bigcup_{t \in \mathcal{R}} [y \leq t],$$

skąd wynika, że  $g(x) = y$ .

Pozostaje do udowodnienia (por. twierdzenie 2, str. 142), że funkcja  $g$  czyni zadość warunkowi

$$(20) \quad x_1 \prec x_2 \rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Istotnie, jeśli  $x_1 \prec x_2$ , to istnieją  $c_1, c_2 \in C$  takie, że  $x_1 \prec c_1 \prec c_2 \prec x_2$ .

Wynika stąd, że  $f(c_2) \in f(C \cdot O(x_2))$ , a zatem  $f(c_2) < g(x_2)$ . Ponieważ  $c_1 \text{ non } \in C \cdot O(x_1)$ , więc  $f(c_1) \in \mathcal{R} - f(C \cdot O(x_1))$ , skąd  $g(x_1) \leq f(c_1)$ . Wreszcie  $f(c_1) < f(c_2)$ , gdyż funkcja  $f$  ustala podobieństwo zbiorów  $C$  i  $\mathcal{R}$ . Stąd

$$g(x_1) \leq f(c_1) < f(c_2) < g(x_2),$$

co dowodzi wzoru (20).

UWAGI. 1. W związku z twierdzeniem 6 pozostaje tzw. *zagadnienie Suslina*: czy każdy zbiór ciągły, nie posiadający elementu pierwszego ani ostatniego i taki, że każdy zbiór rozłącznych między sobą przedziałów jest przeliczalny, ma typ  $\lambda$  (lub — co jest równoważne — zawiera część gęstą przeliczalną<sup>1)</sup>)? Zagadnienie to nie jest dotąd rozwiązane.

2. Zbiory o typach  $\omega$ ,  $\eta$  i  $\lambda$  mają moc  $\leq c$ . Dotychczas nie jest znany dowód istnienia zbioru uporządkowanego mocy  $2^c$ , nie oparty na aksjomacie wyboru.

3. W uwadze 2) z § 1, str. 144, podaliśmy pewien sposób geometryzacji typów porządkowych zbiorów przeliczalnych, tj. określenia tych typów jako pewnych podzbiorów zbioru  $\mathcal{C}$  Cantora. Podamy obecnie inny sposób ich geometryzacji oparty na twierdzeniu 5.

Niech mianowicie  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  będzie ciągiem złożonym ze wszystkich liczb wymiernych (bez powtórzeń). Każdemu punktowi

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$$

<sup>1)</sup> Ob. Fundamenta Mathematicae 1 (1920), str. 223.

zbioru  $\mathcal{C}$  można przyporządkować w sposób wzajemnie jednoznaczny zbiór liczb wymiernych

$$M_c = \bigcup_{\tau_i} [c_i = 2].$$

Oznaczmy przez  $\bar{c}$  typ porządkowy zbioru  $M_c$  (uporządkowanego przez relację  $\leq$ ) i przyjmijmy

$$C_\tau = \bigcup_c [\bar{c} = \tau]$$

dla każdego typu  $\tau$  przeliczalnego.

Zbiór  $C_\tau$  można uważać za odpowiednik geometryczny typu  $\tau$ .

ĆWICZENIA. 1) Dowieść, że

$$\mathcal{C} = \sum_{\tau} C_{\tau},$$

gdzie składniki są rozłączne i niepuste.

2) Wykazać, że zbiór  $C_{\eta}$  jest klasy  $\mathcal{G}_3$ .

3) Obliczyć klasę borelowską zbioru tych  $c \in \mathcal{C}$ , dla których zbiór  $M_c$  ma pierwszy element.

4) Każdy zbiór gęsty (nieskończony) zawiera podzbiór typu  $\eta$ .

5) Wykazać, że każdy zbiór ciągły (nieskończony) ma moc  $\geq c$ .

**§ 4. Arytmetyka typów porządkowych.** Podobnie jak dla liczb kardynalnych, tak i dla typów porządkowych określić można działania wykazujące pewne podobieństwo do działań arytmetycznych. Prawa powstającej w ten sposób arytmetyki typów porządkowych pozwalają nieraz uprościć rozumowania dotyczące zbiorów uporządkowanych.

*Typy odwrotne.* Relacją odwrotną do  $R$  nazywamy relację  $\tilde{R}$ , która zachodzi między  $x$  i  $y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $yRx$ . Z łatwością można wykazać, że jeśli  $R$  jest relacją zwrotną, słabo asymetryczną, przechodnią i spójną, to relacja odwrotna  $\tilde{R}$  posiada te same własności. Jeśli więc relacja  $R$  porządkuje zbiór  $A$ , to i relacja  $\tilde{R}$  porządkuje zbiór  $A$ . Oczywiście z izomorfizmu relacji  $R$  i  $\tilde{S}$  wynika izomorfizm relacji  $\tilde{R}$  i  $\tilde{S}$ .

Typ porządkowy zbioru  $A$  uporządkowanego przez relację  $\tilde{R}$  nazywamy *odwrotnym* do typu porządkowego zbioru  $A$  uporządkowanego przez relację  $R$ . Jeśli  $\alpha$  jest typem zbioru  $A$  uporządkowanego przez relację  $R$ , to typ odwrotny oznaczamy symbolem  $\alpha^*$ .

Z równoważności  $x\tilde{R}y = xRy$  wynika, że

$$(1) \quad \alpha^{**} = \alpha.$$

**PRZYKŁADY.** 1) Jeśli  $n$  jest typem porządkowym skończonym, to  $n^* = n$ , gdyż każde dwa zbiory skończone i równoliczne są podobne.

2) Podobnie  $\eta^* = \eta$  i  $\lambda^* = \lambda$ . Natomiast  $\omega^* \neq \omega$ , gdyż zbiór typu  $\omega^*$  (np. zbiór liczb całkowitych ujemnych) ma element ostatni, a zbiór typu  $\omega$  go nie ma.

*Suma typów porządkowych.* Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą dwoma typami porządkowymi, zaś  $A$  i  $B$  dwoma zbiorami uporządkowanymi (ze względu na relacje  $R$  i  $S$ ) takimi, że  $\bar{A} = \alpha$  i  $\bar{B} = \beta$  i że ponadto  $A \cdot B = 0$ ; można to założenie uczynić, gdyby bowiem zbiory  $A$  i  $B$  nie były rozłączne, to zastąpilibyśmy je przez zbiory do nich podone i rozłączne  $A \times \{1\}$  i  $B \times \{2\}$  (por. rozdział III, § 4, lemat 1, str. 110).

Sumę  $\alpha + \beta$  określamy wzorem

$$\alpha + \beta = \overline{A + B},$$

gdzie zbiór  $A + B$  jest uporządkowany w taki sposób, że wszystkie elementy zbioru  $A$  poprzedzają wszystkie elementy zbioru  $B$ , zaś w każdym ze zbiorów  $A$  i  $B$  z osobna uporządkowanie nie ulega zmianie.

W szczególności, gdy  $\alpha$  i  $\beta$  są liczbami skończonymi, definicja sumy pokrywa się z definicją sumy liczb naturalnych.

Łatwo sprawdzić, że suma  $\alpha + \beta$  nie zależy od zbiorów  $A$  i  $B$ , lecz jedynie od ich typów porządkowych. Z łatwością też sprawdzamy wzory:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha.$$

Natomiast prawo przemienności nie jest spełnione; np.  $\omega + 1 \neq 1 + \omega$ . Bowiem  $1 + \omega = \omega$  (jest to więc typ zbioru liczb naturalnych),  $\omega + 1$  jest zaś typem zbioru posiadającego ostatni element.

*Iloczyn typów porządkowych.* Niech  $\alpha = \bar{A}$ ,  $\beta = \bar{B}$ . Iloczyn określamy wzorem:

$$\alpha\beta = \overline{A \times B},$$

gdzie produkt  $A \times B$  uporządkowany jest w taki sposób, że z dwu jego elementów  $\langle x, y \rangle$  i  $\langle x_1, y_1 \rangle$  o różnych rzędnych ten jest wcześniejszy, którego rzędna jest wcześniejsza, zaś z dwu elementów o jednakowej rzędnej ten jest wcześniejszy, którego odcięta jest wcześniejsza.

Np.  $\lambda \cdot \lambda$  czyli  $\lambda^2$  jest to typ porządkowy płaszczyzny, której punkty zostały uporządkowane w podany powyżej sposób.

Łatwo sprawdzić — podobnie jak dla sumy — że iloczyn  $\alpha\beta$  zależy jedynie od czynników i że dla typów skończonych, powyższa definicja zgodna jest z definicją mnożenia liczb naturalnych. Ponadto:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad \alpha 1 = 1\alpha = \alpha, \quad \alpha 0 = 0\alpha = 0.$$

Podobnie jak dodawanie, mnożenie nie jest przemienne. Np.  $\omega 2 \neq 2\omega$ .  
Bowiemy

$$2\omega = \overline{\{1, 2\} \times \overline{J}} = \omega, \quad \omega 2 = \overline{J \times \{1, 2\}} = \omega + \omega.$$

Prawo rozdzielności spełnione jest w postaci

$$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma.$$

Niech bowiem

$$a = \overline{A}, \quad \beta = \overline{B}, \quad \gamma = \overline{C}, \quad B \cdot C = 0.$$

Mamy wówczas (ob. rozdział II, § 5, str. 53)

$$a(\beta + \gamma) = \overline{A \times (B + C)} = \overline{A \times B + A \times C} = \overline{A \times B} + \overline{A \times C} = a\beta + a\gamma,$$

ponieważ  $(A \times B) \cdot (A \times C) = 0$ .

Potęga o wykładniku skończonym określona jest indukcyjnie wzorem

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że  $\eta + \eta = \eta$ ,  $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$ ,  $\lambda + \lambda \neq \lambda$ .

2. Podać z pomocą działań na liczbach  $\omega$  przykład nieskończonego zbioru uporządkowanego, w którym istnieje pierwszy i ostatni element i w którym każdy element (prócz ostatniego) ma następnik i każdy (prócz pierwszego) ma poprzednik.

3. Dowieść, że  $(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$ .

4. Dowieść, że  $\eta^2 = \eta$ .

5. Dowieść, że  $(\omega\eta)^2 = (\omega\eta + \omega)^2$ , zaś  $\omega\eta \neq \omega\eta + \omega$ .

[A. Davis — W. Sierpiński].

6. Dowieść, że  $\omega^2$  jest typem zbioru liczb naturalnych uporządkowanego przez następującą relację:  $m$  poprzedza  $n$ , gdy  $m$  ma mniej dzielników pierwszych niż  $n$ , albo gdy ma tę samą ilość dzielników oraz  $m \leq n$ .

7. Dowieść, że zbiór typu  $\lambda^2$  nie ma przeliczalnej części w nim gęstej.

8. Dowieść, że każdy zbiór uporządkowany posiadający gęstą w nim część przeliczalną jest podobny do jakiegoś zbioru złożonego z liczb rzeczywistych (uporządkowanego przez relację  $\leq$ )<sup>1)</sup>.

9. Niech  $\mathcal{M}$  będzie monotoniczną rodziną podzbiorów otwartych linii prostej (lub ogólniej przestrzeni  $\mathcal{E}^n$ ). Dowieść, że rodzina ta jest podobna do jakiegoś zbioru liczb rzeczywistych (uporządkowanego przez relację  $\leq$ ).

<sup>1)</sup> Por. K. Kuratowski, *Topologie I*, str. 153.

Wskazówka: niech  $P_1, P_2, \dots$  będzie ciągiem wszystkich przedziałów o obu końcach wymiernych; zakładamy przy tym, że każdy przedział powtarza się w tym ciągu nieskończenie wiele razy. Dla danego zbioru  $G \in \mathcal{M}$  niech  $k_1, k_2, \dots$  będzie ciągiem wszystkich liczb naturalnych takich, że  $P_{k_n} \subset G$ . Funkcja

$$t(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}}, \quad t(0) = 0,$$

ustala żądane podobieństwo.

**\*§ 5. Uogólnione sumy zbiorów uporządkowanych i typów porządkowych.** Niech  $T$  będzie zbiorem uporządkowanym przez relację  $Q$ , zaś  $F$  i  $R$  niech będą funkcjami, określonymi dla  $x \in T$  i takimi, że  $R_x$  jest relacją porządkującą zbiór  $F_x$ . Załóżmy, że  $F_x \cdot F_x = 0$  dla  $x_1 \neq x_2$ .

**Twierdzenie 1.** Relacja  $S$ , która zachodzi między dwoma elementami  $a$  i  $b$  sumy  $\Sigma_x F_x$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \text{bądź } a \text{ i } b \text{ należą do tego samego składnika } F_x \text{ i } aR_x b, \\ \text{bądź } a \text{ i } b \text{ należą do różnych składników } F_{x_1} \text{ i } F_{x_2} \text{ i } x_1 Q x_2, \end{cases}$$

porządkuje sumę  $\Sigma_x F_x$ .

Dowód. Zwrotność relacji  $S$  jest oczywista.

Jeśli  $a$  i  $b$  należą do różnych składników sumy  $\Sigma_x F_x$ , to  $aSb$  lub  $bSa$ , gdyż relacja  $Q$  porządkuje zbiór wskaźników. Jeśli zaś  $a$  i  $b$  należą do tego samego składnika  $F_x$ , to  $aSb$  lub  $bSa$ , gdyż relacja  $R_x$  jest spójna w  $F_x$ . Relacja  $S$  jest więc spójna.

Jeśli  $a \in F_{x_1}$ ,  $b \in F_{x_2}$ ,  $aSb$  i  $bSa$ , to  $x_1 Q x_2$  i  $x_2 Q x_1$ , skąd wynika, że  $x_1 = x_2$ , gdyż relacja  $Q$  jest słabo asymetryczna w  $T$ . Przyjmując  $x = x_1 = x_2$ , mamy więc  $aR_x b$  i  $bR_x a$ , skąd  $a = b$ . Relacja  $S$  jest więc słabo asymetryczna.

Założmy wreszcie, że  $a \in F_x$ ,  $b \in F_y$ ,  $c \in F_z$ ,  $aSb$  i  $bSc$ . Wynika stąd, że  $xQy$  i  $yQz$ , a więc  $xQz$ . Jeśli  $x \neq z$ , to  $aSc$ . Jeśli zaś  $x = z$ , to wobec  $xQy$  i  $yQz$  mamy  $x = y = z$ , gdyż relacja  $Q$  jest słabo asymetryczna, i zgodnie z określeniem relacji  $S$  jest  $aR_x b$  i  $bR_x c$ . Wobec przechodności  $R_x$  otrzymujemy  $aR_x c$ , skąd  $aSc$ . Relacja  $S$  jest zatem przechodnia.

Relacja  $S$  porządkuje więc zbiór  $\Sigma_x F_x$ .

W dalszym ciągu przez sumę uporządkowaną zbiorów uporządkowanych (i rozłącznych)  $F_x$ , będziemy rozumieli zawsze sumę  $\Sigma_x F_x$  uporządkowaną przez relację  $S$  opisaną w twierdzeniu 1, przy czym w każdym wypadku będzie ustalona relacja  $Q$  porządkująca zbiór wskaźników. W szczególności, mówiąc o sumie skończonej liczby zbiorów uporządkowanych  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , obieramy relację  $\leq$  jako relację  $Q$ .



Mówimy też, że  $\Sigma_x F_x$  jest sumą zbiorów  $F_x$  „według argumentu  $T$ ”. Suma zbiorów uporządkowanych podlega prawu łączności wyrażonemu w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 2.** Jeśli zbiór argumentów  $T$  jest sumą uporządkowaną zbiorów uporządkowanych:

$$T = \sum_{y \in V} U_y$$

i  $G_y = \Sigma_{x \in U_y} F_x$ , to sumy  $\Sigma_{x \in T} F_x$  i  $\Sigma_{y \in V} G_y$  są podobne.

Dowód. Oczywiście

$$\sum_{x \in T} F_x = \sum_{y \in V} G_y.$$

Wystarczy zatem wykazać, że jeśli element  $a$  poprzedza element  $b$  ze względu na relację  $A$  porządkującą sumę  $\Sigma_{x \in T} F_x$ , to  $a$  poprzedza też  $b$  ze względu na relację  $B$  porządkującą sumę  $\Sigma_{y \in V} G_y$ .

Niech  $R$  będzie relacją porządkującą zbiór  $V$ ,  $P_y$  relacją porządkującą zbiór  $U_y$ , a  $S_y$  relacją porządkującą zbiór  $G_y$ .

Załóżmy, że  $a \in F_{x_1}$ ,  $b \in F_{x_2}$  i że  $a$  poprzedza  $b$  ze względu na relację  $A$ . Zachodzi zatem jeden z dwu następujących przypadków:

$1^0$   $x_1 = x_2$ . Niech  $x = x_1 = x_2$  i niech  $y$  będzie takim elementem zbioru  $V$ , że  $x \in U_y$ . Zgodnie z określeniem sumy uporządkowanej zbiorów uporządkowanych,  $a$  poprzedza  $b$  w zbiorze  $G_y$ , tj.  $a S_y b$ , a ponieważ  $a, b \in G_y$ , dowodzi to, że  $a$  poprzedza  $b$  ze względu na relację  $B$ .

$2^0$   $x_1$  poprzedza  $x_2$  w zbiorze  $T$ . Niech  $x_1 \in U_{y_1}$  i  $x_2 \in U_{y_2}$ . Jeśli  $y_1 = y_2$ , to  $x_1 P_y x_2$ , gdzie  $y = y_1 = y_2$ , a więc  $a$  poprzedza  $b$  w zbiorze  $G_y$  i tym bardziej w zbiorze  $\Sigma_{y \in V} G_y$ . Jeśli natomiast  $y_1 \neq y_2$ , to  $y_1 R y_2$ , co dowodzi, że każdy element zbioru  $G_{y_1}$  poprzedza każdy element zbioru  $G_{y_2}$  ze względu na relację  $B$ ; dotyczy to w szczególności  $a$  i  $b$ .

Twierdzenie 2 jest w ten sposób udowodnione.

Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym przez relację  $R$ . Oznaczmy dla  $x, y \in A$  przez  $[x, y]$  zbiór tych  $z$ , które bądź są równe  $x$ , bądź  $y$ , bądź spełniają jeden z warunków  $x \prec z \prec y$  lub  $y \prec z \prec x$ .

Oczywiście  $[x, y] = [y, x]$ . Udowodnimy dla dowolnych  $x, y, z \in A$ , że

$$(1) \quad [x, y] \subset [x, z] + [z, y].$$

Istotnie, jeśli  $t \in [x, y]$  i  $t = x$  lub  $t = y$ , to oczywiście  $t \in [x, z] + [z, y]$ . Jeśli  $x \prec t \prec y$  i  $t = z$  lub  $t \prec z$ , to  $t \in [x, z]$ , jeśli zaś  $z \prec t$ , to  $t \in [z, y]$ . Podobnie, jeśli  $y \prec t \prec x$ , to  $t \in [x, z] + [z, y]$ .

Niech  $V_x$  będzie zbiorem takich  $y$ , że zbiór  $[x, y]$  jest rozproszony. Oczywiście  $V_x \neq 0$ , bo  $x \in V_x$ .

Udowodnimy, że zbiór  $V_x$  jest rozproszony.

Przypuśćmy przeciwnie, że  $OCV_x$  i że zbiór  $O$  jest nieskończony i gęsty.

Dla dowolnych  $c_1, c_2 \in O$  spełniających warunek  $c_1 \prec c_2$  mamy w myśl (1)

$$[c_1, c_2] \subset [c_1, x] + [c_2, x],$$

a więc zbiór  $[c_1, c_2]$  jest zawarty w sumie dwu zbiorów rozproszonych, a zatem w zbiorze rozproszonym (por. twierdzenie 2, str. 146). Jest to jednak niemożliwe, bowiem między każdymi dwoma elementami zbioru  $O$  leży co najmniej jeden element tego zbioru, a zatem zbiór  $O \cdot [c_1, c_2]$  jest nieskończony i gęsty.

Zbiór  $V_x$  jest przedziałem zbioru  $A$ . Istotnie, założmy, że  $y, z \in V_x$  i  $y \prec t \prec z$ . Jeśli  $x = t$  lub  $x \prec t$ , to  $[x, t] \subset [x, z]$ , a więc zbiór  $[x, t]$  jest rozproszony jako podzbiór zbioru rozproszonego  $[x, z]$ . Jeśli natomiast  $t \prec x$ , to  $[t, x] \subset [y, x]$ , a więc zbiór  $[t, x]$  jest rozproszony jako podzbiór zbioru rozproszonego  $[y, x]$ . Wynika stąd, że  $t \in V_x$ . A więc zbiór  $V_x$  jest przedziałem.

Jeśli  $x \neq y$ , to  $V_x \cdot V_y = 0$  lub  $V_x = V_y$ . Istotnie, jeśli  $z \in V_x \cdot V_y$ , to zbiór  $[x, y]$  jest rozproszony jako podzbiór sumy  $[x, z] + [y, z]$ . Wynika stąd, że jeśli  $u \in V_x$ , to  $u \in V_y$ , bo  $[u, y]$  jako podzbiór sumy  $[u, x] + [x, y]$ , jest rozproszony. Podobnie,  $z \in V_y$  wynika  $z \in V_x$ . A zatem  $V_x = V_y$ .

Niech  $A$  będzie rodziną wszystkich zbiorów  $V_x$ . Rodzina ta składa się więc z rozłącznych i niepustych przedziałów zbioru  $A$ . Jest zatem uporządkowana przez relację  $\varrho$ , która zachodzi między  $V_x$  i  $V_y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$  lub  $x \prec y$  (por. § 2, str. 145).

Zbiór  $A$  jest sumą uporządkowaną

$$(2) \quad A = S(A) = \sum_{P \in A} P,$$

przy czym rodzina  $A$  jest uporządkowana przez relację  $\varrho$ , każdy zaś z przedziałów  $P$  przez relację  $R$ . Istotnie, suma  $S(A)$  jest zawarta w  $A$ , każdy zaś element  $x$  zbioru  $A$  należy do  $V_x$ , a więc do jednego ze składników tej sumy.

Wykażemy, że relacja  $\varrho$  porządkuje rodzinę  $A$  w sposób gęsty. Istotnie, założmy, że  $V_x \varrho V_y$  i  $V_x \neq V_y$ , tj.  $V_x \cdot V_y = 0$ . Wynika stąd, że przedział  $[x, y]$  nie jest rozproszony, a więc dla pewnego  $z$  leżącego między  $x$  i  $y$  jeden ze zbiorów  $[x, z]$ ,  $[z, y]$ , np. pierwszy, zawiera część nieskończoną gęstą  $M$ . Jeśli zatem  $m, n, p$  są elementami zbioru  $M$  takimi, że  $x \prec m \prec n \prec p \prec z$ , to zbiory  $[x, m]$  i  $[n, y]$  zawierają podzbiory nieskończone gęste, co dowodzi, że  $V_x \varrho V_n \varrho V_y$  i  $V_x \neq V_n \neq V_y$ .

Dochodzimy w ten sposób do następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 3<sup>1)</sup>.** *Każdy zbiór uporządkowany jest sumą zbiorów rozproszonych według gęstości argumentu.*

W szczególności, jeśli zbiór  $A$  jest rozproszony, to we wzorze (2) zbiór argumentów  $A$  jest jednoelementowy (a więc gęsty), jeśli zaś zbiór  $A$  jest gęsty, to każdy ze składników  $P$  we wzorze (2) redukuje się do zbioru jednoelementowego (a więc rozproszonego).

**Definicja.** Załóżmy, że  $A$  jest sumą uporządkowaną:

$$A = \sum_{t \in T} F_t,$$

przy czym zbiór  $T$  jest uporządkowany przez relację  $Q$ , a zbiór  $F_t$  przez relację  $R_t$  i przyjmijmy  $\bar{F}_t = \varphi_t$ . Typ zbioru  $A$  nazywamy *sumą typów*  $\varphi_t$  według argumentu  $T$  i oznaczamy symbolem  $\sum_{t \in T} \varphi_t$ , tj.

$$(3) \quad \bar{A} = \sum_{t \in T} \bar{F}_t = \sum_{t \in T} \varphi_t.$$

W przypadku, gdy  $T = \{1, 2\}$  definicja ta pokrywa się z określeniem sumy dwu typów porządkowych podanym w § 4 na str. 159.

Założmy na odwrót, że dana jest funkcja  $\varphi$  określona na zbiorze uporządkowanym  $T$ , której wartościami są typy porządkowe. Niech  $f_t$  będzie mocą zbioru o typie  $\varphi_t$  i założmy, że funkcja  $f$  czyni zadość następującemu warunkowi (W) (podanemu na str. 125):

(W) *istnieje funkcja  $F^{(0)}$  taka, że  $\bar{F}_t^{(0)} = f_t$  dla  $t \in T$ .*

Udowodnimy przy tych założeniach

**Twierdzenie 4.** *Istnieje suma uporządkowana  $\sum_{t \in T} F_t$  taka, że  $\bar{F}_t = \varphi_t$ ; przy tym każde dwie takie sumy są podobne.*

Dowód. Dla każdego  $t \in T$  przyjmujemy  $F_t^* = F_t^{(0)} \times \{t\}$  i oznaczamy przez  $K_t$  rodzinę tych relacji, które porządkują zbiór  $F_t^*$  w typ  $\varphi_t$ . Rodzina  $K_t$  jest niepusta dla  $t \in T$ , gdyż zgodnie z (W) istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru  $F_t^{(0)}$ , a więc też zbioru  $F_t^*$ , na zbiór uporządkowany typu  $\varphi_t$ .

Zgodnie z twierdzeniem 3 z rozdziału II, § 10, str. 74, produkt  $\sum_{t \in T} K_t$  jest niepusty. Niech  $R$  będzie jego elementem. Znaczy to, że  $R_t \in K_t$  dla wszystkich  $t \in T$ , a więc  $R_t$  porządkuje zbiór  $F_t^*$  w typ  $\varphi_t$ . Ponieważ zbiory  $F_t^*$  są rozłączne więc suma  $\sum_{t \in T} F_t^*$  ma w myśl definicji typ  $\sum_{t \in T} \varphi_t$ .

<sup>1)</sup> Twierdzenie 3 pochodzi od Schönfliesa; por. *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Lipsk—Berlin 1913, str. 184.

Założmy teraz, że  $\sum_{t \in T} F_t^1$  i  $\sum_{t \in T} F_t^2$  są dwiema sumami uporządkowanymi typu  $\sum_{t \in T} \varphi_t$ . Niech  $\Phi_t$  będzie zbiorem funkcji ustalających podobieństwo zbiorów  $F_t^1$  i  $F_t^2$ . Ponieważ  $\bar{F}_t^1 = \varphi_t = \bar{F}_t^2$ , więc  $\Phi_t \neq 0$  dla każdego  $t$ , a zatem  $\sum_{t \in T} \Phi_t \neq 0$ . Niech  $f$  będzie elementem tego produktu;  $f_t$  jest więc dla każdego  $t$  funkcją ustalającą podobieństwo zbiorów  $F_t^1$  i  $F_t^2$ . Funkcja  $g$  określona wzorem (por. str. 117, uwaga 2):

$$g = \sum_{t \in T} f_t, \quad \text{tj.} \quad g(x) = f_t(x) \quad \text{dla} \quad x \in F_t^1,$$

ustala podobieństwo zbiorów  $\sum F_t^1$  i  $\sum F_t^2$ .

Twierdzenie 4 jest w ten sposób udowodnione. Wynika z niego, że dla każdej funkcji  $\varphi$  czyniącej zadość warunkom, przy których udowodniliśmy twierdzenie 4, istnieje suma uporządkowana typów  $\sum_{t \in T} \varphi_t$ .

**Twierdzenie 5** (prawo łączności dla sumy typów porządkowych). *Jeśli  $T$  jest sumą uporządkowaną  $\sum_{y \in V} U_y$  i  $\sigma_y = \sum_{t \in U_y} \varphi_t$ , to*

$$(4) \quad \sum_{y \in V} \sigma_y = \sum_{t \in T} \varphi_t.$$

Twierdzenie 5 wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.

**Związek sum uogólnionych z iloczynem.** Niech  $T$  będzie zbiorem uporządkowanym w typ  $\beta$  przez relację  $R$ , zaś  $F$  zbiorem uporządkowanym w typ  $\alpha$  przez relację  $S$ . Przyjmijmy  $F_x = F \times \{x\}$  dla  $x \in T$  i uporządkujmy zbiór  $F_x$  tak, by para  $\langle a, x \rangle$  poprzedzała parę  $\langle b, x \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $aSb$ . Zbiory  $F_x$  mają więc typ  $\alpha$  dla każdego  $x \in T$ .

Typ sumy uporządkowanej  $\sum_{x \in T} F_x$  nie zależy od zbiorów  $T$  i  $F$ , lecz tylko od ich typów porządkowych. Istotnie, założmy, że  $T^*$  i  $F^*$  mają typy  $\beta$  i  $\alpha$  i że funkcje  $f$  i  $g$  ustalają podobieństwo  $T$  z  $T^*$  oraz  $F$  z  $F^*$ . Przyporządkowując parze  $\langle a, x \rangle \in \sum_{x \in T} F_x$  parę  $\langle f(a), g(x) \rangle \in \sum_{y \in T^*} F_y^*$ , ustalamy podobieństwo obydwu sum. Jeśli bowiem  $\langle a, x \rangle$  poprzedza  $\langle a_1, x_1 \rangle$ , to bądź  $x$  poprzedza  $x_1$  w  $T$ , bądź  $x = x_1$ , zaś  $a$  poprzedza  $a_1$  w  $F$ ; ponieważ zaś te warunki są równoważne warunkom

$$g(x) \neq g(x_1) \quad \text{i} \quad g(x) \text{ poprzedza } g(x_1) \text{ w } T^*,$$

bądź

$$g(x) = g(x_1) \quad \text{i} \quad f(a) \text{ poprzedza } f(a_1) \text{ w } F^*,$$

więc wnosimy stąd, że para  $\langle f(a), g(x) \rangle$  poprzedza parę  $\langle f(a_1), g(x_1) \rangle$ .

Z definicji iloczynu  $\alpha\beta$  (ob. § 4, str. 159) wynika natychmiast, że

$$\sum_{x \in T} F_x = \alpha\beta.$$

Obrazowo można więc powiedzieć, że zbiór typu  $\alpha\beta$  powstaje ze zbioru  $T$  typu  $\beta$  w ten sposób, że każdy element  $x \in T$  zastępujemy zbiorem  $F_x = F \times \{x\}$  typu  $\alpha$ , przy czym uznajemy każdy element zbioru  $F_{x_1}$  za wcześniejszy od każdego elementu zbioru  $F_{x_2}$ , jeśli  $x_1$  poprzedza  $x_2$  w zbiorze  $T$ .

Z twierdzenia 4 wynika w szczególności

° **Twierdzenie 6.** Jeśli  $\varphi$  jest funkcją określoną w zbiorze  $T$  typu  $\beta$  i  $\varphi_t = \alpha$  dla każdego  $t \in T$ , to

$$(5) \quad \sum_{t \in T} \varphi_t = \alpha\beta.$$

Powyższy związek między iloczynem a sumą uogólnioną typów pozwala niekiedy wyprowadzać prawa arytmetyczne dla iloczynów typów z praw dotyczących sum uogólnionych. Udowodnimy w ten sposób (przyjmując założenia poprzedzające twierdzenie 4) następujące

° **Twierdzenie 7** (uogólnione prawo rozdzielności). Jeśli  $\varphi$  jest funkcją określoną w zbiorze uporządkowanym  $V$ , to

$$(6) \quad \alpha \cdot \sum_{y \in V} \varphi_y = \sum_{y \in V} \alpha \cdot \varphi_y.$$

Dowód. Przyjmijmy założenia twierdzenia 2 i założmy ponadto, że:

$$\overline{F_x} = \alpha, \quad \overline{U_y} = \varphi_y.$$

Zgodnie z twierdzeniem 6 jest wówczas

$$\overline{G_y} = \alpha\varphi_y, \quad \sum_{y \in V} \overline{G_y} = \sum_{y \in V} \alpha\varphi_y, \\ \overline{T} = \sum_{y \in V} \varphi_y \quad \text{i} \quad \sum_{x \in T} \overline{F_x} = \alpha \cdot \overline{T} = \alpha \cdot \sum_{y \in V} \varphi_y.$$

Stąd otrzymujemy równość (6), ponieważ na mocy twierdzenia 2

$$\sum_{y \in V} \overline{G_y} = \sum_{x \in T} \overline{F_x}.$$

ĆWICZENIA. 1) Suma zbiorów rozproszonych według rozproszonego argumentu jest zbiorem rozproszonym.

2) Jeśli zbiory  $F_x$  nie mają ani pierwszego, ani ostatniego elementu, są gęste i nieskończone, to suma  $\sum_{x \in T} F_x$  jest gęsta (dla każdego zbioru uporządkowanego  $T$ ).

3) Jeśli zbiór  $T$  jest nieskończony i gęsty oraz  $F_x \neq 0$ , to zbiór  $\sum_{x \in T} F_x$  zawiera część gęstą.

4) Jeśli suma  $\sum_{x \in T} F_x$  jest ciągła, to zbiór  $T$  nie ma luk.

5) Jeśli zbiór  $T$  jest ciągły i każdy ze zbiorów  $F_x$  jest ciągły i zawiera pierwszy i ostatni element, to suma  $\sum_{x \in T} F_x$  jest ciągła. [Hausdorff].

\* § 6. Uporządkowanie leksykograficzne. Z iloczynem typów porządkowych wiąże się ściśle tzw. uporządkowanie leksykograficzne<sup>1)</sup>. Aby je określić założmy, że  $T$  jest zbiorem uporządkowanym przez relację  $Q$  i że każdemu  $x \in T$  przyporządkowany jest zbiór  $F_x$  uporządkowany przez relację  $R_x$ . Nie zakładamy przy tym, że zbiory  $F_x$  są rozłączne. Niech

$$P = \sum_{x \in T} F_x.$$

$P$  jest więc zbiorem funkcji  $f$ , dla których zbiorem argumentów jest  $T$  i które spełniają warunek  $f(x) \in F_x$  dla wszystkich  $x \in T$ .

Dowolne dwie funkcje  $f$  i  $g$  należące do  $P$  wyznaczają zbiór

$$D(f, g) = \sum_{x \in T} [f(x) \neq g(x)].$$

Oczywiście  $D(f, g) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f = g$ .

W zbiorze  $P$  określimy relację  $S$  w następujący sposób:  $fSg$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy bądź  $f = g$ , bądź też zbiór  $D(f, g)$  ma pierwszy element  $x_0$  i  $f(x_0)R_{x_0}g(x_0)$ .

Wzorem możemy zapisać tę definicję w następujący sposób:

$$fSg = (f = g) + \sum_x \{ (f(x) \prec_{R_x} g(x)) \cdot \prod_y [(y \prec_Q x) \rightarrow (f(y) = g(y))] \}.$$

Jeśli relacja  $S$  porządkuje produkt  $P$ , to mówimy, że produkt ten jest uporządkowany leksykograficznie (albo według zasady pierwszych różnic).

Aby uzasadnić tę nazwę, założmy, że  $T = \{1, 2, \dots, n\}$ . Produkt  $P$  składa się wówczas z funkcji określonych dla  $x \in T$  lub, co na jedno wychodzi, z układów uporządkowanych  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , gdzie  $a_i \in F_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Relacja  $S$  zachodzi między dwoma różnymi układami  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  i  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ , gdy pierwszy wskaźnik  $j$  taki, że  $a_j \neq b_j$  czyni zadość warunkowi  $a_j R_j b_j$ . Uporządkowanie produktu  $P$  przypomina więc uporządkowanie wyrazów w słowniku lub encyklopedii. Z dwu wyrazów uważamy za wcześniejszy ten, w którym pierwsza litera, różna od odpowiedniej litery drugiego wyrazu, występuje wcześniej w alfabecie.

W podobny sposób określamy uporządkowanie antyleksykograficzne  $S_a$  produktu  $P$  (czyli uporządkowanie według zasady ostatnich różnic). Mianowicie,  $f$  pozostaje w relacji  $S_a$  do  $g$ , jeśli  $f = g$  lub też jeśli zbiór  $D(f, g)$  ma ostatni element  $x_0$  i  $f(x_0)R_{x_0}g(x_0)$ , tj.

$$fS_a g = (f = g) + \sum_x \{ [f(x) \prec_{R_x} g(x)] \cdot \prod_y [(x \prec_Q y) \rightarrow (f(y) = g(y))] \}.$$

<sup>1)</sup> Pojęcia wprowadzone w tym paragrafie pochodzą od Hausdorffa. Zob. jego *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914, str. 147 i dalsze.

Zbadamy, kiedy relacje  $S$  i  $S_a$  porządkują zbiór  $P$ .

**Twierdzenie 1.** *Relacje  $S$  i  $S_a$  są zwrotne, słabo asymetryczne i przechodnie w  $P$ .*

Dowód. Zwrotność relacji  $S$  jest oczywista.

Założmy, że  $fSg$  i  $gSf$ . Gdyby funkcje  $f$  i  $g$  były różne, to zbiór  $D(f, g)$  miałby pierwszy element  $x$  i element ten spełniałby warunki  $f(x)R_xg(x)$  i  $g(x)R_xf(x)$ . Wobec założenia, że relacja  $R_x$  porządkuje zbiór  $F_x$  wynikałoby stąd, że  $f(x)=g(x)$  wbrew założeniu, że  $x \in D(f, g)$ . Zatem z  $fSg$  i  $gSf$  wynika  $f=g$ , tzn. relacja  $S$  jest słabo asymetryczna.

Założmy, że  $fSg$  i  $gSh$ . Jeśli  $f=g$  lub  $g=h$ , to oczywiście  $fSh$ . Założmy więc, że  $f \neq g$  i  $g \neq h$ . Zbiory  $D(f, g)$  i  $D(g, h)$  mają więc pierwsze elementy  $x$  i  $y$  i elementy te czynią zadość warunkom

$$f(x) \prec_{R_x} g(x), \quad g(y) \prec_{R_y} h(y).$$

Jeśli  $z$  poprzedza  $x$  i  $y$ , to  $f(z)=g(z)=h(z)$ . Jeśli natomiast  $z_0$  jest wcześniejszym z elementów  $x$  i  $y$ , to mamy bądź  $f(z_0) \prec_{R_{z_0}} g(z_0)$  i  $g(z_0)=h(z_0)$  (jeśli  $x \prec_Q y$ ), bądź  $f(z_0)=g(z_0)$  i  $g(z_0) \prec_{R_{z_0}} h(z_0)$  (jeśli  $y \prec_Q x$ ), bądź wrzeczcie  $f(z_0) \prec_{R_{z_0}} g(z_0)$  i  $g(z_0) \prec_{R_{z_0}} h(z_0)$  (jeśli  $x=y$ ). W każdym więc razie  $f(z_0) \prec_{R_{z_0}} h(z_0)$ , co dowodzi, że  $z_0$  jest pierwszym elementem zbioru  $D(f, h)$ , a więc  $fSh$ . Relacja  $S$  jest zatem przechodnia.

Twierdzenie 1 jest więc udowodnione dla relacji  $S$ . Dla relacji  $S_a$  dowód jest analogiczny.

UWAGA. Następujący przykład wykazuje, że relacja  $S$  może nie być spójna.

Niech  $T$  będzie zbiorem typu  $\omega^*$  (np. zbiorem liczb całkowitych ujemnych),  $F_x=\{0,1\}$  i niech  $R_x$  będzie relacją  $\leq$ . Przyjmijmy za  $f$  funkcję, która ma wartość 0 dla  $n$  parzystych, a 1 dla  $n$  nieparzystych, i niech  $g(x)=1-f(x)$ . Zbiór  $D(f, g)$  jest wówczas równy  $T$ , a więc nie ma pierwszego elementu, co dowodzi, że nie zachodzi ani  $fSg$ , ani  $gSf$ .

Podobny przykład można też skonstruować dla uporządkowania antyleksykograficznego.

Z podanego przykładu wynika, że  $S$  i  $S_a$  nie zawsze są relacjami porządkującymi zbiór  $P$ .

Zajmiemy się bliżej przypadkiem, gdy zbiór argumentów  $T$  jest skończony lub też ma typ  $\omega$  albo  $\omega^*$ .

**Twierdzenie 2.** *Jeśli  $\bar{T}=n$  lub też  $\bar{T}=\omega$ , to relacja  $S$  porządkuje produkt  $P$ . Jeśli  $\bar{T}=n$  lub  $\bar{T}=\omega^*$ , to relacja  $S_a$  porządkuje produkt  $P^1$ .*

<sup>1)</sup> Ogólniej, twierdzenie 2 zachodzi w przypadku, gdy zbiór  $T$  jest dobrze uporządkowany lub ma uporządkowanie odwrotne do dobrego. Por. rozdział V, § 1, str. 185.

Dla dowodu wystarczy wykazać, że relacja  $S$  jest spójna w  $P$ . Założmy zatem, że  $f, g \in P$  i  $f \neq g$ . Zbiór  $D(f, g)$  jest więc niepusty, a zatem zawiera element pierwszy  $x$ . Ze spójności relacji  $R_x$  w zbiorze  $F_x$  wnosiśmy, że  $f(x)R_xg(x)$  lub  $g(x)R_xf(x)$ , skąd wynika, że  $fSg$  lub  $gSf$ .

Dowód spójności relacji  $S_a$  jest analogiczny.

**Twierdzenie 3.** *Jeśli zbiory  $A_1, \dots, A_n$  mają typy  $a_1, \dots, a_n$ , to produkt  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  uporządkowany leksykograficznie ma typ  $a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$ , uporządkowany zaś antyleksykograficznie — ma typ  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ .*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem  $n$ . Dla  $n=1$  twierdzenie jest oczywiste. Założmy więc, że zachodzi ono dla pewnego  $n$  i rozpatrzmy produkt  $n+1$  zbiorów  $P=A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n+1}$  uporządkowany leksykograficznie. Niech  $B=A_2 \times A_3 \times \dots \times A_{n+1}$ ; jest jasne, że porządkując leksykograficznie produkt  $A_1 \times B$  otrzymujemy zbiór podobny do  $P$ . Wystarczy więc udowodnić, że produkt  $A_1 \times B$  ma typ  $a_{n+1} \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$ .

Produkt  $A_1 \times B$  możemy przedstawić jako sumę:

$$(1) \quad A_1 \times B = \sum_{a \in A_1} B_a,$$

gdzie  $B_a$  jest zbiorem par postaci  $\langle a, b \rangle$ . Uporządkujmy zbiór  $B_a$  przez relację  $R_a$  zdefiniowaną jak następuje:  $\langle a, b_1 \rangle R_a \langle a, b_2 \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $b_1=b_2$  lub gdy  $b_1$  poprzedza  $b_2$  w zbiorze  $B$ . Zbiór  $B_a$  jest wówczas podobny do zbioru  $B$ , a więc w myśl założenia indukcyjnego ma typ  $a_{n+1} \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_2$ . Przy uporządkowaniu leksykograficznym produktu  $A_1 \times B$  każdy element zbioru  $B_a$  poprzedza każdy element zbioru  $B_{a'}$ , o ile  $a_1$  poprzedza  $a_2$ . W myśl określenia iloczynu, suma (1) ma więc typ  $a_{n+1} \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$  (por. wzór (5) na str. 166).

Dla uporządkowania antyleksykograficznego dowód jest podobny.

**PRZYKŁADY.** Iloczyn  $\lambda\lambda$  jest typem zbioru liczb zespolonych uporządkowanego według zasady pierwszych różnic (liczbę zespoloną  $x+iy$  utożsamiamy z parą uporządkowaną  $\langle x, y \rangle$ ).

Iloczyn  $\eta\lambda$  jest typem zbioru liczb zespolonych postaci  $w+iy$ , gdzie  $w$  jest liczbą wymierną, a  $y$  — rzeczywistą, przy czym zbiór ten porządkujemy według zasady ostatnich różnic. Natomiast iloczyn  $\lambda\eta$  jest typem tego samego zbioru uporządkowanego według zasady pierwszych różnic. Typy te są różne, gdyż zbiór typu  $\lambda\eta$  zawiera przedziały ciągłe, zbiory zaś typu  $\eta\lambda$  przedziałów takich nie mają.



Iloczyn nieskończony zdefiniujemy tylko dla przypadku, gdy  $\overline{T} = \omega^*$ .

**Definicja.** Niech  $\mathcal{J}^*$  będzie zbiorem liczb całkowitych ujemnych uporządkowanym przez relację  $\leq$  (w typ  $\omega^*$ ) i niech  $F_n$  (dla  $n \in \mathcal{J}^*$ ) będzie zbiorem uporządkowanym przez relację  $R_n$  w typ  $a_n$ . Przyjmujemy

$$\prod_{n \in \mathcal{J}^*} a_n = \overline{P F_n},$$

gdzie produkt uporządkowany jest antyleksykograficznie; typ ten nazywamy *iloczynem typów  $a_n$  według argumentu  $\omega^*$* .

Krócej piszemy  $a^*$ , jeśli  $\overline{F_n} = a$  dla każdego  $n$ .

Jest to tzw. *ogólna potęga* typów porządkowych o wykładniku  $\omega^*$ <sup>1)</sup>.

**PRZYKŁADY.** 1<sup>o</sup>. Załóżmy, że  $F_n = \{0, 1\}$  i że  $R_n$  jest relacją  $\leq$ . Każdej funkcji  $f \in P_{n \in \mathcal{J}^*} F_n$  przyporządkować możemy wzajemnie jednoznacznie punkt zbioru Cantora (por. rozdział II, § 11, str. 75)

$$c_f = \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^n f(n).$$

Na to, by  $c_f < c_g$ , potrzeba i wystarcza, aby największa liczba  $n_0$  taka, że  $f(n_0) \neq g(n_0)$ , czyniła zadość warunkowi  $f(n_0) < g(n_0)$ . Ta liczba  $n_0$  jest oczywiście największą liczbą w zbiorze  $D(f, g)$ , co dowodzi, że

$$c_f \leq c_g = f S_a g.$$

Relacja  $S_a$  porządkuje zbiór  $P_{n \in \mathcal{J}^*} F_n$  w typ  $2^*$ . Zatem relacja  $\leq$  porządkuje zbiór Cantora w typ  $2^*$ .

2<sup>o</sup>. Niech  $F_n = \mathcal{J}$  dla  $n \in \mathcal{J}^*$ . Każdej funkcji  $f \in P_{n \in \mathcal{J}^*} F_n$  przyporządkujemy liczbę

$$r_f = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2^{f(-1)+f(-2)+\dots+f(n)}}.$$

Przyporządkowanie to ustala podobieństwo zbioru  $P_{n \in \mathcal{J}^*} F_n$  uporządkowanego antyleksykograficznie i przedziału 01. Istotnie, jeśli  $f \neq g$  i  $n_0$  jest największą liczbą taką, że  $f(n_0) \neq g(n_0)$ , to zakładając, że  $f(n_0) < g(n_0)$  wnosimy, że w rozwinięciu dwójkowym liczby  $r_f$  figuruje na miejscu  $f(-1)+f(-2)+\dots+f(n_0)$  cyfra 1, a w rozwinięciu dwójkowym liczby  $r_g$  — cyfra 0, a zatem  $r_f > r_g$ . Równie łatwo wykazemy, że jeśli  $r_f > r_g$ , to  $f(n_0) < g(n_0)$ . Wynika stąd, że przyporządkowanie liczb  $r_f$  punktom produktu  $P_{n \in \mathcal{J}^*} F_n$  jest wzajemnie jednoznaczne i że

$$r_f \geq r_g = f S_a g.$$

<sup>1)</sup> Por. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914, str. 147 i nast. Ogólniej można określić potęgę  $a^*$  gdzie  $\beta$  jest liczbą porządkową (por. rozdział V, § 1, str. 185).

Wreszcie każda liczba rzeczywista  $x$  z przedziału 01 jest równa  $r_f$  dla pewnego  $f$ . Istotnie, jeśli rozwinięciem dwójkowym liczby  $x$  (o nieskończenie wielu cyfrach różnych od 0) jest

$$\frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_2}} + \dots \quad (k_1 < k_2 < \dots),$$

to  $x = r_f$ , gdzie  $f(-1) = k_1$ ,  $f(-2) = k_2 - k_1$ ,  $f(-3) = k_3 - k_2, \dots$

Wynika stąd, że zbiór  $P_{n \in \mathcal{J}^*} F_n$  ma typ  $\lambda$ , a więc

$$\omega^* = \lambda.$$

**\* § 7. Zbiory częściowo uporządkowane. Struktury.** Mówimy, że relacja  $R$  porządkuje częściowo zbiór  $A$ , jeśli jest ona zwrotna, słabo asymetryczna i przechodnia w  $A$ <sup>1)</sup>. Różnica między pojęciem częściowego uporządkowania a pojęciem uporządkowania polega więc na tym, że relacja częściowo porządkująca nie musi być spójna. Teoria zbiorów częściowo uporządkowanych jest zatem uogólnieniem teorii zbiorów uporządkowanych.

Zamiast  $x R y$  piszemy w teorii zbiorów częściowo uporządkowanych zazwyczaj  $x \leq_R y$  lub krótko  $x \leq y$ .

**PRZYKŁADY.** 1. Każdy zbiór uporządkowany jest też częściowo uporządkowany.

2. Zbiór liczb naturalnych jest częściowo uporządkowany przez relację podzielności.

3. Każda rodzina zbiorów jest częściowo uporządkowana przez relację inkluzji.

4. Każdy pierścień Boole'a jest częściowo uporządkowany przez relację  $a \leq b$  (por. rozdział I, § 8, str. 33).

5. Podziałem zbioru  $X$  nazywamy każdą rodzinę  $\mathcal{A}$  zbiorów rozłącznych dających w sumie  $X$ . Relacja  $\subseteq$ , która zachodzi między dwoma podziałami  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  zbioru  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór  $T$  klasy  $\mathcal{A}$  jest zawarty w pewnym zbiorze  $U$  klasy  $\mathcal{B}$ , porządkuje częściowo zbiór wszystkich podziałów zbioru  $X$ . Zamiast  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  mówimy, że  $\mathcal{B}$  jest zagęszczeniem  $\mathcal{A}$ .

6. Niech  $R$  będzie relacją, która zachodzi między dwoma ciągami  $a = (a_1, a_2, \dots)$  i  $b = (b_1, b_2, \dots)$  liczb naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = b$ , albo gdy istnieje takie  $n$ , że dla  $m > n$  jest  $a_m > b_m$ . Relacja  $R$  porządkuje częściowo zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych.

<sup>1)</sup> Teoria zbiorów częściowo uporządkowanych i struktur została zapoczątkowana przez Dedekinda. Szczegółowy wykład tej teorii podany jest w książce: G. Birkhoff, *Lattice theory*, 2-e wyd., New York 1948.

7. Relacje  $S$  i  $S_a$  określone w § 6 (str. 167) porządkują częściowo produkt  $P_x F_x$ .

Niech  $A$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację  $R$  i niech  $f_t \in A$  dla  $t \in T$ . Inaczej mówiąc,  $f$  jest funkcją o wartościach należących do  $A$ , tj.  $f \in A^T$ .

Element  $u \in A$  nazywa się *kresem górnym* elementów  $f_t$ , jeśli  $f_t \leq u$  dla każdego  $t \in T$ , przy czym  $u$  jest najwcześniejszym elementem o tej własności:

$$(i) \quad \prod_{t \in T} (f_t \leq u),$$

$$(ii) \quad [\prod_{t \in T} (f_t \leq v)] \rightarrow (u \leq v).$$

Zastępując tu znaki  $\leq$  przez  $\geq$  otrzymujemy definicję *kresu dolnego*.

Kres górny elementów  $f_t$ , o ile istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie. Istotnie, założmy, że prócz (i) i (ii) zachodzą wzory

$$(i') \quad \prod_{t \in T} (f_t \leq u'),$$

$$(ii') \quad [\prod_{t \in T} (f_t \leq v)] \rightarrow (u' \leq v).$$

Podstawiając w (ii')  $v = u$  i uwzględniając (i), otrzymamy  $u' \leq u$ . Podobnie z (ii) i (i') wynika  $u \leq u'$ . Dwa te wzory dają  $u = u'$ , gdyż relacja  $\leq$  jest słabo asymetryczna.

Podobnie dowodzi się jednoznaczności kresu dolnego.

Kres górny elementów  $f_t$  (o ile istnieje) oznaczany jest w teorii zbiorów częściowo uporządkowanych symbolem  $\cup_{t \in T} f_t$ , zaś kres dolny symbolem  $\cap_{t \in T} f_t$ . Jeśli  $T$  jest zbiorem skończonym:  $T = \{1, 2, \dots, n\}$  i  $f_1 = a, f_2 = b, \dots, f_n = h$ , to kres górny tych elementów oznaczamy też symbolem  $a \cup b \cup \dots \cup h$ , a kres dolny symbolem  $a \cap b \cap \dots \cap h$ .

Kres dolny wszystkich elementów zbioru  $A$  (o ile istnieje) nazywamy elementem zerowym lub krótko zerem i oznaczamy przez  $0_A$  lub po prostu 0. Analogicznie kres górny wszystkich elementów zbioru  $A$  (o ile istnieje) nazywamy elementem jednostkowym lub jednością i oznaczamy przez  $1_A$  lub 1.

Oczywiście  $a \cap b \leq a$  i  $a \cap b \leq b$ , o ile  $a \cap b$  istnieje, i podobnie  $a \leq a \cup b$  i  $b \leq a \cup b$ , o ile  $a \cup b$  istnieje.

Jeśli  $a \leq b$ , to  $a \cup b$  i  $a \cap b$  istnieją i są równe odpowiednio  $b$  i  $a$ .

Wynika stąd, że jeśli istnieją  $a \cap b$  i  $a \cup b$ , to

$$(1) \quad a \cup (a \cap b) = a,$$

$$(2) \quad a \cap (a \cup b) = a.$$

Z definicji wynika, że

$$(3) \quad a \cup a = a,$$

$$(4) \quad a \cap a = a.$$

Zachodzi następujące prawo łączności: niech  $T = \Sigma T_x$ ; jeśli istnieje dla każdego  $x$  kres  $s_x = \cup_{t \in T_x} f_t$ , to kres  $\cup_{t \in T} f_t$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kres  $\cup_x s_x$  i przy tym  $\cup_{t \in T} f_t = \cup_x s_x$ .

Dowód. Załóżmy, że istnieje kres  $s = \cup_x s_x$ . Wynika stąd, że  $s \geq s_x$ , a ponieważ  $s_x \geq f_t$  dla  $t \in T_x$ , więc  $s \geq f_t$  dla  $t \in T_x$ , skąd wobec dowolności  $x$  wynika  $s \geq f_t$  dla  $t \in T$ . Załóżmy, że  $u \geq f_t$  dla  $t \in T$ . W szczególności więc  $u \geq f_t$  dla  $t \in T_x$ , skąd wynika, że  $u \geq s_x$ , a więc  $u \geq s$ . Zatem  $s = \cup_{t \in T} f_t$ .

Analogicznie dowodzi się, że z istnienia  $\cup_{t \in T} f_t$  wynika istnienie  $\cup_x s_x$  i że oba te kresy są równe.

Podobne prawo łączności zachodzi też dla kresów dolnych.

Z praw łączności wynika, że

$$(5) \quad a \cup b \cup c = a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c,$$

$$(6) \quad a \cap b \cap c = a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c.$$

**Definicja.** Zbiór częściowo uporządkowany nazywamy *strukturą*, jeśli dla dowolnych dwu jego elementów  $a$  i  $b$  istnieją kresy:  $a \cup b$  i  $a \cap b$ .

Z praw łączności dla działań  $\cup$  i  $\cap$  wynika (przez indukcję), że w strukturze dla każdej skończonej liczby elementów  $a, b, \dots, h$  istnieją kresy: górny  $a \cup b \cup \dots \cup h$  i dolny  $a \cap b \cap \dots \cap h$ .

Tożsamości (1)–(6) charakteryzują dowolne struktury (por. ćwiczenie 1 na str. 175). W zastosowaniach spotyka się często struktury czyniące zadość pewnym dodatkowym warunkom:

1. Strukturę nazywamy *modularną*, jeśli zachodzi w niej prócz (1)–(6) zależność

$$(7) \quad (a \leq c) \rightarrow [a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c].$$

2. Strukturę nazywamy *rozdzielną*, jeśli zachodzą w niej prócz praw (1)–(6) tożsamości

$$(8) \quad a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$$

$$(9) \quad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

3. Strukturę  $A$  nazywamy *zupełną*, jeśli dla każdego zbioru  $T$  i dla każdej funkcji  $f \in A^T$  istnieją kresy: górny  $\cup_{t \in T} f_t$  i dolny  $\cap_{t \in T} f_t$ .

**PRZYKŁADY.** 1. Każdy zbiór uporządkowany  $A$  jest strukturą;  $a \cup b$  jest przy tym późniejszym, a  $a \cap b$  wcześniejszym z elementów  $a$  i  $b$  (o ile  $a \neq b$ ). Struktura ta jest rozdzielna (a zatem też modularna).  $A$  jest strukturą zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $A$  nie ma luk i ma pierwszy i ostatni element.

2. Zbiór wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru 1 jest strukturą zupełną i rozdzielną ze względu na relację inkluzji; przy tym działania  $\cup$  i  $\cap$  mają następujące znaczenie

$$\cup_i X_i = \Sigma_i X_i \quad \text{ i } \quad \cap_i X_i = \Pi_i X_i.$$

Ten sam zbiór jest także strukturą zupełną ze względu na relację  $\supset$ , przy czym w tym przypadku:

$$\cup_i X_i = \Pi_i X_i \quad \text{ i } \quad \cap_i X_i = \Sigma_i X_i.$$

3. Ogólniej, każda rodzina zbiorów  $\mathcal{A}$ , która zawiera sumę i iloczyn dowolnych dwu swych elementów (tj.  $X, Y \in \mathcal{A} \rightarrow X + Y \in \mathcal{A}$  i  $X \cdot Y \in \mathcal{A}$ ) jest strukturą ze względu na relację inkluzji i  $X \cup Y = X + Y$ ,  $X \cap Y = X \cdot Y$ . Struktury tego rodzaju nazywać będziemy strukturami zbiorów. Są one zawsze rozdzielne.

4. Rodzina wszystkich zbiorów domkniętych dowolnej przestrzeni topologicznej (por. rozdział I, § 8, str. 26) jest strukturą zupełną ze względu na relację inkluzji, przy czym

$$\cup_i X_i = \overline{\Sigma_i X_i} \quad \text{ i } \quad \cap_i X_i = \Pi_i X_i.$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że  $\Pi_i X_i$  jest największym zbiorem domkniętym zawartym w każdym  $X_i$  (por. rozdział II, § 8, str. 68), zaś  $\overline{\Sigma_i X_i}$  — najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym wszystkie  $X_i$ . Struktura ta jest rozdzielna, a więc też modułarna.

5. Zbiór liczb naturalnych jest strukturą ze względu na relację podzielności. Wzór  $a \leq b$  znaczy tu, że  $b$  jest dzielnikiem  $a$ . A więc  $a \cap b$  jest najmniejszą wspólną wielokrotnością, zaś  $a \cup b$  największym wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  i  $b$ . Struktura ta nie jest zupełna. Liczba 1 jest elementem jednostkowym tej struktury, nie ma w niej natomiast zera. Struktura ta jest rozdzielna, a więc też modułarna.

6<sup>1)</sup>. Rozpatrzmy przestrzeń euklidesową  $n$ -wymiarową  $\mathcal{E}^n$  i rodzinę  $\mathcal{L}_n$  jej podzbiorów liniowych (tj. punktów, prostych, płaszczyzn i ogólnie przestrzeni  $k$  wymiarowych, gdzie  $k \leq n$ ) przechodzących przez początek układu. Rodzina  $\mathcal{L}_n$  jest częściowo uporządkowana przez stosunek inkluzji. Jest ona przy tym strukturą:  $A \cap B$  jest częścią wspólną zbiorów  $A$  i  $B$ , zaś  $A \cup B$  najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą  $A$  i  $B$ . Np. jeśli  $A$  i  $B$  są dwiema płaszczyznami, to  $A \cup B$  jest przestrzenią trójwymiarową, o ile  $A \cap B$  jest prostą, zaś — czterowymiarową, o ile  $A \cap B$  jest punktem.

Zerem struktury  $\mathcal{L}_n$  jest zbiór jednopunktowy (początek układu), jednością zaś cała przestrzeń  $\mathcal{E}^n$ .

<sup>1)</sup> Przykłady 6 i 7 wskazują na możliwość zastosowania pojęć teorii struktur w geometrii. Menger wykazał istotnie, że całą geometrię rzutową  $n$ -wymiarową można wyłożyć jako część teorii struktur, a wychodząc stąd v. Neumann skonstruował „geometrię rzutową o continuum wymiarów”. Por. G. Birkhoff, *Lattice theory*, wydanie 2-e, str. 102—103, 110—111, 116—132 i cytowaną tam literaturę.

Struktura  $\mathcal{L}_n$  nie jest rozdzielna, jest natomiast modułarna. W strukturze tej każdy zstępujący ciąg  $a_1 > a_2 > \dots$  ma co najwyżej  $n+1$  elementów.

7. Rozpatrzmy  $n$  wymiarową przestrzeń rzutową  $R^n$  (tj. przestrzeń  $\mathcal{E}^n$  wzbogaconą o  $n-1$  wymiarową hiperpłaszczyznę w nieskończoności) i rodzinę  $\mathcal{M}_n$  jej podzbiorów liniowych (niekoniecznie przechodzących przez początek układu). Rodzina  $\mathcal{M}_n$  jest znów strukturą, przy czym  $A \cap B$  jest częścią wspólną  $A$  i  $B$ , zaś  $A \cup B$  — najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą  $A$  i  $B$ . Zerem struktury  $\mathcal{M}_n$  jest zbiór pusty, a jednością — przestrzeń  $R^n$ . Podobnie jak w przykładzie 6, każdy zstępujący ciąg elementów  $\mathcal{M}_n$  składa się z co najwyżej  $n+2$  wyrazów.

8. Rodzina dzielników normalnych dowolnej grupy  $G$  jest strukturą modułarną, na ogół nierozdzielną. Zerem tej struktury jest grupa składająca się tylko z elementu jednostkowego, jednością — cała grupa  $G$ . Jeśli  $A$  i  $B$  są dzielnikami normalnymi  $G$ , to  $A \cap B$  jest częścią wspólną  $A$  i  $B$ , zaś  $A \cup B$  najmniejszym dzielnikiem normalnym zawierającym  $A$  i  $B$ , tj. zbiorem iloczynów  $a \cdot b$ , gdzie  $a \in A$  i  $b \in B$ .

9. Każdy pierścień Boole'a (z jednością) jest strukturą rozdzielną zawierającą 0 i 1. W strukturze tej dla każdego elementu  $x$  istnieje taki element  $y = x'$ , że  $x \cup y = 1$  i  $x \cap y = 0$ .

10. Zbiór zdań dowolnej teorii matematycznej staje się strukturą ze względu na stosunek wynikania, gdy utożsamia się każde dwa zdania wzajemnie z siebie wynikające. Wzór  $a \leq b$  oznacza, że zdanie  $b$  wynika ze zdania  $a$ . Zdanie  $a \cup b$  jest alternatywą, zaś  $a \cap b$  koniunkcją zdań  $a$  i  $b$ . Zdanie fałszywe jest zerem, a zdanie prawdziwe jednością tej struktury.

11. Rodzina  $\mathcal{C}^c$  wszystkich funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest strukturą ze względu na relację

$$f \leq g = \prod_x [f(x) \leq g(x)].$$

Z przykładów tych widać, jak bardzo są różnorodne zbiory częściowo uporządkowane i struktury występujące w matematyce.

ĆWICZENIA. 1) Załóżmy, że w zbiorze  $\mathcal{A}$  są określone działania  $\cup$  i  $\cap$  czyniące zadość prawom (1)–(6). Wykazać, że

a)  $\{a \cup b = b\} = \{a \cap b = a\}$ ;

b) relacja  $\leq$  określona wzorem  $a \leq b = \{a \cup b = b\}$  częściowo porządkuje zbiór  $\mathcal{A}$ ;

c) kresem górnym elementów  $a$  i  $b$  ze względu na relację  $\leq$  jest  $a \cup b$ , a kresem dolnym  $a \cap b$ .

2) Udowodnić, że w każdej strukturze zachodzi prawo

$$a \leq c \rightarrow a \cup (b \cap c) \leq (a \cup b) \cap c.$$

3) Udowodnić, że w każdej strukturze równości (8) i (9) wynikają wzajemnie jedna z drugiej.

4) Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem. Rodzina  $2^A$  (tj. rodzina wszystkich relacji o polu zawartym w  $A$ ) jest częściowo uporządkowana przez relację inkluzji. Wykazać, że rodzina relacji przechodnich jest strukturą i znaleźć znaczenie działań  $\cup$  i  $\cap$ .

5) Rodzina wszystkich podziałów zbioru  $A$  uporządkowana częściowo przez relację  $\varrho$  określoną w przykładzie 5 na str. 171, jest strukturą. Znaleźć znaczenie działań  $\cup$  i  $\cap$ .

6) Niech  $A$  będzie strukturą rozdzielną zawierającą 0 i 1. Wykazać, że:

a) dla każdego  $x \in A$  istnieje co najwyżej jedno  $y$  takie, że  $x \cup y = 1$  i  $x \cap y = 0$ ;

b) jeśli dla każdego  $x$  istnieje  $y = x'$  spełniające te warunki, to  $A$  jest pierścieniem Boole'a.

**\* § 8. Teoria reprezentacji struktur rozdzielnych<sup>1)</sup>.** Mówimy, że zbiór  $A$  częściowo uporządkowany przez relację  $R$  jest izomorficzny ze zbiorem  $B$  częściowo uporządkowanym przez relację  $S$ , jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie  $f$  zbioru  $A$  na  $B$  takie, że

$$(a \leq_R b) = (f(a) \leq_S f(b))$$

dla wszystkich  $a, b \in A$ . Pojęcie to jest bezpośrednim uogólnieniem pojęcia podobieństwa zbiorów (por. § 1, str. 141, definicja 3 i uwaga). Zamiast „zbiory izomorficzne” mówimy też „zbiory o tym samym typie”.

**PRZYKŁADY.** 1. Każdy zbiór częściowo uporządkowany  $A$  jest izomorficzny z pewną rodziną zbiorów częściowo uporządkowaną przez stosunek inkluzji. Istotnie, jeśli

$$R(a) = \bigcup_x [x \leq a] \quad \text{dla} \quad a \in A,$$

to  $a \leq b = R(a) \subset R(b)$ , a więc funkcja  $R$  odwzorowuje izomorficznie zbiór  $A$  na rodzinę zbiorów  $R(a)$  częściowo uporządkowaną przez stosunek inkluzji.

2. Struktura  $M_n$  (por. § 7, przykład 7, str. 175) jest izomorficzna ze strukturą  $L_{n+1}$  (por. tamże, przykład 6, str. 174).

<sup>1)</sup> Teoria ta pochodzi od G. Birkhoffa. Por. jego pracę *On the combination of subalgebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **29** (1933), str. 441—464, twierdzenie 25.2, oraz *Lattice theory*, 2-e wyd. rozdział IX. Por. też. M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **67** (1937), str. 1—25.

Istotnie, niech  $H$  będzie  $n$  wymiarową hiperpłaszczyzną przestrzeni  $\mathcal{E}^{n+1}$  nie przechodzącą przez początek układu. Dodajmy do  $H$  przestrzeń niewłaściwą  $n-1$  wymiarową położoną „w nieskończoności”.  $H$  staje się więc  $n$  wymiarową przestrzenią rzutową. Każdemu elementowi struktury  $L_{n+1}$ , tj. podprzestrzeni liniowej  $A$  przestrzeni  $\mathcal{E}^{n+1}$ , przechodzącej przez początek układu, przyporządkujemy część wspólną  $A$  i  $H$  (jeśli  $A$  i  $H$  są równoległe, to przyjmujemy, że ich część wspólna leży w przestrzeni niewłaściwej). Ta część wspólna jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $H$ , a więc elementem struktury  $M_n$ . W ten sposób uzyskujemy izomorficzne odwzorowanie struktury  $L_{n+1}$  na  $M_n$ .

Jeśli  $A$  jest strukturą, to każdy zbiór  $B$  izomorficzny z  $A$  jest też strukturą. Jeśli  $A$  jest strukturą modułową lub rozdzielną, to  $B$  też ma te własności. Ogólniej, każda własność, przysługująca zbiorowi  $A$  i wyrażona przy pomocy relacji  $R$  i pojęć logicznych, przysługuje też każdemu zbiorowi  $B$  izomorficznemu z  $A$ .

W szczególności więc, jeśli  $A$  jest pierścieniem Boole'a, to  $B$  jest też pierścieniem Boole'a (por. § 7, ćwiczenie 6).

Wyjaśnimy obecnie jakie zadanie stawia sobie teoria reprezentacji struktur.

Pojęcie struktury jest abstrakcyjne: o naturze elementów tworzących strukturę nie czyni się żadnych założeń. W teorii reprezentacji staramy się skonstruować dla klasy wszystkich struktur, lub też dla pewnych aksjomatycznie określonych jej podklas (np. dla klasy struktur rozdzielnych lub dla klasy pierścieni Boole'a) możliwie konkretne realizacje wszystkich typów izomorfizmu struktur. Inaczej mówiąc, szukamy wśród struktur, których elementy są konkretnymi twórcami matematycznymi (np. zbiorami) i w których działania  $\cup$  i  $\cap$  mają określone konkretne znaczenia (np. pokrywają się z teorio-mnogościowymi działaniami dodawania i mnożenia), struktury izomorficznej z góry daną strukturą rozpatrywanej klasy<sup>1)</sup>.

**Definicja.** Idealem struktury rozdzielnej  $A$  nazywamy niepusty zbiór  $ICA$  taki, że

$$(1) \quad (a \in I)(b \in I) \rightarrow (a \cup b \in I),$$

$$(2) \quad (a \leq b)(b \in I) \rightarrow (a \in I).$$

Ideal  $I$  nazywamy ideałem *pierwszym*, jeśli  $I \neq A$  oraz dla  $a, b \in A$

$$(3) \quad (a \cap b \in I) \rightarrow [(a \in I) + (b \in I)].$$

<sup>1)</sup> Tak sformułowane zagadnienie teorii reprezentacji odnosi się nie tylko do struktur, ale do dowolnych aksjomatycznie określonych systemów algebraicznych, np. do grup, pierścieni itp. Historycznie pierwszą (i zapewne najgłębszą) teorią reprezentacji była teoria reprezentacji grup za pomocą przekształceń liniowych. Por. np. v. der Waerden, *Moderne Algebra I*, 2-e wydanie, Lipsk 1940.



**PRZYKŁADY.** 1. Niech  $\mathcal{A}$  będzie strukturą zbiorów (np. strukturą wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru  $X$ ), zaś  $a$  jakimkolwiek elementem sumy  $S(\mathcal{A})$ . Rodzina  $I$  tych zbiorów  $M \in \mathcal{A}$ , które nie zawierają elementu  $a$  jest ideałem pierwszym struktury  $\mathcal{A}$ .

Jeśli  $a, b, c, \dots$  są dowolnymi różnymi elementami sumy  $S(\mathcal{A})$ , to rodzina tych  $M \in \mathcal{A}$ , które nie zawierają żadnego z elementów  $a, b, c, \dots$ , jest też ideałem, ale na ogół nie pierwszym.

2. Rodzina zbiorów  $M \in \mathcal{A}$ , dla których  $\overline{M} < m$ , jest ideałem (niekoniecznie pierwszym) struktury  $\mathcal{A}$ . Np. rodzina wszystkich skończonych zbiorów  $M \in \mathcal{A}$  jest ideałem w  $\mathcal{A}$ . Podobnie, ideałem jest rodzina wszystkich przeliczalnych zbiorów należących do  $\mathcal{A}$ .

3. Jeśli  $\mathcal{A}$  jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, to rodzina zbiorów miary 0 (Lebesgue'a) jest ideałem w  $\mathcal{A}$ .

4. Zbiór  $\mathcal{J}$  liczb naturalnych jest, jak wiadomo (por. str. 174, przykład 5), strukturą ze względu na stosunek podzielności.

Zbiór  $I_n = \{n, 2n, 3n, \dots\}$  jest ideałem w  $\mathcal{J}$ . Ideał ten jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest potęgą liczby pierwszej<sup>1)</sup>.

5. W dowolnej strukturze zbiór  $E_x[x \leq a]$  jest ideałem. Nazywa się go *ideałem głównym* o elemencie tworzącym  $a$ .

Korzystać będziemy z następujących ogólnych twierdzeń dotyczących ideałów.

$$(4) \quad (a \cup b \in I) \rightarrow (a \in I) \cdot (b \in I).$$

Istotnie  $a \leq a \cup b$  i  $b \leq a \cup b$ ; skoro więc  $a \cup b \in I$ , to  $a \in I$  i  $b \in I$  w myśl (2).

$$(5) \quad a \in I \rightarrow a \cap b \in I.$$

Istotnie  $a \cap b \leq a$ .

$$(6) \quad \text{Zbiór } I^*(b) \text{ takich elementów } x, \text{ że } x \leq i \cup b \text{ dla pewnego } i \in I, \text{ jest ideałem oraz } ICI^*(b), b \in I^*(b).$$

Istotnie, jeśli  $x \leq i_1 \cup b$  i  $y \leq i_2 \cup b$ , to  $x \cup y \leq (i_1 \cup i_2) \cup b$ , skąd  $x \cup y \in I^*(b)$ , gdyż  $i_1 \cup i_2 \in I$ . Jeśli  $x \leq i \cup b$  i  $y \leq x$ , to  $y \leq i \cup b$ . Zbiór  $I^*(b)$  jest więc ideałem. Warunki  $ICI^*(b)$  i  $b \in I^*(b)$  są oczywiste.

<sup>1)</sup> W teorii liczb algebraicznych rozpatruje się również zbiory liczb zwane ideałami. Określenie ideałów w sensie teorii liczb algebraicznych jest jednak odmienne (co związane jest z tym, że na ogół liczby całkowite ciała liczbowego nie tworzą struktury ze względu na stosunek podzielności).

$$(7) \quad \text{Niech ideały } I_t \text{ dla } t \in T \text{ tworzą rodzinę monotoniczną ideałów taką, że } a \in I_t \text{ i } b \text{ non } \in I_t \text{ dla każdego } t. \text{ Wówczas suma } I = \sum_t I_t \text{ jest ideałem oraz } a \in I \text{ i } b \text{ non } \in I.$$

Istotnie, jeśli  $x \in I_{t_1}$  i  $y \in I_{t_2}$ , to bądź oba elementy  $x, y$  należą do  $I_{t_3}$ , bądź oba do  $I_{t_4}$ , a więc w każdym razie  $(x \cup y) \in I$ . Jeśli  $y \in I_t$  i  $x \leq y$ , to  $x \in I_t$ , a więc  $x \in I$ . Zbiór  $I$  jest zatem ideałem, przy czym jest widoczne, że  $a \in I$  i  $b \text{ non } \in I$ .

$$(8) \quad \text{Jeśli } b \text{ non } \leq a, \text{ to istnieją takie ideały } I, \text{ że } a \in I \text{ i } b \text{ non } \in I.$$

Istotnie, zbiór  $E_x[x \leq a]$  jest takim ideałem.

Załóżmy, że  $b \text{ non } \leq a$  i niech  $P_{a,b}$  będzie rodziną tych ideałów, które zawierają  $a$ , lecz nie zawierają  $b$ .

$$(9) \quad \text{Jeśli struktura } \mathcal{A} \text{ jest rozdzielna i } b \text{ non } \leq a, \text{ to każdy element nasycony } I \text{ rodziny } P_{a,b} \text{ jest ideałem pierwszym.}$$

Istotnie, załóżmy, że  $x \cap y \in I$ . Jeśli  $x \text{ non } \in I$ , to ideał  $I$  jest częścią właściwą ideału  $I^*(x)$ , a zatem  $I^*(x)$  nie należy do rodziny  $P_{a,b}$ . Ponieważ  $a \in I^*(x)$ , więc  $b \in I^*(x)$ , skąd  $b \leq i_1 \cup x$  dla pewnego  $i_1 \in I$ . Podobnie dowodzi się, że jeśli  $y \text{ non } \in I$ , to  $b \leq i_2 \cup y$  dla pewnego  $i_2 \in I$ . Z prawa rozdzielności obowiązującego w strukturze  $\mathcal{A}$  wynika teraz

$$(i) \quad b = b \cap b \leq (i_1 \cup x) \cap (i_2 \cup y) = (i_1 \cap i_2) \cup (i_1 \cap y) \cup (x \cap i_2) \cup (x \cap y).$$

W myśl (5), elementy  $i_1 \cap i_2$ ,  $i_1 \cap y$  oraz  $x \cap i_2$  należą do  $I$ , zaś  $x \cap y$  należy do  $I$  na mocy założenia. Zatem element po prawej stronie wzoru (i) należy do  $I$ , skąd w myśl (2) wynika, że  $b \in I$ , wbrew założeniu, że  $I \in P_{a,b}$ . Założenie, że ani  $x$ , ani  $y$  nie należą do  $I$ , prowadzi zatem do sprzeczności. Ponieważ  $b \text{ non } \in I$ , więc  $I \neq \mathcal{A}$ . Wynika stąd, że  $I$  jest ideałem pierwszym.

W rozdziale V, § 11, str. 228, wykażemy, że z twierdzeń (7) i (8) wynika (przy pomocy pewnika wyboru) twierdzenie

$$^{\circ}(10) \quad \text{Rodzina } P_{a,b} \text{ ma element nasycony (tzn. istnieje } I \in P_{a,b} \text{ takie, że } I \text{ nie jest częścią właściwą żadnego ideału należącego do } P_{a,b}).$$

**° Twierdzenie 1.** Dla każdej struktury rozdzielnej istnieje izomorficzna z nią struktura zbiorów, tzn. taka rodzina zbiorów  $\mathcal{A}$ , że

$$(X \in \mathcal{A})(Y \in \mathcal{A}) \rightarrow (X + Y \in \mathcal{A})(XY \in \mathcal{A}).$$

Dowód. Niech  $\mathcal{A}$  będzie strukturą rozdzielną. Każdemu  $a \in \mathcal{A}$  przyporządkujemy rodzinę  $R(a)$  ideałów pierwszych  $I$  spełniających warunek  $a \text{ non } \in I$ .

Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Istotnie, jeśli  $a \neq b$ , to albo  $a \text{ non } \leq b$ , albo  $b \text{ non } \leq a$ . Zgodnie z (9) i (10) istnieje więc ideał pierwszy  $I$  taki, że  $I \in \mathbf{P}_{a,b}$  lub  $I \in \mathbf{P}_{b,a}$ , tzn. taki, że  $a \in I$  i  $b \text{ non } \in I$ , lub  $b \in I$  i  $a \text{ non } \in I$ . W pierwszym przypadku jest  $I \in \mathbf{R}(b)$  i  $I \text{ non } \in \mathbf{R}(a)$ , w drugim zaś  $I \in \mathbf{R}(a)$  i  $I \text{ non } \in \mathbf{R}(b)$ . W każdym więc razie  $\mathbf{R}(a) \neq \mathbf{R}(b)$ .

Z (1) i (4) wynika, że

$$\begin{aligned} I \in \mathbf{R}(a \cup b) &= a \cup b \text{ non } \in I = [(a \text{ non } \in I) + (b \text{ non } \in I)] \\ &= [I \in \mathbf{R}(a) + I \in \mathbf{R}(b)] = [I \in \mathbf{R}(a) + \mathbf{R}(b)], \end{aligned}$$

zaś z (3) i (5) — że

$$\begin{aligned} I \in \mathbf{R}(a \cap b) &= a \cap b \text{ non } \in I = (a \text{ non } \in I) \cdot (b \text{ non } \in I) \\ &= [I \in \mathbf{R}(a)] \cdot [I \in \mathbf{R}(b)] = I \in \mathbf{R}(a) \cdot \mathbf{R}(b), \end{aligned}$$

a więc  $\mathbf{R}(a \cup b) = \mathbf{R}(a) + \mathbf{R}(b)$  i  $\mathbf{R}(a \cap b) = \mathbf{R}(a) \cdot \mathbf{R}(b)$ .

Wzory te dowodzą, że klasa złożona ze wszystkich rodzin  $\mathbf{R}(a)$  jest strukturą zbiorów izomorficzną ze strukturą  $A$ .

Z twierdzenia 1 wynika jako wniosek (por. str. 176, ćwiczenie 6):

**Twierdzenie 2.** Dla każdego pierścienia Boole'a istnieje izomorficzny z nim pierścień Boole'a, którego elementami są zbiory i w którym działania dodawania, mnożenia i uzupełniania mają zwykłe znaczenie teorii-mnożnościowe.

UWAGA. Z twierdzenia 1 wnosimy, że działania dodawania i mnożenia zbiorów są całkowicie scharakteryzowane przez aksjomaty teorii struktur rozdzielnych (§ 7, wzory (1)—(6), (8) i (10)): każde dwa działania, spełniające te aksjomaty są izomorficzne z działaniami dodawania i mnożenia zbiorów. Każda zatem własność działań dodawania i mnożenia zbiorów jest konsekwencją tych aksjomatów. Podobnie, na mocy twierdzenia 2, aksjomaty algebry Boole'a (rozdział I, § 9, str. 32—34) całkowicie charakteryzują działania dodawania, mnożenia i uzupełniania zbiorów.

**ĆWICZENIA.** 1) Skonstruować strukturę zbiorów izomorficzną ze strukturą  $\mathcal{J}$  częściowo uporządkowaną przez stosunek podzielności.

2) Jeżeli ideał  $I$  struktury rozdzielnej  $A$  jest maksymalny (tj. każdy ideał zawierający  $I$  jest albo równy  $A$  albo  $I$ ), to  $I$  jest ideałem pierwszym; twierdzenie odwrotne jest fałszywe.

3) Jeśli  $A$  jest pierścieniem Boole'a z jednością, to ideał  $I$  jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego  $a$  bądź  $a \in I$ , bądź  $a' \in I$ .

4) W algebrze Boole'a pojęcia ideału pierwszego i maksymalnego są równoważne.

5) Rodzina ideałów struktury rozdzielnej  $A$  jest sama strukturą rozdzielną ze względu na stosunek inkluzji jako relacji porządkującej.

**\* § 9. Równoważności. Klasy abstrakcji.** Prócz omówionych poprzednio typów relacji spotyka się w zastosowaniach bardzo często relacje zwrotne, symetryczne i przechodnie. Relacje, które mają te trzy własności, nazywamy *równoważnościami*<sup>1)</sup>. Udowodnimy o nich

**Twierdzenie 1.** (Zasada abstrakcji). Jeśli  $C$  jest polem relacji równoważności  $R$ , to istnieje rodzina  $\mathbf{K}$  rozłącznych między sobą i nie-pustych podzbiorów zbioru  $C$  taka, że

$$(1) \quad C = S(\mathbf{K}),$$

$$(2) \quad xRy = \sum_{X \in \mathbf{K}} [(x \in X)(y \in X)].$$

Mianowicie:

$$\mathbf{K} = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} \sum_{x \in X} \prod_{y \in C} [(y \in X = yRx)].$$

Na to więc, by zbiór  $X \subset C$  należał do  $\mathbf{K}$  potrzeba i wystarcza, aby istniał element  $x \in X$  taki, że  $X$  składa się ze wszystkich  $y$  pozostających w stosunku  $R$  do  $x$ .

Dowód. Z definicji rodziny  $\mathbf{K}$  wynika, że zbiory wchodzące w skład  $\mathbf{K}$  są niepuste i zawarte w  $C$ .

Niech  $X_1, X_2 \in \mathbf{K}$  i niech  $x_1, x_2$  będą dwoma elementami takimi, że

$$\begin{aligned} (i) \quad x_1 \in X_1, & \quad (ii) \quad \prod_{y \in C} [y \in X_1 = yRx_1], \\ (iii) \quad x_2 \in X_2, & \quad (iv) \quad \prod_{y \in C} [y \in X_2 = yRx_2]. \end{aligned}$$

Jeśli  $y_0 \in X_1 \cdot X_2$ , to na mocy (ii) i (iv)

$$y_0Rx_1 \quad i \quad y_0Rx_2,$$

a więc też

$$x_1Ry_0 \quad i \quad x_2Ry_0,$$

gdyż relacja  $R$  jest w myśl założenia symetryczna. Wobec przechodności relacji  $R$  otrzymujemy zatem zgodnie z (ii) i (iv)

$$y \in X_1 \rightarrow yRx_1 \rightarrow yRy_0 \rightarrow yRx_2 \rightarrow y \in X_2$$

oraz

$$y \in X_2 \rightarrow yRx_2 \rightarrow yRy_0 \rightarrow yRx_1 \rightarrow y \in X_1,$$

co dowodzi, że  $X_1 = X_2$ . Zatem zbiory klasy  $\mathbf{K}$  są rozłączne.

<sup>1)</sup> Na relacje te zwrócił pierwszy uwagę G. Frege w książce *Grundlagen der Arithmetik*, Wrocław 1884, str. 74—79.

Jeśli  $w \in C$ , to zbiór  $X = E_{y \in C}[yRx]$  należy w myśl definicji do  $K$ , gdyż  $\Pi_{y \in C}[y \in X = yRx]$  oraz  $w \in X$ , wobec zwrotności relacji  $R$ . Zatem dla każdego  $w \in C$  istnieje takie  $X \in K$ , że  $w \in X$ , co dowodzi, że  $C \subset S(K)$ . Nadto  $S(K) \subset C$ , gdyż każdy element rodziny  $K$  jest podzbiorem zbioru  $C$ ; wynika stąd (1).

Aby udowodnić warunek (2), założmy, że  $w \in X_1 \in K$  i  $y \in X_2 \in K$ .

Zbiory  $X_1$  i  $X_2$  są wyznaczone jednoznacznie przez  $w$  i  $y$ , gdyż zbiory rodziny  $K$  są rozłączne. Dla zbiorów  $X_1$  i  $X_2$  istnieją takie  $x_1, x_2 \in C$ , że spełnione są wzory (i)–(iv). Jeśli  $wRx_1$ , to na mocy (iv) z przechodniości relacji  $R$  wynika  $wRx_2$ , a więc  $w \in X_2$  i  $X_1 = X_2$ , gdyż  $X_1 \cdot X_2 = \emptyset$ . Na odwrót, jeśli  $X_1 = X_2$ , to  $x_1Rx_2$  i wobec przechodniości relacji  $R$  otrzymujemy z zależności

$$wRx_1, \quad x_1Rx_2, \quad x_2Ry$$

wniosek, że  $wRy$ . Mamy więc  $wRy = (X_1 = X_2)$ , co dowodzi, że rodzina  $K$  spełnia warunek (2).

**Twierdzenie 2 (odwrotne).** Jeśli  $K$  jest rodziną rozłącznych między sobą podzbiorów zbioru  $C$  spełniającą równość (1) i jeśli relacja  $R$  zachodzi między dwoma elementami zbioru  $C$  wtedy i tylko wtedy, gdy elementy te należą do tego samego zbioru rodziny  $K$ , to relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenia 1 i 2 wyjaśniają całkowicie strukturę relacji zwrotnych, symetrycznych i przechodnich. Zbiory należące do rodziny  $K$  nazywają się *klasami abstrakcji* relacji  $R$ .

**PRZYKŁADY.** 1. Niech  $C$  będzie zbiorem prostych na płaszczyźnie,  $R$  — relacją równoległości. W myśl zasady abstrakcji zbiór  $C$  rozpada się na rozłączne między sobą zbiory prostych takie, że dwie proste należą do tego samego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy są do siebie równoległe. Każdy z takich zbiorów (klas abstrakcji) wyznacza kierunek na płaszczyźnie.

2. Niech  $C$  będzie zbiorem ciągów  $a_1, a_2, \dots$  liczb wymiernych, czyniących zadość warunkowi Cauchy'ego. Niech relacja  $R$  zachodzi między dwoma ciągami  $a_1, a_2, \dots$  i  $b_1, b_2, \dots$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lim(a_n - b_n) = 0$ . W myśl zasady abstrakcji zbiór  $C$  rozpada się na rozłączne między sobą zbiory ciągów takie, że dwa ciągi  $a_1, a_2, \dots$  i  $b_1, b_2, \dots$  należą wtedy i tylko wtedy do tego samego zbioru, gdy  $\lim(a_n - b_n) = 0$ . Każdy z tych zbiorów ciągów (tj. każda z klas abstrakcji) wyznacza pewną liczbę rzeczywistą — wspólną granicę ciągów należących do tego zbioru. W teorii liczb niewymiernych Cantora liczby rzeczywiste określa się wprost jako te klasy abstrakcji.

3. Niech  $A$  będzie rodziną podzbiorów ustalonego zbioru  $I$ . Niech relacja  $R$  zachodzi między dwoma zbiorami  $X$  i  $Y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X \sim Y$ . W myśl zasady abstrakcji rodzina  $A$  rozpada się na rozłączne między sobą klasy takie, że dwa zbiory należą do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy są one tej samej mocy.

Klasy, na które rozpada się  $A$ , można uznać za liczby kardynalne; jeśli bowiem wzór  $\bar{X} = m$  interpretować jako  $X \in m$  (przy czym  $m$  jest jedną z klas abstrakcji, na które rozpada się rodzina  $A$ ), to aksjomat IX (str. 97) jest spełniony.

Wprowadzenie liczb kardynalnych przy pomocy pewnika IX jest jednak ogólniejsze, nie zakładamy tam bowiem, że rozważamy tylko zbiory zawarte w stałym zbiorze  $I$ .

Analogiczne uwagi stosują się też do pojęcia typu porządkowego i aksjomatu X.

4<sup>1)</sup>. Niech  $A$  będzie pierścieniem Boole'a,  $I$  dowolnym ideałem tego pierścienia. Wzór

$$(3) \quad x \dot{-} y \in I, \quad \text{gdzie} \quad x \dot{-} y = xy' + x'y,$$

wyznacza relację zwrotną, symetryczną i przechodnią w  $A$ . Istotnie, zwrotność wynika stąd, że  $0 \in I$ , gdyż  $0 \leq x$  dla każdego  $x \in A$ , symetria stąd, że  $x \dot{-} y = y \dot{-} x$ , wreszcie przechodność stąd, że  $x \dot{-} z \leq (x \dot{-} y) + (y \dot{-} z)$ . Pierścień Boole'a  $A$  rozpada się więc na rozłączne między sobą klasy abstrakcji, przy czym dwa elementy  $x$  i  $y$  należą wtedy i tylko wtedy do tej samej klasy, gdy  $x \dot{-} y \in I$ . Relację (3) zapisujemy zazwyczaj wzorem  $x = y \pmod{I}$ .

Oznaczmy przez  $[x]$  klasę abstrakcji, do której należy  $x$ . Łatwo wykazać, że jeśli  $x_1 = y_1 \pmod{I}$  i  $x_2 = y_2 \pmod{I}$ , to  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \pmod{I}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2 \pmod{I}$  i  $x'_1 = y'_1 \pmod{I}$ .

Wynika stąd, że klasa abstrakcji zawierająca element  $x_1 + x_2$  jest wyznaczona całkowicie przez klasy  $[x_1]$  i  $[x_2]$ . Klasę tę oznacza się symbolem  $[x_1] \oplus [x_2]$ , tj.

$$[x_1] \oplus [x_2] = [x_1 + x_2].$$

Podobnie przyjmujemy

$$[x_1] \odot [x_2] = [x_1 x_2],$$

$$[x_1]^* = [x'].$$

Rodzina klas  $[x]$  jest pierścieniem Boole'a ze względu na działania  $\oplus$ ,  $\odot$  i  $*$ . Nazywamy go *pierścieniem ilorazowym* i oznaczamy symbolem  $A/I$ . Zerem jego jest  $I = [0]$ .

<sup>1)</sup> Konstrukcja podana w przykładzie 4 jest znana z algebry, gdzie stosowana jest przy tworzeniu grup lub pierścieni homomorficznych z inną grupą lub pierścieniem. Zob. np. v. d. Waerden, *Moderne Algebra*, tom I, 2-e wyd., Berlin-Lipsk 1940.

Opisane tu działanie pozwala na tworzenie nowych pierścieni Boole'a z danego pierścienia. Postępowanie to znajduje zastosowanie m. in. w teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, gdzie nieraz „utożsamia się” zbiory różniące się o zbiór miary 0. Znaczący to, że od pierścienia  $2^{\mathcal{C}}$  wszystkich podzbiorów przestrzeni  $\mathcal{C}$  przechodzimy do pierścienia  $2^{\mathcal{C}}/I_0$ , gdzie  $I_0$  jest ideałem zbiorów miary 0.

ĆWICZENIA. 1) Wykazać, że jeśli  $I_0$  jest ideałem zbiorów miary 0, to pierścien  $2^{\mathcal{C}}/I_0$  nie ma atomów.

2) Jeśli  $I$  jest ideałem pierwszym pierścienia Boole'a  $\mathcal{A}$ , to pierścien  $\mathcal{A}/I$  ma 2 elementy, i na odwrót.

3) Jeśli  $I$  jest ideałem wszystkich skończonych podzbiorów zbioru  $\mathcal{J}$ , to pierścien  $2^{\mathcal{J}}/I$  zawiera continuum klas  $[X_s]$  takich, że  $[X_s] \odot [X_t] = I$  dla  $s \neq t$ .

## ROZDZIAŁ V.

### Zbiory dobrze uporządkowane.

**§ 1. Definicje. Zasada indukcji pozaskończonej.** Mówimy, że relacja  $R$  *dobrze porządkuje* zbiór  $X$ , jeśli relacja ta porządkuje  $X$  i przy tym każdy niepusty podzbiór zbioru  $X$  zawiera element najmocniejszy (ze względu na  $R$ )<sup>1)</sup>.

PRZYKŁADY. 1) Każdy zbiór typu  $\omega$  jest dobrze uporządkowany.

2) Zbiór złożony z liczb 1 oraz z liczb postaci  $1 - \frac{1}{n}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , jest dobrze uporządkowany w typ  $\omega+1$  przez relację  $\leq$ .

3) Niech  $a(n)$  będzie liczbą różnych czynników pierwszych liczb  $n$ . Relacja  $E_{xp}\{[a(x) < a(y)] + [a(x) = a(y)] \cdot [x \leq y]\}$  dobrze porządkuje zbiór liczb naturalnych w typ  $\omega^2$  (por. rozdział IV, str. 141 i str. 160, ćw. 6).

4) Suma uporządkowana (por. str. 161)  $S = \sum_{x \in T} F_x$ , gdzie zbiór  $T$  i składniki  $F_x$  są dobrze uporządkowane, jest dobrze uporządkowana.

Istotnie, niech  $Y$  będzie niepustym podzbiorem  $S$ . Zbiór tych  $x$ , dla których  $Y \cdot F_x \neq 0$ , jest niepustym podzbiorem zbioru  $T$ , a więc ma on element pierwszy  $x_0$ . Iloczyn  $Y \cdot F_{x_0}$  jest niepustym podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego  $F_{x_0}$ , a więc ma element pierwszy. Ten element jest oczywiście pierwszym elementem zbioru  $Y$ .

5) Produkt dwu (a więc też i produkt skończonej liczby) zbiorów dobrze uporządkowanych jest dobrze uporządkowany przez relację porządku leksykograficznego lub antyleksykograficznego.

Wynika to z przykładu 4 i twierdzenia 6 rozdziału IV, § 5, str. 166.

6) Każdy podzbiór zbioru dobrze uporządkowanego jest dobrze uporządkowany.

<sup>1)</sup> Pojęcie zbioru dobrze uporządkowanego pochodzi od Cantora, który wprowadził je po raz pierwszy w pracy *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Nr 5, *Mathematische Annalen* 21 (1883), § 3. Jest ciekawe, że Cantor wprowadził pojęcie zbiorów uporządkowanych później (w pracy ogłoszonej w r. 1895), najwidoczniej przy systematyzowaniu swych wyników z teorii zbiorów dobrze uporządkowanych.