ROZDZIAŁ III.

Teoria mocy.

§ 1. Równoliczność zbiorów. Liczby kardynalne. W rozdziale obecnym wprowadzimy pojęcie *równoliczności*, czyli *równości mocy zbiorów*. Jest to jedno z najbardziej charakterystycznych i najważniejszych pojęć teorii mnogości [1]).

Definicja. Dwa zbiory A i B są *równoliczne*, jeśli istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna f, dla której A jest zbiorem argumentów a B zbiorem wartości. Piszemy wówczas $A\sim B$. O funkcji f mówimy, że ustala ona równoliczność zbiorów A i B.

PRZYKŁADY. 1. Jeśli A jest zbiorem skończonym, tj. takim, że liczba n jego elementów jest jedną z liczb naturalnych $1,2,3,\ldots$, to zbiór B jest równoliczny z A wtedy i tylko wtedy, gdy B ma tyle elementów, co A. Pojęcie równoliczności jest więc uogólnieniem na zbiory dowolne elementarnego pojęcia równej liczebności zbiorów skończonych.

2. Niech A będzie przedziałem $a_1<x<a_2$, B — przedziałem $b_1<x<b_2$. Funkcja

$$f(x)=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_1)+b_1$$

jest wzajemnie jednoznaczna i odwzorowuje zbiór A na B; dowodzi to, że $A\sim B$.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą wzory:*

$$(1)\qquad A\sim A,\quad (A\sim B)\to(B\sim A),\quad (A\sim B)(B\sim C)\to(A\sim C).$$

Słowami: *równoliczność podlega prawom zwrotności, symetrii i przechodniości.*

[1]) Pojęcie równoliczności było po raz pierwszy systematycznie zbadane przez G. Cantora; por. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für reine und angewandte Mathematik **84** (1878), str. 242—258. Znał je wcześniej B. Bolzano; por. *Paradoxien des Unendlichen*, § 20, 1851.

Dowód. Równoliczność zbioru A z sobą samym ustala funkcja f określona dla $x\in A$ wzorem $f(x)=x$. Jeśli funkcja f ustala równoliczność zbiorów A i B, to funkcja f^{-1} ustala równoliczność zbiorów B i A (por. str. 56, twierdzenie 1). Jeśli funkcja f ustala równoliczność zbiorów A i B, a funkcja g — równoliczność zbiorów B i C, to funkcja złożona gf ustala równoliczność zbiorów A i C (por. str. 58, twierdzenie 4).

Zachodzą następujące wzory rachunkowe:

$$(2)\qquad (A\times B)\sim(B\times A),$$

$$(3)\qquad [A\times(B\times C)]\sim[(A\times B)\times C],$$

$$(4)\qquad (A\times\{a\})\sim A\sim A^{\{a\}},\qquad \{a\}^A\sim\{a\},$$

$$(5)\qquad (A_1\sim B_1)(A_2\sim B_2)\to[(A_1\times A_2)\sim(B_1\times B_2)],$$

$$(6)\qquad (A\sim B)\to(2^A\sim 2^B),$$

$$(7)\qquad (A_1\sim B_1)(A_2\sim B_2)(A_1A_2=0=B_1B_2)\to[(A_1+A_2)\sim(B_1+B_2)],$$

$$(8)\qquad Y^{X\times T}\sim(Y^X)^T,$$

$$(9)\qquad (Y\times Z)^X\sim(Y^X\times Z^X),$$

$$(10)\qquad (AB=0)\to(Y^{A+B}\sim Y^A\times Y^B).$$

Łatwe dowody wzorów (2)—(7) pomijamy. Podamy natomiast dowody ważnych wzorów (8)—(10).

Niech $f\in Y^{X\times T}$, tj. niech f będzie funkcją dwu zmiennych x i t, z których pierwsza przebiega zbiór X a druga zbiór T, wartości zaś funkcji f należą do Y. Dla każdego ustalonego t funkcja g_t (zmiennej x), określona równością $g_t(x)=f(x,t)$, odwzorowuje X na część Y, tj. należy do zbioru Y^X. Funkcja F, określona wzorem $F(t)=g_t$, przyporządkowuje więc każdemu $t\in T$ element zbioru Y^X, tj. $F\in(Y^X)^T$.

Jeśli f_1 i f_2 są różnymi funkcjami należącymi do zbioru $Y^{X\times T}$, to przyporządkowane im funkcje F_1 i F_2 są też różne. Istotnie, jeśli $f_1(x_0,t_0)\neq f_2(x_0,t_0)$, to elementy $F_1(t_0)$ i $F_2(t_0)$ zbioru Y^X są różne.

Każda funkcja $F\in(Y^X)^T$ jest przyporządkowana w opisany wyżej sposób pewnej funkcji $f\in Y^{X\times T}$, mianowicie, funkcji f określonej wzorem $f(x,t)=g_t(x)$, gdzie $g_t=F(t)$.

Wynika stąd, że przyporządkowując funkcji $f\in Y^{X\times T}$ funkcję $F\in(Y^X)^T$ ustalamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru $Y^{X\times T}$ na zbiór $(Y^X)^T$, co dowodzi wzoru (8).

Aby udowodnić wzór (9), zauważmy, że jeśli $f\in(Y\times Z)^X$, to $f(x)$ jest dla każdego $x\in X$ parą uporządkowaną $\langle g(x),h(x)\rangle$, gdzie $g(x)\in Y$ i $h(x)\in Z$. Wynika stąd, że $g\in Y^X$ i $h\in Z^X$. Z łatwością stwierdzamy, że przyporządkowując funkcji f parę $\langle g,h\rangle$ ustalamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru $(Y\times Z)^X$ na zbiór $Y^X\times Z^X$.

Aby wreszcie udowodnić wzór (10), przyporządkowujemy każdej funkcji $f \in Y^{A+B}$ parę uporządkowaną funkcyj częściowych $\langle f|A, f|B\rangle$. O przyporządkowaniu tym dowodzimy z łatwością, że odwzorowuje ono zbiór Y^{A+B} na produkt $Y^A \times Y^B$.

Twierdzenie 2 [1]. *Jeśli* $a \operatorname{non} \epsilon X$, $b \operatorname{non} \epsilon Y$ *oraz* $X+\{a\} \sim Y+\{b\}$, *to* $X \sim Y$.

Dowód. Niech f będzie funkcją ustalającą równoliczność zbiorów $X+\{a\}$ i $Y+\{b\}$ i niech $f(a)=v$, $f^{-1}(b)=u$. Jeśli $v=b$, to $u=a$. W tym przypadku z $x \in X$ wynika $f(x) \in Y$ i z $y \in Y$ wynika $f^{-1}(y) \in X$, a więc funkcja częściowa $f|X$ ustala równoliczność zbiorów X i Y.

Jeśli $v \neq b$, to $u \neq a$. Funkcja g określona wzorami

$$g(u)=v \quad \text{oraz} \quad g(x)=f(x) \quad \text{dla} \quad x \in X-\{u\},$$

przekształca X na cały zbiór Y, tj. każdy element $y \in Y$ jest jedną z jej wartości; istotnie dla $y \neq v$ jest $g[f^{-1}(y)]=y$, a dla $y=v$ jest $g(u)=y$. Funkcja g jest przy tym wzajemnie jednoznaczna, gdyż z $x_2 \neq u \neq x_1$ i $g(x_1)=g(x_2)$ wynika $f(x_1)=f(x_2)$, skąd $x_1=x_2$ wobec wzajemnej jednoznaczności funkcji f; jeśli zaś $x_1=u$ i $g(x_1)=g(x_2)$, to $g(x_2)=g(u)=v$, a więc $x_2=u$; w przeciwnym bowiem razie byłoby $g(x_2)=f(x_2)$, a więc $f(x_2)=v$ i $x_2=a$. Funkcja g ustala zatem równoliczność zbiorów X i Y, c. b. d. o.

Zamiast mówić, że zbiory A i B są równoliczne, mówi się też, że zbiory te są *równej mocy* lub, że mają tę samą *liczbę kardynalną*. Oczywiście, nie określamy w ten sposób czym jest moc zbioru (czyli jego liczba kardynalna), tylko wprowadzamy nowy termin dla pojęcia równoliczności [2].

Termin ten zresztą nie jest nieodzowny, można by bowiem twierdzenia teorii mnogości sformułować tak, by nie mówić w nich o własnościach liczb kardynalnych (czy mocy) lecz wyłącznie o związkach między liczbami kardynalnymi, takie zaś związki wypowiedzieć się dają zawsze przy pomocy pojęcia równoliczności. Wiele jednak twierdzeń teorii mnogości zyskuje na przejrzystości, gdy są sformułowane jako twierdzenia o liczbach kardynalnych. Z tego powodu jest celowe wprowadzić liczby kardynalne do teorii mnogości na zasadzie następującego aksjomatu:

[1]) Twierdzenie to podajemy na użytek § 9.

[2]) Cantor określał moc czyli liczbę kardynalną zbioru A jako tę jego własność, która pozostaje po abstrahowaniu od jakości elementów zbioru A i od ich porządku. Dla zaznaczenia tego podwójnego aktu abstrakcji Cantor wprowadził symbol $\overline{\overline{A}}$ dla oznaczenia mocy zbioru A.

IX. ***Aksjomat istnienia liczb kardynalnych.*** *Istnieje przyporządkowanie, na podstawie którego każdemu zbiorowi* A *odpowiada przedmiot* $\overline{\overline{A}}$, *zwany liczbą kardynalną, przy czym zachodzi równoważność:*

$$(\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}) \equiv (A \sim B).$$

Wprowadzona w ten sposób liczba kardynalna jest nowym pojęciem pierwotnym teorii mnogości.

Przyjmując pewnik IX zakładamy, że w funkcjach zdaniowych Φ występujących w sformułowaniu aksjomatów V i VII dopuszczalne są (prócz terminów logicznych, terminów „zbiór" i „ϵ" i ewentualnie terminów z działów matematyki, do których stosujemy teorię mnogości) także terminy „liczba kardynalna" i wzory typu $\mathfrak{m}=\overline{\overline{A}}$. W ten sposób uzyskujemy możność dowodzenia twierdzeń o liczbach kardynalnych w oparciu o inne pewniki teorii mnogości. Tak np. z pewnika VII wynika, że dla każdej rodziny zbiorów $\boldsymbol{X}$ istnieje zbiór

$$\underset{\mathfrak{m}}{E} \sum_{Z} [(\mathfrak{m}=\overline{\overline{Z}})(Z \in \boldsymbol{X})].$$

UWAGI. 1°. Jeśli ograniczyć zakres rozważanych zbiorów do podzbiorów ustalonego zbioru A, to aksjomat IX staje się zbędny. Można bowiem wtedy określić liczbę kardynalną $\overline{\overline{X}}$ (gdzie $X \subset A$), jako rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru A równolicznych z X.

2°. Wzory (2), (8)—(10) są szczególnym przypadkiem następujących twierdzeń dotyczących produktów uogólnionych:

Twierdzenie 3 *(prawo przemienności). Niech* $F \in (2^A)^X$. *Jeśli* φ *jest permutacją zbioru* X, *to*

$$\underset{x \in X}{P} F_x \sim \underset{x \in X}{P} F_{\varphi(x)}. \tag{11}$$

Dowód. Przyporządkujmy każdej funkcji $f \in \boldsymbol{P}_x F_x$ funkcję złożoną $g=f\varphi$. Jeśli $f_1 \neq f_2$, to dla pewnego $x \in X$ jest $f_1(x) \neq f_2(x)$, a zatem przyjmując $y=\varphi^{-1}(x)$ otrzymamy $f_1\varphi(y) \neq f_2\varphi(y)$, czyli $g_1(y) \neq g_2(y)$. Przyporządkowanie ustalone wzorem $g=f\varphi$ jest więc wzajemnie jednoznaczne.

Funkcja $g=f\varphi$ należy do produktu $\boldsymbol{P}_x F_{\varphi(x)}$. Istotnie, jeśli $x \in X$, to $f(\varphi(x)) \in F_{\varphi(x)}$, tj. $g(x) \in F_{\varphi(x)}$.

Wreszcie każda funkcja g należąca do produktu $\boldsymbol{P}_x F_{\varphi(x)}$ może być przedstawiona jako $f\varphi$, gdzie $f \in \boldsymbol{P}_x F_x$. Istotnie, wystarczy przyjąć w tym celu za f funkcję $g\varphi^{-1}$.

Twierdzenie 4 *(prawo łączności). Niech* $F \in (2^A)^X$. *Jeśli* $X=\sum_{y \in Y} T_y$, *przy czym zbiory* T_y *są rozłączne między sobą, to*

$$\underset{x \in X}{P} F_x \sim \underset{y \in Y}{P} \Big(\underset{x \in T_y}{P} F_x \Big), \tag{12}$$

$$A^X \sim \underset{y \in Y}{P} (A^{T_y}). \tag{13}$$

Dowód. Przyjmijmy $G^y = \underset{x\in T_y}{P} F_x$. Jest to zbiór funkcyj f, których argument przebiega zbiór T_y i które czynią zadość warunkowi $f(x)\in F_x$ dla $x\in T_y$. Produkt $\underset{y\in Y}{P} G_y$ składa się z funkcyj g, których argument przebiega zbiór Y i które czynią zadość warunkowi $g(y)\in G_y$ dla $y\in Y$. Wartość $g(y)$ funkcji g oznaczymy wygodniejszym symbolem g_y; jest to funkcja, której zbiorem argumentów jest T_y, przy czym $g_y(x)\in F_x$.

Przyporządkujmy funkcji $g\in \underset{y\in Y}{P} G_y$ funkcję f, określoną wzorem

$$f(x)=g_y(x), \tag{i}$$

gdzie y jest takim elementem zbioru Y, że $x\in T_y$.

Funkcja ta ma X za zbiór argumentów i dla każdego $x\in X$ czyni zadość warunkowi $f(x)\in F_x$. Wynika stąd, że $f\in P_{x\in T}F_x$.

Odwzorowanie przyporządkowujące funkcji g funkcję f jest wzajemnie jednoznaczne. Istotnie, jeśli $g^{(1)}\neq g^{(2)}$, to istnieje takie $y\in Y$, że $g_y^{(1)}\neq g_y^{(2)}$, a więc istnieje takie $x\in T_y$, że $g_y^{(1)}(x)\neq g_y^{(2)}(x)$, co dowodzi na mocy (i), że $f^{(1)}(x)\neq f^{(2)}(x)$.

Pozostaje wykazać, że każda funkcja $f\in P_{x\in T}F_x$ jest przyporządkowana jakiejś funkcji g. W tym celu wystarczy zauważyć, że funkcja g, której wartość dla argumentu $y\in Y$ dana jest wzorem

$$g_y=f|T_y$$

(por. rozdział II, § 6, str. 58), należy do produktu $P_y G_y$ i czyni zadość równości (i).

Dla dowodu wzoru (13) wystarczy przyjąć we wzorze (12) $F_x=A$.

Wzór (13) jest odpowiednikiem prawa arytmetycznego

$$m^{a+b+c+\ldots}=m^a\cdot m^b\cdot m^c\cdot\ldots$$

Twierdzenie 5 *(prawo potęgowania produktu). Niech* $F\in (2^A)^T$. *Dla każdego zbioru* H *zachodzi wzór*:

$$\Big(\underset{t\in T}{P} F_t\Big)^H \sim \underset{t\in T}{P}(F_t^H). \tag{14}$$

Dowód. Określmy funkcję (dwu zmiennych) G na produkcie $T\times H$ wzorem $G_{\langle t,h\rangle}=F_t$. Produkt $T\times H$ możemy przedstawić w dwojaki sposób jako sumę zbiorów rozłącznych

$$T\times H=\sum_{h\in H} T_h=\sum_{t\in T} H_t,$$

gdzie T_h jest zbiorem wszystkich par o następniku h, zaś H_t — zbiorem wszystkich par o poprzedniku t.

Stosując dwukrotnie twierdzenie 4 otrzymamy:

$$\underset{x\in T\times H}{P} G_x \sim \underset{t\in T}{P}\Big(\underset{x\in H_t}{P} G_x\Big), \tag{15}$$

$$\underset{x\in T\times H}{P} G_x \sim \underset{h\in H}{P}\Big(\underset{x\in T_h}{P} G_x\Big). \tag{16}$$

Dla $x\in H_t$ jest $x=\langle t,h\rangle$, a więc $G_x=F_t$, co dowodzi, że

$$\underset{x\in H_t}{P} G_x=(F_t)^{H_t}.$$

Ponieważ zaś $H_t\sim H$, przeto

$$(F_t)^{H_t}\sim F_t^H \quad\text{oraz}\quad \underset{t\in T}{P}(F_t)^{H_t}\sim \underset{t\in T}{P}(F_t^H).$$

Wzór (15) daje więc

$$\underset{x\in T\times H}{P} G_x \sim \underset{t\in T}{P}(F_t^H). \tag{17}$$

Przyporządkowując, przy danym h, funkcji $g\in \underset{x\in T_h}{P} G_x$ funkcję f daną przez warunek $f(t)=g(t,h)$, stwierdzamy, że

$$\underset{x\in T_h}{P} G_x \sim \underset{t\in T}{P} F_t.$$

A zatem wzór (16) daje

$$\underset{x\in T\times H}{P} G_x \sim \Big(\underset{t\in T}{P} F_t\Big)^H. \tag{18}$$

Wzór (14) wynika bezpośrednio z (17) i (18).

ĆWICZENIA. 1. Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to

$$2^{A+B}\sim 2^A\times 2^B.$$

2. Jeśli $a_1<a_2$ i $b_1<b_2$, to zbiory

$$\underset{x}{E}[a_1<x<a_2] \quad\text{i}\quad \underset{x}{E}[b_1\leqslant x\leqslant b_2]$$

są równoliczne.

3. Udowodnić z pomocą funkcji $\operatorname{tg} x$ równoliczność zbioru wszystkich liczb rzeczywistych z przedziałem otwartym.

§ 2. Zbiory skończone i przeliczalne [1]).

Jeśli zbiór skończony A zawiera n ($\geqslant 1$) elementów, to jest on równoliczny ze zbiorem $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Liczbę n elementów zbioru skończonego A uznajemy za moc (czyli liczbę kardynalną) zbioru A, tj. $\overline{\overline{A}}=n$; przy tym $\overline{\overline{0}}=0$.

[1]) Pojęcie przeliczalności i wszystkie twierdzenia § 2 pochodzą od Cantora, który wprowadził je po raz pierwszy w cytowanej już na str. 94 pracy *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.*

Teoria mocy dla zbiorów skończonych nie daje więc nic, co by istotnie wykraczało poza arytmetykę liczb naturalnych [1]). Nowe pojęcia zjawiają się dopiero wtedy, gdy przechodzimy do rozpatrywania zbiorów nieskończonych.

Definicja. Zbiór A jest *przeliczalny*, jeśli jest skończony lub równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych [2]).

Oczywiście, każde dwa zbiory przeliczalne nieskończone są równoliczne (por. § 1, twierdzenie 1). Liczbę kardynalną zbiorów przeliczalnych nieskończonych oznaczamy przez $\mathfrak{a}$.

W rozdziale II, § 6, str. 56, określiliśmy ciąg jako funkcję, której zbiorem argumentów jest zbiór liczb naturalnych. Wynika stąd, że zbiór nieskończony A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem wyrazów takiego ciągu, którego żadne dwa wyrazy nie są sobie równe. Wyrażając się obrazowo możemy powiedzieć, że *zbiór A jest przeliczalny, jeśli elementy jego można „ustawić" w ciąg nieskończony $a_1, a_2, a_3, \ldots$*

Twierdzenie 1. *Każdy zbiór przeliczalny niepusty jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu nieskończonego. Na odwrót, zbiór wyrazów dowolnego ciągu nieskończonego jest przeliczalny i niepusty.*

Dowód. Zbiór skończony o elementach $a_1, \ldots, a_k$ jest zbiorem wyrazów ciągu nieskończonego:

$$f(1)=a_1,\ \ldots,\ f(k)=a_k,\ f(k+1)=a_k,\ \ldots,\ f(k+j)=a_k,\ \ldots$$

Zbiór przeliczalny nieskończony jest na mocy definicji zbiorem wyrazów pewnego ciągu nieskończonego.

Dla dowodu twierdzenia odwrotnego zauważmy, że wykreślając z ciągu nieskończonego

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

każdy wyraz a_n $(n>1)$, który występuje w tym ciągu ze wskaźnikiem mniejszym od n, otrzymamy ciąg skończony lub nieskończony, w którym każdy wyraz ciągu (1) występuje dokładnie jeden raz. Zbiór wyrazów ciągu (1) jest więc przeliczalny.

[1]) Ujmując w ten sposób teorię zbiorów skończonych dołączamy arytmetykę liczb naturalnych do teorii mnogości: pojęcia arytmetyczne figurują w twierdzeniach i definicjach teorii mnogości. W § 7 wykażemy, że można postąpić i w inny sposób: określić pojęcia arytmetyczne wyłącznie przy pomocy pojęć teorii mnogości. Oczywiście, określenie zbioru skończonego jako zbioru równolicznego z jednym ze zbiorów $\{0,1,\ldots,n-1\}$ musi być wówczas zastąpione innym.

[2]) Określenie to jest poprawne tylko wówczas, gdy arytmetyka liczb naturalnych dołączona jest do teorii mnogości (por. odsyłacz poprzedni). W § 7 podamy określenie zbiorów przeliczalnych sformułowane wyłącznie w terminach ogólnej teorii mnogości.

W podobny sposób ustalamy następujące

Twierdzenie 2. *Podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.*

Twierdzenie 3. *Suma dwu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Ponieważ przypadek, kiedy jeden z danych zbiorów przeliczalnych jest pusty nie nastręcza trudności, możemy założyć, że A jest zbiorem wyrazów ciągu

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

B zaś — zbiorem wyrazów ciągu

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Suma $A+B$ jest wtedy zbiorem wyrazów ciągu

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots,$$

a więc jest przeliczalna.

Z twierdzenia 3 wynika przez indukcję, że suma dowolnej skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

Szczególnym przypadkiem twierdzenia 3 jest:

Wniosek 4. *Suma zbioru skończonego i przeliczalnego jest przeliczalna.*

Twierdzenie 5. *Produkt dwu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.*

Dowód. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ będą danymi dwoma ciągami nieskończonymi. Należy udowodnić, że zbiór wszystkich par $\langle a_m, b_n\rangle$ można ustawić w ciąg nieskończony. Wystarczy, oczywiście, dowieść, że zbiór wszystkich par liczb naturalnych $\langle m,n\rangle$ można ustawić w ciąg nieskończony.

W tym celu zbiór par uporządkowanych $\langle m,n\rangle$ wyobrażamy sobie w postaci tablicy nieskończonej

(T)
$$\left\{\begin{array}{llllll} \langle 1,1\rangle, & \langle 1,2\rangle, & \langle 1,3\rangle, & \ldots, & \langle 1,n\rangle, & \ldots \\ \langle 2,1\rangle, & \langle 2,2\rangle, & \langle 2,3\rangle, & \ldots, & \langle 2,n\rangle, & \ldots \\ \langle 3,1\rangle, & \langle 3,2\rangle, & \langle 3,3\rangle, & \ldots, & \langle 3,n\rangle, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle m,1\rangle, & \langle m,2\rangle, & \langle m,3\rangle, & \ldots, & \langle m,n\rangle, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Tablicę tę zamieniamy w ciąg zwykły tzw. metodą przekątni, polegającą na tym, że najpierw wypisujemy pary $\langle m,n\rangle$, dla których $m+n=2$, potem pary, dla których $m+n=3$ itd., w obrębie zaś każdej z tych grup wypisujemy pary w kolejności wzrastania m [1]).

[1]) Pary $\langle m,n\rangle$, dla których $m+n=k$, tworzą $k-1$-ą przekątnię tablicy (T), skąd nazwa metody przekątni.

W otrzymanym w ten sposób ciągu nieskończonym

$$\langle 1,1\rangle,\ \langle 1,2\rangle,\ \langle 2,1\rangle,\ \langle 1,3\rangle,\ \langle 2,2\rangle,\ \langle 3,1\rangle,\ \langle 1,4\rangle,\ \ldots$$

występuje każda para $\langle m,n\rangle$.

UWAGA. Inna metoda dowodu polega na zamianie tablicy (T) w ciąg nieskończony przez wypisanie: najpierw pary $\langle 1,1\rangle$, potem par $\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle$, potem par $\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle$ itd.

Można by również w tym celu zastosować funkcję $\varphi(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$, która odwzorowuje zbiór $\mathcal{J}\times\mathcal{J}$ na $\mathcal{J}$ w sposób wzajemnie jednoznaczny (ob. str. 59).

Z twierdzenia 5 wynika przez indukcję, że produkt skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

Twierdzenie 6. *Jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, to suma $S=A+A^2+\ldots+A^n+\ldots$ jest przeliczalna.*

Dowód. Przyjmijmy

$$\varphi_0(k)=k,$$
$$\varphi_1(k_1,k_2)=2^{k_1-1}(2k_2-1),$$
$$\varphi_2(k_1,k_2,k_3)=\varphi_1(k_1,\varphi_1(k_2,k_3)),$$
$$\varphi_3(k_1,k_2,k_3,k_4)=\varphi_2(k_1,k_2,\varphi_1(k_3,k_4)),$$

i ogólnie dla $n\geqslant 3$

$$\varphi_{n-1}(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\varphi_{n-2}(k_1,k_2,\ldots,k_{n-2},\varphi_1(k_{n-1},k_n)).$$

Dowodzimy z łatwością przez indukcję względem n, że

$$(2)\quad [\varphi_{n-1}(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\varphi_{n-1}(l_1,l_2,\ldots,l_n)]\to(k_1=l_1)(k_2=l_2)\ldots(k_n=l_n).$$

Z założenia zbiór A (o ile $A\neq 0$) jest zbiorem wartości funkcji f o argumentach naturalnych. Elementami zbioru S są układy uporządkowane $u=\langle f(k_1),f(k_2),\ldots,f(k_n)\rangle$, gdzie $n,k_1,k_2,\ldots,k_n$ są dowolnymi liczbami naturalnymi (dla $n=1$ przyjmujemy $\langle f(k_1)\rangle=f(k_1)$).

Przyporządkujmy elementowi $u\in A^n$ (dla $n\geqslant 1$) parę

$$p(u)=\langle n,\varphi_{n-1}(k_1,k_2,\ldots,k_n)\rangle.$$

Odwzorowanie p jest wzajemnie jednoznaczne. Istotnie, niech

$$u=\langle f(k_1),\ldots,f(k_n)\rangle,\qquad v=\langle f(l_1),\ldots,f(l_m)\rangle.$$

Jeśli $n\neq m$, to $p(u)\neq p(v)$, gdyż poprzedniki par $p(u)$ i $p(v)$ są różne. Jeśli zaś $n=m$ i $u\neq v$, to nie mogą zachodzić wszystkie równości $k_1=l_1$, $k_2=l_2,\ldots,k_n=l_n$, a więc w myśl (2) $\varphi_{n-1}(k_1,\ldots,k_n)\neq\varphi_{n-1}(l_1,\ldots,l_n)$, skąd $p(u)\neq p(v)$.

Zbiór S jest więc równoliczny z podzbiorem $p(S)$ zbioru $\mathcal{J}^2$. Ponieważ zaś zbiór $\mathcal{J}^2$ jest przeliczalny (na mocy twierdzenia 5), więc w myśl twierdzenia 2 zbiór S też jest przeliczalny.

Zastosujemy obecnie twierdzenia 1—6 do ustalenia mocy niektórych zbiorów, szczególnie często spotykanych.

1°. *Zbiór $\mathcal{G}$ liczb całkowitych jest przeliczalny.*

Istotnie, oznaczając przez $\mathcal{J}$ zbiór liczb naturalnych, a przez $\mathcal{J}_-$ zbiór liczb całkowitych ujemnych, mamy

$$\mathcal{G}=\mathcal{J}+\{0\}+\mathcal{J}_-.$$

Zbiory $\mathcal{J}$ i $\mathcal{J}_-$ są równoliczne, gdyż funkcja

$$f(x)=-x$$

odwzorowuje $\mathcal{J}$ na $\mathcal{J}_-$ w sposób wzajemnie jednoznaczny. $\mathcal{G}$ jest zatem sumą dwu zbiorów przeliczalnych i zbioru skończonego (jednoelementowego), a więc jest zbiorem przeliczalnym na mocy twierdzeń 3 i 4.

Z przykładu 1° wnosimy, że *zbiór nieskończony może być równoliczny ze swą częścią właściwą*, gdyż $\mathcal{G}\sim\mathcal{J}$.

2°. *Zbiór $\mathcal{R}$ liczb wymiernych jest przeliczalny.*

Istotnie, produkt $\mathcal{G}\times\mathcal{J}$, tj. zbiór par $\langle k,n\rangle$, gdzie k jest liczbą całkowitą a n — naturalną, jest przeliczalny na mocy 1° i twierdzenia 5. Przyporządkowując parze $\langle k,n\rangle$ liczbę wymierną $k:n$, ustalamy odwzorowanie zbioru $\mathcal{G}\times\mathcal{J}$ na cały zbiór $\mathcal{R}$, co dowodzi, że elementy zbioru $\mathcal{R}$ można ustawić w ciąg (którego nie wszystkie wyrazy są różne). Zbiór $\mathcal{R}$ jest więc przeliczalny na mocy twierdzenia 1.

3°. *Zbiór Φ wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny.*

Istotnie, wielomian $k_1x^n+k_2x^{n-1}+\ldots+k_nx+k_{n+1}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez ciąg $\langle k_1,k_2,\ldots,k_{n+1}\rangle$, tj. przez element zbioru $\mathcal{G}^{n+1}$. Zbiór Φ jest zatem równoliczny ze zbiorem $\mathcal{G}+\mathcal{G}^2+\mathcal{G}^3+\ldots$, który na mocy twierdzenia 6 jest przeliczalny.

4°. *Zbiór A liczb algebraicznych jest przeliczalny.*

Dla dowodu ustawmy w ciąg

$$f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots$$

wszystkie wielomiany zmiennej x o współczynnikach całkowitych. Wielomian $f_n(x)$ ma skończoną liczbę pierwiastków, np. $a_1^{(n)},a_2^{(n)},\ldots,a_{k_n}^{(n)}$. W myśl określenia liczb algebraicznych, każdy element zbioru A jest jedną z liczb $a_j^{(n)}$ $(j\leqslant k_n)$. Aby elementy zbioru A ustawić w ciąg nieskończony, umieszczamy na jego pierwszych k_1 miejscach liczby $a_1^{(1)},\ldots,a_{k_1}^{(1)}$ (w porządku wzrastających wartości bezwzględnych, a w razie równych wartości bezwzględnych — w porządku wzrastających amplitud), na

następnych k_2 miejscach ciągu umieszczamy liczby $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_{k_2}^{(2)}$ (uporządkowane w podobny sposób) itd. Otrzymujemy zatem ciąg zawierający wszystkie liczby algebraiczne, co dowodzi, że zbiór A jest przeliczalny.

5°. *Rodzina skończonych zbiorów liczb naturalnych jest przeliczalna.*

Istotnie, każdemu skończonemu zbiorowi $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, gdzie $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$, odpowiada we wzajemnie jednoznaczny sposób wielomian $k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \ldots + k_n$ (należący do zbioru Φ). Ponieważ zbiór Φ jest przeliczalny, więc zbiór skończonych zbiorów liczb naturalnych, jako równoliczny z podzbiorem zbioru Φ, jest przeliczalny na mocy twierdzenia 2.

Inne przykłady zbiorów przeliczalnych podane są w ćwiczeniach do § 6, str. 123—124.

W poprzednich dowodach nie korzystaliśmy z pewnika wyboru. Obecnie skorzystamy z tego pewnika, ażeby obliczyć moc sumy przeliczalnej zbiorów przeliczalnych.

° ***Twierdzenie 7.*** *Jeśli zbiory A_n są przeliczalne dla $n = 1, 2, \ldots$, to ich suma $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ jest też przeliczalna.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiory A_n są rozłączne. Niech K_n będzie zbiorem funkcji wzajemnie jednoznacznych, ustalających odwzorowanie zbioru A_n na zbiór liczb naturalnych lub — w przypadku, gdy A_n jest zbiorem skończonym o k_n elementach — na zbiór $\{1, 2, \ldots, k_n\}$. Zgodnie z założeniem zbiory K_n są niepuste. Zarazem są one rozłączne. Z pewnika wyboru wnosimy, że istnieje zbiór F, zawierający dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów K_n. Niech $f_n \in F \cdot K_n$; jest to funkcja odwzorowująca A_n na zbiór $\mathcal{J}$ liczb naturalnych lub na jego część skończoną.

Dla każdego $x \in S$ istnieje dokładnie jeden taki wskaźnik $n = n(x)$, że $x \in A_n$. Przyjmijmy

$$\varphi(x) = \langle f_n(x), n \rangle, \quad \text{gdzie} \quad n = n(x).$$

Funkcja φ jest wzajemnie jednoznaczna, gdyż z $\langle f_n(x), n \rangle = \langle f_m(y), m \rangle$, gdzie $n = n(x)$, $m = n(y)$, wynika $n = m$, a więc x i y należą do tego samego składnika $A_n = A_m$, co wobec wzajemnej jednoznaczności funkcji $f_n = f_m$ dowodzi, że $x = y$. A zatem $S \sim \varphi(S)$. Ponieważ zaś $\varphi(S) \subset \mathcal{J} \times \mathcal{J}$, więc zbiór S jest przeliczalny (wobec tw. 5).

Jeśli zbiory A_n nie są rozłączne, to korzystamy z równości (str. 72, 7):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{gdzie} \quad B_n = A_n - (A_1 + \ldots + A_{n-1}), \quad B_1 = A_1.$$

Zbiory B_n są rozłączne i każdy z nich jest przeliczalny, gdyż jest podzbiorem A_n. Wobec udowodnionej już części twierdzenia wnosimy stąd, że zbiór S jest przeliczalny.

UWAGA. Potrzeba użycia pewnika wyboru w powyższym dowodzie pochodzi stąd, że chociaż dla każdego zbioru przeliczalnego A istnieje ciąg nieskończony zawierający wszystkie elementy zbioru A wśród swych wyrazów (co wynika z samej definicji przeliczalności), to jednak ciągów takich dla danego zbioru A jest nieskończenie wiele i żadnego z nich nie potrafimy wyróżnić; inaczej mówiąc: nie potrafimy przyporządkować każdemu zbiorowi przeliczalnemu ciągu nieskończonego, który by zawierał wszystkie elementy tego zbioru wśród swych wyrazów.

Jeżeli natomiast dany jest ciąg ciągów

$$(\tau) \qquad \begin{cases} a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1, \ldots \\ a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

to istnieje ciąg, który zawiera wszystkie wyrazy tablicy (τ). Wynika to natychmiast z możliwości przekształcenia tablicy (T) w ciąg nieskończony, co udowodniliśmy bez pewnika wyboru (na str. 101).

Nieraz więc w poszczególnych przypadkach twierdzenie 7 daje się udowodnić bez użycia pewnika wyboru. Przykładem takim jest też twierdzenie 6. Pewnik ten jednak jest niezbędny dla dowodu twierdzenia 7 w całej jego ogólności.

§ 3. Skala liczb kardynalnych.

Poznaliśmy dotychczas liczby kardynalne zbiorów skończonych (które utożsamiliśmy z liczbami naturalnymi) oraz liczbę kardynalną α. Nasuwa się pytanie, czy istnieją inne liczby kardynalne lub — w równoważnym sformułowaniu — czy istnieją zbiory nieprzeliczalne?

Następujące twierdzenie daje odpowiedź twierdzącą na to pytanie.

Twierdzenie 1. *Zbiór wszystkich punktów dowolnego odcinka domkniętego jest nieprzeliczalny* [1]).

Dowód. Wystarczy wykazać, że dla każdego ciągu

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

punktów odcinka domkniętego I istnieje punkt tegoż odcinka nie występujący w tym ciągu.

[1]) Twierdzenie 1 odkrył Cantor, ob. *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Journal für Mathematik **77** (1874), str. 258—262. Była to jedna z pierwszych publikacji z zakresu teorii mnogości.

Podany tu dowód pochodzi od Cantora.

Istnieje oczywiście odcinek I_1 zawarty w I nie zawierający punktu p_1. Wystarczy mianowicie podzielić odcinek I na trzy równe części i wziąć jako I_1 tę część, do której p_1 nie należy i która przy tym położona jest najdalej na lewo. W odcinku I_1 wyznaczamy podobną konstrukcją odcinek $I_2 \subset I_1$, nie zawierający punktu p_2, dalej w odcinku I_2 odcinek $I_3 \subset I_2$ nie zawierający punktu p_3 itd. Otrzymamy w ten sposób zstępujący ciąg odcinków zamkniętych

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \ldots$$

taki, że $p_n \operatorname{non} \epsilon I_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Z zasadniczych twierdzeń analizy (tw. Ascoliego) wiadomo, że istnieje punkt p_0 należący do wszystkich odcinków I_n. Punkt p_0 jest więc różny od p_n dla każdego n, gdyż $p_0 \epsilon I_n$, a $p_n \operatorname{non} \epsilon I_n$, c. b. d. o.

Z twierdzenia 1 wynika także, że zbiór liczb rzeczywistych zawartych w dowolnym przedziale, a więc tym bardziej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny. Istnieją więc co najmniej dwie różne liczby kardynalne nieskończone: moc zbioru liczb naturalnych i moc zbioru liczb rzeczywistych.

Poszukując dalszych liczb kardynalnych w obrębie zbiorów utworzonych z liczb rzeczywistych natrafiamy na następujące zagadnienie: czy każdy zbiór złożony z liczb rzeczywistych jest albo przeliczalny, albo równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych?

Zagadnienie to nie jest dotąd rozstrzygnięte. Przypuszczenie, że odpowiedź na nie jest twierdząca — wypowiedziane przez Cantora — nazywa się *hipotezą continuum*.

Wykażemy obecnie, że liczb kardynalnych jest nieskończenie wiele. W tym celu udowodnimy najpierw twierdzenie, które odgrywa zasadniczą rolę w wielu działach teorii mnogości.

Twierdzenie 2 *(o przekątni)*[1]. *Jeśli zbiór T argumentów funkcji F jest zawarty w A a wartości funkji F są podzbiorami zbioru A, to zbiór*

$$Z = \underset{t \epsilon T}{E}[t \operatorname{non} \epsilon F(t)]$$

nie jest wartością funkcji F.

[1]) Twierdzenie o przekątni pochodzi w zasadzie od Cantora. Zastosowania tego twierdzenia w teorii zbiorów borelowskich i rzutowych znaleźć można np. w książce K. Kuratowski, *Topologie I*, wyd. 2-e, str. 278 i 368.

Tzw. antynomie i niektóre ważne twierdzenia logiczne pozostają również w bliskim związku z twierdzeniem o przekątni. Por. A. Mostowski, *Logika matematyczna*, str. 315 i 347.

Dowód. Należy wykazać, że $F(t) \neq Z$ dla każdego $t \epsilon T$. Otóż z określenia zbioru Z wynika, że jeśli $t \epsilon T$, to

$$[t \epsilon Z] \equiv [t \operatorname{non} \epsilon F(t)];$$

gdyby więc było $F(t) = Z$, mielibyśmy sprzeczność:

$$(t \epsilon Z) \equiv (t \operatorname{non} \epsilon Z).$$

Gdy $A = T$, twierdzenie 2 można łatwo zilustrować geometrycznie. W tym celu przedstawimy produkt $A \times A$ schematycznie jako kwadrat (por. rozdział II, § 5, str. 53) i rozpatrzymy w tym kwadracie zbiór $R = E_{xy}[y \epsilon F(x)]$. Zbiór $F(x)$ jest rzutem na oś rzędnych zbioru tych punktów R, których odciętą jest x, zbiór Z zaś jest rzutem na oś rzędnych zbioru tych punktów przekątni kwadratu, które nie należą do R. Jest więc geometrycznie oczywiste, że $Z \neq F(x)$, jeśli bowiem $\langle x,x \rangle \epsilon R$, to $x \epsilon F(x)$ ale $x \operatorname{non} \epsilon Z$, jeśli zaś $\langle x,x \rangle \operatorname{non} \epsilon R$, to $x \operatorname{non} \epsilon F(x)$ ale $x \epsilon Z$.

Ilustracja ta wyjaśnia także nazwę „twierdzenie o przekątni".

Zastosujemy twierdzenie 2 do dowodu istnienia różnych mocy nieskończonych.

Twierdzenie 3. *Zbiór 2^A nie jest równoliczny z A ani z żadnym podzbiorem A.*

Istotnie, w przeciwnym przypadku istniałaby funkcja wzajemnie jednoznaczna F, której zbiór argumentów byłby zawarty w A i której wartościami byłyby wszystkie podzbiory zbioru A; byłoby to jednak sprzeczne z twierdzeniem 2.

Twierdzenie 4. *Żadne dwa spośród zbiorów*

$$A, \quad 2^A, \quad 2^{2^A}, \quad 2^{2^{2^A}}, \quad \ldots \tag{1}$$

nie są równoliczne.

Dowód. Niech P_k będzie k-tym zbiorem ciągu (1) i przypuśćmy, że istnieją takie k i l, że $k > l$ i że P_k jest równoliczne z podzbiorem P_l. Zbiór P_{k-1} jest oczywiście równoliczny z częścią P_k, mianowicie z częścią składającą się ze zbiorów jednoelementowych $\{x\}$, gdzie $x \epsilon P_{k-1}$. Wynika stąd, że zbiór P_{k-1} jest równoliczny z podzbiorem P_l. Powtarzając to rozumowanie dojdziemy do wniosku, że każdy ze zbiorów $P_{k-1}, P_{k-2}, \ldots, P_{l+1}$ jest równoliczny z podzbiorem P_l, co przeczy twierdzeniu 3, gdyż $P_{l+1} = 2^{P_l}$.

Twierdzenie 5. *Niech rodzina zbiorów $\boldsymbol{A}$ posiada następującą własność:*

(2) $\left\{\begin{array}{l}\text{dla każdego } X \in \boldsymbol{A} \text{ istnieje zbiór } Y \in \boldsymbol{A}, \text{ który nie jest równo-}\\ \text{liczny z żadnym podzbiorem } X.\end{array}\right.$

Przy tym założeniu suma $S(\boldsymbol{A})$ nie jest równoliczna z żadnym ze zbiorów $X \in \boldsymbol{A}$ ani z żadnym podzbiorem takiego zbioru.

Dowód. Załóżmy, że $S(\boldsymbol{A}) \sim X_1 \subset X \in \boldsymbol{A}$. Istnieje więc taka funkcja różnowartościowa f, że $f(S(\boldsymbol{A})) = X_1$. Zgodnie z założeniem (2) istnieje zbiór $Y \in \boldsymbol{A}$, który nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem X. Ponieważ $Y \subset S(\boldsymbol{A})$, więc $f(Y) \subset f(S(\boldsymbol{A}))$, tj. $f(Y) \subset X_1$, skąd $Y \sim f(Y) \subset X$. Sprzeczność ta dowodzi, że $S(\boldsymbol{A})$ non $\sim X_1$.

UWAGI. Twierdzenia 4 i 5 dają pojęcie o bogactwie różnych liczb kardynalnych nieskończonych. Wychodząc ze zbioru $\mathcal{J}$ liczb naturalnych, który jest mocy $\mathfrak{a}$, utworzyć możemy zbiory

(3) $$\mathcal{J},\quad 2^{\mathcal{J}},\quad 2^{2^{\mathcal{J}}},\quad 2^{2^{2^{\mathcal{J}}}},\quad \ldots,$$

wśród których — na mocy twierdzenia 4 — nie ma żadnej pary zbiorów równolicznych. Otrzymujemy w ten sposób *nieskończenie wiele różnych liczb kardynalnych.*

Z pewnika podstawiania wynika istnienie rodziny A, której elementami są wszystkie zbiory (3) (por. rozdział II, § 3, str. 50). Rodzina A spełnia w myśl twierdzenia 3 założenie (2); suma $P = S(A)$ jest więc — zgodnie z twierdzeniem 5 — różnej mocy od każdego ze zbiorów (3) i od każdego z ich podzbiorów. Stosując ponownie twierdzenie 4 otrzymamy ciąg zbiorów

(4) $$P,\quad 2^{P},\quad 2^{2^{P}},\quad 2^{2^{2^{P}}},\quad \ldots,$$

z których każde dwa są różnej mocy i z których żaden nie jest równoliczny z żadnym ze zbiorów (3). W ten sposób otrzymujemy nieskończoną ilość nowych liczb kardynalnych.

Dalsze liczby kardynalne otrzymamy tworząc rodzinę B wszystkich zbiorów (3) i (4) oraz ciąg zbiorów

$$Q = S(B),\quad 2^{Q},\quad 2^{2^{Q}},\quad 2^{2^{2^{Q}}},\quad \ldots$$

Postępowanie to możemy kontynuować bez końca. Widać stąd, że skala różnych liczb kardynalnych nieskończonych jest bez porównania bogatsza, niż skala mocy skończonych (która pokrywa się ze skalą liczb całkowitych nieujemnych).

Jako dalsze wnioski z twierdzenia 3 zanotujemy

Twierdzenie 6. *Nie istnieje rodzina zbiorów $\boldsymbol{U}$, która by dla każdego zbioru X zawierała jako element zbiór Y równoliczny z X.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 3 zbiór $2^{S(U)}$ nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru $S(\boldsymbol{U})$, a więc z żadnym ze zbiorów Y należących do $\boldsymbol{U}$ (gdyż z $Y \in \boldsymbol{U}$ wynika $Y \subset S(\boldsymbol{U})$).

Twierdzenie 7. *Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.*

W przeciwnym bowiem razie zbiór ten moglibyśmy przyjąć za zbiór $\boldsymbol{U}$ z twierdzenia 6.

UWAGI. Twierdzenie 7 wskazuje ponownie na to (por. rozdział II, str. 47), że nie można zastąpić aksjomatu V założeniem, że do każdej funkcji zdaniowej $\Phi(x)$ istnieje zbiór złożony z elementów, które tę funkcję spełniają.

Twierdzenie 6 jest jeszcze jednym świadectwem różnorodności liczb kardynalnych: jest ich „tak dużo", że nie podobna utworzyć zbioru, który zawierałby po (co najmniej) jednym zbiorze każdej mocy.

Istnienie wielu różnych mocy jest dla teorii mnogości faktem bardzo doniosłym. W praktyce matematycznej rolę grają właściwie trzy lub cztery najmniejsze liczby kardynalne nieskończone. Mimo to zbudowanie arytmetyki liczb kardynalnych (wzorowanej częściowo na zwykłej arytmetyce) jest pożyteczne, gdyż prawa tej arytmetyki pozwalają ustalać łatwo własności również tych najprostszych liczb kardynalnych, z którymi spotykamy się zwykle w matematyce.

ĆWICZENIE. Udowodnić, że zbiór $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, tj. zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych, jest nieprzeliczalny.

Wskazówka. Jeśli $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ jest ciągiem elementów zbioru $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, to ciąg g, którego n-tym wyrazem jest $f^{(n)}(n)+1$, nie należy do ciągu $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$

§ 4. Arytmetyka liczb kardynalnych.

Obecnie określimy działania dodawania, mnożenia i potęgowania dla liczb kardynalnych. Definicje dobrane będą w taki sposób, aby dla liczb kardynalnych skończonych (tj. dla liczb naturalnych i zera) były one równoważne zwykłym definicjom arytmetycznym [1]).

Definicja 1. Liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest *sumą* liczb $\mathfrak{n}_1$ i $\mathfrak{n}_2$, tj.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2,$$

jeśli każdy zbiór mocy $\mathfrak{m}$ rozkłada się na sumę dwu zbiorów rozłącznych, z których jeden ma moc $\mathfrak{n}_1$ a drugi $\mathfrak{n}_2$.

[1]) Zasadnicze definicje i twierdzenia podane w § 4 pochodzą od Cantora; ob. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen **46** (1895), str. 481—512.

Lemmat 1. *Dla dowolnych dwu zbiorów A_1 i A_2 istnieją takie dwa zbiory B_1 i B_2, że*

$$A_1 \sim B_1, \quad A_2 \sim B_2, \quad B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{0}$$

Niech $a_1 \neq a_2$ (np. $a_1 = 0$, $a_2 = \{0\}$). Wówczas produkty $B_1 = \{a_1\} \times A_1$ oraz $B_2 = \{a_2\} \times A_2$ spełniają żądane warunki (na mocy § 1, str. 95, (4)).

Twierdzenie 2. *Dla każdych dwu liczb kardynalnych $\mathfrak{n}_1$ i $\mathfrak{n}_2$ istnieje suma $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$.*

Dowód. Załóżmy, że $\overline{\overline{A_1}} = \mathfrak{n}_1$ i $\overline{\overline{A_2}} = \mathfrak{n}_2$ i że zgodnie z lemmatem B_1 i B_2 spełniają warunki (0). Suma $B_1 + B_2$ rozpada się więc na dwa zbiory rozłączne mocy $\mathfrak{n}_1$ i $\mathfrak{n}_2$; każdy zbiór równoliczny z $B_1 + B_2$ ma oczywiście tę samą własność. A więc $\overline{\overline{A_1 + A_2}} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$, c. b. d. o.

Udowodniliśmy zarazem wzór:

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A+B}}, \quad \text{o ile} \quad AB = 0.$$

Twierdzenie 3. *Dodawanie liczb kardynalnych podlega prawom przemienności i łączności, tzn. dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ i $\mathfrak{n}_3$ zachodzą równości:*

$$\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1, \tag{1}$$

$$\mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2) + \mathfrak{n}_3. \tag{2}$$

Dowód. Jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$, to $A = A_1 + A_2$, gdzie $A_1 \cdot A_2 = 0$, $\overline{\overline{A_1}} = \mathfrak{n}_1$ i $\overline{\overline{A_2}} = \mathfrak{n}_2$. Wobec tego, że $A = A_2 + A_1$, wnosimy stąd, że $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1$, co dowodzi wzoru (1). Dowód wzoru (2) jest podobny.

PRZYKŁADY. Z twierdzeń 3 i 4 z § 2, str. 101, wynikają wzory

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}. \tag{3}$$

Definicja 2. Liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest *iloczynem* liczb $\mathfrak{n}_1$ i $\mathfrak{n}_2$, tj.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2,$$

jeśli każdy zbiór mocy $\mathfrak{m}$ jest równoliczny z produktem $A_1 \times A_2$, gdzie $\overline{\overline{A_1}} = \mathfrak{n}_1$ i $\overline{\overline{A_2}} = \mathfrak{n}_2$.

A zatem

$$\overline{\overline{A_1}} \cdot \overline{\overline{A_2}} = \overline{\overline{A_1 \times A_2}}.$$

Jest jasne, że dla dowolnych liczb $\mathfrak{n}_1$ i $\mathfrak{n}_2$ istnieje iloczyn $\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2$.

Definicja 2 jest uogólnieniem na przypadek dowolnych liczb kardynalnych arytmetycznego pojęcia iloczynu: w początkach nauczania określa się np. $3 \cdot 4$ jako ilość elementów zbioru, który można rozłożyć na trzy grupy po cztery elementy, tj. jako ilość elementów produktu $A \times B$, gdzie A ma trzy, B zaś — cztery elementy.

Twierdzenie 4. *Mnożenie liczb kardynalnych podlega prawom przemienności, łączności i rozdzielności względem dodawania, tzn. dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ i $\mathfrak{n}_3$ zachodzą równości:*

$$\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_1, \tag{4}$$

$$\mathfrak{n}_1 \cdot (\mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2) \cdot \mathfrak{n}_3, \tag{5}$$

$$\mathfrak{n}_1 \cdot (\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3) = \mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_3. \tag{6}$$

Dowód. Wzory (4) i (5) są bezpośrednimi wnioskami ze wzorów (2) i (3) z § 1, str. 95. (6) wynika ze wzorów (por. rozdział II, § 5, str. 53):

$$A_1 \times (A_2 + A_3) = A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3,$$

$$[A_2 \cdot A_3 = 0] \to [(A_1 \times A_2) \cdot (A_1 \times A_3) = 0].$$

Twierdzenie 5. *1 jest modułem mnożenia, tzn. dla dowolnego $\mathfrak{n}$ jest*

$$\mathfrak{n} \cdot 1 = \mathfrak{n}. \tag{7}$$

Dowód otrzymujemy ze wzoru (4), § 1, str. 95.

PRZYKŁADY. Z twierdzenia 5 z § 2, str. 101, otrzymujemy wzory

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} \cdot n = \mathfrak{a}. \tag{8}$$

n-krotny iloczyn $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}$ oznaczamy symbolem $\mathfrak{m}^n$. Jak wynika z definicji 2, $\mathfrak{m}^n$ jest mocą zbioru wszystkich ciągów n-elementowych $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, gdzie $a_1, \ldots, a_n$ przebiegają zbiór A mocy $\mathfrak{m}$. Inaczej mówiąc (por. rozdział II, § 6, str. 56):

$$(\overline{\overline{A}})^n = \overline{\overline{A^n}}.$$

Uogólniając ten przykład przyjmiemy definicję następującą:

Definicja 3. Liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest *potęgą o zasadzie $\mathfrak{n}$ i wykładniku $\mathfrak{p}$*, tj.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}},$$

jeśli każdy zbiór mocy $\mathfrak{m}$ jest równoliczny ze zbiorem A^B, gdzie $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n}$ i $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{p}$.

A zatem

$$(\overline{\overline{A}})^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{(A^B)}}.$$

Jest jasne, że dla każdych dwu liczb $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{p}$ istnieje potęga $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$.

Twierdzenie 6. *Dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ i $\mathfrak{q}$ jest:*

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}}, \tag{9}$$

$$(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p})^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}, \tag{10}$$

$$(\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}, \tag{12}$$

$$1^{\mathfrak{n}} = 1. \tag{13}$$

Wzory te wynikają natychmiast ze wzorów (4), (8)—(10) z § 1.

Twierdzenie 7. *Jeśli zbiór A ma moc $\mathfrak{m}$, to zbiór 2^A wszystkich podzbiorów zbioru A ma moc $2^{\mathfrak{m}}$, tj.*

$$2^{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{2^A}}.$$

Dowód. $2^{\mathfrak{m}}$ jest mocą zbioru $\{0,1\}^A$, tj. zbioru funkcji f, których wartościami są liczby 0 i 1, a których argumentami są elementy A. Każda taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór X_f tych a, dla których $f(a)=1$ (f jest funkcją charakterystyczną tego zbioru, por. rozdział II, § 9, str. 70). Przy tym różnym funkcjom f_1 i f_2 odpowiadają różne zbiory X_{f_1}, X_{f_2}. Przyporządkowując funkcji $f \in \{0,1\}^A$ zbiór $X_f \subset A$ ustalamy więc wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorami $\{0,1\}^A$ i 2^A.

Definicja 4. Liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest *różnicą* liczb $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{p}$, tj.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} - \mathfrak{p},$$

jeśli $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{p}$ i dla każdego zbioru A mocy $\mathfrak{n}$ istnieje zbiór $B \subset A$ mocy $\mathfrak{p}$, przy czym dla każdego takiego zbioru B zbiór $A-B$ ma moc $\mathfrak{m}$.

Istnieje np. różnica $\mathfrak{a}-n\,(=\mathfrak{a})$ dla każdej liczby skończonej n. Jednakże, w odróżnieniu od działań dodawania, mnożenia i potęgowania, istnienie różnicy $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ dwu liczb kardynalnych $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{p}$ nie daje się w ogólnym przypadku udowodnić bez pewnika wyboru.

§ 5. Nierówności. Twierdzenie Cantora-Bernsteina.

Stosunek mniejszości między liczbami kardynalnymi wprowadzamy na podstawie następującej definicji.

Definicja. Liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest *niewiększa* od liczby kardynalnej $\mathfrak{n}$, tj.

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n},$$

jeśli każdy zbiór mocy $\mathfrak{m}$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru mocy $\mathfrak{n}$.

Jeśli $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, to mówimy, że $\mathfrak{m}$ jest *mniejsze* od $\mathfrak{n}$ (lub $\mathfrak{n}$ większe od $\mathfrak{m}$) i piszemy $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ (lub $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$). Np.

(1) $$n < \mathfrak{a},$$

(2) $$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}.$$

Aby udowodnić (2), zauważmy, że $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, bo zbiór A mocy $\mathfrak{m}$ jest równoliczny z częścią zbioru 2^A składającą się ze zbiorów jednoelementowych; zarazem $\mathfrak{m} \neq 2^{\mathfrak{m}}$ na mocy twierdzenia 2 z § 3.

Stosunek $\leqslant$ posiada wiele własności znanych z arytmetyki, np.

(3) $$(\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n})\,(\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}) \to (\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{p}),$$

(4) $$(\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}) \to (\mathfrak{m}+\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n}+\mathfrak{p}),$$

(5) $$(\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}) \to (\mathfrak{m}\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n}\mathfrak{p}),$$

(6) $$(\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}) \to (\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}),$$

(7) $$(\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}) \to (\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}).$$

Prawo (3) wyraża przechodniość stosunku $\leqslant$, zaś prawa (4)—(7) — monotoniczność działań dodawania, mnożenia i potęgowania względem stosunku $\leqslant$.

Dla przykładu udowodnimy wzór (3). Niech A, B i C będą zbiorami mocy $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{p}$. W myśl założenia zbiór A jest równoliczny z częścią B_1 zbioru B, a B z częścią C_1 zbioru C. Niech funkcje f i g ustalają równoliczności $A \sim B_1$ i $B \sim C_1$. Funkcja złożona gf jest wzajemnie jednoznaczna i odwzorowuje A na część zbioru C_1, co dowodzi, że $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{p}$, c. b. d. o.

Stosunek $\leqslant$ między liczbami naturalnymi posiada, jak wiadomo, następujące dwie ważne własności:

(8) dla dowolnych m i n jest bądź $m \leqslant n$, bądź $m \geqslant n$,

(9) jeśli $m \leqslant n$ i $n \leqslant m$, to $m = n$.

Wysłowione przy pomocy relacji $<$ własności te brzmią

(10) dla dowolnych m i n jest bądź $m = n$, bądź $m < n$, bądź $m > n$,

(11) jeśli $m < n$, to nieprawdą jest, że $n < m$.

(10) (i (8)) nazywa się prawem *trichotomii*, (11) (i (9)) — prawem *asymetrii* relacji mniejszości. Prawo trichotomii orzeka, że każde dwie liczby naturalne są porównywalne, prawo asymetrii — że wzór $m < n$ wyklucza wzór $n < m$.

Nasuwa się w naturalny sposób pytanie, czy relacja mniejszości w dziedzinie dowolnych liczb kardynalnych czyni zadość prawom trichotomii i asymetrii.

Prawem trichotomii zajmiemy się dopiero w rozdziale V, tutaj natomiast omówimy asymetrię relacji $<$.

Oprzemy się na następującym wyniku:

Twierdzenie 1 *(Cantora-Bernsteina)* [1]. *Jeśli $A_0 \supset A_1 \supset A_2$ i $A_0 \sim A_2$, to $A_0 \sim A_1$.*

[1]) Twierdzenie Cantora-Bernsteina nazywane jest także twierdzeniem Schrödera-Bernsteina. Pierwszy poprawny dowód tego twierdzenia, pochodzący od F. Bernsteina, opublikowany został w książce: E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paryż 1898. Por. też J. König, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. **143** (1906).

Dowód Bernsteina jest w zasadzie identyczny z podanym tu dowodem I. Dowód II pochodzi od E. Zermelo; por. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, (1914), str. 50. Inne dowody zreferowane są w książce: A. Schönflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, 1913, str. 31—40. Ob. też streszczenia referatów A. Tarskiego i B. Knastera w Annales de la Société Polonaise de Mathématique **7** (1928), str. 132—133.

Podamy dwa dowody tego ważnego twierdzenia.

Lemat. Jeśli $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ jest ciągiem zbiorów rozłącznych, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ ciągiem funkcji wzajemnie jednoznacznych takich, że zbiorem argumentów φ_n jest M_n i że zbiory $\varphi_0(M_0), \varphi_1(M_1), \ldots, \varphi_n(M_n), \ldots$ są rozłączne, to funkcja f określona wzorem

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n, \quad \text{tj.} \quad f(x)=\varphi_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in M_n, \tag{12}$$

odwzorowuje zbiór $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ wzajemnie jednoznacznie na zbiór $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(M_n)$.

Dowód. Wzór (12) wyznacza wartość $f(x)$ jednoznacznie dla wszystkich $x \in \Sigma M_n$, gdyż wobec rozłączności zbiorów M_n, dla każdego x istnieje dokładnie jedno n takie, że $x \in M_n$. Zachodzi równość

$$f(\sum_n M_n)=\sum_n \varphi_n(M_n),$$

bowiem

$$y \in f(\sum_n M_n) \equiv \sum_x [(y=f(x))\cdot(x \in \sum_n M_n)] \equiv \sum_{x,n}[(y=f(x))(x \in M_n)]$$
$$\equiv \sum_{x,n}[(y=\varphi_n(x))(x \in M_n)] \equiv \sum_n [y \in \varphi_n(M_n)] \equiv y \in \sum_n \varphi_n(M_n).$$

Wreszcie funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna. Istotnie, z równości $f(x')=f(x'')$ wynika dla x' i x'' należących do ΣM_n, że

$$\sum_{n,p}\{(x' \in M_n)(x'' \in M_p)[\varphi_n(x')=\varphi_p(x'')]\}.$$

Ponieważ jednak $\varphi_n(x') \in \varphi_n(M_n)$ i $\varphi_p(x'') \in \varphi_p(M_p)$, a zbiory $\varphi_n(M_n)$ i $\varphi_p(M_p)$ są rozłączne dla $n \neq p$, więc $n=p$. Równość $\varphi_n(x')=\varphi_n(x'')$ pociąga zatem za sobą $x'=x''$ wobec założenia, że funkcja φ_n jest wzajemnie jednoznaczna.

Dowód I twierdzenia 1. Załóżmy, że $A_0 \supset A_1 \supset A_2$ i $A_0 \sim A_2$; niech funkcja h ustala równoliczność zbiorów A_0 i A_2. Przyjmijmy

$$A_3=h(A_1), \quad A_4=h(A_2), \quad \ldots, \quad A_{n+2}=h(A_n), \quad \ldots$$

Udowodnimy, że

$$A_n \supset A_{n+1} \supset A_{n+2} \quad \text{dla } n=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Istotnie, jest tak dla $n=0$ na mocy założenia. Przypuśćmy, że wzór (13) jest spełniony dla pewnego n; wynika stąd, że $h(A_n) \supset h(A_{n+1})$, tj. $A_{n+2} \supset A_{n+3}$ i wzór (13) daje

$$A_{n+1} \supset A_{n+2} \supset A_{n+3}.$$

Wykazaliśmy więc przez indukcję, że wzór (13) zachodzi dla każdego n.

Z (13) wynika, że $A_n \supset A_m$ dla $m>n$, skąd wnosimy z łatwością, że dla $m \neq n$ zbiory $A_m - A_{m+1}$ i $A_n - A_{n+1}$ są rozłączne.

Przyjmijmy

$$M_{n+1}=A_{2n}-A_{2n+1} \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\ldots$$

oraz

$$M_0=A_0-\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1},$$

a nadto

$$\varphi_0(x)=x \quad \text{dla} \quad x \in M_0,$$
$$\varphi_{n+1}(x)=h(x) \quad \text{dla} \quad x \in M_{n+1} \quad \text{i} \quad n=0,1,2,\ldots$$

Mamy więc:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n=A_0,$$

$$\varphi_0(M_0)=M_0,$$

$$\varphi_{n+1}(M_{n+1})=h(A_{2n}-A_{2n+1})=h(A_{2n})-h(A_{2n+1})$$
$$=A_{2n+2}-A_{2n+3}=M_{n+2}.$$

Wynika stąd, że zbiory $\varphi_n(M_n)$ są między sobą rozłączne, ponieważ zbiory M_n są rozłączne.

Zgodnie z lematem funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in M_0 \\ h(x) & \text{dla} \quad x \in M_{n+1} \quad \text{i} \quad n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

przekształca zbiór A_0 wzajemnie jednoznacznie w $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(M_n)$.

Ponieważ zaś

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(M_n)=\varphi_0(M_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n+1}(M_{n+1})=M_0+\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2}$$
$$=(A_0-\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1})+\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2}=A_0-M_1$$
$$=A_0-(A_0-A_1)=A_1,$$

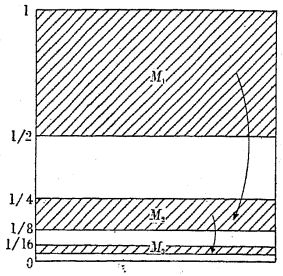
więc $f(A_0)=A_1$, to znaczy $A_0 \sim A_1$, c. b. d. o.

Zilustrujemy przeprowadzony dowód na następującym przykładzie geometrycznym: niech A_n będzie zbiorem punktów $\langle x,y\rangle$ płaszczyzny, dla których $0<y \leqslant 1/2^n$ i niech funkcja h przyporządkowuje punktowi

$\langle x,y\rangle$ punkt $h(x,y)$ o współrzędnych $\langle x, \frac{1}{4}y\rangle$. Funkcja h ustala więc równoliczność zbiorów A_0 i A_2, przy czym $A_0 \supset A_1 \supset A_2$. Oczywiście:

$$h(A_0)=A_2, \quad h(A_1)=A_3, \quad \ldots, \quad h(A_n)=A_{n+2}, \ldots$$

Zbiory M_{n+1} są zakreskowane na rysunku; zbiór M_0 jest niezakreskowany. Strzałki wskazują, że funkcja h przekształca M_1 na M_2, M_2 na M_3 itd. Jest zatem widoczne, że przekształcając każdy z obszarów zakreskowanych tak, jak wskazują strzałki i pozostawiając niezmieniony każdy punkt obszaru niezakreskowanego, przekształcimy A_0 w A_1.



W związku z dowodem I uczynimy jeszcze uwagę, która ułatwi nam zrozumienie dowodu II: suma $M_1+M_2+\ldots$ (zakreskowana część rysunku) jest najmniejszym zbiorem I, czyniącym zadość warunkowi

$$h(I)+M_1 \subset I. \tag{14}$$

Istotnie, jeśli zbiór I czyni zadość temu warunkowi, to $M_1 \subset I$; zakładając, że $M_{n+1} \subset I$, mamy $h(M_{n+1}) \subset h(I) \subset h(I)+M_1 \subset I$, skąd wobec $h(M_{n+1})=M_{n+2}$ wynika $M_{n+2} \subset I$. Rozumując przez indukcję wnosimy stąd, że $M_{n+1} \subset I$ dla każdego $n=0,1,\ldots$, tj. $M_1+M_2+\ldots \subset I$.

Na odwrót, suma $M_1+M_2+\ldots$ spełnia warunek (14), gdyż

$$h\Big(\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty} h(M_{n+1})=\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2}, \text{ skąd } h\Big(\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1}\Big)+M_1=\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1}.$$

Dowód II. Niech

$$\boldsymbol{K}=\prod_{X \in 2^{A_0}} [h(X)+(A_0-A_1) \subset X].$$

Rodzina $\boldsymbol{K}$ jest niepusta, gdyż np. $A_0 \in \boldsymbol{K}$. Rodzina ta posiada następującą własność

$$(X \in \boldsymbol{K}) \to [h(X)+(A_0-A_1) \in \boldsymbol{K}]. \tag{15}$$

Istotnie,

$$X \in \boldsymbol{K} \to \{h(X)+(A_0-A_1) \subset X\} \to \{h[h(X)+(A_0-A_1)] \subset h(X)\}$$
$$\to \{h[h(X)+(A_0-A_1)]+(A_0-A_1) \subset h(X)+(A_0-A_1)\};$$

ponieważ zaś z założenia, że $X \in \boldsymbol{K}$, wynika $h(X)+(A_0-A_1) \subset A_0$, więc wynika również, że $h(X)+(A_0-A_1) \in \boldsymbol{K}$.

Niech I będzie częścią wspólną zbiorów rodziny $\boldsymbol{K}$:

$$I=P(\boldsymbol{K})=\prod_{X \in \boldsymbol{K}} X. \tag{16}$$

Ponieważ $h(I) \subset \Pi_{X \in \boldsymbol{K}} h(X)$ (por. rozdział II, § 8, str. 67, (17)), więc z definicji (16) wynika na podstawie prawa rozdzielności dodawania względem mnożenia

$$h(I)+(A_0-A_1) \subset \prod_{X \in \boldsymbol{K}} h(X)+(A_0-A_1)=\prod_{X \in \boldsymbol{K}} [h(X)+(A_0-A_1)] \subset \prod_{X \in \boldsymbol{K}} X=I, \tag{17}$$

co dowodzi, że $I \in \boldsymbol{K}$. W myśl (15) otrzymujemy stąd $h(I)+(A_0-A_1) \in \boldsymbol{K}$, a więc $I \subset h(I)+(A_0-A_1)$, gdyż I jest podzbiorem każdego zbioru należącego do rodziny $\boldsymbol{K}$. Porównując ten wniosek z (17) otrzymamy

$$I=h(I)+(A_0-A_1). \tag{18}$$

Ponieważ $I \subset A_0$, więc $h(I) \subset h(A_0)=A_2$, co wobec inkluzji $A_2 \subset A_1$ daje $h(I) \cdot (A_0-A_1)=0$. Z (18) wynika zatem $I-h(I)=A_0-A_1$, a więc

$$A_1=A_0-[I-h(I)]=(A_0-I)+A_0 \cdot h(I)=(A_0-I)+h(I). \tag{19}$$

Wzór ten dowodzi, że funkcja f określona wzorami $f(x)=x$ dla $x \in A_0-I$, $f(x)=h(x)$ dla $x \in I$, przekształca zbiór A_0 w A_1. Funkcja ta jest wzajemnie jednoznaczna, gdyż zbiory A_0-I i $h(I)$ są rozłączne; ostatecznie więc $A_0 \sim A_1$.

UWAGI 1. Różnica między dowodem I i dowodem II nie jest natury merytorycznej lecz metodologicznej. W obu tych dowodach konstruuje się tę samą funkcję f, odwzorowującą A_0 w A_1. W pierwszym jednak dowodzie korzysta się z pojęć arytmetycznych, w drugim zaś — jedynie z pojęć ogólnej teorii mnogości.

2. Lemat (str. 114) daje się uogólnić — nie zmieniając w istotny sposób dowodu — jak następuje:

Niech $M \in (2^X)^T$ i $\varphi \in (2^{X \times Y})^T$, przy czym $\varphi_t \in Y^{M_t}$ oraz dla $t \neq t'$ jest $M_t \cdot M_{t'}=0=\varphi_t(M_t) \cdot \varphi_{t'}(M_{t'})$. Jeśli funkcje φ_t są wzajemnie jednoznaczne, to funkcja f określona wzorem

$$f=\sum_{t \in T} \varphi_t, \quad \text{tj.} \quad f(x)=\varphi_t(x) \quad \text{dla} \quad x \in M_t,$$

odwzorowuje zbiór $\sum_{t \in T} M_t$ wzajemnie jednoznacznie na $\sum_{t \in T} \varphi_t(M_t)$.

Twierdzenie 2. *Jeśli* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ *i* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, *to* $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$.

Dowód. Niech A_0 i B_0 będą zbiorami mocy $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$. Ponieważ $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, więc A_0 zawiera podzbiór A_1 mocy $\mathfrak{n}$. Wobec $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ zbiór A_1 zawiera podzbiór A_2 mocy $\mathfrak{m}$, tj. podzbiór A_2 równoliczny z A_0. Mamy więc $A_0 \supset A_1 \supset A_2$ i $A_0 \sim A_2$, skąd na podstawie twierdzenia 1 wynika $A_0 \sim A_1$, czyli $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$.

Inną formą twierdzenia 2 jest

Twierdzenie 3. *Jeśli* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, *to* $\mathfrak{n}$ non $< \mathfrak{m}$.

* ***Twierdzenie 4*** [1]. *Jeśli* $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{m}$, *to różnica* $2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m}$ *istnieje i równa się* $2^{\mathfrak{m}}$.

Dowód. Niech A będzie zbiorem mocy $\mathfrak{m}$; zbiór 2^A ma więc moc $2^{\mathfrak{m}}$. Twierdzenie będzie dowiedzione, jeśli wykażemy, że dla każdego zbioru $\boldsymbol{M}$ mocy $\mathfrak{m}$ zawartego w 2^A różnica $2^A-\boldsymbol{M}$ ma moc $2^{\mathfrak{m}}$ (por. § 4, str. 112). Ponieważ zaś zbiór $2^A-\boldsymbol{M}$, jako podzbiór zbioru 2^A ma moc $\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, więc wystarczy okazać, że

$$\overline{\overline{2^A-\boldsymbol{M}}} \geqslant 2^{\mathfrak{m}}. \tag{20}$$

Z założenia twierdzenia wynika, że zbiór A daje się rozbić na dwa zbiory rozłączne mocy $\mathfrak{m}$:

$$A=A_1+A_2, \quad A_1\cdot A_2=0, \quad \overline{\overline{A_1}}=\mathfrak{m}=\overline{\overline{A_2}}.$$

Niech f będzie funkcją, odwzorowującą zbiór A_1 na $\boldsymbol{M}$. Wartościami funkcji f są zatem podzbiory zbioru A. Przyjmijmy

$$E=\underset{x\in A_1}{E}[x \text{ non } \epsilon f(x)] \tag{21}$$

oraz

$$\varphi(X)=X+E \quad \text{dla} \quad X\subset A_2.$$

Funkcja $\varphi(X)$ jest wzajemnie jednoznaczna, gdyż dla $X_1\subset A_2$ i $X_2\subset A$ jest (wobec $EA_2=0$):

$$\{\varphi(X_1)=\varphi(X_2)\} \equiv \{X_1+E=X_2+E\} \to \{(X_1+E)A_2=(X_2+E)A_2\}$$
$$\equiv \{X_1+EA_2=X_2+EA_2\} \equiv (X_1=X_2).$$

Jeśli $X\subset A_2$, to $\varphi(X)$ non $\epsilon \boldsymbol{M}$. W przeciwnym bowiem razie istniałoby takie $a\in A_1$, że $\varphi(X)=f(a)$, tzn. $X+E=f(a)$, skąd

$$\{a\in X+E\} \equiv \{a\in f(a)\}. \tag{22}$$

Ponieważ zaś $X\subset A_2$ i $a\in A_1$, więc a non ϵX, a zatem $\{a\in X+E\}\equiv \{a\in E\}$, skąd na mocy (22): $\{a\in E\}\equiv\{a\in f(a)\}$; jest to jednak niemożliwe, gdyż z (21) wynika, że $\{a\in E\}\equiv\{a \text{ non } \epsilon f(a)\}$.

Funkcja $\varphi(X)$ odwzorowuje więc w sposób wzajemnie jednoznaczny zbiór 2^{A_1} na część zbioru $2^A-\boldsymbol{M}$. Wynika stąd nierówność (20).

[1]) Por. A. Tarski i A. Lindenbaum, *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, **19** (1926), str. 299—330, tw. 56 (A. Tarskiego). Praca ta zawiera wiele innych wzorów z arytmetyki liczb kardynalnych. Por. też W. Sierpiński, *Démonstration de l'égalité* $2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{m}}$ *pour les nombres cardinaux transfinis*, Fundamenta Mathematicae **34** (1947), str. 113—118.

° ***Twierdzenie 5.*** *Jeśli* f *jest funkcją określoną na zbiorze* X, *to* $\overline{\overline{f(X)}}\leqslant\overline{\overline{X}}$.

Dowód. W rozdziale II, § 7, str. 61, nazwaliśmy warstwą funkcji f zbiór wszystkich tych elementów zbioru X, dla których wartość funkcji jest ta sama. Każda warstwa jest więc zbiorem postaci

$$W_y=\underset{x\in X}{E}[f(x)=y].$$

Ponieważ warstwy są rozłączne i niepuste, przeto z pewnika wyboru [1]) (str. 48) wynika, że istnieje zbiór A, zawierający dokładnie po jednym elemencie z każdej warstwy. Zbiór A jest zatem równoliczny ze zbiorem warstw, a więc ze zbiorem $f(X)$. Ponieważ zaś A jest podzbiorem zbioru X, więc wnosimy stąd, że $\overline{\overline{f(X)}}\leqslant\overline{\overline{X}}$.

PRZYKŁAD. Rzut zbioru płaskiego Q na dowolną prostą ma moc $\leqslant\overline{\overline{Q}}$. Warstwami są w tym przypadku iloczyny QL, gdzie L jest dowolną prostą równoległą do kierunku rzutowania.

UWAGI. 1. Piszemy $\mathfrak{m}\leqslant^*\mathfrak{n}$, jeśli $\mathfrak{m}=0$ lub jeśli (każdy) zbiór mocy $\mathfrak{m}$ jest obrazem (każdego) zbioru mocy $\mathfrak{n}$ [2]). Z twierdzenia 5 wynika łatwo, że $\{\mathfrak{m}\leqslant^*\mathfrak{n}\}\equiv\{\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}\}$; dowód tej równoważności czyni jednak użytek z pewnika wyboru. Bez użycia tego pewnika nie potrafimy udowodnić nawet tak intuicyjnego twierdzenia jak to, że warunki $\mathfrak{m}\leqslant^*\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ wykluczają się wzajemnie [3]).

2. Twierdzenia z arytmetyki liczb kardynalnych można niekiedy zaostrzyć formułując je jako *twierdzenia o przekształceniach*. Np. tego rodzaju zaostrzeniem twierdzenia Cantora-Bernsteina jest następujące sformułowanie podane przez Banacha [4]):

(α) Jeśli f jest przekształceniem różnowartościowym zbioru A na zbiór B, zaś g jest przekształceniem różnowartościowym pewnego podzbioru zbioru A na zbiór B, to istnieją takie zbiory A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2, że:

$$A=A_1+A_2, \quad B=B_1+B_2, \quad A_1A_2=0=B_1B_2, \quad f(A_1)=B_1, \quad g(A_2)=B_2.$$

[1]) Na fakt, że w dowodzie twierdzenia 5 powołać się trzeba na jakiś nowy pewnik, zwrócił uwagę B. Levi już w r. 1902 (R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti (2), **35**, str. 863), a więc przed ogłoszeniem przez Zermelo aksjomatyki teorii mnogości, zawierającej pewnik wyboru.

[2]) Własności relacji $\leqslant^*$ badał bez odwoływania się do pewnika wyboru A. Tarski. Por. cytowaną na str. 118 pracę A. Tarskiego i A. Lindenbauma.

[3]) Por. W. Sierpiński, *Sur une proposition qui entraîne l'existence des ensembles non mesurables*, Fundamenta Mathematicae **34** (1947), str. 157—162.

[4]) Ob. *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), str. 236—239.

Podobnie twierdzenie (F. Bernsteina)[1]) orzekające, że

$$(2m=2n)\to(m=n),$$

można zaostrzyć w sposób następujący[2]):

(β) Dane są 4 zbiory M, N, P i Q spełniające warunki:

$$P+Q=M+N, \qquad MN=0=PQ,$$

i dane są 2 przekształcenia różnowartościowe: f zbioru M na N i g zbioru P na Q. Istnieją wówczas 2 następujące rozkłady zbiorów M i Q:

$$M=M_1+M_2+M_3+M_4, \quad Q=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4,$$
$$Q_1=M_1, \quad Q_2=g(M_2), \quad Q_3=f(M_3), \quad Q_4=gf(M_4).$$

Oba twierdzenia (α) i (β) mają interesujące zastosowania, gdy jako f i g przyjąć przekształcenia izometryczne (tj. zachowujące odległość)[3]).

§ 6. Własności liczb $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{c}$. Przyjmujemy znakowanie następujące:

$$\mathfrak{c}=2^{\mathfrak{a}}.$$

Liczbę $\mathfrak{c}$ nazywamy *mocą continuum*.

Z liczbą $\mathfrak{c}$, podobnie jak z liczbą $\mathfrak{a}$, spotykamy się często w różnych działach teorii mnogości i jej zastosowań. Wyprowadzimy obecnie wzory dotyczące liczb n (liczby naturalne), $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{c}$:

(1) $$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{c}.$$

Istotnie (por. str. 111, (9)), $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=2\mathfrak{c}=2\cdot 2^{\mathfrak{a}}=2^{1+\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$, gdyż $1+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$.

(2) $$n<\mathfrak{a}<\mathfrak{c}.$$

Nierówności te wynikają ze wzorów (1) i (2), § 5, str. 112.

(3) $$n+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}.$$

Istotnie, z (2) wynikają nierówności (por. § 5, wzór (4), str. 112)

$$\mathfrak{c}\leqslant n+\mathfrak{c}\leqslant\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\leqslant\mathfrak{c}+\mathfrak{c},$$

a więc zgodnie z (1)

$$\mathfrak{c}\leqslant n+\mathfrak{c}\leqslant\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\leqslant\mathfrak{c}.$$

Stosując twierdzenie 2 z § 5, str. 117, otrzymamy stąd równości (3).

[1]) F. Bernstein, *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Inaugural Dissertation, Getynga 1901, oraz Mathematische Annalen **61** (1905), str. 117—155. Por. też D. König, Mathematische Annalen **77** (1916), str. 462, i W. Sierpiński, *Sur l'égalité* $2m=2n$ *pour les nombres cardinaux*, Fundamenta Mathematicae **3** (1922), str. 1—6.

[2]) Ob. K. Kuratowski, *Une propriété des correspondances biunivoques*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), str. 241—243.

[3]) Ob. S. Banach i A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, tamże, str. 244—277.

(4) $$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}.$$

Istotnie, $\mathfrak{c}=2^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}\cdot 2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}$, gdyż $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ (por. § 4, wzór (3), str. 110).

(5) $$n\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}.$$

Istotnie, z (2) na mocy wzoru (5) z § 5, str. 113 wynikają nierówności $\mathfrak{c}\leqslant n\cdot\mathfrak{c}\leqslant\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}\leqslant\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}$, skąd wobec (4) otrzymujemy równości (5) przez zastosowanie twierdzenia 2 z § 5, str. 117.

Z (4) wynika przez indukcję

(6) $$\mathfrak{c}^n=\mathfrak{c}.$$

(7) $$n^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c} \quad (\text{dla } n>1).$$

Istotnie (por. str. 111, (11)), $\mathfrak{c}=2^{\mathfrak{a}}\leqslant n^{\mathfrak{a}}\leqslant\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}\leqslant\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}=(2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$, skąd otrzymujemy (7) przez zastosowanie twierdzenia 2 z § 5, str. 117.

(8) $$\mathfrak{c}-\mathfrak{a}=\mathfrak{c}.$$

Dla dowodu wystarczy zastosować twierdzenie 4 z § 5, str. 118, i wzór (1).

Inny dowód wzoru (8) naszkicowany jest w ćwiczeniu 2.

W analogiczny sposób dowodzi się wzorów, dotyczących liczby $\mathfrak{f}=2^{\mathfrak{c}}$:

(9) $$n+\mathfrak{f}=\mathfrak{a}+\mathfrak{f}=\mathfrak{c}+\mathfrak{f}=\mathfrak{f}+\mathfrak{f}=\mathfrak{f},$$

(10) $$n\cdot\mathfrak{f}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{f}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{f}=\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f}=\mathfrak{f},$$

(11) $$n^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f}^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f} \quad (\text{dla } n>1),$$

(12) $$\mathfrak{f}-\mathfrak{c}=\mathfrak{f}.$$

Podamy obecnie przykłady zbiorów mocy $\mathfrak{c}$ i $2^{\mathfrak{c}}$.

Twierdzenie 1. *Zbiór Cantora* $\mathcal{C}$ *ma moc* $\mathfrak{c}$.

Dowód. W rozdziale II, § 11, str. 75, wykazaliśmy, że zbiór $\mathcal{C}$, tj. zbiór liczb rzeczywistych postaci

(13) $$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i} \qquad c_i=0 \text{ lub } c_i=2,$$

jest równoliczny z produktem $\{0,2\}^{\mathcal{J}}$. A zatem $\overline{\overline{\mathcal{C}}}=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$.

Twierdzenie 2. *Zbiór* $\mathcal{N}$ *liczb niewymiernych przedziału* 01 *ma moc* $\mathfrak{c}$.

Istotnie (por. rozdział II, § 11, str. 75) $\mathcal{N}\sim\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, zaś na mocy (7)

$$\overline{\overline{\mathcal{J}^{\mathcal{J}}}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}.$$

Twierdzenie 3. *Następujące zbiory mają moc* $\mathfrak{c}$: a) *przedział* 01 *z końcami, bez końców, lub z jednym końcem*; b) *zbiór punktów dowolnego odcinka*; c) *zbiór* $\mathcal{E}$ *wszystkich punktów prostej*; d) *zbiór wszystkich punktów przestrzeni* $\mathcal{E}^n$ *o dowolnej liczbie n wymiarów*; e) *zbiór liczb przestępnych.*

Dowód. a) wynika z (3) i uwagi, że rozważany przedział jest sumą zbioru liczb niewymiernych tego przedziału, który jest mocy $\mathfrak{c}$ (twierdzenie 2), oraz pewnego zbioru liczb wymiernych, który jest mocy $\mathfrak{a}$; dla dowodu b) i c) ob. przykłady 2 i 3 z § 1, str. 99; d) wynika z c) na mocy (6); e) wynika wreszcie z c) na mocy (8) i przykładu 4 z § 2, str. 103.

UWAGI. 1°. Z twierdzeń 3 c) i 3 d) wynika, że zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej i zbiór liczb rzeczywistych są równoliczne. Dla scharakteryzowania położenia punktu w przestrzeni n-wymiarowej wystarcza więc jeden parametr. Wynik ten może się wydać paradoksalny i niezgodny z naszym wyobrażeniem o wymiarach. W rzeczywistości nie jest on bardziej paradoksalny niż fakt, że układowi n ciągów nieskończonych

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_k^{(1)}, \ldots; \quad a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_k^{(2)}, \ldots; \quad \ldots; \quad a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots$$

można przyporządkować we wzajemnie jednoznaczny sposób jeden ciąg:

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots$$

Istotna natomiast różnica między przestrzeniami o różnej liczbie wymiarów leży w niemożności wzajemnie jednoznacznego i ciągłego odwzorowania tych przestrzeni na siebie [1]).

2°. Z 3 e) wynika twierdzenie (Liouville'a) o istnieniu liczb przestępnych, tj. nie czyniących zadość żadnemu równaniu algebraicznemu o współczynnikach całkowitych. W pewnym sensie liczb przestępnych jest nawet więcej niż algebraicznych, gdyż zbiór liczb algebraicznych jest mocy $\mathfrak{a}$, a zbiór liczb przestępnych mocy $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$; wynik ten uzyskany przez Cantora w 1874 roku był jednym z pierwszych zastosowań teorii mnogości do konkretnych zagadnień matematycznych.

Twierdzenie 4. *Zbiór* $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ *ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych ma moc* $\mathfrak{c}$.

Dowód. $\overline{\overline{\mathcal{E}^{\mathcal{J}}}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ (na mocy (7)).

Twierdzenie 5. *Zbiór funkcji ciągłych zmiennej rzeczywistej ma moc* $\mathfrak{c}$.

[1]) Zagadnienie wymiaru i jego niezmienniczości względem przekształceń wzajemnie jednoznacznych i ciągłych badane jest w topologii.

Dowód. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych. Każdej funkcji ciągłej f zmiennej rzeczywistej przyporządkujmy ciąg liczb rzeczywistych

$$f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n), \ldots \tag{15}$$

Jeśli funkcje f i g są różne, to odpowiadające im ciągi

$$f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n), \ldots, \quad g(r_1), g(r_2), \ldots, g(r_n), \ldots$$

są też różne. Istotnie, z $f \neq g$ wynika, że dla pewnego x jest $f(x) \neq g(x)$; jeśli więc r_{k_n} jest ciągiem liczb wymiernych o granicy x, to nie może być $f(r_{k_n}) = g(r_{k_n})$ dla wszelkich n, gdyż wynikało by stąd, wobec ciągłości funkcji f i g, że

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f(r_{k_n}) = \lim_{n=\infty} g(r_{k_n}) = g(x).$$

Zbiór funkcji ciągłych zmiennej rzeczywistej jest więc równoliczny ze zbiorem ciągów (15), ten zaś zbiór jest mocy $\leqslant \mathfrak{c}$ w myśl twierdzenia 4. Z drugiej strony zbiór funkcji ciągłych jest mocy $\geqslant \mathfrak{c}$, gdyż zawiera wszystkie funkcje stałe. Zgodnie z twierdzeniem 2 z § 5, wynika stąd twierdzenie 5.

Twierdzenie 6. *Zbiór* $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ *wszystkich funkcji zmiennej rzeczywistej ma moc* $2^{\mathfrak{c}}$.

Dowód. $\overline{\overline{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ (na mocy (11)).

ZASTOSOWANIA i ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że $2^{\mathfrak{c}} - \mathfrak{a} = 2^{\mathfrak{c}}$.

2. Udowodnić wzór (8) opierając się na wzorze $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Wskazówka. Niech $P \times Q$ będzie produktem dwu zbiorów mocy $\mathfrak{c}$, a M przeliczalnym podzbiorem tego produktu. Odcięte punktów należących do M tworzą zbiór przeliczalny, istnieje więc takie $p_0 \in P$, że cała „prosta" $E_{xy}[(x = p_0)\,(y \in Q)]$ jest rozłączna z M. Różnica $(P \times Q) - M$ ma więc moc $\geqslant \mathfrak{c}$.

3. Udowodnić, że zbiór wszystkich przedziałów (położonych w zbiorze liczb rzeczywistych) o obu końcach wymiernych jest przeliczalny.

4. Dowieść dla przestrzeni 3-wymiarowej (lub ogólniej dla przestrzeni $\mathcal{E}^n$), że zbiór kul, które mają zarówno środek o współrzędnych wymiernych, jak i długość promienia wymierną, jest przeliczalny.

5. Niech f będzie funkcją o argumentach i wartościach rzeczywistych. Mówimy, że funkcja f ma ekstremum właściwe w punkcie a, jeśli istnieje taki przedział P, otaczający punkt a, że dla $x \in P - \{a\}$ jest $f(x) < f(a)$ (względnie $f(x) > f(a)$). Dowieść, że zbiór ekstremów właściwych funkcji f jest (co najwyżej) przeliczalny.

Wskazówka: oprzeć się na ćw. 3.

Uogólnić to twierdzenie na funkcje określone na przestrzeni $\mathcal{E}^n$ (zastępując przedział P przez kulę n-wymiarową).

6. Dowieść, że każda rodzina rozłącznych przedziałów (zbioru liczb rzeczywistych) jest przeliczalna.

Wskazówka: oprzeć się na ćw. 3.

Uogólnić to twierdzenie na rodziny zbiorów otwartych rozłącznych, położonych w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ (opierając się na ćw. 4).

7. Niech Z będzie zbiorem położonym na płaszczyźnie. Punkt p zbioru Z nazywamy *izolowanym*, jeśli istnieje takie koło K (otwarte, tj. bez obwodu), że $\{p\}=Z\cdot K$. Dowieść, że zbiór punktów izolowanych zbioru Z jest przeliczalny [1]).

Wskazówka: oprzeć się na ćw. 4.

Uogólnić to twierdzenie na przestrzeń $\mathcal{E}^n$ (zastępując w definicji punktu izolowanego koło przez kulę).

8. Dowieść, że funkcja monotoniczna nieciągła (o wartościach i argumentach rzeczywistych) ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości.

Wskazówka: funkcja monotoniczna posiada w każdym punkcie lewostronną i prawostronną granicę; w punktach nieciągłości granice te są, oczywiście, różne; następnie skorzystać z ćw. 6.

9. Dowieść, że rodzina wszystkich podzbiorów domkniętych linii prostej (lub ogólniej przestrzeni $\mathcal{E}^n$) ma moc continuum.

Wskazówka: udowodnić najpierw, że rodzina wszystkich zbiorów otwartych (tj. uzupełnień zbiorów domkniętych) ma moc $\mathfrak{c}$. W tym celu należy dowieść, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnej ilości przedziałów o obu końcach wymiernych, a następnie należy skorzystać z ćw. 3.

10. Niech $A\subset\mathcal{E}$ (lub ogólniej $A\subset\mathcal{E}^n$). Mówimy, że punkt p jest punktem kondensacji zbioru A, jeśli każdy zbiór otwarty zawierający punkt p posiada nieprzeliczalnie wiele punktów wspólnych z A. Zbiór punktów kondensacji zbioru A oznaczamy symbolem $A^\circledcirc$.

Udowodnić (opierając się na ćw. 3), że zbiór $A-A^\circledcirc$ jest przeliczalny.

11. Udowodnić wzory:

$$(A+B)^\circledcirc=A^\circledcirc+B^\circledcirc,\quad A^\circledcirc=A^{\circledcirc\circledcirc}=A^{\circledcirc\prime}=\overline{A^\circledcirc}=(A\cdot A^\circledcirc)^\circledcirc,\quad A\cdot A^\circledcirc\subset(A\cdot A^\circledcirc)^\prime.$$

12 [2]). Mówimy, że ciąg liczb naturalnych $b_1, b_2,\ldots$ rośnie szybciej, niż ciąg $a_1, a_2,\ldots$, jeśli $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$. Udowodnić, że:

1^0 do każdego ciągu istnieje ciąg szybciej od niego rosnący,

[1]) Twierdzenie to ma ważne zastosowania w teorii funkcji analitycznych.

[2]) W związku z zagadnieniami poruszonymi w ćw. 12 por. książkę: G. H. Hardy, *Orders of infinity*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics N° 12, 2-e wydanie, Cambridge 1924.

2^0 jeśli zbiór ciągów Z ma tę własność, że dla każdego ciągu $a_1, a_2,\ldots$ istnieje w tym zbiorze ciąg $b_1, b_2,\ldots$ szybciej rosnący niż $a_1, a_2,\ldots$, to zbiór Z jest nieprzeliczalny [1]).

Wskazówka. Przypuszczając, że $\overline{\overline{Z}}=\mathfrak{a}$, możemy przedstawić zbiór Z w postaci tablicy:

$$\begin{array}{l} a_{1,1}, a_{1,2},\ldots, a_{1,n},\ldots \\ a_{2,1}, a_{2,2},\ldots, a_{2,n},\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, a_{n,2},\ldots, a_{n,n},\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Posługując się metodą przekątni (odpowiednio dostosowaną), określamy ciąg szybciej rosnący od każdego z ciągów powyższej tablicy.

*§ 7. Sumy uogólnione liczb kardynalnych.

Niech T będzie dowolnym zbiorem, $\mathfrak{f}$ — funkcją określoną w tym zbiorze, której wartościami są liczby kardynalne. Zamiast $\mathfrak{f}(x)$ pisać będziemy $\mathfrak{f}_x$.

Założymy, że funkcja $\mathfrak{f}$ czyni zadość następującemu warunkowi:

(W) { istnieje funkcja $F^{(0)}$ określona w T, której wartościami są zbiory takie, że $\overline{\overline{F_x^{(0)}}}=\mathfrak{f}_x$ dla wszystkich $x\in T$.

Dla wielu funkcji $\mathfrak{f}$ założenie (W) daje się udowodnić bez trudności. Jest tak np., gdy $\mathfrak{f}$ ma skończoną tylko ilość wartości. Wykażemy w rozdziale V (§ 3, uwaga 7), że każda funkcja $\mathfrak{f}$ czyni zadość warunkowi (W); w rzeczywistości więc założenie (W) nie zmniejsza ogólności naszych rozważań.

° ***Twierdzenie 1.*** *Istnieje taka funkcja F określona na T i mająca zbiory jako wartości, że*

$$\overline{\overline{F_x}}=\mathfrak{f}_x \text{ dla } x\in T, \tag{1}$$

$$F_x\cdot F_y=0 \text{ dla } x\neq y. \tag{2}$$

Jeśli ponadto $F^{(1)}$ i $F^{(2)}$ są dwiema funkcjami, czyniącymi zadość warunkom (1) *i* (2), *to* $\sum\limits_x F_x^{(1)}\sim\sum\limits_x F_x^{(2)}$.

Dowód. Przyjmijmy dla $x\in T$

$$F_x=F_x^{(0)}\times\{x\},$$

gdzie $F^{(0)}$ jest jakąkolwiek funkcją, czyniącą zadość warunkowi (W). Jeśli $x\neq y$, to $F_x\cdot F_y=0$, gdyż zbiór F_x składa się z par o następniku x, a F_y z par o następniku y. Ponadto $\overline{\overline{F_x}}=\overline{\overline{F_x^{(0)}}}=\mathfrak{f}_x$. Funkcja F czyni więc zadość warunkom (1) i (2).

[1]) Twierdzenie 2^0 pozostaje w związku z zagadnieniem istnienia kryteriów zbieżności szeregów nieskończonych.

Załóżmy teraz, że funkcje $F^{(1)}$ i $F^{(2)}$ czynią zadość warunkom (1) i (2). Dla każdego $x \in T$ zbiór Φ_x funkcji wzajemnie jednoznacznych, odwzorowujących $F_x^{(1)}$ na $F_x^{(2)}$ jest więc niepusty. Jeśli $x \neq y$, to $\Phi_x \cdot \Phi_y = 0$, gdyż każda z funkcji należących do Φ_x ma $F_x^{(1)}$ jako zbiór argumentów, a więc jest różna od każdej z funkcji należącej do Φ_y.

Z pewnika wyboru wnosimy, że istnieje zbiór Ψ, zawierający dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów Φ_x. Niech φ_x będzie jedynym elementem iloczynu $\Psi \cdot \Phi_x$; jest to więc funkcja odwzorowująca w sposób wzajemnie jednoznaczny zbiór $F_x^{(1)}$ na $F_x^{(2)}$.

Dla każdego $t \in \sum_x F_x^{(1)}$ istnieje dokładnie jeden element x taki, że $t \in F_x^{(1)}$; oznaczmy go przez $x(t)$ i przyjmijmy

$$f(t) = \varphi_{x(t)}(t), \quad \text{tj.} \quad f = \sum_{x \in T} \varphi_x.$$

Funkcja f odwzorowuje sumę $\sum_x F_x^{(1)}$ na sumę $\sum_x F_x^{(2)}$ w sposób wzajemnie jednoznaczny (ob. uwaga 2, str. 117):

$$f\Big(\sum_{x \in T} F_x^{(1)}\Big) = \sum_{x \in T} F_x^{(2)},$$

a zatem

$$\sum_{x \in T} F_x^{(1)} \sim \sum_{x \in T} F_x^{(2)}.$$

Definicja. *Sumą liczb kardynalnych* $\mathfrak{f}_x$ dla $x \in T$ nazywamy liczbę kardynalną $\overline{\overline{\sum_x F_x}}$, gdzie F jest jakąkolwiek funkcją, czyniącą zadość warunkom (1) i (2).

Liczbę tę oznaczamy symbolem $\Sigma_{x \in T} \mathfrak{f}_x$ lub krócej $\Sigma \mathfrak{f}_x$, tj.

$$\sum_{x \in T} \mathfrak{f}_x = \overline{\overline{\sum_{x \in T} F_x}}. \tag{3}$$

Definicja ta jest poprawna, gdyż liczba $\overline{\overline{\sum_x F_x}}$ nie zależy od wyboru funkcji F czyniącej zadość warunkom (1) i (2), a przy tym funkcja taka zawsze istnieje. Nie można jednak tego udowodnić bez odwoływania się do pewnika wyboru, wskutek czego samo używanie pojęcia sumy dowolnej mnogości liczb kardynalnych zakłada z góry uprzednie przyjęcie pewnika wyboru [1]).

Jeśli $T = \{1,2\}$, to $\Sigma_{t \in T} \mathfrak{f}_t = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$. Jeśli $T = \mathcal{J}$, to zamiast znaku sumy używamy też symbolu

$$\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{f}_n$$

i mówimy o sumie szeregu liczb kardynalnych.

[1]) Na fakt, że definiując sumę nieskończonego ciągu liczb kardynalnych musimy powoływać się na pewnik wyboru, zwrócił uwagę W. Sierpiński w pracy: *Sur l'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et Analyse*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. Sci. Math. et Nat., seria A, 1918, str. 112.

° ***Twierdzenie 2*** *(uogólnione prawo przemienności). Jeśli φ jest dowolną permutacją zbioru T, to $\Sigma \mathfrak{f}_x = \Sigma \mathfrak{f}_{\varphi(x)}$.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

$$\sum_x \mathfrak{f}_x = \overline{\overline{\sum_x F_x}} = \overline{\overline{\sum_x F_{\varphi(x)}}} = \sum_x \mathfrak{f}_{\varphi(x)}$$

(gdzie F jest dowolną funkcją czyniącą zadość warunkom (1) i (2)), na mocy twierdzenia 3 rozdziału II, § 8, str. 65, oraz wzoru (3).

° ***Twierdzenie 3*** *(uogólnione prawo łączności). Jeśli $T = \sum_{y \in I} T_y$, przy czym zbiory T_y są rozłączne, to*

$$\sum_{x \in T} \mathfrak{f}_x = \sum_{y \in I} \Big(\sum_{x \in T_y} \mathfrak{f}_x \Big).$$

Dowód. Przyjmijmy dla $y \in I$

$$\mathfrak{g}_y = \sum_{x \in T_y} \mathfrak{f}_x, \quad \text{tj.} \quad \mathfrak{g}_y = \overline{\overline{\sum_{x \in T_y} F_x}}.$$

Zatem

$$\sum_{y \in I} \mathfrak{g}_y = \overline{\overline{\sum_{y \in I} \Big(\sum_{x \in T_y} F_x \Big)}} = \overline{\overline{\sum_{x \in T} F_x}},$$

na mocy twierdzenia 2 z rozdziału II, § 8, str. 65.

Wnosimy stąd, że

$$\sum_{y \in I} \mathfrak{g}_y = \sum_{x \in T} \mathfrak{f}_x,$$

co dowodzi twierdzenia 3.

° ***Twierdzenie 4*** *(uogólnione prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania). Dla dowolnej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ zachodzi wzór*

$$\Big(\sum_x \mathfrak{f}_x \Big) \cdot \mathfrak{m} = \sum_x (\mathfrak{f}_x \cdot \mathfrak{m}).$$

Dowód. Niech $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$. A więc

$$\Big(\sum_x \mathfrak{f}_x \Big) \mathfrak{m} = \Big(\overline{\overline{\sum_x F_x}} \Big) \times \overline{\overline{M}} \quad \text{oraz} \quad \sum_x (\mathfrak{f}_x \cdot \mathfrak{m}) = \overline{\overline{\sum_x (F_x \times M)}},$$

zarazem (ob. ćwicz. 2 z rozdziału II, § 8, str. 69)

$$\Big(\sum_x F_x \Big) \times M = \sum_x (F_x \times M).$$

° ***Twierdzenie 5.*** *Jeśli $\mathfrak{g}_x \leqslant \mathfrak{f}_x$ dla $x \in T$, to $\sum_x \mathfrak{g}_x \leqslant \sum_x \mathfrak{f}_x$.*

Dowód. Niech $\boldsymbol{K}_x$ będzie rodziną tych $X \subset F_x$, które są mocy $\mathfrak{g}_x$. W myśl założenia $\boldsymbol{K}_x \neq 0$ dla każdego $x \in T$. Istnieje więc (por. twierdzenie 3, str. 74) funkcja

$$G \in \prod_{x \in T} \boldsymbol{K}_x, \quad \text{tj.} \quad G_x \in \boldsymbol{K}_x.$$

A zatem

$$G_x \subset F_x \quad \text{i} \quad \overline{\overline{G_x}} = \mathfrak{g}_x, \quad \text{skąd} \quad \sum_x G_x \subset \sum_x F_x \quad \text{i} \quad \overline{\overline{\sum_x G_x}} = \sum_x \mathfrak{g}_x,$$

co dowodzi, że $\sum_x \mathfrak{g}_x \leqslant \sum_x \mathfrak{f}_x$.

° ***Twierdzenie 6.*** *Jeśli* $S \subset T$, *to*

$$\sum_{x \in S} \mathfrak{f}_x \leqslant \sum_{x \in T} \mathfrak{f}_x.$$

Dowód. Przyjmijmy

$$\mathfrak{g}_x = \begin{cases} \mathfrak{f}_x & \text{dla} \quad x \in S \\ 0 & \text{dla} \quad x \in T - S. \end{cases}$$

Z twierdzenia 5 wynika, że $\sum_{x \in T} \mathfrak{g}_x \leqslant \sum_{x \in T} \mathfrak{f}_x$, zaś $\sum_{x \in T} \mathfrak{g}_x = \sum_{x \in S} \mathfrak{f}_x$.

PRZYKŁAD. Przyjmijmy $T = \mathcal{J}$ oraz $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Z twierdzenia 6 wynika, że

$$\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \ldots + \mathfrak{f}_n \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{f}_m.$$

Używając terminologii zapożyczonej z analizy możemy powiedzieć, że suma szeregu nieskończonego liczb kardynalnych jest nie mniejsza od dowolnej jego sumy cząstkowej.

° ***Twierdzenie 7.*** *Jeśli* $\mathfrak{f}_x = \mathfrak{m}$ *dla wszystkich* $x \in T$, *zaś* $\mathfrak{n} = \overline{\overline{T}}$, *to*

$$\sum_{x \in T} \mathfrak{f}_x = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}.$$

Dowód. Niech $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$. Dla każdego x istnieje więc funkcja odwzorowująca wzajemnie jednoznacznie zbiór F_x na M; niech Φ_x będzie zbiorem wszystkich tych funkcji. Z pewnika wyboru wnosimy, że istnieje zbiór Ψ, zawierający dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów Φ_x. Niech f_x będzie jedynym elementem iloczynu $\Psi \cdot \Phi_x$.

Przyjmijmy dla $t \in \sum_x F_x$

$$\varphi(t) = \langle f_x(t), x \rangle,$$

gdzie x jest (jedynym) elementem zbioru T takim, że $t \in F_x$.

Funkcja φ odwzorowuje sumę ΣF_x na produkt $M \times T$. Funkcja ta jest wzajemnie jednoznaczna. Istotnie, jeśli

$$\varphi(t_1) = \langle f_{x_1}(t_1), x_1 \rangle \quad \text{i} \quad \varphi(t_2) = \langle f_{x_2}(t_2), x_2 \rangle,$$

to z $x_1 \neq x_2$ wynika $t_1 \neq t_2$, gdyż t_1 i t_2 należą wówczas do rozłącznych zbiorów F_{x_1} i F_{x_2}; jeśli zaś $x_1 = x_2 = x$, to ze wzajemnej jednoznaczności funkcji f_x wnosimy, że z $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ wynika $t_1 \neq t_2$.

A zatem $\Sigma F_x \sim M \times T$, co dowodzi twierdzenia 7.

° ***Twierdzenie 8.*** *Jeśli* $\mathfrak{f}_x \leqslant \mathfrak{m}$ *dla* $x \in T$, *zaś* $\mathfrak{n} = \overline{\overline{T}}$, *to* $\Sigma \mathfrak{f}_x \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$.

Dowód. Przyjmując $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$ dla $x \in T$, wnosimy z twierdzenia 5, że $\Sigma \mathfrak{f}_x \leqslant \Sigma \mathfrak{m}_x$, a z twierdzenia 7, że $\Sigma \mathfrak{m}_x = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$.

PRZYKŁADY. 1. Obliczymy sumę Σk_n, gdzie k_n jest liczbą naturalną, a n przebiega zbiór $\mathcal{J}$ liczb naturalnych. W tym celu zauważmy, że z twierdzenia 7 wynikają równości

$$\begin{aligned} 1+1+1+\ldots &= 1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\ldots &= \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \end{aligned} \tag{4}$$

a ponieważ w myśl twierdzenia 5

$$1+1+1+\ldots \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} k_n \leqslant \mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\ldots,$$

więc na mocy twierdzenia 2 z § 5, str. 117, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = \mathfrak{a}.$$

W szczególności więc

$$\begin{aligned} 2+2+2+\ldots &= \mathfrak{a}, \\ 1+2+3+\ldots &= \mathfrak{a}, \\ 1!+2!+3!+\ldots &= \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Jest rzeczą ciekawą, że żadnego z tych trzech wzorów nie można udowodnić bez odwoływania się do pewnika wyboru.

2. Ze wzoru (4) wnosimy, że suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna (por. § 2, twierdzenie **7**, str. 104).

3. Z twierdzenia 7 wynika, że $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\ldots = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Podobnie suma $\Sigma_{x \in T} \mathfrak{f}_x$, rozciągnięta na zbiór T mocy $\mathfrak{c}$, o wszystkich składnikach równych $\mathfrak{c}$ jest równa $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$, czyli $\mathfrak{c}$.

*§ 8. Iloczyny uogólnione liczb kardynalnych.

Korzystać będziemy, jak poprzednio, z pewnika wyboru i zakładać będziemy, że $\mathfrak{f}$ jest funkcją, której wartościami są liczby kardynalne i która czyni zadość warunkowi (W) ze str. 125.

° ***Twierdzenie 1.*** *Jeśli* $F^{(1)}$ *i* $F^{(2)}$ *są dwiema funkcjami takimi, że* $\overline{\overline{F_x^{(1)}}} = \mathfrak{f}_x = \overline{\overline{F_x^{(2)}}}$ *dla* $x \in T$, *to*

$$\overline{\overline{\underset{x \in T}{P} F_x^{(1)}}} = \overline{\overline{\underset{x \in T}{P} F_x^{(2)}}}.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1 z § 7 dowodzimy (na podstawie pewnika wyboru), że istnieje zbiór, który dla każdego x zawiera dokładnie jedną funkcję φ_x odwzorowującą $F_x^{(1)}$ na $F_x^{(2)}$.

Przyporządkujmy funkcji $f_1 \in \underset{x \in T}{P} F_x^{(1)}$ funkcję f_2, daną wzorem

$$f_2(t) = \varphi_t(f_1(t)) \quad \text{dla} \quad t \in T. \tag{1}$$

Ponieważ $f_1(t) \in F_t^{(1)}$ dla każdego $t \in T$, zatem $\varphi_t(f_1(t)) \in \varphi_t(F_t^{(1)}) = F_t^{(2)}$, co dowodzi, że $f_2(t) \in F_t^{(2)}$, czyli $f_2 \in \underset{x \in T}{P} F_t^{(2)}$.

Jeśli $f_1' \neq f_1''$, to dla pewnego t jest $f_1'(t) \neq f_1''(t)$, co wobec wzajemnej jednoznaczności funkcji φ_t dowodzi, że

$$\varphi_t(f_1'(t)) \neq \varphi_t(f_1''(t)),$$

czyli $f_2'(t) \neq f_2''(t)$. Odwzorowanie przyporządkowujące funkcji f_1 funkcję f_2 jest więc wzajemnie jednoznaczne.

Zauważmy wreszcie, że jeśli $f_2 \in \boldsymbol{P}F_x^{(2)}$, to funkcja f_1 określona wzorem

$$f_1(t) = \varphi_t^{-1}(f_2(t))$$

należy do $\boldsymbol{P}F_x^{(1)}$ i czyni zadość warunkowi (1). Każda więc funkcja należąca do $\boldsymbol{P}F_x^{(2)}$ jest przyporządkowana pewnej funkcji należącej do $\boldsymbol{P}F_x^{(1)}$.

W ten sposób twierdzenie 1 jest udowodnione. Prowadzi ono do następującej definicji:

Definicja. *Iloczynem liczb kardynalnych* $\mathfrak{f}_x$ nazywamy moc produktu $\boldsymbol{P}_x F_x$, gdzie F jest dowolną funkcją taką, że $\overline{\overline{F}}_x = \mathfrak{f}_x$, tzn.

$$\prod_{x \in T} \mathfrak{f}_x = \overline{\overline{\boldsymbol{P}_{x \in T} F_x}}, \quad \text{gdzie} \quad \overline{\overline{F}}_x = \mathfrak{f}_x.$$

Podobnie jak dla sumy, tak i dla iloczynu, samo używanie pojęcia iloczynu wymaga pewnika wyboru, bez którego nie można udowodnić twierdzenia 1, stanowiącego podstawę dla definicji iloczynu.

Jeśli $T=\{1,2\}$, to $\Pi_{t \in T} \mathfrak{f}_t = \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2$. W związku z tym wzorem pozostaje symbolika $\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 \cdot \ldots$, lub $\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{f}_n$, gdy $T = \mathcal{J}$.

Z twierdzeń 3, 4 i 5 udowodnionych w § 1, str. 97—98, otrzymujemy natychmiast prawa *przemienności*, *łączności* i *rozdzielności*:

$$\prod_x \mathfrak{f}_x = \prod_x \mathfrak{f}_{\varphi(x)},$$

$$\prod_{y \in U} \left(\prod_{x \in T_y} \mathfrak{f}_x \right) = \prod_{x \in T} \mathfrak{f}_x, \quad \text{gdzie} \quad T = \sum_{y \in U} T_y \quad \text{i} \quad T_{y_1} \cdot T_{y_2} = 0 \quad \text{dla} \quad y_1 \neq y_2,$$

$$\left(\prod_x \mathfrak{f}_x \right)^{\mathfrak{a}} = \prod_x \mathfrak{f}_x^{\mathfrak{a}}.$$

Jeśli wszystkie wartości funkcji $\mathfrak{f}$ są sobie równe, to iloczyn pokrywa się z potęgą, tzn.

(2) jeśli $\mathfrak{f}_x = \mathfrak{f}_0$ dla $x \in T$ i $\mathfrak{t} = \overline{\overline{T}}$, to $\prod_x \mathfrak{f}_x = \mathfrak{f}_0^{\mathfrak{t}}$.

Z twierdzenia 4 z § 1, str. 97, wzór (13), otrzymujemy na podstawie definicji sumy liczb kardynalnych wzór

(3) $$\mathfrak{f}^{\sum_y \mathfrak{t}_y} = \prod_y (\mathfrak{f}^{\mathfrak{t}_y}).$$

Zanotujemy wreszcie bez dowodu twierdzenie

(4) jeśli $\mathfrak{g}_x \leqslant \mathfrak{f}_x$, to $\prod_x \mathfrak{g}_x \leqslant \prod_x \mathfrak{f}_x$,

analogiczne do twierdzenia 5 z § 7.

PRZYKŁADY. 1. Przyjmijmy w (2) $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{a}$ i $T = \mathcal{J}$; opierając się na wzorze $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ (por. § 6, str. 121, wzór (7)) otrzymamy

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \ldots = \mathfrak{c}.$$

2. Przyjmijmy w (2): $\mathfrak{f}_0 = 2$ i $T = \mathcal{J}$. Wobec równości $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ otrzymujemy

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots = \mathfrak{c}.$$

3. Ze wzoru (4) wynika, że $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \leqslant 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots$ i $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \ldots$. Wobec twierdzenia 2 z § 5, str. 117, wnosimy stąd, że

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots = \mathfrak{c}.$$

Tak samo można wykazać, że $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots = \mathfrak{c}$, jeśli stale $k_n > 1$.

° ***Twierdzenie 2*** *(J. Königa)* [1]. *Jeśli* $\mathfrak{g}_x < \mathfrak{f}_x$ *dla każdego* $x \in T$, *to*

$$\sum_x \mathfrak{g}_x < \prod_x \mathfrak{f}_x.$$

Dowód. Zgodnie z założeniem (W) (str. 125) istnieje taka funkcja F, że $\overline{\overline{F}}_x = \mathfrak{f}_x$. Możemy założyć, że $F_x \cdot F_y = 0$ dla $x \neq y$ (por. § 7, twierdzenie 1, str. 125).

Rozumując tak jak w dowodzie twierdzenia 5 z § 7 wnosimy, że istnieje taka funkcja G, że $G_x \subset F_x$ i $\overline{\overline{G}}_x = \mathfrak{g}_x$. A zatem $G_x \cdot G_y = 0$ dla $x \neq y$ i $F_x - G_x \neq 0$.

Wykażemy najpierw, że

(5) $$\sum_x \mathfrak{g}_x \leqslant \prod_x \mathfrak{f}_x.$$

Niech f będzie dowolną funkcją należącą do produktu $\boldsymbol{P}_x (F_x - G_x)$. Funkcja taka istnieje na mocy twierdzenia 3 z rozdziału II, § 10, str. 74.

Dla każdego $a \in \sum_x G_x$ przyjmijmy

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad a \operatorname{non} \in G_x \\ a & \text{dla} \quad a \in G_x. \end{cases}$$

Jest jasne, że $f_a \in \boldsymbol{P}F_x$. Jeśli $a \neq b$, to $f_a \neq f_b$, gdyż a i b należą albo do różnych składników G_x, G_y i wtedy $f_a(x) = a \in G_x$, $f_b(x) = f(x) \in F_x - G_x$, a więc $f_a(x) \neq f_b(x)$, albo też a i b należą do tego samego składnika G_x i wtedy $f_a(x) = a \neq b = f_b(x)$.

Funkcje f_a tworzą zatem podzbiór produktu $\boldsymbol{P}F_x$ równoliczny z sumą ΣG_x, co dowodzi wzoru (5).

Pozostaje do udowodnienia, że

(6) $$\sum_x \mathfrak{g}_x \neq \prod_x \mathfrak{f}_x.$$

[1]) Por. J. König, *Zum Kontinuumproblem*, Mathematische Annalen **60** (1904), str. 177—180.

Zauważmy w tym celu, że każdy zbiór S równoliczny z sumą ΣG_x daje się przedstawić jako suma zbiorów rozłącznych:

$$S=\sum_x H_x, \quad \text{gdzie} \quad \overline{\overline{H_x}}=\mathfrak{g}_x.$$

Załóżmy, że $S\subset P F_x$. Niech $h\in H_x$. A więc $h(t)\in F_t$ dla każdego t i w szczególności $h(x)\in F_x$; jeśli więc h przebiega zbiór H_x, to elementy $h(x)$ tworzą podzbiór K_x zbioru F_x, przy czym $\overline{\overline{K_x}}\leqslant\overline{\overline{H_x}}=\mathfrak{g}_x<\overline{\overline{F_x}}$ (por. § 5, twierdzenie 5, str. 119). Wynika stąd, że $F_x-K_x\neq 0$ dla każdego x, a więc $P(F_x-K_x)\neq 0$.

Niech $\varphi\in P(F_x-K_x)$. A więc $\varphi(x)\,\mathrm{non}\in K_x$, skąd $\varphi\,\mathrm{non}\in H_x$, gdyż dla wszystkich $h\in H_x$ jest $h(x)\in K_x$. Funkcja φ nie należy zatem do żadnego składnika H_x sumy S, tj. $\varphi\,\mathrm{non}\in S$, a zatem $S\neq P F_x$. Wynika stąd wzór (6).

Przyjmując w twierdzeniu Königa $\mathfrak{g}_x=1$, $\mathfrak{f}_x=2$ i $\mathfrak{m}=\overline{\overline{T}}$, otrzymujemy znaną nam z § 5 (wzór (2), str. 112) nierówność Cantora

$$\mathfrak{m}<2^{\mathfrak{m}}.$$

Twierdzenie Königa jest zatem uogólnieniem tej nierówności.

Wniosek 3. *Jeśli* $\mathfrak{m}_n<\mathfrak{m}_{n+1}$ *dla* $n=1,2,\ldots$, *oraz* $\mathfrak{m}_1>0$, *to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}_n<\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}_n.$$

Dowód. Z twierdzenia Königa wynika, że

$$\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\mathfrak{m}_3+\ldots<\mathfrak{m}_2\cdot\mathfrak{m}_3\cdot\mathfrak{m}_4\cdot\ldots,$$

a więc tym bardziej

$$\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\mathfrak{m}_3+\ldots<\mathfrak{m}_1\cdot\mathfrak{m}_2\cdot\mathfrak{m}_3\cdot\ldots$$

Wniosek 4. *Dla żadnej liczby kardynalnej* $\mathfrak{n}$ *potęga* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{a}}$ *nie daje się przedstawić jako suma szeregu nieskończonego rosnących liczb kardynalnych.*

Dowód. Niech $\mathfrak{n}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots$ Stąd $\mathfrak{m}_n\leqslant\mathfrak{n}^{\mathfrak{a}}$, a więc (por. (4), str. 130)

$$\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}_n\leqslant(\mathfrak{n}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{n}^{\mathfrak{a}}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}_n.$$

W myśl twierdzenia 3 ciąg $\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\ldots$ nie może być rosnący.

W szczególności więc liczby $\mathfrak{c}$ i $2^{\mathfrak{c}}$ nie są sumami szeregów nieskończonych rosnących. Z drugiej strony liczba

$$\mathfrak{a}+2^{\mathfrak{a}}+2^{2^{\mathfrak{a}}}+\ldots$$

i ogólniej liczba

$$\mathfrak{n}+2^{\mathfrak{n}}+2^{2^{\mathfrak{n}}}+\ldots$$

dla żadnego $\mathfrak{n}$ nie jest potęgą o wykładniku $\mathfrak{a}$.

ĆWICZENIE. Jeśli $\mathfrak{f}_x>1$, to $\Sigma_x\mathfrak{f}_x\leqslant\Pi_x\mathfrak{f}_x$.

§ 9. Zbiory skończone. W § 2 określiliśmy zbiory skończone jako zbiory równoliczne z pewnym odcinkiem zbioru liczb naturalnych. Definicja ta wymaga założenia, że istnieje zbiór liczb naturalnych. Podobnie ma się rzecz z podaną na str. 100 definicją zbiorów przeliczalnych i liczby $\mathfrak{a}$.

Obecnie podamy definicję zbiorów skończonych i przeliczalnych sformułowaną wyłącznie w terminach ogólnej teorii mnogości. Pozwoli to na ugruntowanie arytmetyki, a wraz z nią całej tzw. matematyki klasycznej, jako części teorii mnogości [1]).

Metoda, którą zastosujemy, polega na skonstruowaniu w ogólnej teorii mnogości pewnego surogatu liczb naturalnych. W tym celu obieramy dowolny zbiór nieskończony A (którego istnienie postuluje aksjomat VIII) i dzielimy zbiór 2^A na klasy rozłączne, zaliczając do jednej i tej samej klasy dwa zbiory wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne. Klasy, zawierające zbiory skończone (w sensie, który sprecyzujemy poniżej), zastępują w zupełności liczby naturalne.

Definicja 1. Zbiór X nazywa się elementem *nasyconym* (względnie: *nieprzywiedlnym*) rodziny zbiorów $\boldsymbol{A}$, jeśli $X\in\boldsymbol{A}$ i nie istnieje w $\boldsymbol{A}$ zbiór Y zawierający (względnie: zawarty w) X i różny od X.

Definicja 2. Zbiór X jest *skończony*, jeśli każda niepusta rodzina jego podzbiorów ma element nasycony.

UWAGA. Porównując definicje 1 i 2 z pewnikiem VIII (rozdział II, § 3, str. 50) widzimy, że pewnik VIII stwierdza istnienie zbioru A takiego, że pewna rodzina jego podzbiorów nie ma elementu nasyconego. Inaczej mówiąc pewnik VIII stwierdza istnienie co najmniej jednego zbioru, który nie jest skończony w sensie definicji 2.

Z definicji 1 i 2 wynika natychmiast

[1]) Pierwsze próby ugruntowania arytmetyki jako działu teorii mnogości pochodzą od G. Frege'go (1848—1925). Por. jego książkę *Die Grundlagen der Arithmetik*, Wrocław 1884, oraz B. Russell i A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, t. II, wyd. 2-e, Cambridge 1926, rozdział *120.02. Prace Fregego i Russella nie dotyczyły, ściśle rzecz biorąc, aksjomatycznej teorii mnogości lecz pewnych teorii pokrewnych, które w chwili obecnej straciły na znaczeniu. Na możność zbudowania teorii zbiorów skończonych, a więc i arytmetyki na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości, wskazał pierwszy E. Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*, Acta Mathematica **32** (1909), str. 185—193. Różne definicje skończoności podali m. inn. Dedekind (w pracy cytowanej na str. 136), W. Sierpiński, *Sur l'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et Analyse*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie 1918, str. 106, K. Kuratowski, *Sur la notion de l'ensemble fini*, Fundamenta Mathematicae **1** (1920), str. 130, A. Tarski, *Sur les ensembles finis*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), str. 45—95. Z tej ostatniej pracy pochodzi definicja 2 podana poniżej.

Twierdzenie 1. *Zbiór pusty jest skończony.*

Twierdzenie 2. *Jeśli zbiór X jest skończony, to dla każdego a zbiór $X+\{a\}$ jest też skończony.*

Dowód. Niech $\boldsymbol{A}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów sumy $X+\{a\}$. Rodzinę $\boldsymbol{A}$ możemy przedstawić jako sumę $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$, zaliczając do $\boldsymbol{A}_1$ te zbiory $Y\in\boldsymbol{A}$, które nie zawierają a, zaś do $\boldsymbol{A}_2$ zbiory pozostałe. Oczywiście $\boldsymbol{A}_1\subset 2^X$, a więc $\boldsymbol{A}_1$ ma element nasycony, o ile $\boldsymbol{A}_1\neq 0$.

Jeśli $\boldsymbol{A}_2=0$, to $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1$ i $\boldsymbol{A}$ ma element nasycony.

Niech więc $\boldsymbol{A}_2\neq 0$ i niech

$$\boldsymbol{A}^*=\underset{T}{F}[(T\subset X)(T+\{a\}\in\boldsymbol{A}_2)].$$

Ponieważ $0\neq\boldsymbol{A}^*\subset 2^X$, więc $\boldsymbol{A}^*$ ma element nasycony T_0.

Jeśli $Y\in\boldsymbol{A}$ i $Y\supset T_0+\{a\}$, to $Y\in\boldsymbol{A}_2$, a więc $Y-\{a\}\in\boldsymbol{A}^*$. Wobec inkluzji $Y-\{a\}\supset T_0$ wynika stąd, że $Y-\{a\}=T_0$, a więc $Y=T_0+\{a\}$. Ponieważ $T_0+\{a\}\in\boldsymbol{A}$, wnosimy z tego rozumowania, że $T_0+\{a\}$ jest elementem nasyconym rodziny $\boldsymbol{A}$.

Każda niepusta rodzina podzbiorów sumy $X+\{a\}$ ma więc element nasycony, co dowodzi, że zbiór $X+\{a\}$ jest skończony.

Twierdzenie 3. *Zbiór równoliczny ze zbiorem skończonym jest skończony.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór X jest skończony i że funkcja f ustala równoliczność zbiorów X i Y. Wykażemy, że dowolna niepusta rodzina $\boldsymbol{A}$ podzbiorów zbioru Y zawiera element nasycony.

Rozpatrujemy w tym celu rodzinę $\boldsymbol{B}=E_M[(M\subset X)(f(M)\in\boldsymbol{A})]$, zawartą w 2^X, a więc mającą element nasycony B_0. Zbiór $f(B_0)$ należy oczywiście do rodziny $\boldsymbol{A}$. Jeśli $T\in\boldsymbol{A}$ i $T\supset f(B_0)$, to $f^{-1}(T)\in\boldsymbol{B}$ i $f^{-1}(T)\supset B_0$, skąd $f^{-1}(T)=B_0$, a więc $T=f(B_0)$. Zbiór $f(B_0)$ jest zatem elementem nasyconym rodziny $\boldsymbol{A}$.

W dalszym ciągu oznaczać będziemy przez A pewien stały *zbiór nieskończony*.

Definicja 3. Dla $X\subset A$ przyjmujemy (por. § 1, str. 97, uwaga 1):

$$\overline{\overline{X}}_A=\underset{Y}{F}(Y\subset A)(Y\sim X).$$

Przez $\mathfrak{N}(A)$ oznaczamy klasę wszystkich rodzin $\overline{\overline{X}}_A$, gdzie X jest dowolnym skończonym podzbiorem zbioru A.

Zachodzą łatwe do sprawdzenia wzory:

(1) $$\overline{\overline{X+\{a\}}}_A=\overline{\overline{X+\{b\}}}_A \quad \text{dla} \quad a\in A-X \quad \text{i} \quad b\in A-X$$

i ogólniej

(2) $$(X\sim Y)\equiv(\overline{\overline{X}}_A=\overline{\overline{Y}}_A) \quad \text{dla} \quad X\subset A \quad \text{i} \quad Y\subset A.$$

Jeśli $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{N}(A)$, to

(3) $$X\in\boldsymbol{A}\to\overline{\overline{X}}_A=\boldsymbol{A}.$$

Definicja 4. Dla każdego skończonego podzbioru X zbioru A przyjmujemy:

(4) $$\overline{\overline{X}}^*=\overline{\overline{X+\{a\}}}_A, \quad \text{gdzie} \quad a\in A-X.$$

Wykażemy poniżej, że klasa $\mathfrak{N}(A)$ posiada dokładnie te same własności, co zbiór liczb naturalnych, funkcja zaś $\boldsymbol{A}^*$ (gdzie $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{N}(A)$) — te same własności, co funkcja $n+1$.

Twierdzenie 4. $\{0\}\in\mathfrak{N}(A)$.

Istotnie, $\overline{\overline{0}}_A=\{0\}$, zaś zbiór pusty jest skończony.

Twierdzenie 5. *Jeśli $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{N}(A)$ to $\boldsymbol{A}^*\neq\{0\}$.*

Dowód. Niech $\boldsymbol{A}=\overline{\overline{X}}_A$ oraz $a\in A-X$. Wówczas $0\neq X+\{a\}\in\boldsymbol{A}^*$.

Twierdzenie 6. *Jeśli $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{N}(A)$, to $\boldsymbol{A}^*\in\mathfrak{N}(A)$.*

Dowód. Rodzina $\boldsymbol{A}$ jest postaci: $\boldsymbol{A}=\overline{\overline{X}}_A$, gdzie X jest zbiorem skończonym. Ponieważ zbiór A nie jest skończony, więc $X\neq A$, co wobec $X\subset A$ dowodzi, że $A-X\neq 0$. Niech $a\in A-X$. Rodzina

$$\overline{\overline{X+\{a\}}}_A=\boldsymbol{B}$$

należy do $\mathfrak{N}(A)$, gdyż zbiór $X+\{a\}$ jest skończony (por. twierdzenie 1). W myśl (4) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*$, a więc $\boldsymbol{A}^*\in\mathfrak{N}(A)$.

Twierdzenie 7. *Jeśli $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{N}(A)$, $\boldsymbol{B}\in\mathfrak{N}(A)$ i $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*$, to $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.*

Dowód. Niech $\boldsymbol{A}=\overline{\overline{X}}_A$, $\boldsymbol{B}=\overline{\overline{Y}}_A$, $a\in A-X$, $b\in A-Y$. A zatem

$$\boldsymbol{A}^*=\overline{\overline{X+\{a\}}}_A \quad \text{i} \quad \boldsymbol{B}^*=\overline{\overline{Y+\{b\}}}_A.$$

Wobec $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*$, jest $X+\{a\}\sim Y+\{b\}$, skąd na mocy twierdzenia 2 z § 1, str. 96, wynika $X\sim Y$, a więc $\overline{\overline{X}}_A=\overline{\overline{Y}}_A$ (na mocy (2)), tj. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

Twierdzenie 8. *Jeśli $\mathfrak{M}$ jest podklasą klasy $\mathfrak{N}(A)$, która czyni zadość dwu następującym warunkom:*

(5) $\{0\}\in\mathfrak{M}$, (6) $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{M}\to\boldsymbol{A}^*\in\mathfrak{M}$,

to $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}(A)$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathfrak{N}(A)-\mathfrak{M}\neq 0$ i niech $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{N}(A)-\mathfrak{M}$. Wykażemy, że założenie to prowadzi do sprzeczności.

Z $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{N}(A)$ wynika, że $\boldsymbol{A}=\overline{\overline{X}}_A$, gdzie X jest skończonym podzbiorem zbioru A; przy tym $X \neq 0$, gdyż $\overline{\overline{0}}_A=\{0\}$, a $\{0\} \in \mathfrak{M}$ na mocy (5).

Niech $\boldsymbol{B}$ będzie rodziną tych $Y \subset X$, dla których $\overline{\overline{Y}}_A \in \mathfrak{M}$. Rodzina ta jest niepusta, gdyż np. $0 \in \boldsymbol{B}$. Ponieważ zaś zbiór X jest skończony, więc rodzina $\boldsymbol{B}$ zawiera element nasycony np. B. Wynika stąd, że

$$\overline{\overline{B}}_A \in \mathfrak{M}, \tag{7}$$

$$\text{jeśli } B \subset Y \subset X \text{ i } \overline{\overline{Y}}_A \in \mathfrak{M}, \text{ to } Y=B. \tag{8}$$

Z (7) wynika, że $B \neq X$. Dla dowolnego $a \in X-B$ jest więc $B \subset B+\{a\} \subset X$ i $B \neq B+\{a\}$, a zatem $\overline{\overline{B+\{a\}}}_A$ non $\in \mathfrak{M}$.

Z drugiej jednak strony $\overline{\overline{B+\{a\}}}_A=\overline{\overline{B}}_A^*$, a więc z (7) i (6) wynika $\overline{\overline{B+\{a\}}}_A \in \mathfrak{M}$. Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności.

UWAGI. 1. Jak wykazał G. Peano, arytmetyka liczb naturalnych oparta być może na następujących aksjomatach:

1. 0 jest liczbą naturalną;
2. jeśli a jest liczbą naturalną, to $a+1$ jest liczbą naturalną;
3. jeśli a i b są liczbami naturalnymi i $a+1=b+1$, to $a=b$;
4. jeśli a jest liczbą naturalną, to $a+1 \neq 0$;
5. jeśli M jest zbiorem spełniającym warunki: $0 \in M$, $a \in M \to (a+1) \in M$, to M zawiera wszystkie liczby naturalne.

Zastąpmy w tych aksjomatach 0 przez $\{0\}$, a i b przez $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, $a+1$ i $b+1$ przez $\boldsymbol{A}^*$ i $\boldsymbol{B}^*$ i zwrot: „jest liczbą naturalną" przez „$\in \mathfrak{N}(A)$". Zakładając, że A jest zbiorem nieskończonym, wnosimy z twierdzeń 4—8, że aksjomaty są przy tej interpretacji spełnione. Ponieważ istnienie co najmniej jednego zbioru nieskończonego było przyjęte jako aksjomat VIII, więc każdy aksjomat arytmetyki (a zatem też każde twierdzenie arytmetyki) ma swój odpowiednik, który może być wyprowadzony z aksjomatów teorii mnogości. Podobnie każde pojęcie arytmetyczne daje się określić na gruncie samej tylko teorii mnogości.

W szczególności pojęcia arytmetyczne, które występowały w określeniach zbiorów skończonych i zbiorów przeliczalnych mogą być zastąpione pojęciami czysto teorio-mnogościowymi.

Np. zmodyfikowana definicja przeliczalności brzmi jak następuje: *zbiór X jest przeliczalny, jeśli istnieje zbiór nieskończony A i taka klasa $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}(A)$, że $X \sim \mathfrak{M}$.*

2. Zbiór nazywamy *skończonym w znaczeniu Dedekinda*, jeśli nie jest on równoliczny z żadną swą częścią właściwą [1]).

[1]) Por. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig 1888, str. 17.

Aby ustalić związek tej definicji i definicji 2, udowodnimy najpierw

Twierdzenie 9. *Zbiór X jest nieskończony w znaczeniu Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera zbiór przeliczalny nieskończony (w zwykłym sensie).*

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiór X jest nieskończony w znaczeniu Dedekinda, tj. że jest on równoliczny ze swym podzbiorem właściwym X_1. Niech f będzie funkcją ustalającą równoliczność X i X_1 i przyjmijmy $X_2=f(X_1)$, $X_3=f(X_2)$,... Ponieważ

$$f(X-X_1)=X_1-X_2, \quad f(X_1-X_2)=X_2-X_3, \ldots, \quad f(X_n-X_{n+1})=X_{n+1}-X_{n+2}, \ldots,$$

oraz $X-X_1 \neq 0$, więc różnice

$$X-X_1, \quad X_1-X_2, \quad X_2-X_3, \ldots$$

są niepuste i rozłączne.

Niech $a \in X-X_1$. A więc $f(a) \in X_1-X_2$, $ff(a) \in X_2-X_3$ itd. i ciąg nieskończony

$$a, \quad f(a), \quad ff(a), \ldots$$

jest złożony z samych różnych wyrazów; zbiór tych wyrazów jest więc przeliczalnym podzbiorem nieskończonym zbioru X.

Załóżmy teraz na odwrót, że zbiór X zawiera nieskończony podzbiór przeliczalny Y. Niech

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, \text{ gdzie } y_k \neq y_l \text{ dla } k \neq l,$$

będzie ciągiem utworzonym ze wszystkich elementów zbioru Y. Funkcja f określona wzorami

$$f(x)=x \quad \text{dla} \quad x \in X-Y$$
$$f(y_n)=y_{n+1} \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots,$$

jest wzajemnie jednoznaczna i odwzorowuje zbiór X na $X-\{y_1\}$. Zbiór X i jego część właściwa $X-\{y_1\}$ są więc równoliczne.

Twierdzenie 10. *Zbiór skończony w sensie definicji 2 jest skończony w znaczeniu Dedekinda.*

Dowód. Należy okazać, że jeśli zbiór X jest nieskończony w znaczeniu Dedekinda, to nie jest skończony w sensie definicji 2, tj. że istnieje rodzina $\boldsymbol{A}$ jego podzbiorów bez elementu nasyconego. Aby taką rodzinę skonstruować, rozpatrujemy ciąg

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, \text{ gdzie } y_n \in X \text{ i } y_k \neq y_l \text{ dla } k \neq l,$$

istniejący na mocy twierdzenia 9. Za $\boldsymbol{A}$ przyjmujemy rodzinę zbiorów:

$$\{y_1\}, \quad \{y_1, y_2\}, \quad \{y_1, y_2, y_3\}, \quad \ldots, \quad \{y_1, \ldots, y_n\}, \quad \ldots$$

Rodzina ta oczywiście nie ma elementu nasyconego.

° ***Twierdzenie 11*** *(odwrotne). Zbiór skończony w znaczeniu Dedekinda jest skończony w sensie definicji 2.*

Dowód. Należy wykazać, że zbiór nieskończony (w sensie definicji 2) jest nieskończony w znaczeniu Dedekinda, tzn. zawiera ciąg nieskończony.

Załóżmy zatem, że zbiór A jest nieskończony, tj. że istnieje niepusta rodzina $\mathcal{A} \subset 2^A$ bez elementu nasyconego. Dla każdego więc $X \in \mathcal{A}$ rodzina $\mathfrak{M}(X)$ zbiorów Y, dla których $Y \in \mathcal{A}$ i $X \subset Y \neq X$, jest niepusta.

Z ogólnej zasady wyboru (rozdział II, § 10, str. 74) wynika, że istnieje taka funkcja f, że $f(X) \in \mathfrak{M}(X)$ dla $X \in \mathcal{A}$. A zatem

$$f(X) \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad X \subset f(X) \neq X.$$

Obierzmy teraz dowolny zbiór $X_0 \in \mathcal{A}$ i utwórzmy ciąg zbiorów

$$X_1 = f(X_0), \quad X_2 = f(X_1), \quad \ldots, \quad X_{n+1} = f(X_n), \ldots$$

Mamy więc:

$$X_n \in \mathcal{A}, \quad X_n \neq X_{n+1}, \quad X_n \subset X_{n+1} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Różnice $X_{n+1} - X_n$ tworzą zatem ciąg zbiorów niepustych, rozłącznych i zawartych w A. Stosując pewnik wyboru wnosimy, że istnieje zbiór B, zawierający dokładnie po jednym elemencie z każdej z różnic $X_{n+1} - X_n$. Oznaczając ten element przez a_n, otrzymujemy nieskończony ciąg różnych elementów zbioru A, c. b. d. o.

Definicja Dedekinda mniej nadaje się niż definicja 2 do budowania na jej podstawie arytmetyki, gdyż już w najelementarniejszych twierdzeniach arytmetyki wymaga ona powoływania się na pewnik wyboru. Definicja ta odegrała jednak dużą rolę, jako pierwsza próba sprowadzenia pojęć arytmetycznych do pojęć teorio-mnogościowych.

ĆWICZENIA. 1. Jeśli zbiory A i B są nieskończone, to $\mathfrak{N}(A) \sim \mathfrak{N}(B)$.

2. Na to, by zbiór X był nieskończony w znaczeniu Dedekinda potrzeba i wystarcza, by jego moc $\mathfrak{m}$ czyniła zadość równaniu $\mathfrak{m}+1=\mathfrak{m}$.

3. Na to, by zbiór X był skończony (w sensie definicji 2), potrzeba i wystarcza, by zbiór 2^{2^X} był skończony w znaczeniu Dedekinda. [Russell-Whitehead].

4. Na to, by zbiór X był skończony (w sensie definicji 2), potrzeba i wystarcza, by każda rodzina jego podzbiorów, addytywna (tj. zawierająca sumę każdych dwóch zbiorów, które do niej należą) i zawierająca wszystkie zbiory jednostkowe $\{x\}$, gdzie $x \in X$, — zawierała jako elementy wszystkie podzbiory niepuste zbioru X.

ROZDZIAŁ IV.

Zbiory uporządkowane.

§ 1. Relacje porządkujące. Niech A będzie dowolnym zbiorem, R — relacją, której pole zawiera A (por. rozdział II, § 5, str. 54). Mówimy, że relacja R jest [1]):

zwrotna w A, jeśli xRx dla każdego $x \in A$,

przeciwzwrotna w A, jeśli x non Rx dla każdego $x \in A$,

symetryczna w A, jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ z xRy wynika yRx,

przeciwsymetryczna (antysymetryczna) w A, jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ z xRy wynika y non Rx,

przechodnia w A, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in A$ z xRy i yRz wynika xRz,

słabo asymetryczna w A, jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ z xRy i $x \neq y$ wynika y non Rx lub, co na jedno wychodzi, jeśli z xRy i yRx wynika $x = y$ dla dowolnych $x, y \in A$,

spójna w A, jeśli dla dowolnych dwu różnych elementów $x, y \in A$ mamy bądź xRy, bądź yRx.

Zapisane wzorami logicznymi definicje te mają następującą postać:

$$\prod_{x \in A} (xRx) \qquad \text{zwrotność},$$

$$\prod_{x \in A} (x \text{ non } Rx) \qquad \text{przeciwzwrotność},$$

$$\prod_{x,y \in A} (xRy \rightarrow yRx) \qquad \text{symetria},$$

$$\prod_{x,y \in A} (xRy \rightarrow y \text{ non } Rx) \qquad \text{antysymetria},$$

$$\prod_{x,y \in A} [(xRy)(yRx) \rightarrow (x = y)] \qquad \text{słaba asymetria},$$

$$\prod_{x,y,z \in A} [(xRy)(yRz) \rightarrow (xRz)] \qquad \text{przechodniość},$$

$$\prod_{x,y \in A} [(x \neq y) \rightarrow (xRy + yRx)] \qquad \text{spójność}.$$

---

[1]) Systematyczne badania własności relacji (dwuczłonowych) zapoczątkowali Russell i Whitehead w dziele *Principia Mathematica*, tom I, 2-e wydanie, Cambridge 1925, część II.