ROZDZIAŁ II.

# Relacje. Funkcje. Działania nieskończone.

**§ 1. Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory.** Rozpoczniemy ten rozdział, podobnie jak poprzedni, od podania pewnych wiadomości z logiki, na które będziemy się powoływali w toku dalszych rozważań [1]).

Nazywamy *funkcją zdaniową o jednym argumencie* jakikolwiek warunek, nałożony na dowolny przedmiot naszych rozważań (np. liczbę, punkt, zbiór itp.). Funkcjami zdaniowymi są np. warunki:

$$x>0, \quad x^2<0, \quad X \text{ jest zbiorem niepustym.}$$

Funkcje zdaniowe oznaczamy symbolami $\Phi(x), \Psi(x), \Theta(y), \ldots$ Zastępując w funkcji zdaniowej argument $x$ dowolną stałą (tzn. nazwą jakiegokolwiek przedmiotu, np. nazwą liczby lub zbioru), otrzymamy zdanie prawdziwe lub fałszywe, np.

$$1>0, \quad 5^2<0, \quad \text{zbiór liczb pierwszych} <5 \text{ jest niepusty.}$$

Mówimy, że przedmiot $a$ *spełnia funkcję zdaniową* $\Phi(x)$, jeśli zdanie, powstające z $\Phi(x)$ przez zastąpienie argumentu $x$ nazwą przedmiotu $a$, tj. zdanie $\Phi(a)$, jest prawdziwe.

W wielu przypadkach, stosując funkcje zdaniowe zakładać będziemy, że za zmienną $x$ można podstawiać jedynie nazwy elementów pewnego ustalonego zbioru $A$. Mówimy wówczas, że jest to funkcja zdaniowa o *ograniczonym zakresie zmienności argumentów*. Np. funkcja zdaniowa $x>0$ ma zakres zmienności argumentu ograniczony do zbioru liczb (rzeczywistych, naturalnych, wymiernych itp.).

Przykładem funkcji zdaniowej, której zakres zmienności argumentu nie jest ograniczony jest $x=x$.

[1]) Dowody podanych tu twierdzeń z logiki matematycznej znaleźć można w podręczniku: A. Mostowski, *Logika Matematyczna*, Monografie Matematyczne t. **18** (1948).



Jeśli każdy element zbioru $A$ spełnia funkcję zdaniową $\Phi(x)$, to piszemy

$$\prod_{x\in A}\Phi(x)$$

i czytamy ten wzór: *dla każdego $x$ należącego do $A$ jest $\Phi(x)$*.

Dla funkcji zdaniowych o zakresie zmienności argumentu ograniczonym do zbioru $A$ piszemy krócej

$$\prod_{x}\Phi(x) \quad \text{lub} \quad \Pi_x\Phi(x), \quad \text{zamiast} \quad \prod_{x\in A}\Phi(x).$$

Podobnie, jeśli $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową o nieograniczonym zakresie zmienności argumentu, to $\Pi_x\Phi(x)$ oznacza, że dla każdego $x$ jest $\Phi(x)$. Np. zdanie $\Pi_x(x=x)$ jest prawdziwe.

Wzory

$$\sum_{x\in A}\Phi(x) \quad \text{względnie} \quad \sum_{x}\Phi(x)$$

czytamy: *dla jakiegoś $x$ należącego do $A$ jest $\Phi(x)$*, względnie: *dla jakiegoś $x$ jest $\Phi(x)$*; lub też: *istnieje takie $x$ (należące do $A$), że $\Phi(x)$*.

Symbole $\Pi$ i $\Sigma$ nazywają się *kwantyfikatorami*, $\Pi$ — kwantyfikatorem *dużym* lub ogólnym, $\Sigma$ — kwantyfikatorem *małym* lub szczegółowym.

Zakładamy w dalszym ciągu, że $A\neq 0$. Jeżeli $A$ składa się ze skończonej liczby elementów, np. z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to twierdzenie orzekające, że każdy element zbioru $A$ spełnia warunek $\Phi(x)$, jest oczywiście równoważne koniunkcji $n$ zdań $\Phi(a_1), \Phi(a_2), \ldots, \Phi(a_n)$, zaś twierdzenie, że jakiś element zbioru $A$ spełnia warunek $\Phi(x)$ — alternatywie tych zdań:

$$\prod_{x\in A}\Phi(x) \equiv [\Phi(a_1)\cdot\Phi(a_2)\cdot\ldots\cdot\Phi(a_n)],$$

$$\sum_{x\in A}\Phi(x) \equiv [\Phi(a_1)+\Phi(a_2)+\ldots+\Phi(a_n)].$$

Kwantyfikator duży można by więc nazwać uogólnionym iloczynem logicznym, mały zaś — uogólnioną sumą logiczną. Uwaga ta uzasadnia też użycie znaków $\Pi$ i $\Sigma$ dla oznaczania kwantyfikatorów.

Zachodzą następujące twierdzenia (prawa logiczne), dotyczące operowania kwantyfikatorami:

(1) *Jeśli $a\in A$, to* $\left[\prod_{x\in A}\Phi(x)\right]\to\Phi(a)$ *i* $\Phi(a)\to\sum_{x\in A}\Phi(x)$.

Druga część tego prawa orzeka, że dla dowodu zdania egzystencjalnego postaci $\Sigma_{x\in A}\Phi(x)$ wystarczy określić przedmiot $a$, o którym można udowodnić, że należy on do zbioru $A$ i spełnia warunek $\Phi(x)$. Takie dowody zdań egzystencjalnych nazywamy dowodami *efektywnymi* lub dowodami przez podanie przykładu.

$$(2)\qquad \prod_x [\Phi(x)\cdot\Psi(x)] \equiv \prod_x \Phi(x)\cdot\prod_x \Psi(x),$$

$$(3)\qquad \sum_x [\Phi(x)+\Psi(x)] \equiv [\sum_x \Phi(x)+\sum_x \Psi(x)].$$

Duży kwantyfikator jest więc rozdzielny względem koniunkcji, a mały — względem alternatywy. Np. zdanie „każda liczba należąca do $A$ jest podzielna przez 3 i nieparzysta" jest równoważne zdaniu „każda liczba należąca do $A$ jest podzielna przez 3 i każda liczba należąca do $A$ jest nieparzysta". Podobnie zdanie „istnieją w zbiorze $A$ liczby bądź podzielne przez 3, bądź nieparzyste" jest równoważne zdaniu „w zbiorze $A$ istnieją liczby podzielne przez 3 lub też w zbiorze $A$ istnieją liczby nieparzyste".

$$(4)\qquad [\prod_x \Phi(x)+\prod_x \Psi(x)] \to \prod_x [\Phi(x)+\Psi(x)],$$

$$(5)\qquad \sum_x [\Phi(x)\cdot\Psi(x)] \to \sum_x \Phi(x)\cdot\sum_x \Psi(x).$$

Słowami: jeśli każdy element zbioru $A$ ma własność $\Phi(x)$ lub też każdy element zbioru $A$ ma własność $\Psi(x)$, to każdy element zbioru $A$ ma bądź własność $\Phi(x)$, bądź też własność $\Psi(x)$. Podobnie: jeśli istnieje w zbiorze $A$ element $x$ posiadający obie własności $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$, to istnieje w tym zbiorze przedmiot o własności $\Phi(x)$ i przedmiot o własności $\Psi(x)$.

Oznaczając przez $A$ zbiór liczb naturalnych a przez $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ odpowiednio funkcje zdaniowe:

„$x$ jest liczbą parzystą" i „$x$ jest liczbą nieparzystą",

przekonywamy się, że implikacje odwrotne do (4) i (5) nie zachodzą (por. też wzory (16) i (17)).

$$(6)\qquad [\prod_x \Phi(x)]' \equiv \sum_x \Phi'(x), \qquad (7)\qquad [\sum_x \Phi(x)]' \equiv \prod_x \Phi'(x).$$

Znaczy to: zdanie „nieprawdą jest, że każde $x$ ma własności $\Phi(x)$" równoważne jest zdaniu „jakieś $x$ nie ma własności $\Phi(x)$". Zdanie „nieprawdą jest, że istnieje $x$ o własności $\Phi(x)$" równoważne jest zdaniu „żadne $x$ nie ma własności $\Phi(x)$".

Prawa (6) i (7) nazywają się prawami *de Morgana* dla funkcji zdaniowych. Wynikają z nich równoważności:

$$(6')\qquad [\prod_x \Phi'(x)]' \equiv \sum_x \Phi(x), \qquad (7')\qquad [\sum_x \Phi'(x)]' \equiv \prod_x \Phi(x).$$

Można więc kwantyfikator szczegółowy określić za pomocą ogólnego (i odwrotnie, ogólny za pomocą szczegółowego) podobnie jak dodawanie zdań można sprowadzić do mnożenia (lub mnożenie do dodawania).



Pierwsza z powyższych równoważności wykazuje, że dowód zdania egzystencjalnego $\Sigma_x \Phi(x)$ można uzyskać sprowadzając do niedorzeczności założenie $\Pi_x \Phi'(x)$. Takie dowody zdań egzystencjalnych, często stosowane, nie są jednak na ogół efektywne, tzn. nie dają żadnego sposobu konstrukcji przedmiotu, spełniającego funkcję zdaniową $\Phi(x)$ [1]).

Zdania uważać możemy za funkcje zdaniowe bez argumentu. Mamy oczywiście

$$(8)\qquad \prod_x p \equiv p, \qquad (9)\qquad \sum_x p \equiv p.$$

Łatwo też przekonać się, że

$$(10)\qquad \prod_x [p+\Phi(x)] \equiv [p+\prod_x \Phi(x)], \qquad (11)\qquad \sum_x [p\cdot\Phi(x)] \equiv [p\cdot\sum_x \Phi(x)].$$

Na podstawie znanego z rachunku zdań wzoru $[p\to\Phi(x)] \equiv [p'+\Phi(x)]$ wynika z łatwością ze wzoru (10):

$$(12)\qquad [p \to \prod_x \Phi(x)] \equiv \prod_x [p \to \Phi(x)].$$

Zauważmy, że

$$(13)\qquad [(\prod_x \Phi(x)) \to p] \equiv \sum_x [\Phi(x) \to p].$$

Istotnie, lewa strona jest zgodnie z prawem (6) równoważna alternatywie $\Sigma_x \Phi'(x)+p$, tj. na mocy (9) — alternatywie $\Sigma_x \Phi'(x)+\Sigma_x p$, mały zaś kwantyfikator wynieść możemy przed znak alternatywy na mocy prawa (3), otrzymując $\Sigma_x[\Phi'(x)+p]$ czyli $\Sigma_x[\Phi(x)\to p]$.

Funkcje zdaniowe mogą zawierać nie jeden, lecz *wiele argumentów*. Są to wówczas warunki nałożone nie na jeden przedmiot lecz na układy przedmiotów. Jako przykłady funkcji zdaniowych wielu zmiennych służyć mogą funkcje zdaniowe

$$x > y, \qquad x \in X, \qquad x^2+y^2+z^2 \neq 0.$$

Funkcje zdaniowe o dwu zmiennych oznaczamy symbolami $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$, ...

Jeśli funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$ poprzedzimy kwantyfikatorem $\Pi_x$ lub $\Sigma_x$, otrzymamy funkcję zdaniową o jednej tylko zmiennej wolnej $y$. Np. funkcja zdaniowa $\Sigma_x(y=x^2)$ wyraża pewną własność liczby $y$ (mianowicie, że jest nieujemna), a funkcja zdaniowa $\Sigma_y(y=x^2)$ własność liczby $x$ (w danym przypadku własność wszystkich liczb).

[1]) Interpretując więc wzór $\Sigma_x \Phi(x)$ jako zdanie egzystencjalne „istnieje takie $x$, że $\Phi(x)$", używamy terminu „istnieje" w sensie różnym od używanego w języku potocznym, a który z reguły dotyczy istnienia dającego się udowodnić efektywnie. Jak wynika ze wzoru (6') zdanie $\Sigma_x \Phi(x)$ nie oznacza nic więcej ponad to, że zdanie „każde $x$ spełnia $\Phi'(x)$" jest fałszywe.

Kwantyfikatory mają zatem własność *wiązania zmiennych*, tzn. poprzedzenie funkcji zdaniowej o zmiennej $x$ kwantyfikatorem (dużym lub małym) o wskaźniku $x$ powoduje, że $x$ przestaje już być zmienną w powstającym w ten sposób wyrażeniu. Podobną własność mają także znane z analizy operatory $\int_a^b \ldots dx$ i $\sum_{x=1}^{n}$ stosowane do $f(x)$.

Prawa (1)—(13) zachowują swą ważność dla funkcji zdaniowych o wielu argumentach. Zamiast $p$ w prawach (7)—(13) przyjąć można jakąkolwiek funkcję zdaniową nie zawierającą zmiennej $x$.

Podamy jeszcze kilka praw dotyczących funkcji zdaniowych o dwu zmiennych.

$$(14)\quad \prod_x \prod_y \Phi(x,y) \equiv \prod_y \prod_x \Phi(x,y), \qquad (15)\quad \sum_x \sum_y \Phi(x,y) \equiv \sum_y \sum_x \Phi(x,y).$$

Porządek w jakim występują po sobie dwa kwantyfikatory duże lub dwa kwantyfikatory małe jest zatem obojętny. Piszemy zazwyczaj $\Pi_{xy}$ zamiast $\Pi_x \Pi_y$ i $\Sigma_{xy}$ zamiast $\Sigma_x \Sigma_y$.

$$(16)\quad [\prod_x \Phi(x) + \prod_x \Psi(x)] \equiv \prod_x \prod_y [\Phi(x)+\Psi(y)] \equiv \prod_{xy} [\Phi(x)+\Psi(y)],$$

$$(17)\quad [\sum_x \Phi(x) \cdot \sum_x \Psi(x)] \equiv \sum_x \sum_y [\Phi(x)\cdot\Psi(y)] \equiv \sum_{xy} [\Phi(x)\cdot\Psi(y)].$$

Dla dowodu prawa (16) podstawiamy w prawie (10) zamiast $p$ zdanie $\Pi_y \Psi(y)$ i zauważamy, że $[\Pi_y \Psi(y)] + \Phi(x) \equiv \Pi_y [\Psi(y) + \Phi(x)]$ na mocy tegoż samego prawa (10).

Dowód prawa (17) jest podobny.

$$(18)\quad \sum_x \prod_y \Phi(x,y) \to \prod_y \sum_x \Phi(x,y).$$

Prawo (18) zilustrujemy następującymi przykładami.

Liczba 1 jest najmniejszą liczbą naturalną. Oznaczając przez $\mathcal{J}$ zbiór liczb naturalnych mamy więc $\Sigma_{x\in\mathcal{J}} \Pi_{y\in\mathcal{J}} (x \leqslant y)$. Wynika stąd, że dla każdej liczby naturalnej $y$ istnieje liczba naturalna $x$ taka, że $x \leqslant y$; jako tę liczbę $x$ obrać mianowicie możemy liczbę 1.

Natomiast, jeśli $\mathcal{G}$ jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych, to zdanie $\Pi_{y\in\mathcal{G}} \Sigma_{x\in\mathcal{G}} (x \leqslant y)$ jest prawdziwe, a zdanie $\Sigma_{x\in\mathcal{G}} \Pi_{y\in\mathcal{G}} (x \leqslant y)$ — fałszywe. Lewa strona wzoru (18) może więc być fałszywa, mimo iż prawa jest prawdziwa. Wynika stąd, że *we wzorze* (18) *znaku* $\to$ *nie można zastąpić przez znak* $\leftarrow$ (a więc przez znak $\equiv$).

Inny przykład ilustrujący znaczenie kolejności w jakiej występują kwantyfikatory dotyczy różnicy między jednostajną zbieżnością a zwykłą zbieżnością ciągu funkcyj.

Mianowicie, niech $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, gdzie $0 < x < 1$.



W myśl definicji granicy równość powyższa oznacza, że

$$\prod_{\varepsilon>0} \prod_x \sum_k \prod_n |f_{k+n}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Przestawiając kwantyfikatory $\prod_x$ i $\sum_k$ otrzymujemy definicję zbieżności jednostajnej; zmiana ta powoduje bowiem, że $k$ staje się niezależne od $x$ (i zależy jedynie od $\varepsilon$), co jest bezpośrednio widoczne ze wzoru.

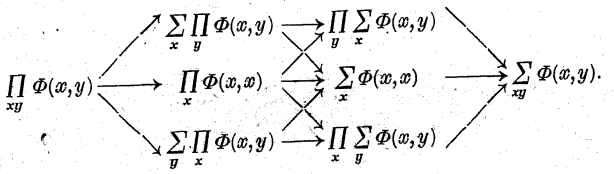
Podobnie ciągłość funkcji $f$ w przedziale $0 < x < 1$ oznacza, że

$$\prod_{\varepsilon>0} \prod_x \sum_{\delta>0} \prod_h \{(|h|<\delta)(0<x+h<1) \to (|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon)\}.$$

Przestawiając kwantyfikatory $\prod_x$ i $\sum_{\delta>0}$ otrzymujemy definicję ciągłości jednostajnej funkcji $f$ w przedziale $0 < x < 1$.

Analogiczna uwaga dotyczy jednostajnej zbieżności całek niewłaściwych.

Następująca tablica zawiera szereg dalszych twierdzeń o przestawianiu kwantyfikatorów:




Na przykładach można się przekonać, że żadna z podanych tu implikacji nie daje się odwrócić.

**§ 2. Aksjomaty III—VI.** Wprowadzimy obecnie dalsze aksjomaty na których opiera się teoria mnogości [1]). Dotyczą one, podobnie jak aksjomaty II i II′ z rozdziału I tworzenia z danych zbiorów nowych zbiorów. Istotna różnica polega na tym, że obecnie rozpatrywać będziemy zbiory, których elementami są również zbiory (tak np. postępujemy w geometrii, gdy rozważamy zbiory krzywych, czy płaszczyzn — które z kolei są zbiorami punktów) [2]).

---

[1]) Aksjomaty I—VI pochodzą od E. Zermelo, który podał je w pracy *Untersuchungen über die Axiome der Mengenlehre*, Mathematische Annalen **65** (1908), str. 261—281.

[2]) Aby zyskać na przejrzystości, mówić na ogół będziemy *rodzina zbiorów* zamiast zbiór zbiorów. Rodziny zbiorów będziemy z reguły oznaczać tłustą kursywą: ***A***, ***S***, ***X***. Por. str. 34 i 35.

III. ***Aksjomat sumy.*** *Dla każdej rodziny zbiorów $\boldsymbol{A}$ istnieje zbiór $S$ złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do jakiegoś zbioru $X$ należącego do $\boldsymbol{A}$.*

Symbolicznie:

$$x \in S \equiv \sum_{X} [(x \in X) \cdot (X \in \boldsymbol{A})]. \tag{1}$$

Na mocy aksjomatu I istnieje co najwyżej jeden zbiór $S$ o własności wymienionej w III. Istotnie, jeśli

$$x \in S_1 \equiv \sum_{X} [(x \in X) \cdot (X \in \boldsymbol{A})] \quad \text{i} \quad x \in S_2 \equiv \sum_{X} [(x \in X) \cdot (X \in \boldsymbol{A})],$$

to dla dowolnego $x$

$$x \in S_1 \equiv x \in S_2,$$

a więc w myśl aksjomatu I: $S_1 = S_2$.

Ponieważ aksjomat III stwierdza istnienie co najmniej jednego zbioru $S$, spełniającego wzór (1), więc wnosimy stąd, że zbiór ten jest dla danego $\boldsymbol{A}$ wyznaczony jednoznacznie. Nazywamy go *sumą* zbiorów należących do $\boldsymbol{A}$ i oznaczamy przez $S(\boldsymbol{A})$.

Jeśli rodzina $\boldsymbol{A}$ ma dokładnie $n$ elementów: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, to

$$S(\boldsymbol{A}) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Jeśli $n=1$, to $S(\boldsymbol{A}) = X_1$. Wreszcie $S(0) = 0$.

Warunek $S(\boldsymbol{A}) \in \boldsymbol{A}$ oznacza, że zbiór $S(\boldsymbol{A})$ jest *największym* ze zbiorów należących do rodziny $\boldsymbol{A}$.

IV. ***Aksjomat zbioru potęgowego.*** *Dla każdego zbioru $A$ istnieje rodzina zbiorów $\boldsymbol{P}$, której elementami są wszystkie podzbiory zbioru $A$ i tylko one:*

$$(X \in \boldsymbol{P}) \equiv (X \subset A).$$

Z łatwością dowodzimy (tak jak poprzednio), że zbiór $\boldsymbol{P}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez $\boldsymbol{A}$. Nazywamy go *zbiorem potęgowym* zbioru $A$ i oznaczamy przez $2^A$.

Jeśli zbiór $A$ zawiera $n$ elementów, to zbiór $2^A$ zawiera $2^n$ elementów. W szczególności jeśli $A=0$, to zbiór $2^A$ zawiera jeden tylko element, a mianowicie zbiór pusty (z inkluzji $0 \subset A$ wynika, że dla każdego $A$ jest $0 \in 2^A$).

V. ***Aksjomat podzbiorów.*** *Jeśli $A$ jest zbiorem a $\Phi(x)$ dowolną funkcją zdaniową, to istnieje taki zbiór $B$, że elementami $B$ są te i tylko te elementy zbioru $A$, które spełniają funkcję zdaniową $\Phi(x)$:*

$$(x \in B) \equiv (x \in A) \cdot \Phi(x). \tag{2}$$



Zbiór $B$ jest znów wyznaczony jednoznacznie przez $A$ i funkcję zdaniową $\Phi(x)$. Oznaczamy go symbolem

$$\underset{x \in A}{E} [\Phi(x)] \quad \text{lub} \quad \underset{x}{E} [\Phi(x)],$$

o ile $\Phi(x)$ jest funkcją o zmiennej ograniczonej do zbioru $A$. Symbol $E_{x \in A}[\Phi(x)]$ czytamy: „zbiór tych $x$ należących do $A$, dla których $\Phi(x)$".

Jeśli funkcja zdaniowa $\Phi(x,y,\ldots)$ zawiera inne zmienne, różne od $x$, to zmienne te grają rolę parametrów, od których zależny jest zbiór $E_x[\Phi(x,y,\ldots)]$. Np. niech $\mathcal{J}$ będzie zbiorem liczb naturalnych, a $\Phi(x,y)$ funkcją zdaniową $x<y$. Zbiór $Z_y = E_{x \in \mathcal{J}}[x<y]$ jest wówczas zbiorem liczb naturalnych $x$ mniejszych od $y$; zbiór ten zależy oczywiście od $y$.

Jeśli teorię mnogości stosujemy do innych działów matematyki, to przyjmujemy, że funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ w aksjomacie V może zawierać nie tylko symbole oznaczające pojęcia teorio-mnogościowe, ale i symbole z innych dziedzin matematyki, tych mianowicie, do których teorię mnogości stosujemy. Tak np. dowodząc w geometrii istnienia zbioru punktów płaszczyzny, których odległość od punktu 0 jest równa długości danego odcinka, stosujemy aksjomat V, przy czym w $\Phi(x)$ występują terminy geometryczne „punkt", „odległość" itp.

W rozumowaniach abstrakcyjnej teorii mnogości korzystamy z pewnika V tylko w przypadkach, gdy $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową, zawierającą poza symbolami logicznymi wyłącznie terminy teorii mnogości: „zbiór" i „$\in$" oraz takie terminy, które można przy ich pomocy zdefiniować.

Ze wzoru (2) wynika, na mocy określenia zbioru $E_{x \in A}[\Phi(x)]$, że

$$t \in \underset{x \in A}{E} [\Phi(x)] \equiv \Phi(t) \cdot (t \in A) \tag{3}$$

oraz

$$t \in \underset{x}{E} [\Phi(x)] \equiv \Phi(t), \tag{3'}$$

ta ostatnia równoważność dla funkcji $\Phi$ o zmiennej ograniczonej do $A$.

Równoważność (3') prowadzi z łatwością do następujących twierdzeń, dotyczących operatora $E$ (przy założeniu, że funkcje $\Phi$ i $\Psi$ mają zmienne ograniczone do $A$):

$$\underset{x}{E} [\Phi(x) + \Psi(x)] = \underset{x}{E} [\Phi(x)] + \underset{x}{E} [\Psi(x)], \tag{4}$$

$$\underset{x}{E} [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] = \underset{x}{E} [\Phi(x)] \cdot \underset{x}{E} [\Psi(x)], \tag{5}$$

$$\underset{x}{E} [\Phi'(x)] = A - \underset{x}{E} [\Phi(x)]. \tag{6}$$

Dla przykładu udowodnimy wzór (4). W tym celu stosujemy równoważność (3') do funkcji zdaniowej $\Phi(x)+\Psi(x)$; otrzymujemy

$$t \in \underset{x}{E} [\Phi(x) + \Psi(x)] \equiv [\Phi(t) + \Psi(t)]. \tag{i}$$

Zgodnie ze wzorem (3′) jest jednak

$$\Phi(t) \equiv t \in \underset{x}{E}[\Phi(x)] \quad \text{oraz} \quad \Psi(t) \equiv t \in \underset{x}{E}[\Psi(x)],$$

z (i) wynika zatem

$$t \in \underset{x}{E}[\Phi(x)+\Psi(x)] \equiv t \in \underset{x}{E}[\Phi(x)]+t \in \underset{x}{E}[\Psi(x)] \equiv t \in \underset{x}{E}[\Phi(x)]+\underset{x}{E}[\Psi(x)],$$

co dowodzi wzoru (4).

Przy odczytywaniu zarówno podanego tu dowodu jak i wzorów (4)—(6) należy zwracać uwagę na podwójne znaczenie symboli + i ·. Symbole te umieszczone między funkcjami zdaniowymi oznaczają operacje logiczne tworzenia alternatywy i koniunkcji, te same zaś symbole umieszczone między nazwami zbiorów oznaczają działania dodawania i mnożenia zbiorów. Znakowanie to uwydatnia *dwoistość między twierdzeniami logiki a teorii mnogości.*

***Twierdzenie 1.*** *Jeśli a i b są elementami zbioru A, to istnieje jeden i tylko jeden zbiór, którego jedynymi elementami są a i b.*

Zbiór ten oznaczamy symbolem $\{a,b\}$.

Dowód. Jednoznaczność zbioru $\{a,b\}$ wynika z aksjomatu I; istnienie — z aksjomatu V, gdyż

$$\{a,b\} = \underset{x \in A}{E}[(x=a)+(x=b)]. \tag{7}$$

Podobnie można udowodnić istnienie zbiorów $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$ itd przy założeniu, że zmienne tu występujące oznaczają elementy pewnego ustalonego zbioru $A$.

Z równoważności

$$x \in \{a,b\} \equiv [(x=a)+(x=b)] \tag{8}$$

wynika, że

$$\{a,b\} = \{b,a\}. \tag{9}$$

Jeśli $a=b$, to z (8) wynika, że $\{a,b\}=\{a\}$. Jest to *zbiór złożony z jednego elementu.* Zbiór $\{a\}$ należy oczywiście odróżniać od elementu $a$.

UWAGA. Jeśli $a$ i $b$ są zbiorami, to w twierdzeniu 1 nie potrzeba zakładać, że istnieje zbiór, który je zawiera. Można bowiem dowieść, że zbiorem takim jest $2^{a+b}$.

***Twierdzenie 2.*** *Dla każdej niepustej rodziny zbiorów $\boldsymbol{A}$ istnieje (jeden i tylko jeden) zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do wszystkich zbiorów będących elementami rodziny $\boldsymbol{A}$.*

Zbiór ten oznaczamy symbolem $P(\boldsymbol{A})$ i nazywamy *iloczynem* zbiorów rodziny $\boldsymbol{A}$.



Mamy bowiem

$$P(\boldsymbol{A}) = \underset{x \in S(\boldsymbol{A})}{E} \prod_{X} [(X \in \boldsymbol{A}) \to (x \in X)].$$

Jeśli rodzina $\boldsymbol{A}$ składa się ze zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (w skończonej ilości), to

$$P(\boldsymbol{A}) = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n.$$

Warunek $P(\boldsymbol{A}) \in \boldsymbol{A}$ oznacza, że zbiór $P(\boldsymbol{A})$ jest *najmniejszym* ze zbiorów należących do rodziny $\boldsymbol{A}$.

UWAGA. Naiwna intuicja pojęcia zbioru mogłaby nas skłaniać do przyjęcia, zamiast aksjomatu V, aksjomatu mocniejszego, orzekającego mianowicie, że do każdej funkcji zdaniowej $\Phi(x)$ istnieje zbiór $B$ złożony z tych i tylko tych elementów, które tę funkcję spełniają.

Okazuje się jednak, że aksjomat tak sformułowany prowadziłby do sprzeczności (do tzw. antynomii).

Weźmy jako przykład funkcję zdaniową

$$\Phi(x) \equiv (x \operatorname{non} \in x)$$

prowadzącą do tzw. *antynomii Russella*[1]).

Udowodnimy, że

(10) *nie istnieje zbiór x-ów spełniających funkcję zdaniową $\Phi(x)$,*

czyli że nie istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie zbiory nie będące swymi własnymi elementami. Przypuśćmy bowiem, że $Z$ jest takim zbiorem. Mamy wówczas równoważność

$$(x \in Z) \equiv (x \operatorname{non} \in x)$$

i podstawiając $Z$ zamiast $x$ dochodzimy do sprzeczności:

$$(Z \in Z) \equiv (Z \operatorname{non} \in Z).$$

Twierdzenie (10) jest w ten sposób udowodnione[2]).

Powstanie aksjomatycznego systemu teorii mnogości jest wynikiem usiłowań zmierzających do takiego ugruntowania podstaw tej nauki, które z jednej strony pozwoliłoby na uniknięcie antynomii, z drugiej zaś nie zmuszało matematyki do zrezygnowania z jakichkolwiek wartościowych rezultatów, do których doszła teoria mnogości w okresie przedaksjomatycznym. Usiłowania te doprowadziły do sformułowania aksjomatu V w postaci powyżej podanej i dającej mu zasięg całkowicie wystarczający z punktu widzenia zastosowań teorii mnogości.

---

[1]) Ob. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, tom 2, Jena 1903, posłowie.

[2]) Na fakt, że zdanie (10) daje się *udowodnić* zwraca uwagę między innymi D. A. Bocźwar, Matiematiczeskij Sbornik **15** (1944), str. 382, twierdzenie 2.

VI. ***Aksjomat wyboru.*** *Dla każdej rodziny $A$ zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór $B$, który ma dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów $X$ należących do $A$:*

$$\prod_{X,Y\in A}\{[X\neq 0]\cdot[(X\neq Y)\to(XY=0)]\}\to\sum_{B}\prod_{X\in A}\sum_{x}\prod_{y}[(y\in BX)\equiv(y=x)].$$

Aby ułatwić odczytanie tego wzoru, zauważmy, że funkcja zdaniowa $\Sigma_x\Pi_y[(y\in BX)\equiv(y=x)]$ stwierdza istnienie takiego elementu $x$, że warunki $y\in BX$ i $y=x$ są równoważne. Element $x$ jest zatem jedynym elementem iloczynu $BX$ i rozpatrywana funkcja zdaniowa stwierdza, że iloczyn $BX$ ma dokładnie jeden element.

UWAGI. Aksjomat wyboru nie przez wszystkich matematyków jest przyjmowany bez zastrzeżeń; niektórzy traktują ten aksjomat z pewną dozą nieufności i są zdania, że dowody przeprowadzone przy jego pomocy mają inną wartość poznawczą, niż dowody niezależne od niego [1]). Pochodzi to przede wszystkim stąd, że orzeka on istnienie zbioru $B$ nie podając możliwości jego zdefiniowania (a więc nieefektywnie); przy tym wśród konsekwencyj pewnika wyboru jest sporo bardzo osobliwych [2]). Jest jednak rzeczą niewątpliwą, że wiele ważnych odkryć matematycznych nie zostałoby dokonanych bez pewnika wyboru.

Będziemy w dalszym tekście umieszczali znak ° przy twierdzeniach, których dowody opierają się na tym pewniku; z reguły pewnik ten stosować będziemy jedynie w dowodach twierdzeń, które bez pewnika wyboru nie zostały udowodnione.

ĆWICZENIA. 1. Jeśli $X\in A$, to $P(A)\subset X\subset S(A)$.

2. $S(A_1+A_2)=S(A_1)+S(A_2)$.

3. *Jeśli* $A_1\cdot A_2\neq 0$, *to* $P(A_1\cdot A_2)\supset P(A_1)\cdot P(A_2)$.

4. Rodzinę $R$ zbiorów nazywamy *addytywną*, jeśli

$$[X\in R, Y\in R]\to[X+Y\in R],$$

*multyplikatywną* — jeśli

$$[X\in R, Y\in R]\to[X\cdot Y\in R].$$

[1]) Jest to stanowisko np. Borela i Lebesgue'a (por. E. Borel, *Eléments de la théorie des ensembles*, Paris 1949, str. 200) w przeciwieństwie do stanowiska np. Hausdorffa, Fraenkla lub Natansona, którzy przyjmują pewnik wyboru bez zastrzeżeń, przypisując mu taki sam stopień „oczywistości", co pewnikom I—V (por. I. P. Natanson, Теория функций вещественной переменной, Moskwa 1950, str. 328).

Szczegółową analizę licznych dowodów opartych na aksjomacie wyboru przeprowadził W. Sierpiński w pracy *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1918, str. 97—152.

[2]) Ob. np. „Paradoksalny rozkład kuli" na końcu tej książki.



Rodzinę addytywną i multyplikatywną, która spełnia warunek

$$[X\in R, Y\in R]\to[X-Y\in R],$$

nazywamy *ciałem zbiorów* (por. rozdział I, str. 35).

Niech $Z\subset 2^A$. Udowodnić (posługując się działaniem $P(X)$), że wśród rodzin złożonych z podzbiorów zbioru $A$ istnieje:

1° najmniejsza rodzina addytywna $R_s$ taka, że $Z\subset R_s$,

2° najmniejsza rodzina multyplikatywna $R_p$ taka, że $Z\subset R_p$,

3° najmniejsze ciało $R_c$ takie, że $Z\subset R_c$.

## *§ 3. Aksjomaty VII i VIII.

Wprowadzimy obecnie nowy aksjomat:

VII [1]). ***Aksjomat zastępowania.*** *Niech $A$ będzie zbiorem, a $\Phi(x,y)$ funkcją zdaniową, czyniącą zadość następującemu warunkowi:*

*(W) dla każdego $x\in A$ istnieje co najwyżej jedno $y$ takie, że $\Phi(x,y)$.*

*Istnieje wówczas zbiór $B$ złożony ze wszystkich $y$, dla których przy pewnym $x\in A$ spełniony jest warunek $\Phi(x,y)$.*

Warunek $(W)$ zapisujemy symbolami logicznymi w taki sposób:

$$\prod_{x\in A}\prod_{y_1y_2}[\Phi(x,y_1)\cdot\Phi(x,y_2)\to(y_1=y_2)].$$

Dla dowolnego zbioru $A$ i dowolnej funkcji zdaniowej $\Phi(x,y)$ istnieje co najwyżej jeden zbiór $B$ taki, że przy wszelkim $y$

$$(1)\qquad (y\in B)\equiv\sum_{x\in A}\Phi(x,y).$$

Istotnie, jeśli zbiory $B_1$ i $B_2$ spełniają ten warunek, to $(y\in B_1)\equiv(y\in B_2)$, a więc $B_1=B_2$ na mocy aksjomatu I.

Aksjomat VII stwierdza, że dla funkcji zdaniowej, spełniającej warunek $(W)$, istnieje co najmniej jeden zbiór, dla którego zachodzi (1). Ostatecznie więc dla każdej funkcji zdaniowej, czyniącej zadość warunkowi $(W)$, istnieje dokładnie jeden zbiór $B$ taki, że spełniony jest wzór (1). Zbiór ten oznaczamy symbolem $\Phi``A$ i nazywamy obrazem zbioru $A$ uzyskanym przy pomocy funkcji zdaniowej $\Phi(x,y)$.

[1]) Aksjomat VII wprowadzili niezależnie od siebie D. Mirimanoff w pracy *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, Enseignement Mathématique **19** (1917), str. 37—52, A. Fraenkel w pracy *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Mathematische Annalen **86** (1922), str. 230—237, i Th. Skolem w pracy *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors, Helsingfors 1922, str. 217—232.

Zauważmy, że od rozważanej funkcji zdaniowej nie wymagamy, by zawierała tylko dwie zmienne $x$ i $y$. Jeśli jest ich więcej, to te dodatkowe zmienne grają rolę parametrów, od których zależy zbiór $\Phi``A$.

Istnienie zbioru $\Phi``A$ może być udowodnione bez uciekania się do pewnika VII, o ile $\Phi(x,y)$ jest funkcją zdaniową, w której argument $y$ ma zakres zmienności ograniczony do jakiegoś zbioru $C$. Istotnie mamy wówczas

$$\Phi``A = \underset{y\in C}{E}[\sum_{x\in A}\Phi(x,y)],$$

tzn. istnienie $\Phi``A$ wynika z aksjomatu podzbiorów. Z tego względu pewnik VII występować będzie dość rzadko w naszych rozważaniach.

Istnieją jednak przypadki, w których użycie pewnika VII jest istotne. Oto przykład: przyjmijmy

$$P_1 = \mathcal{J}, \quad P_2 = 2^{P_1}, \ldots, P_{n+1} = 2^{P_n}, \ldots,$$

gdzie $\mathcal{J}$ jest zbiorem liczb naturalnych, i niech $\Phi(x,y)$ będzie funkcją zdaniową $y = P_x$. Oczywiście, ta funkcja zdaniowa spełnia warunek $(W)$. Zbiór $\Phi``\mathcal{J}$ składa się ze wszystkich zbiorów $P_n$ jako elementów. Użycie pewnika VII do dowodu istnienia tego zbioru jest istotne, gdyż argument $y$ w funkcji zdaniowej $y = P_x$ nie ma zakresu zmienności ograniczonego do żadnego zbioru, którego istnienie dałoby się wyprowadzić z aksjomatów I—VI (a nawet z aksjomatów I—VI i VIII).

VIII. ***Aksjomat nieskończoności.*** *Istnieje zbiór $A$ i taka niepusta rodzina jego podzbiorów $\boldsymbol{X}$, że dla każdego zbioru $M \in \boldsymbol{X}$ istnieje zbiór $N \in \boldsymbol{X}$, który zawiera $M$ jako podzbiór właściwy:*

$$\sum_{A,\boldsymbol{X}}\{(0 \neq \boldsymbol{X} \subset 2^A) \cdot \prod_{M\in\boldsymbol{X}}\sum_{N\in\boldsymbol{X}}[(M \subset N)\cdot(M \neq N)]\}.$$

Zauważmy, że pewnik VIII jest zbędny, gdy do aksjomatów teorii mnogości dołączymy aksjomaty arytmetyki lub geometrii. Wynika z nich bowiem istnienie zbioru $A$, czyniącego zadość warunkom wymienionym w aksjomacie VIII; w przypadku arytmetyki można jako $A$ przyjąć zbiór liczb naturalnych, a jako $\boldsymbol{X}$ rodzinę wszystkich zbiorów

$$\underset{k\in A}{E}[1 \leqslant k < n] \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Pewnik VIII jest natomiast niezbędny, jeśli teoria mnogości jest traktowana jako odrębna nauka, niezależna od innych działów matematyki.

UWAGI. 1. W rozdziałach III i IV zapoznamy się jeszcze z dwoma pewnikami, które jednak nie są niezbędne i które przyjmuje się tylko w celu nadania dowodom twierdzeń teorii mnogości przejrzystszej postaci.



Większość twierdzeń wyprowadzać będziemy z pewników I—V, a na aksjomaty VI—VIII będziemy się powoływali w nielicznych tylko wypadkach.

Znaczenie, jakie poszczególne pewniki mają dla teorii mnogości, ocenić można w całej pełni dopiero po zapoznaniu się z wynikami i rozumowaniami tej teorii. Na tym miejscu poprzestaniemy na kilku dość ogólnikowych uwagach.

Aksjomaty II, II′, III—VII są to tzw. warunkowe aksjomaty istnienia: pozwalają one wnioskować o istnieniu pewnych zbiorów z założenia, że istnieją inne zbiory.

Konstrukcje wykonywane na podstawie aksjomatów II—V, VII są jednoznaczne, natomiast pewnik VI nie wyznacza jednoznacznie zbioru, którego istnienie stwierdza: dla danej rodziny $\boldsymbol{A}$, złożonej ze zbiorów niepustych i rozłącznych, istnieje na ogół wiele zbiorów $B$ realizujących tezę pewnika wyboru.

Pewniki II″ i VIII zasługują na nazwę absolutnych pewników istnienia: postulują one istnienie pewnych zbiorów niezależnie od wszelkich założeń.

2. *Związki między aksjomatami.*

(i) Aksjomat II″ jest wnioskiem z VIII.

(ii) Aksjomat II′ jest wnioskiem z V. Istotnie, niech $A$ i $B$ będą dowolnymi zbiorami i niech $\Phi(x) \equiv (x \in B)'$. Zbiór $E_{x\in A}[\Phi(x)]$, istniejący na mocy V, jest różnicą $A - B$.

(iii) Aksjomat V jest wnioskiem z VII. Dla dowodu załóżmy, że $A$ jest zbiorem, a $\Phi(x)$ dowolną funkcją zdaniową, i przyjmijmy

$$\Theta(x,y) \equiv \Phi(x)\cdot(x = y).$$

Funkcja zdaniowa $\Theta$ czyni zadość warunkowi $(W)$ ze str. 49, a więc w myśl aksjomatu VII istnieje zbiór $B = \Theta``A$. A zatem

$$(x \in B) \equiv (x \in A)\cdot\Phi(x),$$

tzn. zbiór $B$ spełnia warunek (1) aksjomatu V.

## § 4. Pary uporządkowane.

Zakładać będziemy w tym paragrafie, że zmienne $a, b, c$ i $d$ przebiegają elementy pewnego ustalonego zbioru $A$.

Zbiór

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\} \tag{1}$$

nazywamy *parą uporządkowaną o poprzedniku $a$ i następniku $b$* [1]).

[1]) Tę definicję pary uporządkowanej podał K. Kuratowski w pracy *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, Fundamenta Mathematicae **2** (1921), str. 161—171. Por. też N. Wiener, *A simplification of the logic of relations*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **17** (1912—14), str. 387—390.

***Twierdzenie 1.*** *Na to, aby* $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$, *potrzeba i wystarcza, by* $a=c$ *i* $b=d$.

Dowód. Dostateczność warunku jest oczywista, pozostaje więc udowodnić tylko jego konieczność. Załóżmy zatem, że $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$. Stąd na mocy wzoru (1) i wzoru (8) z § 2, str. 46, wynika, że

$$\{c\}\in\langle a,b\rangle \quad \text{i} \quad \{c,d\}\in\langle a,b\rangle,$$

skąd

(i) $\{c\}=\{a\}$ lub (ii) $\{c\}=\{a,b\}$,

oraz

(iii) $\{c,d\}=\{a\}$ lub (iv) $\{c,d\}=\{a,b\}$.

Wzór (ii) może zachodzić tylko wtedy, gdy $a=c=b$. Wzory (iii) i (iv) stają się wówczas równoważne i dają $c=d=a$. Otrzymujemy więc $a=c=b=d$, a zatem teza twierdzenia jest spełniona. Podobnie przekonywamy się o prawdziwości twierdzenia w przypadku (iii). Pozostaje więc rozpatrzyć przypadek, gdy spełnione są wzory (i) oraz (iv). Mamy wówczas $c=a$ i bądź $c=b$, bądź $d=b$. Jeśli $c=b$, to spełniony jest wzór (ii) i wracamy do przypadku już rozpatrzonego. Jeśli zaś $d=b$, to mamy $a=c$ i $b=d$, a więc twierdzenie jest prawdziwe i w tym przypadku.

***Wniosek.*** *Jeśli* $\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$, *to* $a=b$.

Możemy teraz zdać sobie dokładniej sprawę z istotnych własności pojęcia pary uporządkowanej; mianowicie, para uporządkowana $\langle a,b\rangle$

1° wyznacza przedmioty $a$ i $b$,

2° pozwala (w przypadku, gdy $a\neq b$) odróżnić jeden z nich jako „pierwszy" od pozostałego „drugiego" (tym się różni para uporządkowana $\langle a,b\rangle$ od zbioru $\{a,b\}$),

3° jest wyznaczona jednoznacznie, jeśli dane są przedmioty $a$ i $b$ i jeden z nich jest wybrany jako „pierwszy".

Zamiast definicji (1) można by przyjąć jakąkolwiek inną, byleby spełniającą podane tu warunki 1°, 2° i 3°. Definicja (1) jest — jak się zdaje — najprostszą definicją czyniącą zadość tym warunkom.

## § 5. Produkty. Relacje.

*Produktem* albo *iloczynem kartezjańskim* zbiorów $X$ i $Y$ nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle x,y\rangle$ takich, że $x\in X$ i $y\in Y$.

Istnienie tego zbioru uzasadniamy w następujący sposób. Jeśli $x\in X$ i $y\in Y$, to $\{x,y\}\subset X+Y$ oraz $\{x\}\subset X+Y$, skąd

$$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}\in 2^{2^{X+Y}}.$$

Zbiór

$$\underset{t\in T}{E}\Big[\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}(t=\langle x,y\rangle)\Big], \quad \text{gdzie} \quad T=2^{2^{X+Y}},$$



istniejący na mocy pewników II, IV i V, zawiera więc jako element każdą parę uporządkowaną $\langle x,y\rangle$, gdzie $x\in X$ i $y\in Y$; przy tym wszystkie jego elementy są takimi parami. Zbiór ten jest zatem produktem zbiorów $X$ i $Y$.

Ponieważ istnieje co najwyżej jeden zbiór, zawierający jako elementy wszystkie pary $\langle x,y\rangle$, gdzie $x\in X$ i $y\in Y$, i tylko takie pary, więc każde dwa zbiory $X$ i $Y$ wyznaczają jednoznacznie swój produkt. Oznaczamy go symbolem $X\times Y$.

Jeśli $X=0$ lub $Y=0$, to oczywiście $X\times Y=0$.

PRZYKŁAD. Zbiór punktów płaszczyzny (tj. zbiór liczb zespolonych) można uważać za produkt $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$, gdzie $\mathcal{E}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

Mnożenie kartezjańskie zbiorów jest obok dodawania, mnożenia i uzupełniania jednym z podstawowych działań na zbiorach. Mówiąc o tym działaniu możemy nieraz z korzyścią używać języka geometrycznego: czynniki $X$ i $Y$ produktu $X\times Y$ nazywamy *osiami współrzędnych*, elementy produktu — *punktami*. Poprzednik pary $\langle x,y\rangle\in X\times Y$ nazywamy jej *odciętą*, a następnik — *rzędną*.

Niektóre własności produktów są analogiczne do własności iloczynów. Zachodzą np. prawa rozdzielności:

$$(X_1+X_2)\times Y=X_1\times Y+X_2\times Y, \quad Y\times(X_1+X_2)=Y\times X_1+Y\times X_2,$$
$$(X_1-X_2)\times Y=X_1\times Y-X_2\times Y, \quad Y\times(X_1-X_2)=Y\times X_1-Y\times X_2.$$

Dla przykładu udowodnimy pierwszą z tych równości:

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in(X_1+X_2)\times Y &\equiv(x\in X_1+X_2)\cdot(y\in Y)\equiv(x\in X_1+x\in X_2)\cdot(y\in Y)\\ &\equiv(x\in X_1\cdot y\in Y)+(x\in X_2\cdot y\in Y)\\ &\equiv(\langle x,y\rangle\in X_1\times Y)+(\langle x,y\rangle\in X_2\times Y)\\ &\equiv\langle x,y\rangle\in(X_1\times Y+X_2\times Y).\end{aligned}$$

Spełnione są także prawa rozdzielności mnożenia kartezjańskiego względem zwykłego mnożenia

$$(X_1\cdot X_2)\times Y=(X_1\times Y)\cdot(X_2\times Y), \quad Y\times(X_1\cdot X_2)=(Y\times X_1)\cdot(Y\times X_2).$$

Dowód przebiega podobnie jak dla prawa rozdzielności względem dodawania.

Mnożenie kartezjańskie jest wreszcie operacją monotoniczną względem stosunku zawierania, tzn.:

Jeśli $Y\neq 0$, to $(X_1\subset X_2)\equiv(X_1\times Y\subset X_2\times Y)\equiv(Y\times X_1\subset Y\times X_2)$.

Istotnie, niech $y\in Y$. Ponieważ (dla $i=1,2$):

$$(\langle x,y\rangle\in X_i\times Y)\equiv(x\in X_i)\cdot(y\in Y),$$

więc, jeśli $X_1 \subset X_2$, to

$$(\langle x,y\rangle \in X_1 \times Y) \to (\langle x,y\rangle \in X_2 \times Y),$$

a zatem $X_1 \times Y \subset X_2 \times Y$.

Na odwrót, jeśli $X_1 \times Y \subset X_2 \times Y$ i $y \in Y$, to

$$(x \in X_1) \to (x \in X_1)\cdot(y \in Y) \equiv (\langle x,y\rangle \in X_1 \times Y) \to (\langle x,y\rangle \in X_2 \times Y) \equiv$$
$$\equiv (x \in X_2)\cdot(y \in Y) \to (x \in X_2),$$

a więc $X_1 \subset X_2$.

Dowód drugiej części jest podobny.

Korzystając z pojęcia produktu możemy też dokonywać pewnych przekształceń logicznych. Np. wzory (por. str. 42):

$$\prod_x \prod_y \Phi(x,y) \equiv \prod_{xy} \Phi(x,y) \equiv \prod_z \Phi(z), \qquad \sum_x \sum_y \Phi(x,y) \equiv \sum_{xy} \Phi(x,y) \equiv \sum_z \Phi(z)$$

pozwalają zastąpić dwa występujące obok siebie kwantyfikatory (duże lub małe) jednym kwantyfikatorem, wiążącym zmienną $z = \langle x,y\rangle$ przebiegającą produkt $X \times Y$.

Uważamy też za równoznaczne symbole $E_z \Phi(z)$ i $E_{xy} \Phi(x,y)$.

Podzbiory produktów (a więc zbiory par uporządkowanych) nazywamy *relacjami* (dwuczłonowymi).

Zamiast $\langle a,b\rangle \in R$, gdzie $R$ oznacza relację, piszemy nieraz $aRb$ i czytamy: $a$ pozostaje w relacji (stosunku) $R$ do $b$.

*Dziedziną lewostronną* ($D_l$) relacji $R$ nazywamy zbiór poprzedników par należących do $R$; *dziedziną prawostronną* ($D_p$) — zbiór następników tych par. Sumę obu dziedzin nazywamy *polem* relacji $R$.

Używając terminologii geometrycznej powiemy, że $D_l$ jest *rzutem* zbioru $R$ na oś $X$ (tj. jest zbiorem odciętych punktów należących do $R$), zaś $D_p$ jest rzutem $R$ na oś $Y$.

Mamy więc:

$$(1) \qquad D_l = \underset{x \in X}{E} \sum_y [\langle x,y\rangle \in R], \quad D_p = \underset{y \in Y_1}{E} \sum_x [\langle x,y\rangle \in R].$$

Wzory te dają równocześnie dowód istnienia zbiorów $D_l$ i $D_p$ (na mocy aksjomatu V).

Jeśli $\Phi(x,y)$ jest funkcją zdaniową o zmiennych ograniczonych odpowiednio do zakresów $X$ i $Y$, to zbiór $R = E_{xy} \Phi(x,y)$ jest relacją [1]).

Oczywiście: $\Phi(x,y) \equiv x R y \equiv \langle x,y\rangle \in R$. Ze wzoru (1) wynika więc:

***Twierdzenie.*** *Rzutem zbioru* $E_{xy} \Phi(x,y)$ *na oś* $X$ *jest zbiór* $E_x \Sigma_y \Phi(x,y)$.

[1]) Zbiór ten oznacza się też symbolem $(\hat{x}\hat{y})\,\Phi(x,y)$.



PRZYKŁADY I ĆWICZENIA. 1) Niech $X = Y = \mathcal{C}$ (zbiór liczb rzeczywistych). Zbiór $E_{xy}(x<y)$ jest częścią płaszczyzny położoną nad prostą $x=y$. Zbiór $E_{xy}(y=x^2)$ jest parabolą; jej rzutem na oś $Y$ (tj. zbiorem liczb nieujemnych) jest zbiór $E_y \Sigma_x (y=x^2)$.

2) Niech $\boldsymbol{A}$ będzie jakąś rodziną podzbiorów produktu $X \times Y$. Niech $F(Z)$ oznacza rzut zbioru $Z$ (gdzie $Z \subset X \times Y$) na oś $X$, zaś $F(\boldsymbol{A})$ — rodzinę rzutów zbiorów $Z \in \boldsymbol{A}$. Dowieść, że

$$F[S(\boldsymbol{A})] = S[F(\boldsymbol{A})],$$

tj. że rzut sumy jest równy sumie rzutów.

3) Okazać na przykładzie, że rzut iloczynu (dwóch zbiorów) może być różny od iloczynu rzutów.

**§ 6. Funkcje.** Niech $R \subset X \times Y$. Relacja $R$ nazywa się *funkcją*, jeśli dla każdego $x$ istnieje co najwyżej jedno takie $y$, że $x R y$ [1]). Inaczej mówiąc: wzory $xRy_1$ i $xRy_2$ pociągają za sobą zawsze równość $y_1 = y_2$:

$$\prod_{xy_1y_2} [(xRy_1)\cdot(xRy_2) \to (y_1 = y_2)].$$

Funkcje oznaczamy zazwyczaj literami $f, g, h, \ldots$ Lewostronną dziedzinę funkcji $f$ nazywamy zbiorem jej *argumentów*, prawostronną — zbiorem jej *wartości*.

Zbiór wszystkich funkcji $f$, które mają $X$ jako zbiór argumentów, a których wartości należą do $Y$, oznaczamy symbolem $Y^X$.

Jeśli $X$ jest zbiorem argumentów a $Y$ zbiorem wartości, to mówimy też, że funkcja $f$ jest określona na $X$ i że odwzorowuje ona zbiór $X$ na zbiór $Y$.

Jeśli $f$ jest funkcją, to dla każdego argumentu $x$ istnieje dokładnie jedno $y$ pozostające do $x$ w relacji $f$, gdyż co najmniej jedno takie $y$ istnieje w myśl definicji dziedziny lewostronnej, a może być co najwyżej jedno wobec określenia funkcji. To jedyne $y$ oznaczamy symbolem $f(x)$ i nazywamy wartością funkcji $f$ dla argumentu $x$. Wzór $y = f(x)$ wyraża więc to samo, co $xfy$.

Zachodzi oczywiście równoważność:

$$(f=g) \equiv \prod_{x \in X} [f(x) = g(x)].$$

[1]) Podana tu definicja funkcji pochodzi od G. Peano, *Sulla definizione di funzione*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali **20** (1911), str. 3—5.

Przyjęta tutaj definicja funkcji jest uściśleniem definicji klasycznej podawanej zazwyczaj w podręcznikach analizy a orzekającej, że funkcja $f$ jest określona, gdy podane jest prawo, które każdemu elementowi $x$ zbioru argumentów przyporządkowuje jedną i tylko jedną wartość $f(x)$.

Gdy pary uporządkowane utożsamimy z punktami płaszczyzny, a ich poprzedniki i następniki odpowiednio z odciętymi i rzędnymi, to okaże się, że funkcja jest tym samym co *wykres funkcji* (w terminologii geometrycznej).

Pod pojęcie funkcji podpada pojęcie *ciągu*. Ciąg nieskończony jest to bowiem funkcja, której zbiorem argumentów jest zbiór liczb naturalnych.

Ciąg skończony o $n$ elementach jest to funkcja, której zbiorem argumentów jest zbiór liczb $\{1,2,\ldots,n\}$. Inaczej mówiąc: jest to zbiór postaci $\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \ldots, \langle n,k\rangle\}$.

UWAGA. Zauważmy, że ciąg o dwu elementach $a_1, a_2$ i para uporządkowana $\langle a_1, a_2\rangle$ są pojęciami różnymi, bowiem ciąg $a_1, a_2$ jest to zbiór $\{\langle 1,a_1\rangle, \langle 2,a_2\rangle\}$, zaś $\langle a_1,a_2\rangle = \{\{a_1\},\{a_1,a_2\}\}$. W zastosowaniach jest jednak zazwyczaj obojętne, które z tych dwóch pojęć użyć.

Zbiór ciągów $n$ elementowych, których wyrazy należą do $X$ oznaczamy symbolem $X^n$.

***Definicja.*** Funkcja $f$ jest *różnowartościowa* (lub *wzajemnie jednoznaczna*), jeśli dla różnych argumentów przyjmuje ona zawsze różne wartości:

$$[f(x_1)=f(x_2)] \to [x_1=x_2],$$

gdzie $x_1$ i $x_2$ są dowolnymi elementami zbioru argumentów.

PRZYKŁAD. Niech $f$ będzie funkcją, której zbiorem argumentów jest zbiór liczb rzeczywistych i która dana jest wzorem $f(x)=x^3$. Funkcja ta jest różnowartościowa, gdyż $x_1^3=x_2^3 \to x_1=x_2$. Natomiast funkcja $g$, dana wzorem $g(x)=x^2$, nie jest wzajemnie jednoznaczna, gdyż np. $(-2)^2=2^2$.

***Definicja.*** Funkcja $g$ nazywa się *odwrotną* do funkcji $f$, jeśli zbiór argumentów $g$ jest zbiorem wartości $f$, zbiór wartości $g$ jest zbiorem argumentów $f$ i przy tym dla każdego argumentu $x$ funkcji $f$ zachodzi równość

$$g(f(x))=x. \tag{1}$$

***Twierdzenie 1.*** *Na to, aby istniała funkcja $g$ odwrotna do funkcji $f$ potrzeba i wystarcza, by funkcja $f$ była różnowartościowa. Jeśli to założenie jest spełnione, to istnieje jedna tylko funkcja $g$ odwrotna do $f$; zarazem $f$ jest funkcją odwrotną do $g$.*



Dowód. Jeśli $g$ jest funkcją odwrotną do $f$, a $x_1$ i $x_2$ są dowolnymi argumentami funkcji $f$, to z $f(x_1)=f(x_2)$ wynika $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, a więc $x_1=x_2$ na mocy (1). Jeśli więc istnieje funkcja odwrotna do $f$, to funkcja $f$ jest różnowartościowa.

Załóżmy na odwrót, że $f$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną i niech $X$ będzie jej zbiorem argumentów a $Y$ — zbiorem wartości. Przyjmując

$$g=\underset{z\in Y\times X}{E}\ \sum_{x\in X}\ \sum_{y\in Y}(z=\langle y,x\rangle)\cdot(y=f(x))$$

wykazuje się z łatwością, że $g$ jest funkcją odwrotną do $f$.

Funkcja odwrotna do funkcji wzajemnie jednoznacznej $f$ jest tylko jedna. Istotnie, jeśli $g_1$ i $g_2$ są funkcjami odwrotnymi do $f$, to mają one ten sam zbiór argumentów i ten sam zbiór wartości. Niech $y$ należy do zbioru argumentów $g_1$, tzn. do zbioru wartości $f$. Istnieje zatem takie $x$ że $y=f(x)$ i wzór (1), który w myśl założenia obowiązuje dla funkcji $g_1$ i $g_2$, daje $g_1(y)=x$ i $g_2(y)=x$; stąd $g_1(y)=g_2(y)$. Wobec dowolności $y$ wzór ten dowodzi, że $g_1=g_2$.

Aby wreszcie wykazać, że $f$ jest funkcją odwrotną do swej funkcji odwrotnej, zauważmy, że z (1) wynika $f(g(f(x)))=f(x)$, skąd, przyjmując $y=f(x)$, otrzymujemy

$$f(g(y))=y. \tag{2}$$

Ponieważ każdy argument funkcji $g$ może być przedstawiony jako $f(x)$, więc wzór (2) zachodzi dla dowolnego argumentu $y$ funkcji $g$, co dowodzi, że $f$ jest funkcją odwrotną do $g$.

Twierdzenie 1 jest zatem udowodnione w zupełności.

Funkcję odwrotną do funkcji (wzajemnie jednoznacznej) $f$ oznaczamy symbolem $f^{-1}$. Mamy zatem

$$f^{-1}(f(x))=x, \quad f(f^{-1}(y))=y, \quad (f^{-1})^{-1}=f, \quad \prod_{xy}\{[x=f^{-1}(y)]\equiv[y=f(x)]\}. \tag{3}$$

***Twierdzenie 2.*** *Jeśli każda wartość funkcji $f$ jest argumentem funkcji $g$, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h$ o tym samym zbiorze argumentów co $f$, że*

$$h(x)=g(f(x)).$$

Dowód. Jeśli funkcje $h_1$ i $h_2$ czynią obie zadość warunkom wymienionym w twierdzeniu, to $h_1(x)=h_2(x)$ dla każdego $x$ należącego do zbioru argumentów tych funkcji, a więc $h_1=h_2$. Istnienie funkcji $h$ wynika z uwagi, że na mocy aksjomatu V istnieje zbiór

$$h=\underset{t\in X\times Z}{E}\ \sum_{x\in X}\ \sum_{z\in Z}(t=\langle x,z\rangle)\cdot[z=g(f(x))],$$

gdzie $Z$ jest zbiorem wartości funkcji $g$.

Funkcję $h$, której istnienie i jednoznaczność orzeka twierdzenie 2, oznaczamy przez $gf$ i nazywamy *funkcją złożoną*. Funkcja złożona $gf$ istnieje tylko wówczas, gdy zbiór wartości $f$ jest zawarty w zbiorze argumentów $g$.

Następujące twierdzenie wyraża łączność operacji składania funkcji:

***Twierdzenie 3.*** *Jeśli zbiór wartości funkcji $f$ jest zawarty w zbiorze argumentów funkcji $g$, a zbiór wartości funkcji $g$ jest zawarty w zbiorze argumentów funkcji $h$, to $h(gf)=(hg)f$.*

Dowód. Niech $x$ będzie dowolnym argumentem funkcji $f$. A zatem $gf(x)=g(f(x))$ i $[h(gf)](x)=h(g(f(x)))$. Podobnie

$$[(hg)f](x)=[hg](f(x))=h(g(f(x))),$$

a więc $[h(gf)](x)=[(hg)f](x)$. Ponieważ $x$ jest dowolne, zaś funkcje $h(gf)$ i $(hg)f$ mają te same zbiory argumentów, wnosimy stąd, że $h(gf)=(hg)f$.

***Twierdzenie 4.*** *Jeśli funkcje $f$ i $g$ są wzajemnie jednoznaczne i funkcja złożona $gf$ istnieje, to funkcja ta jest też wzajemnie jednoznaczna.*

Dowód. Niech $x_1$ i $x_2$ będą argumentami funkcji $f$. Z równości $gf(x_1)=gf(x_2)$ wynika $f(x_1)=f(x_2)$ wobec założenia, że funkcja $g$ jest wzajemnie jednoznaczna. Z równości zaś $f(x_1)=f(x_2)$ wynika, że $x_1=x_2$, gdyż funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna. Zatem $gf(x_1)=gf(x_2)\to x_1=x_2$, tj. funkcja $gf$ jest wzajemnie jednoznaczna.

***Definicja.*** Niech $M$ będzie podzbiorem zbioru argumentów funkcji $f$. Funkcję $g$ nazywamy funkcją *częściową*, mianowicie funkcją *$f$ ograniczoną do $M$*, jeśli zbiorem argumentów $g$ jest $M$ i $g(x)=f(x)$ dla $x\in M$. Piszemy: $g=f|M$.

Bez trudu można wykazać, że taka funkcja częściowa istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona przez $f$ i $M$.

Jeśli $g=f|M$, to $g\subset f$. Mówimy w tym przypadku, że funkcja $f$ jest *przedłużeniem* funkcji $g$.

****Twierdzenie 5.*** *Jeśli funkcje $f$ i $g$ są wzajemnie jednoznaczne i funkcja złożona $gf$ istnieje, to funkcją odwrotną do $gf$ jest $f^{-1}(g|Y)^{-1}$, gdzie $Y$ jest zbiorem wartości funkcji $f$.*

Dowód. Niech $g_1$ będzie funkcją częściową $g|Y$. Zbiorem wartości funkcji $g_1^{-1}$ jest zbiór argumentów funkcji $g_1$, czyli zbiór $Y$. Ponieważ zbiór ten jest zbiorem wartości funkcji $f$, czyli zbiorem argumentów funkcji $f^{-1}$, więc spełnione są założenia, zapewniające istnienie funkcji złożonej $f^{-1}g_1^{-1}$.



Niech $x$ będzie argumentem funkcji $f$. Mamy wówczas

$$[(f^{-1}g_1^{-1})(gf)](x)=f^{-1}\left(g_1^{-1}\left(g(f(x))\right)\right)=f^{-1}\left(g_1^{-1}\left(g_1(f(x))\right)\right)=f^{-1}(f(x))=x,$$

co dowodzi, że $f^{-1}g_1^{-1}$ jest funkcją odwrotną do $gf$.

***Definicja.*** Funkcję wzajemnie jednoznaczną $f$, której zbiorem wartości i zbiorem argumentów jest ten sam zbiór $X$ nazywamy *permutacją* zbioru $X$.

Najprostszą permutacją jest tożsamość, tj. funkcja $I$, której wartość stale równa się argumentowi: $I(x)=x$ dla $x\in X$.

Z łatwością wykazuje się, że jeśli $f$ i $g$ są permutacjami zbioru $X$, to i funkcje $f^{-1}$ i $gf$ są permutacjami tegoż zbioru.

***Definicja.*** Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem. Funkcja $f$, dla której zbiorem argumentów jest $X^n$ (por. str. 56) nazywa się *funkcją $n$ zmiennych przebiegających zbiór $X$* [1]).

Argumentami funkcji $n$ zmiennych są więc ciągi $n$-elementowe $(x_1,\ldots,x_n)$, których wyrazy należą do $X$.

Wartości funkcji $f$ wielu zmiennych oznaczamy symbolem $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Wszystkie wprowadzone tutaj pojęcia stosują się bez zmiany do funkcji wielu zmiennych, gdyż funkcje takie są przypadkiem specjalnym ogólnego pojęcia funkcji (mianowicie, gdy argument przebiega zbiór $X^n$). W szczególności funkcję $n$ zmiennych nazywamy różnowartościową, gdy dla dowolnych elementów $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$ zbioru $X$

$$[f(x_1,\ldots,x_n)=f(y_1,\ldots,y_n)]\to[(x_1=y_1)\cdot\ldots\cdot(x_n=y_n)].$$

PRZYKŁAD. Funkcja $\varphi(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$ ma $\mathcal{J}^2$ za zbiór argumentów a $\mathcal{J}$ za zbiór wartości; tj. każda liczba naturalna $k$ daje się przedstawić w postaci $2^{m-1}(2n-1)$. Jeśli bowiem $m-1$ jest najwyższym wykładnikiem potęgi takim, że $2^{m-1}$ jest dzielnikiem $k$, to iloraz $k:2^{m-1}$ jest nieparzysty.

Wykażemy, że funkcja $\varphi$ jest różnowartościowa, tj. że jeśli $2^{m-1}\cdot(2n-1)=2^{m'-1}\cdot(2n'-1)$, to $m=m'$ i $n=n'$.

Niech $p=2^{m-1}\cdot(2n-1)$ i $p'=2^{m'-1}\cdot(2n'-1)$. Jeśli $p=p'$, to najwyższa potęga 2 dzieląca $p$ jest też najwyższą potęgą 2 dzielącą $p'$, a więc $m=m'$. Skracając równość $p=p'$ przez $2^{m-1}$ otrzymamy $2n-1=2n'-1$, skąd $n=n'$.

*Funkcja $\varphi$ odwzorowuje zatem $\mathcal{J}^2$ na $\mathcal{J}$ i jest wzajemnie jednoznaczna.*

---

[1]) Pojęcie to uogólnimy w § 10.

UWAGA. Pojęcie funkcji odróżniać należy od pojęcia przyporządkowania. Przez *przyporządkowanie* rozumiemy funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$ o dwu zmiennych, spełniającą warunki

$$(W) \qquad \prod_x \sum_y \Phi(x,y), \qquad \prod_{x,y_1,y_2} [\Phi(x,y_1)\cdot\Phi(x,y_2)\to(y_1=y_2)].$$

Warunki te orzekają, że dla każdego $x$ istnieje dokładnie jeden taki przedmiot $y$, że $\Phi(x,y)$. Przedmiot ten można by oznaczyć symbolem $F(x)$.

Jeśli funkcja zdaniowa $\Phi(x,y)$ ma nieograniczony zakres zmienności argumentów, to może nie istnieć zbiór wszystkich par $\langle x,y\rangle$ takich, że $\Phi(x,y)$, tzn. że może nie istnieć taka funkcja $f$, że $\Phi(x,y)\equiv[y=f(x)]$. Np. funkcja taka nie istnieje, jeśli $\Phi(x,y)$ jest funkcją zdaniową $x=y$ (por. str. 38). Zachodzi natomiast twierdzenie następujące:

***Twierdzenie 6.*** *Jeśli funkcja zdaniowa $\Phi(x,y)$ czyni zadość warunkom $(W)$, zaś $A$ jest dowolnym zbiorem, to istnieje taka funkcja $f_A$, że $A$ jest jej zbiorem argumentów i że dla dowolnego $x\in A$ i dowolnego $y$ jest*

$$[y=f_A(x)]\equiv\Phi(x,y).$$

Mianowicie, żądaną funkcją $f_A$ jest zbiór

$$\underset{t\in A\times\mathfrak{P}^{\iota\iota}A}{E}\ \sum_{xy}[(t=\langle x,y\rangle)\cdot\Phi(x,y)],$$

istniejący na mocy aksjomatu zastępowania (por. § 3, str. 49).

ĆWICZENIA. 1. Niech $n\geqslant 3$ oraz

$$X=A_0+\ldots+A_{n-1},$$
$$B_k=A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-1},\quad C_k=A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-2},$$

gdzie wskaźniki zredukowane są mod $n$.

Niech dany będzie układ funkcji $f_k\in Y^{B_k}$, $k=0,\ldots,n-1$, spełniających warunek

$$f_k(x)=f_{k+1}(x)\quad\text{dla}\quad x\in C_{k+1}.$$

Istnieje wówczas funkcja $f\in Y^X$ spełniająca równość $f_k=f|B_k$ dla każdego $k=0,\ldots,n-1$.

2. Udowodnić wzory:

$$0^X=0\ \text{ dla }\ X\neq 0,\qquad 0^0=\{0\},\qquad Y^X\neq 0\ \text{ dla }\ Y\neq 0.$$

**§ 7. Obrazy i przeciwobrazy.** Niech $f$ będzie funkcją, $\mathfrak{X}$ — zbiorem argumentów $f$, $\mathfrak{Y}$ — zbiorem wartości $f$. Dla $X\subset\mathfrak{X}$ i $Y\subset\mathfrak{Y}$ przyjmujemy:

$$f(X)=\underset{y}{E}\,[\sum_{x\in X}(y=f(x))],\qquad f^{-1}(Y)=\underset{x}{E}\,[f(x)\in Y]\ ^{1}).$$

[1]) Zakładamy tu, że $X\,\mathrm{non}\in\mathfrak{X}$ oraz $Y\,\mathrm{non}\in\mathfrak{Y}$. Bez tego założenia symbolika powyższa byłaby dwuznaczna. W zastosowaniach założenie to z reguły jest spełnione.



$f(X)$ nazywa się *obrazem* zbioru $X$, zaś $f^{-1}(Y)$ — *przeciwobrazem* zbioru $Y$. Zbiór $f(X)$ jest więc zbiorem tych wartości funkcji, które odpowiadają argumentom należącym do zbioru $X$; zbiór $f^{-1}(Y)$ jest zbiorem tych argumentów, którym odpowiadają wartości funkcji należące do $Y$.

Jeśli $Y$ redukuje się do jednego elementu $y$, to zbiór $f^{-1}(Y)$ nazywamy *warstwą* funkcji $f$ wyznaczoną przez $y$. Warstwy są rozłączne. Sumą ich jest zbiór $X$.

W przypadku, gdy funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna, symbol $f^{-1}(Y)$ ma pozornie dwa znaczenia. Może on w myśl przyjętych tu umów oznaczać albo przeciwobraz $P$ zbioru $Y$ ze względu na funkcję $f$, albo też obraz $Q$ zbioru $Y$ dokonany przy pomocy funkcji $f^{-1}$. Ta dwuznaczność jest jednak tylko pozorna, bo $Q=P$. Istotnie

$$(x\in Q)\equiv\sum_{y\in Y}(x=f^{-1}(y))\equiv\sum_{y\in Y}(y=f(x))\equiv[f(x)\in Y]\equiv(x\in P),$$

bowiem (por. (3), str. 57): $[x=f^{-1}(y)]\equiv[y=f(x)]$.

Dla obrazów i przeciwobrazów zachodzą następujące prawa (zakładamy, że $X,X_1,X_2$ są podzbiorami $\mathfrak{X}$, zaś $Y,Y_1,Y_2$ — podzbiorami $\mathfrak{Y}$):

$$(1) \qquad f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2).$$

Dowód.
$$\begin{aligned} y\in f(X_1+X_2) &\equiv \sum_{x\in X_1+X_2}(y=f(x))\\ &\equiv \sum_x[(x\in X_1+X_2)\cdot(y=f(x))]\\ &\equiv \sum_x[(x\in X_1)\cdot(y=f(x))+(x\in X_2)\cdot(y=f(x))]\\ &\equiv \sum_x[(x\in X_1)\cdot(y=f(x))]+\sum_x[(x\in X_2)\cdot(y=f(x))]\\ &\equiv [y\in f(X_1)]+[y\in f(X_2)]\\ &\equiv y\in[f(X_1)+f(X_2)]. \end{aligned}$$

$$(1') \qquad X_1\subset X_2\to f(X_1)\subset f(X_2).$$

Implikacja ta wynika natychmiast ze wzoru (1).

$$(2) \qquad f(X_1\cdot X_2)\subset f(X_1)\cdot f(X_2).$$

Dowód. $X_1=X_1X_2+(X_1-X_2)$, a więc wobec (1)

$$f(X_1)=f(X_1X_2)+f(X_1-X_2)\supset f(X_1X_2).$$

Podobnie $f(X_2)\supset f(X_1X_2)$. Przez pomnożenie tych dwu inkluzji stronami otrzymamy wzór (2).

$$(3) \qquad f^{-1}(Y_1+Y_2)=f^{-1}(Y_1)+f^{-1}(Y_2).$$

Dowód. $x \in f^{-1}(Y_1+Y_2) \equiv f(x) \in (Y_1+Y_2) \equiv [(f(x) \in Y_1)+(f(x) \in Y_2)] \equiv$
$\equiv [(x \in f^{-1}(Y_1))+(x \in f^{-1}(Y_2))] \equiv x \in [f^{-1}(Y_1)+f^{-1}(Y_2)]$.

(4) $f^{-1}(Y_1 \cdot Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cdot f^{-1}(Y_2)$, (5) $f^{-1}(Y_1-Y_2)=f^{-1}(Y_1)-f^{-1}(Y_2)$.

Dowód jest analogiczny do dowodu wzoru (3).

(2′) $f(X_1 \cdot X_2)=f(X_1)\cdot f(X_2)$, *o ile funkcja $f$ jest różnowartościowa.*

Wzór ten otrzymujemy stosując wzór (4) do funkcji $f^{-1}$.

Wzór (1) wykazuje, że tworzenie obrazu jest operacją *addytywną*, wzory (3) i (4) — że tworzenie przeciwobrazu jest operacją *addytywną i multyplikatywną*. Tworzenie obrazu nie jest natomiast operacją multyplikatywną (poza obrębem funkcji wzajemnie jednoznacznych).

(6) $$f[f^{-1}(Y)]=Y.$$

Dowód. $\{y \in f[f^{-1}(Y)]\} \equiv \sum_x [(x \in f^{-1}(Y))\cdot(y=f(x))]$
$\equiv \sum_x [(f(x) \in Y)\cdot(y=f(x))]$
$\equiv y \in Y.$

(7) $$f^{-1}[f(X)] \supset X.$$

Dowód. $(x \in X) \to [f(x) \in f(X)] \equiv x \in f^{-1}[f(X)]$.

We wzorze (7) znak inkluzji nie może być zastąpiony znakiem równości. Jeśli np. $f$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej i $f(x)=x^2$, to dla $X=\underset{x}{E}[x \geqslant 0]$ jest $f^{-1}[f(X)] \neq X$. Natomiast dla funkcji wzajemnie jednoznacznych zachodzi oczywiście równość $f^{-1}[f(X)]=X$.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że

(a) $f(X_1)-f(X_2) \subset f(X_1-X_2)$, (b) $f[X \cdot f^{-1}(Y)]=f(X)\cdot Y$.

2. Jeśli $g=f|A$, to $g^{-1}(Y)=A\cdot f^{-1}(Y)$.

3. Wartość $y$ funkcji $f$ nazywamy wartością *rzędu $n$*, jeśli zbiór $f^{-1}(\{y\})$ składa się z $n$ elementów. Mówimy, że funkcja $f$ jest rzędu $\leqslant n$, jeśli każda jej wartość jest rzędu $\leqslant n$.

Dowieść, że jeśli funkcja $f$ określona na przestrzeni $\mathfrak{X}$ jest rzędu $\leqslant n$ i jeśli $A \subset \mathfrak{X}$, to funkcja częściowa $f|[f^{-1}f(A)-A]$ jest rzędu $\leqslant n-1$.

4. Dany jest układ $r+1$ podzbiorów rozłącznych $A_0,\ldots,A_r$ przestrzeni $\mathfrak{X}$ oraz funkcja $f$ rzędu $\leqslant n$ określona na $\mathfrak{X}$ $(n \geqslant r)$. Przyjmujemy

$$B=f(A_0)\cdot\ldots\cdot f(A_r).$$

Dowieść, że funkcja częściowa $f|[A_i \cdot f^{-1}(B)]$ jest rzędu $\leqslant n-r$.



**§ 8. Sumy i iloczyny uogólnione.** Niech $F$ będzie funkcją, której wartościami są podzbiory pewnego ustalonego zbioru $\mathfrak{X}$. Niech argumenty funkcji $F$ tworzą (niepusty) zbiór $T$. Mamy więc $F \in (2^{\mathfrak{X}})^T$. Zamiast $F(t)$ pisać będziemy krócej $F_t$.

Niech $\boldsymbol{W}$ będzie zbiorem wartości funkcji $F$, tj. rodziną zbiorów $F_t$, gdy $t$ przebiega $T$. Sumę zbiorów należących do rodziny $\boldsymbol{W}$ oznaczamy (ob. § 2, str. 44) symbolem $S(\boldsymbol{W})$; iloczyn — (ob. str. 46) symbolem $P(\boldsymbol{W})$. Dogodną jest symbolika następująca:

(i) $$S(\boldsymbol{W})=\sum_t F_t, \qquad P(\boldsymbol{W})=\prod_t F_t.$$

Stwierdzamy z łatwością, że

(ii) $$x \in \sum_t F_t \equiv \sum_t (x \in F_t), \qquad x \in \prod_t F_t \equiv \prod_t (x \in F_t),$$

gdzie $\Sigma$ i $\Pi$ po lewej stronie mają znaczenie matematyczne (określone wzorami (i)), po prawej zaś — logiczne (są to kwantyfikatory).

Jeśli zbiór $T$ składa się z jednego tylko elementu $a$, to

$$\sum_{t \in T} F_t = F_a = \prod_{t \in T} F_t,$$

jeśli zaś $T$ składa się z dwu elementów $a$ i $b$, to

$$\sum_{t \in T} F_t = F_a + F_b \quad \text{i} \quad \prod_{t \in T} F_t = F_a \cdot F_b.$$

Rozważane tu pojęcia są więc istotnie uogólnieniami pojęć sumy i iloczynu zbiorów na przypadek dowolnej liczby zbiorów.

Z (ii) wyprowadzimy wzory zachodzące dla każdej funkcji zdaniowej dwóch zmiennych $\Phi(x,y)$ (o ograniczonym zakresie zmienności argumentów):

(iii) $$\sum_y \underset{x}{E} \Phi(x,y) \equiv \underset{x}{E} \sum_y \Phi(x,y), \qquad \prod_y \underset{x}{E} \Phi(x,y) = \underset{x}{E} \prod_y \Phi(x,y).$$

Istotnie, przyjmując $F_y=\underset{x}{E}\Phi(x,y)$, mamy

$$\Phi(z,y) \equiv z \in \underset{x}{E}\, \Phi(x,y) \equiv z \in F_y,$$

a zatem

$$z \in \underset{x}{E} \sum_y \Phi(x,y) \equiv \sum_y \Phi(z,y) \equiv \sum_y (z \in F_y) \equiv z \in \sum_y F_y \equiv z \in \sum_y \underset{x}{E} \Phi(x,y).$$

Dowód drugiej części wzoru (iii) jest analogiczny.

Wzory dotyczące kwantyfikatorów, podane w § 1, prowadzą na mocy (ii) do następujących wzorów dotyczących działań uogólnionych:

(a) $$\prod_t F_t \subset F_t \subset \sum_t F_t,$$

(b) $$\prod_t (F_t \cdot G_t) = \prod_t F_t \cdot \prod_t G_t, \qquad \text{(c)} \quad \sum_t (F_t + G_t) = \sum_t F_t + \sum_t G_t,$$

(d) $$\prod_t F_t + \prod_t G_t = \prod_{ts} (F_t + G_s) \subset \prod_t (F_t + G_t),$$

(e) $$\sum_t (F_t \cdot G_t) \subset \sum_{ts} (F_t \cdot G_s) = \sum_t F_t \cdot \sum_t G_t,$$

(f) $$\left(\prod_t F_t\right)' = \sum_t F_t', \qquad \text{(g)} \quad \left(\sum_t F_t\right)' = \prod_t F_t',$$

(h) $$\prod_t (A + F_t) = A + \prod_t F_t, \qquad \text{(i)} \quad \sum_t (A \cdot F_t) = A \cdot \sum_t F_t,$$

(j) $$\left[\prod_t (A \subset F_t)\right] \to \left[A \subset \prod_t F_t\right],$$

(k) $$\left[\prod_t (F_t \subset A)\right] \to \left[\left(\sum_t F_t\right) \subset A\right].$$

We wzorach (f) i (g) $X'$ oznacza uzupełnienie $X$ względem zbioru $\mathfrak{X}$.

Dowody wzorów powyższych otrzymuje się automatycznie z odpowiednich wzorów § 1. Jako przykład podamy dowód wzoru (f) de Morgana:

$$x \in \left(\prod_t F_t\right)' \equiv (x \in \prod_t F_t)' \equiv \left(\prod_t x \in F_t\right)' \equiv \sum_t (x \in F_t') \equiv x \in \sum_t F_t';$$

stosujemy tu kolejno wzory: (2) z § 2, rozdział I (str. 6), (ii), (6) z § 1 (str. 40) i (ii).

Również tablica implikacyj podana na str. 43 prowadzi do wzorów dotyczących działań nieskończonych; w tym celu wystarczy znak implikacji $\to$ zastąpić przez znak inkluzji $\subset$, zaś $\Phi$ przez funkcję $F$ dwóch zmiennych przybierającą zbiory jako wartości. W szczególności zachodzi ważny wzór

(l) $$\sum_t \prod_s F_{ts} \subset \prod_s \sum_t F_{ts}.$$

Jak wiadomo, w ogólnym przypadku inkluzja ta nie daje się odwrócić (por. str. 42).

***Twierdzenie 1.*** *Suma $\sum_t F_t$ jest jedynym zbiorem $S$, czyniącym zadość warunkom*

(1) $$\prod_t (F_t \subset S), \qquad (2) \quad \prod_X \{[\prod_t (F_t \subset X)] \to (S \subset X)\};$$

*iloczyn $\prod F_t$ jest jedynym zbiorem $P$, czyniącym zadość warunkom*

(3) $$\prod_t (P \subset F_t), \qquad (4) \quad \prod_X \{[\prod_t (X \subset F_t)] \to (X \subset P)\}.$$



Inaczej mówiąc, suma $\sum_t F_t$ jest *najmniejszym* zbiorem, zawierającym wszystkie zbiory $F_t$, a iloczyn $\prod_t F_t$ jest *największym* zbiorem zawartym w każdym ze zbiorów $F_t$.

Dowód. Ze wzorów (a) i (k) wynika, że suma $\Sigma_t F_t$ czyni zadość warunkom (1) i (2). Na odwrót, załóżmy, że zbiór $S$ czyni zadość tym warunkom. Z (1) i (k) wynika wówczas, że $\Sigma_t F_t \subset S$. Podstawiając zaś w (2) $X = \Sigma_t F_t$ i stosując (a), otrzymamy $S \subset \Sigma_t F_t$, co dowodzi, że $S = \Sigma_t F_t$.

Dowód dla iloczynu jest analogiczny.

* ***Twierdzenie 2*** *(uogólnione prawa łączności). Jeśli $T = \sum_{u \in U} H_u$, przy czym $H$ jest funkcją, której argumenty przebiegają zbiór $U$, a której wartościami są zbiory (tj. $H \in (2^T)^U$), to*

(5) $$\sum_{t \in T} F_t = \sum_{u \in U} \sum_{t \in H_u} F_t, \qquad (6) \quad \prod_{t \in T} F_t = \prod_{u \in U} \prod_{t \in H_u} F_t.$$

Dowód. Przyjmując

$$S = \sum_{t \in T} F_t \quad \text{i} \quad S_u = \sum_{t \in H_u} F_t,$$

sprowadzamy wzór (5) do postaci

(7) $$S = \sum_{u \in U} S_u.$$

Z założenia mamy $S \supset F_t$ dla każdego $t \in T$, a więc w szczególności dla każdego $t \in H_u$, skąd $S \supset S_u$ na mocy twierdzenia 1. Załóżmy na odwrót, że $X \supset S_u$ dla dowolnego $u \in U$. Jeśli $t \in T$, to istnieje takie $u \in U$, że $t \in H_u$, skąd $S_u \supset F_t$, a więc $X \supset F_t$. Wobec dowolności $t$ wnosimy stąd, że $X \supset S$. Stosując twierdzenie 1 otrzymujemy wzór (7).

Dowód wzoru (6) jest analogiczny.

* ***Twierdzenie 3*** *(uogólnione prawa przemienności). Jeśli $\varphi$ jest permutacją zbioru $T$, to*

(8) $$\sum_{t \in T} F_t = \sum_{t \in T} F_{\varphi(t)}, \qquad (9) \quad \prod_{t \in T} F_t = \prod_{t \in T} F_{\varphi(t)}.$$

Dowód. Niech $S = \Sigma_t F_{\varphi(t)}$. Jeśli $t \in T$, to $t = \varphi(\varphi^{-1}(t))$, a ponieważ $S \supset F_{\varphi(u)}$ dla dowolnego $u \in T$, więc w szczególności (dla $u = \varphi^{-1}(t)$) $S \supset F_t$. Na odwrót, jeśli $X$ jest zbiorem takim, że $X \supset F_t$ dla $t \in T$, to $X \supset F_{\varphi(t)}$, gdyż $\varphi(t) \in T$. Stąd $X \supset S$, co dowodzi, że $S$ jest najmniejszym zbiorem, zawierającym wszystkie zbiory $F_t$, tj. $S = \Sigma_t F_t$.

Dowód wzoru (9) jest analogiczny.

* ***Twierdzenie 4*** *(uogólnione prawa rozdzielności)* [1]. *Jeśli*

$$M=\sum_{u\in U} T_u \quad \textit{oraz} \quad \boldsymbol{K}=\mathop{E}_{Y\in 2^M}\prod_{u\in U}(Y\cdot T_u\neq 0),$$

*to*

$$\text{(10)}\qquad \prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u} F_t=\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y} F_t, \qquad \text{(11)}\qquad \sum_{u\in U}\prod_{t\in T_u} F_t=\prod_{Y\in K}\sum_{t\in Y} F_t.$$

Dowód. Załóżmy, że $Y\in\boldsymbol{K}$ i $u\in U$. W myśl definicji rodziny $\boldsymbol{K}$ mamy $Y\cdot T_u\neq 0$; niech więc $t_0\in Y\cdot T_u$. Wynika stąd na mocy wzoru (a), że

$$\prod_{t\in Y} F_t\subset F_{t_0}\subset\sum_{t\in T_u} F_t.$$

Ponieważ inkluzja ta zachodzi dla dowolnego $u\in U$ (a stałego $Y$), więc na mocy twierdzenia 1 wnosimy, że

$$\prod_{t\in Y} F_t\subset\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u} F_t.$$

Wobec dowolności $Y$ wynika stąd znów na podstawie wzoru (a) inkluzja

$$\text{(12)}\qquad \sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y} F_t\subset\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u} F_t.$$

Aby udowodnić inkluzję odwrotną, załóżmy, że

$$\text{(13)}\qquad a\in\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u} F_t.$$

Niech

$$\text{(14)}\qquad Y=\mathop{E}_{t\in M}(a\in F_t).$$

Jeśli $u\in U$, to w myśl (13) $a\in\sum_{t\in T_u} F_t$, a więc istnieje takie $t\in T_u$, że $a\in F_t$; zatem $t\in Y$, co dowodzi, że $Y\cdot T_u\neq 0$. W myśl określenia $\boldsymbol{K}$ wynika stąd, że $Y\in\boldsymbol{K}$.

Z (14) wynika, że

$$\prod_{t\in Y}(a\in F_t), \quad \text{tzn.} \quad a\in\prod_{t\in Y} F_t,$$

co daje

$$\text{(15)}\qquad a\in\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y} F_t.$$

Wykazaliśmy więc, że z (13) wynika (15) dla dowolnego $a$, tzn. że

$$\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u} F_t\subset\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y} F_t.$$

Inkluzja ta łącznie z (12) daje równość (10).

[1]) Por. A. Tarski, *Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I*, Fundamenta Mathematicae **24** (1935), str. 195.



Aby udowodnić (11), zastępujemy w (10) $F_t$ przez $S-F_t$, gdzie $S=\sum_{t\in M} F_t$. Otrzymujemy wówczas

$$\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u}(S-F_t)=\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y}(S-F_t),$$

skąd, oznaczając ogólnie przez $X'$ różnicę $S-X$,

$$\Big(\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u} F_t'\Big)'=\Big(\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y} F_t'\Big)'.$$

Stosując prawa de Morgana (f) i (g) oraz wzór $F_t''=F_t$, otrzymamy stąd wzór (11).

Uogólnimy obecnie wzory (1)—(4) z § 7, dotyczące sum i iloczynów skończonych, na sumy i iloczyny dowolne.

***Twierdzenie 5.*** *Niech $F\in(2^{\mathfrak{X}})^T$ oraz $f\in Y^{\mathfrak{X}}$. Wówczas*

$$\text{(16)}\qquad f\Big(\sum_t F_t\Big)=\sum_t f(F_t), \qquad \text{(17)}\qquad f\Big(\prod_t F_t\Big)\subset\prod_t f(F_t).$$

*Jeśli funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna, to we wzorze* (17) *można znak inkluzji zastąpić przez znak równości.*

Dowód. Z określenia obrazu wynikają równoważności

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\sum_t F_t\Big) &\equiv \sum_x[(x\in\sum_t F_t)(y=f(x))]\\ &\equiv \sum_x[\sum_t(x\in F_t)(y=f(x))]\\ &\equiv \sum_t[\sum_x(x\in F_t)(y=f(x))]\\ &\equiv \sum_t(y\in f(F_t))\\ &\equiv y\in\sum_t f(F_t), \end{aligned}$$

które dowodzą wzoru (16).

Podobnie otrzymamy, powołując się na wzór (18) z § 1 (str. 42):

$$y\in f\Big(\prod_t F_t\Big)\equiv\sum_x[(x\in\prod_t F_t)(y=f(x))]\equiv\sum_x\prod_t[(x\in F_t)(y=f(x))]\to$$
$$\to\prod_t\sum_x[(x\in F_t)(y=f(x))]\equiv\prod_t(y\in f(F_t))\equiv y\in\prod_t f(F_t),$$

skąd wynika wzór (17).

Jeśli funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna, to stosując wzór (17) do funkcji odwrotnej $f^{-1}$ i zbiorów $f(F_t)$, otrzymamy:

$$f^{-1}\Big(\prod_t f(F_t)\Big)\subset\prod_t f^{-1}(f(F_t))=\prod_t F_t,$$

skąd na mocy wzoru (1') z § 7, str. 61, wynika, że

$$\prod_t f(F_t)\subset f\Big(\prod_t F_t\Big).$$

Ze względu na inkluzję (17) dowód twierdzenia 5 jest zakończony.

***Twierdzenie 6.*** *Jeśli* $G \in (2^Y)^T$ *i* $f \in Y^{\mathfrak{X}}$, *to*

$$(18)\quad f^{-1}\Big(\sum_t G_t\Big) = \sum_t f^{-1}(G_t), \qquad (19)\quad f^{-1}\Big(\prod_t G_t\Big) = \prod_t f^{-1}(G_t).$$

Dowód otrzymujemy z równoważności (wynikających z definicji przeciwobrazu, § 7, str. 60):

$$y \in f^{-1}\Big(\sum_t G_t\Big) \equiv f(y) \in \sum_t G_t \equiv \sum_t [f(y) \in G_t]$$
$$\equiv \sum_t [y \in f^{-1}(G_t)] \equiv y \in \sum_t f^{-1}(G_t);$$

$$y \in f^{-1}\Big(\prod_t G_t\Big) \equiv f(y) \in \prod_t G_t \equiv \prod_t [f(y) \in G_t]$$
$$\equiv \prod_t [y \in f^{-1}(G_t)] \equiv y \in \prod_t f^{-1}(G_t).$$

Wzory (16) i (18) stwierdzają *addytywność* operacji tworzenia obrazu i przeciwobrazu, wzór zaś (19) — *multyplikatywność* operacji tworzenia przeciwobrazu. Operacja tworzenia obrazu jest multyplikatywna tylko dla funkcji wzajemnie jednoznacznych.

PRZYKŁADY. Niech zbiór 1 będzie przestrzenią topologiczną (por. rozdział I, § 8).

1) *Jeśli* $F$ *jest funkcją, której wartościami są zbiory domknięte* (rozdział I, § 8, str. 25), *to iloczyn* $P=\Pi_t F_t$ *jest też zbiorem domkniętym.*

Dowód. Wobec $P \subset F_t$ mamy $\overline{P} \subset \overline{F}_t$ dla każdego $t$, skąd $\overline{P} \subset F_t$, gdyż $\overline{F}_t = F_t$. Wynika stąd, że $\overline{P} \subset \Pi_t F_t = P$, a więc $\overline{P} = P$, gdyż $P \subset \overline{P}$ na mocy aksjomatu (3) z rozdziału I, § 8, str. 25.

2) *Jeśli* $G$ *jest funkcją, której wartościami są zbiory otwarte, to suma* $S=\Sigma_t G_t$ *jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Zbiory $1-G_t$ są domknięte, zatem iloczyn $\Pi_t(1-G_t)$ jest też domknięty. Na mocy prawa de Morgana (f) zbiór $1-S$ jest więc domknięty, tzn. zbiór $S$ otwarty.

3) *Jeśli* $D$ *jest funkcją, której wartościami są dziedziny domknięte* (por. rozdział I, § 9, str. 35), *to zbiór* $S_0 = \overline{\Sigma_t D_t}$ *jest dziedziną domkniętą zawierającą wszystkie zbiory* $D_t$; *przy tym każda dziedzina domknięta, zawierająca wszystkie zbiory* $D_t$, *zawiera też zbiór* $S_0$.

Dowód. Oczywiście $S_0 \supset D_t$, skąd $\operatorname{Int}(S_0) \supset \operatorname{Int}(D_t)$, a zatem

$$(\mathrm{i})\qquad \overline{\operatorname{Int}(S_0)} \supset \overline{\operatorname{Int}(D_t)} = D_t.$$

Wobec dowolności $t$ wnosimy stąd na mocy twierdzenia 1, że

$$\overline{\operatorname{Int}(S_0)} \supset \sum_t D_t \quad \text{i} \quad \overline{\operatorname{Int}(S_0)} \supset \overline{\sum_t D_t} = S_0.$$



Z drugiej strony $\operatorname{Int}(S_0) \subset S_0$, a więc

$$\overline{\operatorname{Int}(S_0)} \subset \overline{S}_0 = S_0,$$

co dowodzi, że $S_0 = \overline{\operatorname{Int}(S_0)}$. Zbiór $S_0$ jest więc dziedziną domkniętą. Z (i) wynika, że $S_0$ zawiera każdy zbiór $D_t$.

Jeśli $Z$ jest dziedziną domkniętą i $Z \supset D_t$ dla każdego $t$, to

$$Z \supset \sum_t D_t, \quad \text{a więc} \quad Z = \overline{Z} \supset \overline{\sum_t D_t} = S_0.$$

4) *Jeśli* $D$ *jest funkcją, której wartościami są dziedziny domknięte, to zbiór* $P_0 = \overline{\operatorname{Int}(\Pi_t D_t)}$ *jest dziedziną domkniętą zawartą w każdym ze zbiorów* $D_t$; *przy tym każda dziedzina domknięta, zawarta w każdym ze zbiorów* $D_t$, *jest zawarta w* $P_0$.

Dowód. Przyjmijmy dla skrócenia $X = \Pi_t D_t$. Mamy wówczas

$$P_0 = \overline{\operatorname{Int}(X)} = X^{-\prime-\prime}, \quad \text{a więc} \quad \overline{\operatorname{Int}(P_0)} = X^{-\prime-\prime-\prime-\prime}.$$

Stosując wzór (15) z rozdziału I, § 8, str. 28, wnosimy, że

$$\overline{\operatorname{Int}(P_0)} = X^{-\prime-\prime} = P_0.$$

Zbiór $P_0$ jest zatem dziedziną domkniętą.

Ponieważ $X \subset D_t$, więc $\operatorname{Int}(X) \subset \operatorname{Int}(D_t)$ i $\overline{\operatorname{Int}(X)} \subset \overline{\operatorname{Int}(D_t)}$, tzn. $P_0 \subset \overline{\operatorname{Int}(D_t)} = D_t$ dla każdego $t$.

Wreszcie, jeśli $Z$ jest dziedziną domkniętą i $Z \subset D_t$ dla każdego $t$, to $Z \subset \Pi_t D_t = X$; zatem $\operatorname{Int}(Z) \subset \operatorname{Int}(X)$ i $Z = \overline{\operatorname{Int}(Z)} \subset \overline{\operatorname{Int}(X)} = P_0$.

ĆWICZENIA. 1. Niech $F \in (2^{\mathfrak{X}})^T$, $f \in \mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ oraz $\mathfrak{X} = \Sigma_t F_t$. Przyjmijmy $f_t = f|F_t$. Dowieść, że

$$f^{-1}(Y) = \sum_t f_t^{-1}(Y) \quad \text{dla każdego} \quad Y \subset \mathcal{Y}.$$

2. Dowieść, że

$$\Big(\sum_t F_t\Big) \times \Big(\sum_u G_u\Big) = \sum_{tu} (F_t \times G_u), \quad \Big(\prod_t F_t\Big) \times \Big(\prod_u G_u\Big) = \prod_{tu} (F_t \times G_u).$$

**§ 9. Działania na nieskończonych ciągach zbiorów.** Zajmiemy się obecnie szczególnym przypadkiem, gdy zbiór argumentów $T$ funkcji $F$ jest zbiorem liczb całkowitych nieujemnych, tj. gdy $F$ jest ciągiem zbiorów $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ Przez analogię z szeregami i iloczynami nieskończonymi liczb rzeczywistych piszemy

$$\sum_n F_n \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_n \quad \text{lub} \quad F_0 + F_1 + \ldots \quad \text{zamiast} \quad \sum_{t \in T} F_t,$$

$$\prod_n F_n \quad \text{lub} \quad \prod_{n=0}^{\infty} F_n \quad \text{lub} \quad F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \quad \text{zamiast} \quad \prod_{t \in T} F_t.$$

Wzory (iii) z § 8 dają natychmiast wzory następujące:

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \underset{x}{E}\, \Phi_n(x) = \underset{x}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x), \qquad \prod_{n=0}^{\infty} \underset{x}{E}\, \Phi_n(x) = \underset{x}{E} \prod_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x),$$

gdzie $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots$ jest ciągiem funkcyj zdaniowych i gdzie $\Sigma$ i $\Pi$ mają po lewej stronie wzorów znaczenie matematyczne, a po prawej — logiczne.

Obok nieskończonego dodawania i mnożenia rozważamy działania:

$\operatorname{Lim\,sup}_{n=\infty} F_n$ (granica górna ciągu $F_0, F_1, \ldots$),

$\operatorname{Lim\,inf}_{n=\infty} F_n$ (granica dolna ciągu $F_0, F_1, \ldots$),

określone jak następuje:

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty} F_n = \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_{n+k}, \qquad \operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty} F_n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} F_{n+k}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\operatorname{Lim\,sup} F_n$ jest zbiorem tych elementów $x$, które należą do $F_n$ dla nieskończenie wielu wartości $n$. Do $\operatorname{Lim\,inf} F_n$ należy zaś $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $F_n$ dla wszystkich wartości $n$ z wyjątkiem ewentualnie skończonej ilości.

Jak widać (por. str. **64**, wzór (1)),

$$(2)\qquad \operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty} F_n \subset \operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty} F_n.$$

Jeśli znak inkluzji we wzorze (2) można zastąpić znakiem równości, tj. jeśli górna i dolna granica są sobie równe, to ich wspólną wartość, oznaczoną symbolem

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} F_n,$$

nazywamy *granicą* ciągu $F_0, F_1, \ldots$ i mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny*.

Terminologia ta pozostaje w bliskim związku z terminologią teorii ciągów liczb rzeczywistych. Aby ten związek ustalić, wprowadzimy pojęcie *funkcji charakterystycznej* danego zbioru [1]).

Niech dany będzie zbiór 1. Funkcją charakterystyczną zbioru $X$ zawartego w 1 nazywamy funkcję $f_X$ określoną jak następuje:

$$(3)\qquad f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in X, \\ 0 & \text{gdy } x \in 1-X. \end{cases}$$

Łatwo się przekonać, że na to, aby ciąg zbiorów $F_0, F_1, \ldots$ (zawartych w danym zbiorze 1) był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby ciąg funkcyj charakterystycznych tych zbiorów był zbieżny do funkcji charakterystycznej zbioru $\operatorname{Lim}_{n=\infty} F_n$.

[1]) Por. Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, 2-e wydanie, Paryż 1936.



Pojęcie zbieżności ciągu zbiorów wykazuje nadto interesujące analogie z klasycznym pojęciem zbieżności ciągów liczbowych, o ile przyjmiemy różnicę symetryczną dwu zbiorów za odpowiednik bezwzględnej wartości różnicy dwu liczb [1]). Mianowicie następujące dwa warunki są równoważne:

$$(4)\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} (F_n \dot{-} A) = 0, \qquad (4')\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} F_n = A.$$

Dowód. Warunek (4) jest równoważny następującemu: dowolny element $x$ należy do $F_n \dot{-} A$ dla co najwyżej skończonej ilości $n$. Inaczej mówiąc: dla każdego $x$ istnieje takie $n_0$, że z $n > n_0$ wynika

$$(5)\qquad x \in F_n \equiv x \in A.$$

Załóżmy, że $x \in \operatorname{Lim\,sup} F_n$, tj. że $x$ należy do $F_n$ dla nieskończenie wielu $n$. Z (5) wynika, że $x \in A$ i że $x \in F_n$ dla wszystkich $n > n_0$, tj. że $x \in \operatorname{Lim\,inf} F_n$. Udowodniliśmy więc, że z (4) wynika

$$(6)\qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty} F_n \subset A \subset \operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty} F_n,$$

skąd równość (4') na mocy (2).

Na odwrót, jeśli spełniony jest warunek (6) i $x \in A$, to $x \in \operatorname{Lim\,inf} F_n$; a więc $x \in F_n$ poczynając od pewnego $n_0$. Jeśli zaś $x \in F_n$ dla $n > n_0$, to $x \in \operatorname{Lim\,sup} F_n$, a więc w myśl (6) $x \in A$. Warunki (6) pociągają więc za sobą równoważność (5) dla $n > n_0$.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że funkcja charakterystyczna (określona przez wzór (3)), spełnia warunki następujące:

(a) $f_0(x) \equiv 0$, (b) $f_1(x) \equiv 1$, (c) $f_{X'}(x) = 1 - f_X(x)$,

(d) $f_{AB}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$, (e) $f_{A-B}(x) = f_A(x) - f_{AB}(x)$.

2. Jeśli $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, to $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \operatorname{Lim}_{n=\infty} F_n$.

3. Jeśli $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, to $\prod_{n=1}^{\infty} F_n = \operatorname{Lim}_{n=\infty} F_n$.

4. Jeśli $F_0 = 1$, to

$$1 = (F_0 - F_1) + (F_1 - F_2) + (F_2 - F_3) + \ldots + \prod_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Jeśli ponadto $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, to

$$(F_1 - F_2) + (F_3 - F_4) + \ldots + \prod_{n=0}^{\infty} F_n = 1 - [(F_0 - F_1) + (F_2 - F_3) + \ldots].$$

[1]) Por. E. Marczewski, *Concerning the symmetric difference in the theory of sets and in Boolean algebras*, Colloquium Mathematicum **1** (1948), str. 200—202.

5. Jeśli $k_1<k_2<\ldots$, to

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty} F_n \subset \operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty} F_{k_n}, \qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty} F_{k_n} \subset \operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty} F_n.$$

6. Jeśli $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0$, to $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(B_{n-1}-B_n)]$, gdzie $B_0=1$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, gdzie $B_1=A_1$ i $B_n=A_n-(A_1+\ldots+A_{n-1})$ dla $n>1$.

8. Niech $\sum_n \prod_m B_{n,m} = A = \prod_m \sum_n C_{n,m}$ oraz $\sum_{n,m} C_{n,m+1} \subset \sum_{n,m} C_{n,m}$.

Wówczas $A = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_n$, gdzie $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} (B_{k,1}\cdot\ldots\cdot B_{k,n})(C_{1,k}+\ldots+C_{n,k})$.

9. Udowodnić, że:

(a) $\operatorname*{Lim\,inf} A'_n = (\operatorname*{Lim\,sup} A_n)'$, (b) $\operatorname*{Lim} A'_n = (\operatorname*{Lim} A_n)'$,

(c) $\operatorname*{Lim\,inf}(A_n \cdot B_n) = \operatorname*{Lim\,inf} A_n \cdot \operatorname*{Lim\,inf} B_n$,

(d) $\operatorname*{Lim\,sup}(A_n+B_n) = \operatorname*{Lim\,sup} A_n + \operatorname*{Lim\,sup} B_n$,

(e) $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset \operatorname*{Lim\,inf} A_n \subset \operatorname*{Lim\,sup} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$,

(f) $\operatorname*{Lim\,inf} A_n + \operatorname*{Lim\,inf} B_n \subset \operatorname*{Lim\,inf}(A_n+B_n)$,

(g) $\operatorname*{Lim\,sup}(A_n \cdot B_n) \subset \operatorname*{Lim\,sup} A_n \cdot \operatorname*{Lim\,sup} B_n$,

(h) $A \dotdiv \operatorname*{Lim\,inf} A_n \subset \operatorname*{Lim\,sup}(A \dotdiv A_n)$, $A \dotdiv \operatorname*{Lim\,sup} A_n \subset \operatorname*{Lim\,sup}(A \dotdiv A_n)$,

i wykazać, że inkluzje odwrotne nie zachodzą.

10. Funkcję $f$, która zbiorom przyporządkowuje zbiory, nazywamy *ciągłą*, jeśli dla każdego zbieżnego ciągu $F_1, F_2, \ldots$ zachodzi równość

$$f(\operatorname*{Lim}_{n=\infty} F_n) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f(F_n).$$

Wykazać ciągłość funkcji $X+Y$, $X\cdot Y$, $X'$ i ogólniej, ciągłość funkcji $\sum_n F_n$, $\prod_n F_n$ względem każdego składnika (czynnika).

11. Udowodnić następujący warunek zbieżności ciągu $F_n$: dla każdego ciągu par $\langle m_i, n_i\rangle$ takiego, że $\lim_{i=\infty} m_i = \lim_{i=\infty} n_i = \infty$, jest

$$\prod_i (F_{m_i} \dotdiv F_{n_i}) = 0. \qquad \text{[Marczewski].}$$



**§ 10. Produkty uogólnione.** Podobnie jak w § 8, niech $F$ będzie funkcją, której wartościami są podzbiory zbioru $\mathfrak{X}$, a której zbiorem argumentów jest zbiór $T \neq 0$.

***Definicja.*** *Produkt* $\underset{t\in T}{P} F_t$ (produkt zbiorów $F_t$ dla $t \in T$) jest to zbiór wszystkich funkcji $f$, dla których $T$ jest zbiorem argumentów i które spełniają warunek $f(t) \in F_t$ dla każdego $t \in T$. Znaczy to, że

$$\underset{t\in T}{P} F_t = \underset{f\in\Phi}{E} \prod_{t\in T} [f(t) \in F_t], \quad \text{gdzie} \quad \Phi = \mathfrak{X}^T.$$

Jeśli $T=\mathfrak{J}=\{1,2,3,\ldots\}$, to piszemy $\overset{\infty}{\underset{n=1}{P}} F_n$ zamiast $\underset{t\in\mathfrak{J}}{P} F_t$. Elementami tego produktu są ciągi:

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{z}^{(n)}, \ldots), \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{z}^{(n)} \in F_n.$$

Jeśli wszystkie czynniki $F_t$ produktu są identyczne: $F_t = Y$, to mamy $\underset{t\in T}{P} F_t = Y^T$. Symbol $\underset{t\in T}{P} F_t$ oznacza bowiem w tym przypadku zbiór wszystkich funkcji, które mają $T$ jako zbiór argumentów, a których wartości należą do $Y$.

W szczególności więc, jeśli $T=\mathfrak{J}$, to $Y^{\mathfrak{J}}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach należących do zbioru $Y$.

Podobnie, jeśli $T=\{1,2,\ldots,n\}$, to $Y^T$ jest zbiorem ciągów $n$ elementowych o wyrazach należących do $Y$. Produkt ten oznaczyliśmy (por. str. 56) symbolem $Y^n$; wykładnik $n$ zastępuje tu więc symbol $\{1,2,\ldots,n\}$.

UWAGA. Niech $T=\{1,2\}$. Produkt uogólniony $\underset{t\in T}{P} F_t$ i produkt $F_1 \times F_2$ nie są identyczne; pierwszy ma jako elementy ciągi o dwu wyrazach, drugi — pary uporządkowane, a te dwa pojęcia są różne (ob. uwaga, str. 56). W praktyce jednak rozróżnianie między tymi dwoma rodzajami produktów jest nieistotne, ze względu na możność wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania każdej parze uporządkowanej $\langle x,y\rangle$ należącej do $F_1\times F_2$, ciągu $\{\langle 1,x\rangle, \langle 2,y\rangle\}$ należącego do $\underset{t\in T}{P} F_t$.

*Jeśli* $F_{t_0}=0$ *dla jakiegoś* $t_0$, *to* $\underset{t\in T}{P} F_t = 0$.

Istotnie, jeśli $f \in \underset{t\in T}{P} F_t$, to $f(t_0) \in F_{t_0}$, a więc $F_{t_0} \neq 0$.

Zajmiemy się obecnie odwróceniem tego twierdzenia:

***Twierdzenie 1.*** *Jeśli zbiór* $T$ *ma skończoną ilość elementów i* $F_t \neq 0$ *dla każdego* $t \in T$, *to* $\underset{t\in T}{P} F_t \neq 0$.

Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby elementów $T$. Jeśli $T$ ma jeden element, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy

zatem, że zachodzi ono dla przypadku, gdy $T$ ma $n$ elementów; niech $T_1 = T + \{a\}$, gdzie $a$ non $\epsilon T$. Załóżmy, że $F_t \neq 0$ dla $t \epsilon T_1$; wykażemy, że wynika stąd $\prod_{t \epsilon T_1} F_t \neq 0$. Istotnie, założenie indukcyjne daje $\prod_{t \epsilon T} F_t \neq 0$; niech więc $f \epsilon \prod_{t \epsilon T} F_t$. Niech $t_0 \epsilon F_a$. Zbiór $f_1 = f + \{\langle a, t_0 \rangle\}$ jest funkcją należącą do $\prod_{t \epsilon T_1} F_t$, co dowodzi, że produkt ten jest niepusty.

Twierdzenie 1 obowiązuje również dla dowolnego $T$, jeżeli wszystkie czynniki produktu są równe (por. str. 60, ćwicz. 2):

***Twierdzenie 2.*** *Jeśli* $Y \neq 0$, *to* $Y^T \neq 0$.

W ogólnym przypadku dowód, że produkt zbiorów niepustych jest sam niepusty, wymaga użycia pewnika wyboru:

°***Twierdzenie 3.*** *Jeśli* $F_t \neq 0$ *dla* $t \epsilon T$, *to* $\prod_{t \epsilon T} F_t \neq 0$ [1]).

Dowód. Z pewników IV i V (lub prościej z pewnika VII) wnosimy z łatwością, że istnieje zbiór $Z$, którego elementami są wszystkie produkty $\{t\} \times F_t$, gdzie $t \epsilon T$.

Jeśli $t_1 \neq t_2$, to zbiory $\{t_1\} \times F_{t_1}$ i $\{t_2\} \times F_{t_2}$ są rozłączne, gdyż pierwszy składa się z par o poprzedniku $t_1$, a drugi z par o poprzedniku $t_2$. Produkty $\{t\} \times F_t$ są nadto niepuste, gdyż z założenia $F_t \neq 0$ dla $t \epsilon T$.

$Z$ jest zatem zbiorem, którego elementami są zbiory niepuste i rozłączne; w myśl pewnika wyboru (str. 48) istnieje zbiór $f$, który z każdym produktem $\{t\} \times F_t$ ma po jednym elemencie wspólnym. Zbiór $f$ składa się więc z par $\langle t, a_t \rangle$, gdzie $t \epsilon T$ i $a_t \epsilon F_t$, przy czym każdemu $t \epsilon T$ odpowiada jedna taka para ze zbioru $f$. Wynika stąd, że $f$ jest funkcją i że $f(t) = a_t$ dla $t \epsilon T$. Funkcja $f$ należy zatem do $\prod_{t \epsilon T} F_t$, c. b. d. o.

Załóżmy w szczególności, że $\boldsymbol{T}$ jest rodziną zbiorów niepustych i przyjmijmy $F_T = T$ dla $T \epsilon \boldsymbol{T}$. Z twierdzenia 3 wynika, że $\prod_{T \epsilon \boldsymbol{T}} F_T \neq 0$. Otrzymujemy zatem

°***Twierdzenie 4*** *(Ogólna zasada wyboru). Dla każdej rodziny* $\boldsymbol{T}$ *zbiorów niepustych istnieje taka funkcja* $g$, *że*

$$g(T) \epsilon T \quad \text{dla} \quad T \epsilon \boldsymbol{T}.$$

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że twierdzenie 3 pociąga za sobą pewnik wyboru, a więc jest mu równoważne.

[1]) B. Russell przyjął twierdzenie 3 za aksjomat zamiast pewnika wyboru. Aksjomat ten nazwał on aksjomatem multyplikatywnym. Por. A. N. Whitehead i B. Russell, *Principia Mathematica*, tom 1, 2-e wydanie, Cambridge 1925, str. 536.



2. Niech $F$, $G$ i $H$ będą trzema funkcjami takimi, że $F_t \neq 0$, $G_t \neq 0$ i $H_t \neq 0$ dla wszystkich $t \epsilon T$. Udowodnić przy pomocy pewnika wyboru następujące twierdzenie. Jeśli

$$\prod_{t \epsilon T} F_t = \prod_{t \epsilon T} G_t + \prod_{t \epsilon T} H_t,$$

przy czym oba składniki tej sumy są rozłączne, to istnieje dokładnie jeden taki element $t_0 \epsilon T$, że $F_{t_0} = G_{t_0} + H_{t_0}$, $G_{t_0} \cdot H_{t_0} = 0$ i $F_t = G_t = H_t$ dla wszystkich $t \neq t_0$.

## § 11. Przestrzenie: $\mathcal{E}^n$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$ i inne.

1. *Przestrzeń euklidesową n-wymiarową* definiujemy jako zbiór ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach rzeczywistych. Każdy ciąg $n$-elementowy jest funkcją $f$ określoną na zbiorze $\{1, \ldots, n\}$, której wartości $f(1), \ldots, f(n)$ są rzeczywiste (por. str. 56). W myśl ustalonego wyżej znakowania (str. 73) przestrzeń euklidesową $n$-wymiarową oznaczamy symbolem $\mathcal{E}^n$.

2. *Zbiór Cantora* $\mathcal{C}$ jest to zbiór liczb rzeczywistych

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, \tag{1}$$

gdzie $c_i = 0$ lub $c_i = 2$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Każdej liczbie $c \epsilon \mathcal{C}$ przyporządkować możemy w sposób wzajemnie jednoznaczny ciąg $f(1), f(2), \ldots$ określony wzorem $f(i) = c_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Zbiór $\mathcal{C}^*$ tych ciągów jest to więc zbiór $\{0,2\}^{\mathcal{J}}$. W praktyce $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ można zazwyczaj identyfikować.

Zbiór Cantora — jak każdy podzbiór zbioru $\mathcal{E}$ wszystkich liczb rzeczywistych — można uważać za przestrzeń topologiczną (por. rozdział I, § 8, str. 25) przyjmując, że domknięcie zbioru $X \subset \mathcal{C}$ jest sumą zbioru $X$ i zbioru jego punktów skupienia (por. rozdział I, § 8, str. 26).

3. Podobnie zbiór $\mathcal{N}$ *wszystkich liczb niewymiernych* przedziału 01 można identyfikować ze zbiorem $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, tj. ze zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych. Istotnie, każdej liczbie niewymiernej $x \epsilon \mathcal{N}$ odpowiada ciąg liczb naturalnych wyznaczonych przez rozwinięcie $x$ na ułamek łańcuchowy

$$x = \frac{1}{|x^{(1)}} + \frac{1}{|x^{(2)}} + \frac{1}{|x^{(3)}} + \ldots,$$

przy czym:

1° różnym liczbom niewymiernym odpowiadają różne ciągi,

2° każdy ciąg nieskończony liczb naturalnych przyporządkowany jest pewnej liczbie niewymiernej.

4. Zbiór $2^{\mathcal{J}}$, tj. *rodzinę podzbiorów zbioru liczb naturalnych*, możemy zarytmetyzować, przyporządkowując każdemu zbiorowi $X \in 2^{\mathcal{J}}$ punkt $c$ zbioru $\mathcal{C}$ określony jak następuje: w rozwinięciu (1) przyjmujemy, że

$$c_i = \begin{cases} 2 & \text{gdy } i \in X, \\ 0 & \text{gdy } i \text{ non } \in X. \end{cases}$$

Jest to przekształcenie wzajemnie jednoznaczne zbioru $2^{\mathcal{J}}$ w zbiór $\mathcal{C}$. Z pomocą tego przekształcenia możemy przenieść do zbioru $2^{\mathcal{J}}$ topologię przestrzeni $\mathcal{C}$.

5. Podobnie zbiór $2^{\mathcal{J}^2}$, tj. *zbiór wszystkich relacyj zachodzących między liczbami naturalnymi*, można zarytmetyzować. Wystarczy w tym celu oznaczyć przez $\varphi(m,n)$ wzajemnie jednoznaczne przekształcenie zbioru $\mathcal{J}^2$ w $\mathcal{J}$ (ob. § 6, str. 59, przykład) i przyporządkować relacji $R$ (zawartej w $\mathcal{J}^2$) punkt $c$ określony przez warunek:

$$c_{\varphi(m,n)} = \begin{cases} 2 & \text{gdy } mRn, \\ 0 & \text{gdy } m \text{ non } Rn. \end{cases}$$

Jest to — podobnie jak poprzednio — wzajemnie jednoznaczne przekształcenie zbioru $2^{\mathcal{J}^2}$ w $\mathcal{C}$.

Każdej rodzinie $\boldsymbol{A}$ relacyj odpowiada przy tym przekształceniu pewien podzbiór $Z_A$ zbioru Cantora; $Z_A$ uważać można za odpowiednik geometryczny rodziny $\boldsymbol{A}$.

Podobnie jak poprzednio możemy przenieść topologię przestrzeni $\mathcal{C}$ do zbioru $2^{\mathcal{J}^2}$. W tym celu określamy domknięcie rodziny relacyj $\boldsymbol{A}$ jako równe przeciwobrazowi domknięcia zbioru $Z_A$ (to ostatnie pojęcie jest określone, gdyż $Z_A$ jest podzbiorem $\mathcal{C}$). Inaczej mówiąc, zbiór $\boldsymbol{A}$ relacyj uważamy za domknięty, gdy zbiór $Z_A$ jest domknięty. W tym sensie mówić będziemy o przestrzeni relacyj $2^{\mathcal{J}^2}$.

Zasadnicze znaczenie mają tu twierdzenia następujące, których łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi.

$\alpha$) Zbiór $\underset{c}{E}(c_i = 2)$ jest domknięty i otwarty (w przestrzeni $\mathcal{C}$).

$\beta$) Zbiór $\underset{R}{E}(mRn)$ jest domknięty i otwarty w przestrzeni $2^{\mathcal{J}^2}$ (przy stałych $m$ i $n$).

ĆWICZENIA. 1. Niech $C_n$ będzie zbiorem ciągów $f$ o wyrazach 0 lub 1 takich, że $f(n)=0$. Niech $C_n^0 = C_n$ i $C_n^1 = \{0,1\}^{\mathcal{J}} - C_n$. Wykazać, że dla każdego ciągu $i_n$ zer i jedynek zachodzi nierówność $\prod_{n=1}^{\infty} C^{i_n} \neq 0$. [Marczewski].

2. Zbadać, czy wynik uzyskany w ćwiczeniu 1 pozostaje w mocy, jeśli $C_n$ zastąpimy zbiorem $C_n^*$ tych funkcji $f \in C_n$, które dla skończonej tylko liczby argumentów przyjmują wartość 0.



3. Uogólniając pojęcie zbiorów niezależnych (ob. str. 22), nazywamy rodzinę $\boldsymbol{K}$ *przeliczalnie niezależną*, jeśli dla każdego ciągu parami różnych zbiorów $X_n$ należących do $\boldsymbol{K}$ i dla każdego ciągu $i_n$ wskaźników 0 lub 1 zachodzi nierówność $\Pi_n X_n^{i_n} \neq 0$ [1]). Wynik uzyskany w ćwiczeniu 1 stwierdza więc, że rodzina $\boldsymbol{K}$ złożona ze wszystkich zbiorów $C_n$ jest przeliczalnie niezależna.

Oznaczmy dla $t \in \mathcal{C}$ przez $S^t$ zbiór tych ciągów $f \in \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, które zawierają $t$ jako jeden z wyrazów (inaczej mówiąc $f \in S^t \equiv \Sigma_k [f(k)=t]$. Wykazać, że rodzina $\underset{X}{E} \sum_t (X = S^t)(t \in \mathcal{C})$ jest przeliczalnie niezależna. [Marczewski].

**§ 12. Zastosowania do rodzin zbiorów.** I. *Zbiory borelowskie.* Niech $\mathfrak{R}$ oznacza klasę wszystkich rodzin $\boldsymbol{R}$ podzbiorów danej przestrzeni (np. przestrzeni $\mathcal{E}$), które spełniają następujące warunki:

1° jeśli zbiór $F$ jest domknięty i $\boldsymbol{R} \in \mathfrak{R}$, to $F \in \boldsymbol{R}$,

2° jeśli $X_n \in \boldsymbol{R} \in \mathfrak{R}$ dla $n=1,2,\ldots$, to

$$(1) \qquad \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n\right) \in \boldsymbol{R} \quad \text{i} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) \in \boldsymbol{R}$$

(są to warunki tzw. *przeliczalnej multyplikatywności i addytywności*).

Pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że $[P(\mathfrak{R})] \in \mathfrak{R}$.

Rodzina $P(\mathfrak{R})$ jest więc najmniejszą z rodzin należących do $\mathfrak{R}$. Nazywamy ją rodziną podzbiorów *borelowskich* (danej przestrzeni) [2]).

Zbiory domknięte nazywamy zbiorami borelowskimi klasy zerowej, tj. klasy $\boldsymbol{F}_0$. Każdy zbiór postaci

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n + \ldots, \quad \text{gdzie} \quad F_n \in \boldsymbol{F}_0,$$

nazywamy zbiorem pierwszej klasy (klasy $\boldsymbol{F}_1$), czyli zbiorem $\boldsymbol{F}_\sigma$.

Do klasy $\boldsymbol{F}_2$ zaliczamy zbiory (zwane zbiorami $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$) postaci

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \cdot \ldots, \quad \text{gdzie } X_n \in \boldsymbol{F}_1.$$

Ogólnie do klasy $\boldsymbol{F}_{2n}$, względnie $\boldsymbol{F}_{2n+1}$, zaliczamy zbiory postaci $\prod_{m=1}^{\infty} X_m$, względnie $\sum_{m=1}^{\infty} X_m$, gdzie $X_m \in \boldsymbol{F}_{2n-1}$, względnie $X_m \in \boldsymbol{F}_{2n}$.

Klasy te oznaczamy symbolami:

$$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_\sigma, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta}, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta\sigma}, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta\sigma\delta}, \ldots \text{ [3]}).$$

---

[1]) Por. E. Marczewski, *Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure*, Fundamenta Mathematicae **35** (1948), str. 13—28. Ważne przykłady klas niezależnych skonstruował A. Tarski; por. jego pracę *Ideale in vollständigen Mengenkörpern I*, Fundamenta Mathematicae **32** (1939), str. 45—63.

[2]) Od nazwiska współczesnego matematyka francuskiego E. Borela, który pierwszy je rozważał.

[3]) Klasy te nie wyczerpują rodziny zbiorów borelowskich. Por. rozdział V, § 4.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że:

(a) *iloczyn dwóch zbiorów* $\boldsymbol{F}_\sigma$ *jest zbiorem* $\boldsymbol{F}_\sigma$,

(b) *suma ciągu nieskończonego zbiorów* $\boldsymbol{F}_\sigma$ *jest zbiorem* $\boldsymbol{F}_\sigma$,

(c) *produkt dwóch zbiorów* $\boldsymbol{F}_\sigma$ *w* $\mathcal{E}$ *jest zbiorem* $\boldsymbol{F}_\sigma$ *w* $\mathcal{E}^2$.

Udowodnić analogiczne własności dla zbiorów $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$ i dla wyższych klas borelowskich.

*Wskazówka.* Zastosować wzór (e) z § 8, str. 64, i ćwicz. 2, str. 69.

2. Dowieść, że *każdy zbiór otwarty* (w $\mathcal{E}^n$) *jest zbiorem* $\boldsymbol{F}_\sigma$.

*Wskazówka.* Niech $G$ będzie zbiorem otwartym, $F$ zaś jego uzupełnieniem. Niech

$$F_m = \mathop{E}_{x} \prod_{y \in F} [|x-y| \geqslant 1/m],$$

tj. (por. str. 63, wzór (iii))

$$F_m = \prod_{y \in F} K(y,1/m), \quad \text{gdzie} \quad K(y,1/m) = \mathop{E}_{x} [|x-y| \geqslant 1/m].$$

$K(y,1/m)$ oznacza więc zbiór punktów leżących na zewnątrz kuli o promieniu $1/m$ i o środku $y$, lub na jej powierzchni.

3. Dowieść, że rzut ortogonalny zbioru domkniętego ograniczonego (położonego w $\mathcal{E}^n$) jest domknięty. Wyprowadzić stąd, że rzut zbioru $\boldsymbol{F}_\sigma$ jest $\boldsymbol{F}_\sigma$ i (co jest równoważne, por. str. 54, tw. 1) że:

*jeśli zbiór* $\mathop{E}_{xy} \Phi(x,y)$ *jest* $\boldsymbol{F}_\sigma$, *to* $\mathop{E}_{x} \sum_{y} \Phi(x,y)$ *też jest* $\boldsymbol{F}_\sigma$.

*Wskazówka.* Oprzeć się na ćw. 2, str. 55, i na następującym rozkładzie zbioru domkniętego nieograniczonego:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} F \cdot S_m,$$

gdzie $S_m$ oznacza kulę o środku 0 i promieniu $m$.

4—6. Zbiory borelowskie określiliśmy biorąc za punkt wyjścia zbiory domknięte. Można jednak z łatwością dowieść (opierając się na ćw. 2), że zbiory borelowskie tworzą najmniejszą rodzinę $\boldsymbol{R}$ zawierającą wszystkie zbiory otwarte i spełniającą warunki $2^0$ (dla $X_n \in \boldsymbol{R}$).

Analogicznie do klas $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_\sigma, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta}, \ldots$ rozważamy: klasę $\boldsymbol{G}$ zbiorów otwartych, klasę $\boldsymbol{G}_\delta$ iloczynów ciągów zbiorów otwartych, klasę $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$ sum ciągów zbiorów $\boldsymbol{G}_\delta$ itd. Są to — jak łatwo sprawdzić — klasy uzupełnień zbiorów $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$, $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$ itd.

Udowodnić twierdzenia *dwoiste względem* (a) *i* (b); udowodnić, że *każdy zbiór domknięty jest zbiorem* $\boldsymbol{G}_\delta$, *produkt dwóch zbiorów* $\boldsymbol{G}_\delta$ *w* $\mathcal{E}$ *jest zbiorem* $\boldsymbol{G}_\delta$ *w* $\mathcal{E}^2$.

7. Dowieść, że *jeśli* $X=Y=\mathcal{E}$ (lub ogólniej $X=\mathcal{E}^k$, $Y=\mathcal{E}^l$) *i jeśli zbiór* $\mathop{E}_{xy} \Phi(x,y)$ *jest* $\boldsymbol{G}_\delta$, *to i zbiór* $\mathop{E}_{x} \prod_{y} \Phi(x,y)$ *jest* $\boldsymbol{G}_\delta$.



Szacowanie klasy borelowskiej danego zbioru może być częstokroć uzyskane bezpośrednio z definicji tego zbioru zapisanej w znakowaniu logicznym (tj. przy użyciu działań logicznych $+, \cdot, ', \Sigma, \Pi$) i zastosowaniu wzorów (1), § 9, str. 70 [1]).

Jako przykład, podamy dowód twierdzenia orzekającego, że zbiór punktów zbieżności ciągu funkcji ciągłych jest $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$.

Zapisujemy w tym celu warunek (Cauchy'ego) na zbieżność ciągu liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$:

$$\prod_{k} \sum_{m} \prod_{i} \left[|a_{m+i} - a_m| \leqslant \frac{1}{k}\right].$$

Wynika stąd, że zbiorem $Z$ punktów zbieżności ciągu funkcji ciągłych $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ jest

$$\text{(i)} \qquad Z = \mathop{E}_{x} \prod_{k} \sum_{m} \prod_{i} \left[|f_{m+i}(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}\right].$$

Przyjmując

$$Z_{k,m,i} = \mathop{E}_{x} \left[|f_{m+i}(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}\right],$$

wnosimy na mocy wzorów (1), § 9, str. 70, że

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} Z_{k,m,i}.$$

Ponieważ zaś zbiór $Z_{k,m,i}$ (przy ustalonych wskaźnikach) jest domknięty (ze względu na ciągłość rozważanych funkcyj), przeto $Z$ jest $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$.

Wzory (1), § 9, str. 70 prowadzą do wniosku następującego: niech dana będzie funkcja zdaniowa $\Phi_{i,j,\ldots}(x)$ zależna od skończonego układu parametrów $i,j,\ldots$ przebiegających liczby naturalne; niech zbiór

$$Z_{i,j,\ldots} = \mathop{E}_{x} \Phi_{i,j,\ldots}(x)$$

będzie *borelowski*; wówczas *zbiór*

$$\text{(ii)} \qquad A = \mathop{E}_{x} \mathop{\Omega}_{i} \mathop{\Omega}_{j} \ldots \Phi_{i,j,\ldots}(x), \quad \textit{gdzie} \quad \Omega = \Sigma \textit{ lub } \Pi,$$

*jest również zbiorem borelowskim.*

Znając klasę borelowską zbioru $Z_{i,j,\ldots}$, możemy z łatwością na podstawie cytowanych wzorów obliczyć klasę borelowską zbioru $A$.

---

[1]) K. Kuratowski, *Évaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, Fundamenta Mathematicae **17** (1931), str. 249—272.

Funkcja zdaniowa $\Phi_{i,j,\ldots}(x)$ dana jest zazwyczaj jako wynik działań elementarnych $(+, \cdot, '$ itd.$)$ [1]) wykonanych na prostszych funkcjach zdaniowych; dla tych ostatnich zaś zbiór argumentów, które je spełniają jest zwykle borelowski niskiej klasy (domknięty lub otwarty).

W szczególności w przykładzie (i) mamy

$$\Phi_{i,k,m}(x) \equiv \left[|f_{m+i}(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}\right].$$

II. *Zbiory rzutowe* [2]). Oznaczmy przez $\boldsymbol{B}^{(m)}$ rodzinę podzbiorów borelowskich przestrzeni $\mathcal{E}^m$. Rodzinę tę nazywamy zerową klasą podzbiorów rzutowych przestrzeni $\mathcal{E}^m$; niech $\boldsymbol{L}_0^{(m)} = \boldsymbol{B}^{(m)}$. Do pierwszej klasy rzutowej przestrzeni $\mathcal{E}^m$, tj. do rodziny $\boldsymbol{L}_1^{(m)}$, zaliczamy rzuty (prostokątne) na $\mathcal{E}^m$ zbiorów należących do rodziny $\boldsymbol{L}_0^{(m+1)}$. Do klasy $\boldsymbol{L}_2^{(m)}$ należą zbiory postaci $\mathcal{E}^m - X$, gdzie $X \in \boldsymbol{L}_1^{(m)}$.

Ogólnie: do klasy $\boldsymbol{L}_{2n+1}^{(m)}$ zaliczamy rzuty na przestrzeń $\mathcal{E}^m$ zbiorów klasy $\boldsymbol{L}_{2n}^{(m+1)}$, do klasy zaś $\boldsymbol{L}_{2n}^{(m)}$ zbiory postaci $\mathcal{E}^m - X$, gdzie $X \in \boldsymbol{L}_{2n-1}^{(m)}$.

Niech $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ będzie funkcją zdaniową $n$ zmiennych rzeczywistych. Mówimy, że funkcja ta jest rzutowa, jeśli zbiór $\underset{x_1 \ldots x_n}{E}\, \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jest rzutowy.

***Twierdzenie*** [3]). *Jeśli funkcja $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jest rzutowa, to zbiór*

$$\underset{x_1 \ldots x_k}{E}\ \underset{x_{k+1}}{\Omega}\ \underset{x_{k+2}}{\Omega} \ldots \underset{x_n}{\Omega} \Phi(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{gdzie} \quad \Omega = \Sigma \text{ lub } \Pi,$$

*jest również rzutowy.*

Istotnie, na mocy tw. 1, § 5, str. 54, zbiór $E_x \Sigma_y \Phi(x,y)$ jest rzutem zbioru $E_{xy} \Phi(x,y)$ na oś $X$, zaś

$$\underset{x}{E} \prod_y \Phi(x,y) = \{\underset{x}{E} \sum_y \Phi'(x,y)\}'.$$

Twierdzenie powyższe wskazuje na szeroki zasięg zbiorów rzutowych: każdy zbiór, dający się określić z pomocą działań algebry logiki $(+, \cdot, ')$ oraz kwantyfikatorów $\Sigma_x$ i $\Pi_x$ (w szczególności $\Sigma_n$ i $\Pi_n$) wykonanych na rzutowych funkcjach zdaniowych, jest rzutowy. Jak już wspominaliśmy, funkcje zdaniowe występujące w definicjach (po kwantyfikatorach) są zazwyczaj rzutowe klasy 0.

[1]) Działanie $p \to q$ zastępujemy przez $p' + q$, por. rozdział I, § 1, str. 4.

[2]) Zbiory te wprowadził N. Łuzin (1883—1950) w roku 1925, ob. Comptes Rendus **160**, str. 1570. Teoria zbiorów rzutowych jest szczegółowo przedstawiona w monografii K. Kuratowskiego, *Topologie I* (2-e wydanie), rozdział III. Por. też N. Łuzin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Collection Borel, Paryż 1930, oraz W. Sierpiński, *Les ensembles projectifs et analytiques*, Paryż 1950.

[3]) Ob. K. Kuratowski i A. Tarski, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fundamenta Mathematicae **17** (1931), str. 240—248.



PRZYKŁADY. (a) Niech dany będzie zbiór domknięty $F$ położony na płaszczyźnie (lub ogólniej $F \subset \mathcal{E}^n$). Mówimy, że punkt $p \in F$ jest osiągalny prostoliniowo, jeśli istnieje odcinek $pq$, który poza punktem $p$ nie ma żadnego punktu wspólnego z $F$. Oznaczając przez $A$ zbiór punktów osiągalnych zbioru $F$ (a przez $|p-q|$ odległość $p$ od $q$), mamy więc

$$A = F \cdot \underset{p}{E} \sum_q \{(q \neq p) \cdot \prod_r [(|p-r| + |r-q| = |p-q|)(r \neq p) \to (r \in F)']\}$$

$$= F \cdot \underset{p}{E} \sum_q \prod_r \{(q \neq p) \cdot [(|p-r| + |r-q| \neq |p-q|) + (r = p) + (r \in F)']\}.$$

*Zbiór $A$ jest rzutowy*, ponieważ każda z funkcyj zdaniowych

$$\Gamma(p,q) \equiv (q = p), \quad \Delta(p,q,r) \equiv [|p-r| + |r-q| = |p-q|] \quad \text{i} \quad \Delta(r) \equiv (r \in F)$$

jest rzutowa (zmienne $p$, $q$ i $r$ zastępują, oczywiście, układy zmiennych rzeczywistych).

Opierając się na powyżej podanej definicji zbioru $A$, oszacujemy jego klasę; okażemy mianowicie, że jest to zbiór *pierwszej klasy rzutowej*.

Ponieważ każdy ze zbiorów

$$\underset{pq}{E}\, \Gamma(p,q), \quad \underset{pqr}{E}\, \Delta(p,q,r) \quad \text{i} \quad \underset{r}{E}\, \Delta(r)$$

jest domknięty, więc zbiór $E_{pqr} \Phi(p,q,r)$, gdzie

$$\Phi(p,q,r) \equiv (q \neq p) \cdot [(|p-r| + |r-q| \neq |p-q|) + (r = p) + (r \in F)'],$$

jest zbiorem $\boldsymbol{G}_\delta$, jako iloczyn zbioru otwartego przez sumę zbioru otwartego, domkniętego i otwartego; mamy bowiem:

$$\underset{pqr}{E}\, \Phi(p,q,r) = \underset{pqr}{E}\, (q \neq p) \cdot [\underset{pqr}{E}\, (|p-r| + |r-q| \neq |p-q|) + \underset{pqr}{E}\, (r = p) + \underset{pqr}{E}\, (r \in F)'].$$

Zbiór $E_{pq} \Pi_r \Phi(p,q,r)$ jest $\boldsymbol{G}_\delta$ (por. ćw. 7) i wreszcie zbiór

$$A = \underset{p}{E} \sum_q \Psi(p,q), \quad \text{gdzie} \quad \Psi(p,q) \equiv \prod_r \Phi(p,q,r),$$

jest pierwszej klasy rzutowej, jako rzut zbioru $\boldsymbol{G}_\delta$ [1]).

[1]) Z rozumowania powyższego nie wynika, że oszacowanie nasze jest *ostre*, tj. że nie można w tym oszacowaniu obniżyć klasy. W danym przypadku oszacowanie jest ostre, istnieje bowiem zbiór domknięty $F \subset \mathcal{E}^3$, dla którego zbiór $A$ jest nieborelowski (udowodnili to O. Nikodym, Fundamenta Mathematicae **7**, 1925, str. 250, i P. Urysohn, Proceedings K. Akademie van Wetenschappen **28**, 1925, str. 984).

(b) Niech $\mathfrak{R}$ oznacza rodzinę relacyj $R$ zachodzących między liczbami naturalnymi (tj. $\mathfrak{R}\subset 2^{\mathcal{J}^2}$) o własności następującej: istnieje taki ciąg $n_1, n_2, \ldots$, że $n_{k+1} R n_k$; tj.

$$\mathfrak{R} = \underset{R}{E} \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k} [\mathfrak{z}^{(k+1)} R \mathfrak{z}^{(k)}],$$

gdzie zmienna $\mathfrak{z}$ przebiega przestrzeń ciągów liczb naturalnych, lub — co na jedno wychodzi — zbiór $\mathcal{N}$ liczb niewymiernych (ob. § 11, przykład 3, str. 75).

Ponieważ

$$[\mathfrak{z}^{(k+1)} R \mathfrak{z}^{(k)}] \equiv \sum_{ij} [(\mathfrak{z}^{(k+1)} = i)(\mathfrak{z}^{(k)} = j)(iRj)],$$

zbiory zaś

$$\underset{\mathfrak{z}}{E}(\mathfrak{z}^{(k)} = j) \quad \text{i} \quad \underset{R}{E}(iRj)$$

są otwarte (pierwszy w przestrzeni $\mathcal{N}$, drugi — w $2^{\mathcal{J}^2}$, por. str. 76, $\beta$), więc i zbiór

$$Z_{ijk} = \underset{\mathfrak{z}R}{E} [(\mathfrak{z}^{(k+1)} = i)(\mathfrak{z}^{(k)} = j)(iRj)]$$

jest otwarty (jako iloczyn trzech zbiorów otwartych).

Również jest więc otwarty zbiór

$$W_k = \underset{\mathfrak{z}R}{E} [\mathfrak{z}^{(k+1)} R \mathfrak{z}^{(k)}] = \sum_{i,j=1}^{\infty} Z_{ijk}.$$

Zbiór

$$\underset{\mathfrak{z}R}{E} \prod_{k} [\mathfrak{z}^{(k+1)} R \mathfrak{z}^{(k)}] = \prod_{k=1}^{\infty} W_k$$

jest zatem zbiorem $G_\delta$, a zbiór $\mathfrak{R}$ — jako jego rzut — *jest zbiorem rzutowym pierwszej klasy*.

W rozdziale V udowodnimy, że zbiór $\mathfrak{R}$ nie jest borelowski; da to interesujące zastosowania w teorii dobrego uporządkowania.

UWAGA. Rozważane powyżej pojęcie zbioru borelowskiego wprowadzone zostało przy użyciu pojęć topologicznych (zbioru domkniętego lub otwartego). Pojęcie to można jednak wprowadzić na gruncie ogólnej teorii mnogości. Mianowicie, dowolną rodzinę zbiorów nazywamy borelowską, jeśli jest ona przeliczalnie addytywna i multyplikatywna (por. (1), str. 77) [1].

[1]) Por. też F. Hausdorff, *Mengenlehre*, § 18 (Borelsche Systeme). Rodziny borelowskie znalazły ostatnio ważne zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa.



***§ 13. Operacja** ($\mathcal{A}$). Uogólnieniem działań nieskończonych $\sum_{n=1}^{\infty}$ i $\prod_{n=1}^{\infty}$ jest tzw. operacja ($\mathcal{A}$) Suslina [1]). Określamy ją w sposób następujący:

Załóżmy, że każdemu skończonemu ciągowi $k_1, \ldots, k_n$ złożonemu z liczb naturalnych przyporządkowany został zbiór $A_{k_1 \ldots k_n}$; inaczej mówiąc: dana jest funkcja $A$, dla której zbiorem argumentów jest zbiór wszystkich ciągów skończonych złożonych z liczb naturalnych, a której wartościami są zbiory. Nazywamy wynikiem operacji ($\mathcal{A}$) dokonanej na tej funkcji sumę $W(A)$ wszystkich iloczynów postaci

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_{k_1 \ldots k_n}.$$

Zbiór $W(A)$ możemy określić również jak następuje:

Niech $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots)$ [2]) oznacza dowolny ciąg nieskończony liczb naturalnych, tzn. $\mathfrak{z} \in \mathcal{J}^{\mathcal{J}}$ lub — co na jedno wychodzi — $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}$ (por. § 11, przykład 3, str. 75). Wówczas

$$W(A) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n}. \tag{1}$$

W szczególności, przyjmując $A_{k_1 \ldots k_n} = B_{k_1}$, względnie $A_{k_1 \ldots k_n} = B_n$, otrzymujemy jako wynik operacji ($\mathcal{A}$), sumę względnie iloczyn nieskończony.

Funkcję $A$ nazywamy *regularną*, jeśli stale

$$A_{k_1 \ldots k_n k_{n+1}} \subset A_{k_1 \ldots k_n}. \tag{2}$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli $A$ jest dowolną funkcją (regularną lub nieregularną), to funkcja $A^*$ określona przez wzór

$$A^*_{k_1 \ldots k_n} = A_{k_1} \cdot A_{k_1 k_2} \cdot \ldots \cdot A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \tag{3}$$

jest regularna oraz $W(A) = W(A^*)$.

Funkcje $A$ regularne spełniają dwa wzory następujące:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{m \mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} \tag{4}$$

[1]) M. Suslin (1894—1919) stwierdził pierwszy, że istnieją zbiory rzutowe nie borelowskie. Dla skonstruowania przykładu takiego zbioru wprowadził on operację na rodzinach zbiorów, którą nazwano operacją ($\mathcal{A}$). Jest ciekawe, że pomysł tej operacji był nasunięty Suslinowi przez błąd, który wykrył on w pewnej pracy Lebesgue'a.

[2]) Piszemy tu $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots$ zamiast $\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots$, aby uprościć symbolikę.

i ogólniej, dla każdego $\mathfrak{y} \in \mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, $i \in \mathcal{J}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{d}} \prod_{k=}^{\infty} A_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^i m \mathfrak{d}^1 \dots \mathfrak{d}^k} = \sum_{\mathfrak{d}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^i \mathfrak{d}^1 \dots \mathfrak{d}^k}. \tag{5}$$

(6) Jeśli stale $A_{k_1 \dots k_n} \subset B_{k_1 \dots k_n}$, to $W(A) \subset W(B)$.

Ze wzoru (1) z § 8, str. 64, wynika, że

$$\sum_{\mathfrak{d}} \prod_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{d}^1 \dots \mathfrak{d}^n} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{d}} A_{\mathfrak{d}^1 \dots \mathfrak{d}^n}. \tag{7}$$

Udowodnimy, że we wzorze (7) znak inkluzji można zastąpić przez znak równości, gdy warunek $(k_1, \dots, k_n) \neq (l_1, \dots, l_n)$ pociąga za sobą

$$A_{k_1 \dots k_n} \cdot A_{l_1 \dots l_n} = 0. \tag{8}$$

Niech więc $p$ należy do zbioru po prawej stronie inkluzji (7). Należy dowieść, że należy do lewej. Z założenia istnieje taki wskaźnik $m_1$, że $p \in A_{m_1}$, gdyż $p \in \Sigma_{\mathfrak{d}} A_{\mathfrak{d}^1}$.

Podobnie $p \in \Sigma_{\mathfrak{d}} A_{\mathfrak{d}^1 \mathfrak{d}^2}$, a więc istnieje para takich wskaźników $l_1$, $m_2$, że $p \in A_{l_1 m_2}$. Ze względu na regularność funkcji $A$ mamy $A_{l_1 m_2} \subset A_{l_1}$, skąd $p \in A_{l_1}$; a zatem $p \in A_{m_1} \cdot A_{l_1}$, skąd wynika z uwagi na wzór (8): $l_1 = m_1$. Mamy więc $p \in A_{m_1 m_2}$.

Zupełnie podobnie dowodzimy, że $p \in A_{m_1 m_2 m_3}$ itd. Oznaczając przez $\mathfrak{z}$ ciąg nieskończony $m_1, m_2, m_3, \dots$, otrzymujemy dla każdego $n$: $p \in A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}$. A zatem $p$ jest elementem zbioru po lewej stronie inkluzji (7).

Widzieliśmy poprzednio (§ 11), że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych, złożonych z dwóch liczb, można identyfikować ze zbiorem $\mathcal{C}$ Cantora i że zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych można identyfikować ze zbiorem $\mathcal{N}$ liczb niewymiernych odcinka 01. Zauważmy obecnie, że *zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych można identyfikować ze zbiorem $\mathcal{R}_0$ ułamków postaci $\frac{m}{2^n}$, gdzie* $0 < m < 2^n$. Mianowicie ciągowi $k_1, \dots, k_n$ przyporządkowujemy liczbę

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \dots + \frac{1}{2^{k_1+\dots+k_n}}. \tag{9}$$

Ponieważ każda liczba $r$ należąca do zbioru $\mathcal{R}_0$ daje się przedstawić w postaci (9) — i przy tym w jeden tylko sposób — przyporządkowanie to między zbiorem wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych a zbiorem $\mathcal{R}_0$ jest wzajemnie jednoznaczne.



Przy tego rodzaju identyfikacji ciągów $k_1, \dots, k_n$ z liczbami $r$, rozważana poprzednio funkcja $A$, której argumentami były ciągi skończone o wyrazach naturalnych, staje się funkcją, której zbiorem argumentów jest zbiór $\mathcal{R}_0$ [1]).

Zachodzi twierdzenie następujące:

*Warunek $p \in W(A)$ jest równoważny istnieniu rosnącego ciągu nieskończonego $r_1 < r_2 < r_3 \dots$ takich liczb zbioru $\mathcal{R}_0$, że $p \in A_{r_1} \cdot A_{r_2} \cdot \dots$* (zakładamy, że funkcja $A$ jest regularna).

Dowód. Załóżmy najpierw, że $p \in W(A)$. Istnieje więc taki ciąg nieskończony liczb naturalnych $k_1, k_2, \dots$, że $p \in A_{k_1} \cdot A_{k_1 k_2} \cdot \dots$. Oznaczając przez $r_1, r_2, \dots$ liczby odpowiadające na mocy (9) ciągom $(k_1), (k_1, k_2), \dots$, widzimy natychmiast, że $r_1 < r_2 < \dots$

Załóżmy z kolei, że $r_1 < r_2 < \dots$ i że $p \in A_{r_1} \cdot A_{r_2} \cdot \dots$. Ciąg $r_1, r_2, \dots$ jako rosnący i ograniczony jest zbieżny; przyjmijmy, że

$$\lim_{n=\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}}, \quad \text{gdzie} \quad 1 \leqslant m_1 < m_2 < \dots \tag{10}$$

Niech $k_1 = m_1$ oraz dla $n > 1$ niech $k_n = m_n - m_{n-1}$. Dla każdego $n$ istnieje, oczywiście, taki wskaźnik $j_n$, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{m_i}} < r_{j_n} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_i}}. \tag{11}$$

Przyjmijmy

$$r_{j_n} = \frac{1}{2^{l_1}} + \dots + \frac{1}{2^{l_s}}, \quad 1 \leqslant l_1 < \dots < l_s.$$

Na mocy nierówności (11) mamy więc $l_1 = m_1, \dots, l_n = m_n$ oraz $n < s$. A zatem układ $l_1, l_2 - l_1, \dots, l_n - l_{n-1}$ jest identyczny z układem $k_1, k_2, \dots, k_n$. Ciągowi $k_1, \dots, k_n, (l_{n+1} - l_n), \dots, (l_s - l_{s-1})$ przyporządkowana jest więc liczba $r_{j_n}$ (por. (9)). Ze względu na regularność funkcji $A$, wnosimy stąd, że $A_{r_{j_n}} \subset A_{k_1 \dots k_n}$. Mamy więc $p \in A_{k_1 \dots k_n}$ dla każdego $n$. A zatem $p \in W(A)$.

Uogólnienie operacji ($\mathcal{A}$) stanowią *operacje Hausdorffa* [2]). Operacji Hausdorffa dokonuje się na ciągach zbiorów podobnie jak operacji omówionych w § 9. Każda operacja Hausdorffa jest określona przez

[1]) Funkcję tego rodzaju nazywamy *rzeszotem Łuzina*. Por. N. Łuzin, *Sur les ensembles analytiques*, Fundamenta Mathematicae **10** (1927), str. 1—95.

[2]) Zdefiniowane równocześnie i niezależnie przez F. Hausdorffa i A. N. Kołmogorowa w r. 1927. Operacje Hausdorffa badane są szczegółowo w pracy: E. Kantorowicz i B. Livenson, *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets I*, Fundamenta Mathematicae **18** (1932), str. 214—279.

zbiór $\mathfrak{Z}$ ciągów o wyrazach naturalnych (czyli, co na jedno wychodzi, przez pewien zbiór liczb niewymiernych); zbiór ten nazywa się bazą operacji.

Niech $F$ będzie ciągiem zbiorów. Wynik operacji Hausdorffa o bazie $\mathfrak{Z}$ wykonanej na ciągu $F$ jest określony wzorem

$$(12) \qquad H_{\mathfrak{Z}}(F)=\sum_{\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}}\prod_{n=1}^{\infty}F_{\mathfrak{z}^n}, \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{z}=(\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\dots,\mathfrak{z}^n,\dots).$$

PRZYKŁADY I ĆWICZENIA. 1. Niech $\mathfrak{Z}$ zawiera tylko jeden ciąg: 1,2,3,... W tym przypadku

$$H_{\mathfrak{Z}}(F)=\prod_{n=1}^{\infty}F_n.$$

2. Jeśli $\mathfrak{Z}$ jest zbiorem ciągów $\mathfrak{z}\in\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, które zawierają nieskończenie wiele różnych wyrazów, to

$$H_{\mathfrak{Z}}(F)=\operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty}F_n$$

(por. § 9, str. 70). Istotnie jeśli $x\in H_{\mathfrak{Z}}(F)$, to zgodnie z (12) istnieje taki ciąg $\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}$, że $x\in F_{\mathfrak{z}^n}$ dla każdego $n$, a więc $x$ należy do $F_n$ dla nieskończenie wielu wskaźników $n$. Na odwrót, jeśli $x$ jest elementem $F_n$ dla nieskończenie wielu wskaźników $n$, np. dla wskaźników $n_1,n_2,\dots$, to ciąg $\mathfrak{z}=(n_1,n_2,\dots)$ jest elementem zbioru $\mathfrak{Z}$, a więc $x\in H_{\mathfrak{Z}}(F)$.

3. Znaleźć takie zbiory $\mathfrak{Z}_1$ i $\mathfrak{Z}_2$, aby

$$H_{\mathfrak{Z}_1}(F)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n \quad \text{i} \quad H_{\mathfrak{Z}_2}(F)=\operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty}F_n.$$

Czy zbiory te są wyznaczone jednoznacznie?

4. Każda operacja Hausdorffa ma następujące własności:

$$(W_1) \qquad H_{\mathfrak{Z}}(F)\subset\sum_{n=1}^{\infty}F_n,$$

$$(W_2) \qquad [a\in H_{\mathfrak{Z}}(F)]\cdot[b \text{ non}\in H_{\mathfrak{Z}}(G)]\to\sum_n[(a\in F_n)(b \text{ non}\in G_n)].$$

Podać przykład operacji na ciągach zbiorów, która nie jest operacją Hausdorffa.

5. Każda operacja $\Phi$ na ciągach zbiorów spełniająca warunki $(W_1)$ i $(W_2)$ jest operacją Hausdorffa. [Kantorowicz i Livenson].

Wskazówka. Niech $D_k=E_{\mathfrak{z}}\Sigma_n(\mathfrak{z}^n=k)$. Operacja $\Phi$ przyporządkowuje ciągowi $D=(D_1,D_2,\dots)$ zbiór $\mathfrak{Z}=\Phi(D)\subset\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$, przy czym $H_{\mathfrak{Z}}(F)=\Phi(F)$.

Wykażemy obecnie, że *operacja* $(\mathcal{A})$ *jest operacją Hausdorffa.*

Z arytmetyki wiadomo, że każda liczba naturalna daje się w jednoznaczny sposób przedstawić w postaci

$$n=2^{k_1-1}+2^{k_1+k_2-1}+\dots+2^{k_1+\dots+k_h-1}$$



gdzie $k_1,\dots,k_h$ są liczbami naturalnymi. Ciąg $k_1,\dots,k_h$ jest więc funkcją liczby $n$:

$$(k_1,\dots,k_h)=\varphi(n).$$

Uważając ciąg $k_1,\dots,k_h,k_{h+1}$ za przedłużenie ciągu $k_1,\dots,k_h$, przyjmujemy

$$(13) \qquad \mathfrak{Z}=\underset{\mathfrak{z}}{E}\prod_n[\varphi(\mathfrak{z}^n) \text{ ma } n \text{ wyrazów i jest przedłużeniem } \varphi(\mathfrak{z}^{n-1})].$$

Niech $A$ będzie funkcją, która każdemu ciągowi $k_1,\dots,k_h$ przyporządkowuje zbiór $A_{k_1\dots k_h}$. Równość

$$B_n=A_{\varphi(n)}$$

określa ciąg zbiorów $B=(B_1,B_2,\dots)$. Wykażemy, że

$$W(A)=H_{\mathfrak{Z}}(B).$$

Istotnie, $x\in H_{\mathfrak{Z}}(B)\equiv\sum_{\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}}\prod_n x\in B_{\mathfrak{z}^n}\equiv\sum_{\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}}\prod_n x\in A_{\varphi(\mathfrak{z}^n)}$.

Dla $\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}$ każdy z ciągów $\varphi(\mathfrak{z}^1),\varphi(\mathfrak{z}^2),\dots$ jest przedłużeniem poprzedniego; można więc te ciągi przedstawić w postaci $(k_1),(k_1,k_2),(k_1,k_2,k_3),\dots$ Przyjmując $\mathfrak{y}=(k_1,k_2,\dots)$ oraz $x\in H_{\mathfrak{Z}}(B)$, otrzymujemy zatem

$$x\in\prod_n A_{\mathfrak{y}^1\dots\mathfrak{y}^n}, \quad \text{tj.} \quad x\in W(A).$$

W podobny sposób z $x\in W(A)$ wynika $x\in H_{\mathfrak{Z}}(B)$.

Operacja $(\mathcal{A})$ jest więc operacją Hausdorffa o bazie danej przez wzór (13).

## * § 14. Działania nieskończone w pierścieniach Boole'a.

W § 9 rozdziału I stwierdziliśmy, że prawa algebry zbiorów dają się uogólnić w bardzo istotny sposób. Prawa te dotyczą nie tylko zbiorów, ale też elementów dowolnego pierścienia Boole'a.

Obecnie zajmiemy się analogicznym uogólnieniem pojęć i twierdzeń wprowadzonych w § 8.

Definicja sumy i iloczynu z § 8 nie przenosi się bezpośrednio do algebry Boole'a, gdyż w definicjach tych figuruje znak $\in$ (relacji przynależności elementu do zbioru), który nie ma swego odpowiednika w algebrze Boole'a. Natomiast podany w twierdzeniu 1 (§ 8, str. 64) konieczny i dostateczny warunek na to, aby zbiór $S$ był sumą a zbiór $P$ iloczynem wszystkich zbiorów $F_t$ dla $t\in T$, da się przenieść do algebry Boole'a; warunek ten bowiem wysłowiony jest wyłącznie przy pomocy relacji inkluzji, która ma swój odpowiednik w algebrze Boole'a (por. rozdział I, § 9, str. 33).

Niech $K$ będzie pierścieniem Boole'a, $T$ — dowolnym zbiorem niepustym, a $f$ — funkcją, której zbiorem argumentów jest $T$, a której wartości $f_t$ należą do $K$ (tzn. $f \in K^T$).

Mówimy, że element $s \in K$ jest *sumą* wszystkich $f_t$ dla $t \in T$, jeśli:

1° $f_t \leqslant s$ dla wszystkich $t \in T$,

2° jeżeli $u \in K$ i $f_t \leqslant u$ dla wszystkich $t \in T$, to $s \leqslant u$.

Element $p \in K$ jest *iloczynem* wszystkich $f_t$ dla $t \in T$, jeśli:

1* $p \leqslant f_t$ dla wszystkich $t \in T$,

2* jeżeli $v \in K$ i $v \leqslant f_t$ dla wszystkich $t \in T$, to $v \leqslant p$.

Suma wszystkich $f_t$ dla $t \in T$ jest więc „najmniejszym" elementem pierścienia $K$ zawierającym wszystkie $f_t$, iloczyn zaś — „największym" elementem pierścienia $K$ zawartym we wszystkich $f_t$.

Istnieje co najwyżej jedna suma i co najwyżej jeden iloczyn elementów $f_t$ dla $t \in T$. Istotnie, jeśli $s_1$ i $s_2$ czynią zadość warunkom:

$$(1) \qquad \prod_{t \in T}(f_t \leqslant s_1), \qquad (2) \qquad [\prod_{t \in T}(f_t \leqslant u)] \to (s_1 \leqslant u),$$

$$(3) \qquad \prod_{t \in T}(f_t \leqslant s_2), \qquad (4) \qquad [\prod_{t \in T}(f_t \leqslant u)] \to (s_2 \leqslant u),$$

to podstawiając w (2) $u = s_2$ i opierając się na (3) otrzymamy $s_1 \leqslant s_2$, podstawiając zaś w (4) $u = s_1$ i opierając się na (1) otrzymamy $s_2 \leqslant s_1$; ostatecznie więc $s_1 = s_2$.

Podobnie dowodzi się jednoznaczności iloczynu.

Sumę i iloczyn wszystkich $f_t$ dla $t \in T$ (o ile istnieją) oznaczamy:

$$\sum_{t \in T} f_t \quad \text{i} \quad \prod_{t \in T} f_t.$$

PRZYKŁAD. Niech $K$ będzie pierścieniem Boole'a utworzonym ze wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathcal{J}$ (liczb naturalnych) i ze wszystkich ich uzupełnień. Jeśli $f_n = \{n\}$ dla $n \in \mathcal{J}$, to $\Sigma_n f_n = \mathcal{J}$, natomiast jeśli $f_n = \{2n\}$, to suma $\Sigma_n f_n$ nie istnieje, gdyż w pierścieniu $K$ nie ma najmniejszego elementu, który by zawierał wszystkie zbiory $f_n$. Podobnie, jeśli $g_n = \mathcal{J} - \{n\}$ a $h_n = \mathcal{J} - \{2n\}$, to $\Pi_n g_n = 0$, zaś $\Pi_n h_n$ nie istnieje.

Prawa dla sum i iloczynów ustalone w twierdzeniach 1—3 z § 8 (str. 64—65) zachowują swą ważność w dowolnym pierścieniu Boole'a, o ile wzmocnimy ich przesłanki założeniami stwierdzającymi istnienie sum i iloczynów, o których mowa w tych twierdzeniach.

Istotnie, twierdzenie 1 jest spełnione w algebrze Boole'a, gdyż jest przyjęte za definicję sum i iloczynów nieskończonych. W dowodach zaś twierdzeń 2 i 3 (oraz pierwszej połowy twierdzenia 4) powoływaliśmy się tylko na twierdzenie 1 i na takie własności relacji inkluzji



oraz działań dodawania i mnożenia, które spełnione są w dowolnym pierścieniu Boole'a; dzięki temu dowody twierdzeń 2 i 3 otrzymujemy automatycznie z dowodów podanych w § 8.

Natomiast dowody praw (a)—(k), naszkicowane w § 8 (str. 64), nie przenoszą się do algebry Boole'a, gdyż czynią istotny użytek z relacji $\in$ przynależności elementu do zbioru. Prawa te pozostają mimo to prawdziwe.

Dla przykładu podamy dowód jednego z praw de Morgana:

*Jeśli istnieje suma $\Sigma_{t \in T} f_t$, zaś $a$ jest dowolnym elementem pierścienia $K$, to istnieje też iloczyn $\Pi_{t \in T}(a - f_t)$ i*

$$a - \sum_{t \in T} f_t = \prod_{t \in T}(a - f_t).$$

Dowód. Przyjmijmy $s = \Sigma_{t \in T} f_t$. Z założenia wynika, że istnieje różnica $r = a - s$.

Jeśli $t \in T$, to $f_t \leqslant s$, a więc $a - s \leqslant a - f_t$, czyli

$$(5) \qquad r \leqslant a - f_t \quad \text{dla każdego} \quad t \in T.$$

Jeśli $x \leqslant a - f_t$ dla każdego $t \in T$, to $a - (a - f_t) \leqslant a - x$, czyli $a f_t \leqslant a - x$. Wynika stąd, że $f_t = a f_t + (f_t - a) \leqslant (a - x) + (s - a)$, a zatem $s \leqslant (a - x) + (s - a)$. Odejmując obie strony tej inkluzji od $a$ otrzymamy

$$a - [(a - x) + (s - a)] \leqslant a - s = r,$$

skąd wynika $[a - (a - x)] \cdot [a - (s - a)] \leqslant r$ czyli $ax \cdot a \leqslant r$, gdyż $a - (s - a) = a - a(s - a) = a$. Ponieważ $x \leqslant a$, więc $axa = x$ i otrzymujemy $x \leqslant r$. Wykazaliśmy w ten sposób, że

$$(6) \qquad \text{jeśli} \quad x \leqslant a - f_t \quad \text{dla każdego } t, \quad \text{to} \quad x \leqslant r.$$

Wzory (5) i (6) dają $\Pi_{t \in T}(a - f_t) = r = a - s$, c. b. d. o.

Zajmiemy się jeszcze przeniesieniem do algebry Boole'a twierdzenia 4 z § 8 (str. 66). Przyjmiemy najpierw trzy definicje:

***Definicja 1.*** Element $a$ pierścienia Boole'a $K$ nazywa się *atomem* (tego pierścienia), jeśli $a \neq 0$ i przy tym z $0 \leqslant x \leqslant a$ wynika, że albo $x = 0$, albo $x = a$.

$K$ nazywa się *pierścieniem atomowym*, jeśli dla każdego różnego od 0 elementu $x$ tego pierścienia istnieje taki atom $a$, że $a \leqslant x$.

***Definicja 2.*** Pierścień Boole'a $K$ jest *zupełny*, jeśli istnieje w nim suma $\Sigma_t f_t$ i iloczyn $\Pi_t f_t$ dla każdej funkcji $f \in K^T$ i dowolnego zbioru $T$.

Przykładem zupełnego i atomowego pierścienia jest zbiór wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru $A$.

***Definicja 3.*** Dwa zupełne pierścienie Boole'a $K_1$ i $K_2$ są *izomorficzne*, jeśli istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna $\Phi$, której zbiorem argumentów jest $K_1$ a zbiorem wartości $K_2$, i która spełnia równości:

$$\Phi(\sum_{t\in T} f_t) = \sum_{t\in T} \Phi(f_t), \tag{7}$$

$$\Phi(\prod_{t\in T} f_t) = \prod_{t\in T} \Phi(f_t) \tag{8}$$

dla dowolnej funkcji $f \in K_1^T$ i dowolnego zbioru $T$.

***Twierdzenie 1.*** *Każdy pierścień atomowy i zupełny $K$ jest izomorficzny z pierścieniem wszystkich podzbiorów zbioru $A$ jego atomów* [1]).

Dowód. Przyjmijmy dla $x \in K$

$$\Phi(x) = \underset{a\in A}{E}[a \leqslant x].$$

Wzór ten określa funkcję, dla której zbiorem argumentów jest $K$ i której wartościami są podzbiory zbioru $A$.

Funkcja $\Phi$ jest wzajemnie jednoznaczna. Istotnie, załóżmy, że $x$ i $y$ są elementami pierścienia $K$ i $x \dot{-} y \neq 0$. Zgodnie z założeniem atomowości pierścienia istnieje zatem taki atom $a$, że $a \leqslant x \dot{-} y$. Ze wzorów $ax \leqslant a$ i $ay \leqslant a$ wynika, że

$$ax = 0 \quad \text{lub} \quad ax = a$$

oraz

$$ay = 0 \quad \text{lub} \quad ay = a.$$

Równości $ax = 0$ i $ay = 0$ pociągają za sobą

$$a = a(x \dot{-} y) = ax \dot{-} ay = 0 \dot{-} 0 = 0,$$

skąd $a = 0$, wbrew definicji 1. Równości $ax = a$ i $ay = a$ dają

$$a = a(x \dot{-} y) = ax \dot{-} ay = a \dot{-} a = 0,$$

znów wbrew definicji 1. Zatem, bądź $ax = 0$ i $ay = a$, bądź $ax = a$ i $ay = 0$. W pierwszym przypadku $a$ non $\leqslant x$ i $a \leqslant y$, w drugim $a \leqslant x$ i $a$ non $\leqslant y$. Zatem, albo $a \in \Phi(y) - \Phi(x)$, albo $a \in \Phi(x) - \Phi(y)$; w każdym więc razie $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

Niech $f \in K^T$. Jeśli $a \in \Sigma_{t\in T} \Phi(f_t)$, to istnieje takie $t \in T$, że $a \in \Phi(f_t)$, skąd $a \leqslant f_t \leqslant \Sigma_{t\in T} f_t$, a więc $a \in \Phi(\Sigma_{t\in T} f_t)$.

Udowodniliśmy więc, że

$$\sum_{t\in T} \Phi(f_t) \subset \Phi(\sum_{t\in T} f_t). \tag{9}$$

[1]) Por. A. Tarski, *Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I*, Fundamenta Mathematicae **24** (1935), str. 197.



Załóżmy teraz, że $a \in \Phi(\Sigma_{t\in T} f_t)$, tj. że $a \leqslant \Sigma_{t\in T} f_t$. Gdyby było $af_t = 0$ dla każdego $t$, to mielibyśmy $a = a - af_t = a - f_t$, a więc

$$a = \prod_{t\in T}(a - f_t) = a - \sum_{t\in T} f_t = a - a \cdot \sum_{t\in T} f_t = a - a = 0,$$

gdyż $a \cdot \Sigma_{t\in T} f_t = a$. Wniosek ten jest sprzeczny z założeniem, że $a \in A$. Istnieje więc takie $t \in T$, że $0 \neq af_t \leqslant a$, skąd $af_t = a$, czyli $a \leqslant f_t$, tzn. $a \in \Phi(f_t)$, a więc $a \in \Sigma_{t\in T} \Phi(f_t)$. Udowodniliśmy zatem, że zachodzi inkluzja

$$\Phi(\sum_{t\in T} f_t) \subset \sum_{t\in T} \Phi(f_t).$$

Wobec (9) wynika stąd równość (7).

Jeszcze prościej dowodzimy równości (8).

Mamy mianowicie

$$\begin{aligned} a \in \Phi(\prod_{t\in T} f_t) &\equiv (a \leqslant \prod_{t\in T} f_t) \\ &\equiv \prod_{t\in T} (a \leqslant f_t) \\ &\equiv \prod_{t\in T} (a \in \Phi(f_t)) \\ &\equiv a \in \prod_{t\in T} \Phi(f_t). \end{aligned}$$

Pozostaje zatem do udowodnienia, że każdy zbiór $X \subset A$ może być przedstawiony jako $\Phi(x)$ dla pewnego $x \in K$. W tym celu przyjmujemy

$$T = X, \quad f_t = t, \quad x = \sum_{a\in X} f_a$$

(suma ta istnieje na mocy założenia, że pierścień $K$ jest zupełny).

Mamy zgodnie z (7)

$$\Phi(x) = \sum_{a\in X} \Phi(a) = \sum_{a\in X} \{a\} = X,$$

gdyż $a$ jest jedynym atomem zawartym w $a$, a więc $\Phi(a) = \{a\}$.

Twierdzenie 1 jest w ten sposób udowodnione w zupełności.

***Definicja 4.*** W pierścieniu zupełnym $K$ obowiązuje *uogólnione prawo rozdzielności* (por § 8, tw. 4, str. 66), jeśli dla każdej funkcji

$$f \in K^M, \quad \text{gdzie} \quad M = \sum_{u\in U} T_u \quad \text{oraz} \quad T_u \neq 0 \quad \text{dla} \quad u \in U, \tag{10}$$

zachodzi równość

$$\prod_{u\in U} \sum_{t\in T_u} f_t = \sum_{Y\in K} \prod_{t\in Y} f_t, \tag{11}$$

przy czym

$$K = \underset{Y\in 2^M}{E} \prod_{u\in U} (YT_u \neq 0). \tag{12}$$

***Twierdzenie 2.*** *W każdym pierścieniu zupełnym i atomowym $K$ obowiązuje uogólnione prawo rozdzielności.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 1 istnieje funkcja $\Phi$, ustalająca izomorfizm $K$ i pierścienia podzbiorów pewnego zbioru $A$. Wzory (10) i (12) pociągają za sobą w myśl twierdzenia 4 z § 8 (str. 66) wzór

$$\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u}\Phi(f_t)=\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y}\Phi(f_t),$$

co wobec własności (7) i (8) funkcji $\Phi$ daje

$$\Phi\Big(\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u}f_t\Big)=\Phi\Big(\sum_{Y\in K}\prod_{t\in Y}f_t\Big).$$

Ponieważ funkcja $\Phi$ jest wzajemnie jednoznaczna, więc wynika stąd wzór (11).

***Twierdzenie 3*** [1]. *Jeśli w pierścieniu zupełnym obowiązuje uogólnione prawo rozdzielności, to pierścień ten jest atomowy.*

Dowód. Załóżmy, że $K$ jest pierścieniem zupełnym ale nie atomowym; niech więc $a_0$ będzie takim jego elementem $\neq 0$, który nie zawiera żadnego atomu. Przyjmijmy oznaczenia

$$1=\sum_{w\in K}w,\quad u'=1-u,\quad T_u=\{u,u'\}\quad \text{dla}\quad u\in K.$$

Mamy zatem $K=\Sigma_{u\in K}T_u$. Niech $f_t=t\cdot a_0$. W myśl założenia zachodzi równość (11), gdzie $U=M=K$ i gdzie $\boldsymbol{K}$ określone jest przez wzór (12) (dla $M=K$).

Ponieważ $T_u$ zawiera tylko dwa elementy $u$ i $u'$, więc

$$\sum_{t\in T_u}f_t=f_u+f_{u'}=a_0u+a_0u'=a_0(u+u')=a_0\cdot 1=a_0,$$

skąd

$$\prod_{u\in U}\sum_{t\in T_u}f_t=a_0.$$

Z (11) wynika więc, że istnieje taki zbiór $Y_0\in\boldsymbol{K}$, że

$$\prod_{t\in Y_0}f_t\neq 0.$$

Przyjmijmy

$$b=\prod_{t\in Y_0}f_t=a_0\cdot\prod_{t\in Y_0}t. \tag{13}$$

Ponieważ $a_0$ nie zawiera żadnego atomu, więc $b$ nie jest atomem, tzn. istnieje taki element $c$, że

$$0\neq c\leqslant b\quad\text{i}\quad c\neq b. \tag{14}$$

[1]) Por. A. Tarski, op. cit., str. 195.



Zgodnie z określeniem klasy $\boldsymbol{K}$ (ob. (12)) $Y_0\cdot T_c\neq 0$, tzn. $c\in Y_0$ albo $c'\in Y_0$, skąd (na mocy (13)) $b\leqslant c$ lub $b\leqslant c'$. W pierwszym przypadku wnosimy (wobec $c\leqslant b$), że $b=c$, w drugim zaś, że $c\leqslant c'$. Zatem: albo $c=b$, albo $c=0$, co przeczy wzorowi (14).

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że w pierścieniu zupełnym nie atomowym nie zachodzi prawo rozdzielności, c. b. d. o.

PRZYKŁAD. *Pierścień $K$ dziedzin domkniętych płaskich jest zupełny i nieatomowy; nie obowiązuje w nim uogólnione prawo rozdzielności.*

Istotnie, udowodniliśmy w rozdziale I, § 9, str. 35—37, że $K$ jest pierścieniem Boole'a ze względu na działania $+$, $\odot$ i $\ominus$, i że w każdym różnym od 0 elemencie $A\in K$ jest zawarty element $B$ różny od 0 i od $A$. Pierścień $K$ nie jest więc atomowy. Z twierdzeń 3) i 4) podanych w § 8, str. 68—69, wynika, że pierścień ten jest zupełny. Z twierdzenia 3 wnosimy wreszcie, że w pierścieniu $K$ nie obowiązuje uogólnione prawo rozdzielności.

Jest to interesujący przykład wykazujący, że nie wszystkie prawa algebry zbiorów przenoszą się do algebry Boole'a, nawet w przypadku pierścieni zupełnych.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że w algebrze Boole'a obowiązują wzory (b)—(k) z § 8, str. 64.

2. Udowodnić, że w pierścieniach atomowych zupełnych obowiązuje równość dwoista względem (11):

$$\sum_{u\in U}\prod_{t\in T_u}f_t=\prod_{Y\in K}\sum_{t\in Y}f_t, \tag{15}$$

i że istnieją pierścienie zupełne, w których równość (15) nie zachodzi.