

ROZDZIAŁ I¹⁾.

Algebra zbiorów.

§ 1. Rachunek zdań. Wiele rozumowań teorii mnogości można przedstawić w postaci bardzo przejrzystej, posługując się symboliką logiczną i opierając się na prawach logicznych, sformułowanych w tej symbolice. Podamy w tym paragrafie zasadnicze wiadomości z logiki, na które powoływać się będziemy w dalszym ciągu tego rozdziału, jak również w rozdziałach następnych.

Dowolne zdania oznaczać będziemy literami $p, q, r, \dots$ Zakładamy, że każde z rozważanych zdań jest bądź prawdziwe, bądź fałszywe. Mamy zresztą tu na myśli wyłącznie zdania z zakresu matematyki, a więc takie, dla których założenie to można uczynić.

Z dwu dowolnych zdań p, q utworzyć możemy nowe zdania, łącząc zdania p i q jednym ze spójników: i, lub, jeśli ... to ..., wtedy i tylko wtedy gdy.

Zdanie p i q zapisujemy symbolicznie jako *iloczyn* $p \cdot q$ lub po prostu pq . Zdanie pq nazywa się *koniunkcją* albo *iloczynem logicznym* zdań p i q , które noszą nazwę *czynników koniunkcji*. Koniunkcja pq jest prawdziwa, gdy obydwaj jej czynniki są prawdziwe, jeśli zaś choć jeden z czynników jest fałszywy, to cała koniunkcja jest też fałszywa.

Zdanie p lub q , które symbolicznie zapisujemy jako $p + q$, nazywa się *alternatywą* albo *sumą logiczną* zdań p i q (składników alternatywy). Alternatywa jest prawdziwa, jeśli choć jeden z jej składników jest prawdziwy, fałszywa zaś tylko w tym przypadku, gdy oba składniki są fałszywe.

Zdanie *jeśli* p *to* q nazywamy *implikacją* o poprzedniku p i następniku q . Zamiast *jeśli* p *to* q piszemy $p \rightarrow q$. Implikację uznajemy za fałszywą, gdy jej następnik jest fałszywy a poprzednik prawdziwy. We wszystkich innych przypadkach implikację uznajemy za prawdziwą.

¹⁾ Wiele materiału do rozdziału I czytelnik znajdzie w książce: W. Sierpiński, *Algèbre des Ensembles*, Monografie Matematyczne 23 (1951).

Z umowy tej jest widoczne, że jeśli potrafimy wyprowadzić zdanie q ze zdania p przy pomocy poprawnego rozumowania, to implikacja $p \rightarrow q$ jest prawdziwa; nie może wtedy bowiem zachodzić przypadek: p — prawdziwe, a q — fałszywe, gdyż ze zdania prawdziwego nie można wyprowadzić żadnego zdania fałszywego, o ile rozumowanie jest poprawne. Natomiast z faktu, że implikacja $p \rightarrow q$ jest prawdziwa, nie wynika bynajmniej, że q daje się wyprowadzić z p przy pomocy normalnie przyjmowanych sposobów wnioskowania. Z prawdziwości implikacji $p \rightarrow q$ wynika tylko, że albo p jest fałszywe, albo też p i q są jednocześnie prawdziwe. Np. implikacja $(1=3) \rightarrow (2 \cdot 2=5)$ jest prawdziwa.

Czytelnik powinien zatem zapamiętać, że prawdziwość zdania $p \rightarrow q$ nie oznacza, że q jest wnioskiem z p ; jeśli jednak uda się nam w trakcie jakiegos dowodu wyprowadzić zdanie q ze zdania p , to możemy uznać implikację $p \rightarrow q$ za prawdziwą.

Zdanie p wtedy i tylko wtedy, gdy q nazywa się *równoważnością* o członach p i q . Zapisujemy je krótko jako $p=q$. Zdanie to uznajemy za prawdziwe, o ile zdania p i q mają jednakowe wartości logiczne, tj. są bądź oba prawdziwe, bądź oba fałszywe. Jeśli zaś p jest prawdziwe a q fałszywe, lub p — fałszywe a q — prawdziwe, to równoważność $p=q$ uznajemy za fałszywą.

Równoważność $p=q$ można też określić jako koniunkcję

$$(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p).$$

Zdanie *nie* p nazywamy *negacją* p i zapisujemy jako p' . Jest ono prawdziwe, o ile p jest fałszywe, i fałszywe — o ile p jest prawdziwe. Negacja p' ma więc wartość logiczną przeciwną wartości p .

Dowolne zdanie prawdziwe oznaczamy przez 1, a dowolne zdanie fałszywe przez 0; np. 1 może być zdaniem $2 \cdot 2=4$, a 0 zdaniem $2 \cdot 2=5$.

Posługując się symbolami 0 i 1 możemy zapisać podane wyżej określenia, dotyczące prawdziwości i fałszywości koniunkcji, alternatywy, implikacji, równoważności i negacji w postaci następujących prawdziwych równoważności:

- | | | | | |
|-----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| (1) | $0 \cdot 0=0,$ | $0 \cdot 1=0,$ | $1 \cdot 0=0,$ | $1 \cdot 1=1,$ |
| (2) | $0+0=0,$ | $0+1=1,$ | $1+0=1,$ | $1+1=1,$ |
| (3) | $(0 \rightarrow 0)=1,$ | $(0 \rightarrow 1)=1,$ | $(1 \rightarrow 0)=0,$ | $(1 \rightarrow 1)=1,$ |
| (4) | $(0=0)=1,$ | $(0=1)=0,$ | $(1=0)=0,$ | $(1=1)=1,$ |
| (5) | | $0'=1,$ | $1'=0.$ | |

Prawa logiczne albo *tautologie* logiczne są to wyrażenia zbudowane z liter $p, q, r, \dots$ i łączników $\cdot, +, \rightarrow, =, '$ i posiadające tę własność, że jakkolwiek zastąpimy litery $p, q, r, \dots$ zdaniami (prawdziwymi lub fałszywymi), otrzymamy w wyniku zawsze zdanie prawdziwe.

Ponieważ prawdziwość lub fałszywość zdań zbudowanych przy pomocy łączników $\cdot, +, \rightarrow, =, '$ ze zdań $p, q, r, \dots$ nie zależy od samych zdań $p, q, r, \dots$, lecz tylko od ich wartości logicznych, więc sprawdzenia, czy jakiekolwiek wyrażenie jest prawem logicznym dokonać można przy pomocy następującej metody, zwanej *metodą zerowo-jedynkową*: w badanym wyrażeniu podstawiamy na miejsce liter $p, q, r, \dots$ wartości 0 i 1 na wszelkie możliwe sposoby i następnie obliczamy z pomocą wzorów (1)–(5) wartość logiczną wyrażenia dla każdego z tych podstawień. Jeśli wartością tą jest zawsze 1, to wyrażenie jest prawem logicznym; jeśli zaś przy jednym choćby podstawieniu wartością wyrażenia jest 0, to badane wyrażenie nie jest prawem logicznym.

PRZYKŁAD. Wyrażenie $p \cdot q \rightarrow (p+r)$ jest prawem logicznym. Mamy w nim trzy zmienne p, q i r , a więc dokonać musimy ośmiu podstawień, odpowiadających wartościom:

$$\begin{array}{llll} p=0, & q=0, & r=0; & p=0, & q=0, & r=1; \\ p=0, & q=1, & r=0; & p=0, & q=1, & r=1; \\ p=1, & q=0, & r=0; & p=1, & q=0, & r=1; \\ p=1, & q=1, & r=0; & p=1, & q=1, & r=1. \end{array}$$

W pierwszym przypadku otrzymamy $0 \cdot 0 \rightarrow (0+0)$, a ponieważ równoważności $0 \cdot 0=0$ i $0+0=0$ są prawdziwe, więc otrzymujemy $0 \rightarrow 0$, tj. 1. W drugim przypadku otrzymamy $0 \cdot 0 \rightarrow (0+1)$; ponieważ równoważności $0 \cdot 0=0$ i $0+1=1$ są prawdziwe, więc implikacja ta sprowadza się do $0 \rightarrow 1$ i ostateczną wartością wyrażenia jest znów 1. Podobnie wykazujemy w każdym z pozostałych przypadków, że wartością badanego wyrażenia jest 1.

Łatwo sprawdzić, że jeśli w wyrażeniu występuje n zmiennych, to stosując metodę zerowo-jedynkową dokonać należy 2^n podstawień.

Podajemy poniżej kilka najważniejszych praw logicznych wraz z ich nazwami. Sprawdzenie (przy pomocy metody zerowo-jedynkowej), że wyrażenia te istotnie są prawami logicznymi, pozostawiamy czytelnikowi.

$(p+q)=(q+p)$	prawo przemienności alternatywy,
$[(p+q)+r]=[p+(q+r)]$	prawo łączności alternatywy,
$(p \cdot q)=(q \cdot p)$	prawo przemienności koniunkcji,
$[p \cdot (q \cdot r)]=[p \cdot q \cdot r]$	prawo łączności koniunkcji,
$[p \cdot (q+r)]=[p \cdot q + p \cdot r]$	• pierwsze prawo rozdzielności,
$[p+(q \cdot r)]=[p+q \cdot (p+r)]$	drugie prawo rozdzielności,

$$\begin{aligned}(p+p) &= p, \quad p \cdot p = p \\ (p \cdot 0) &= 0, \quad (p+1) = 1 \\ (p+0) &= p, \quad (p \cdot 1) = p.\end{aligned}$$

prawa tautologii,
prawa pochłaniania,

W prawach tych uwiadczenia się daleko idąca analogia między rachunkiem zdań a zwykłą arytmetyką. Główna różnica dotyczy drugiego prawa rozdzielności oraz praw tautologii i pochłaniania. Prawa tautologii wykazują, że w rachunku zdań nie są potrzebne ani współczynniki ani wykładniki.

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r) &\rightarrow (p \rightarrow r) && \text{prawo sylogizmu,} \\ (p+p') &= 1 && \text{prawo wyłączonego środka,} \\ (p \cdot p') &= 0 && \text{prawo sprzeczności,} \\ p &= p'' && \text{prawo podwójnego przeczenia,} \\ (p+q)' &= (p' \cdot q'), \quad (p \cdot q)' = (p'+q') && \text{prawa de Morgana,} \\ (p \rightarrow q) &= (q' \rightarrow p') && \text{prawo kontrapozycji,} \\ (p \rightarrow q) &= (p'+q), \\ 0 &\rightarrow p, \quad p \rightarrow p, \quad p \rightarrow 1.\end{aligned}$$

Dla ściśłości zaznaczymy jeszcze, że należy odróżniać wypowiedzenie zdania od stwierdzenia jego prawdziwości. W szczególności, wypowiedzenie zdania $p=1$ nie przesądza bynajmniej prawdziwości zdania p .

W dalszym ciągu tej książki wszędzie tam, gdzie pisać będziemy wzory używając symboli logicznych, stwierdzać będziemy jednocześnie, że wzory te są prawdziwe; uwagi, poprzedzające wzór lub następujące po nim, zawierają zawsze dowód prawdziwości wzoru.

§ 2. Zbiory i działania na zbiorach. Podstawowym pojęciem teorii mnogości jest pojęcie zbioru. Pojęcie to doznało na gruncie teorii mnogości stopniowej ewolucji. W początkowym okresie rozwoju teorii mnogości, czyli na gruncie tzw. „naiwnej” teorii mnogości, posługiwano się intuicyjnym pojęciem zbioru, tzn. wyrazowi „zbiór” nadawano to samo znaczenie — mało zresztą sprecyzowane — co w języku potocznym. Takie było w szczególności stanowisko twórcy teorii mnogości, Cantora¹⁾.

Stanowisko to jednak nie dało się utrzymać, intuicyjne bowiem pojmowanie zbioru okazało się w pewnych przypadkach zawodne. Będziemy mówili w rozdziale II, § 2, o tzw. antynomiach teorii mnogości, tj. o pozornych sprzecznościach, które pojawiły się w pewnym stadium rozwoju tej nauki, a których przyczyną była niejasność, w bardziej skom-

¹⁾ Georg Cantor (1845—1918), matematyk niemiecki, profesor uniwersytetu w Halle. Prace swe z zakresu teorii mnogości ogłaszał w czasopiśmie *Mathematische Annalen* w latach 1879—1897. Do badań w kierunku teorii mnogości skłonił Cantora pewne zagadnienia z dziedziny szeregów trygonometrycznych.

plikowanych przypadkach, intuicji łączonej z pojęciem zbioru. W toku polemiki, jaka wywiązała się dokoła antynomii, okazało się wyraźnie, że różni matematycy wiążą istotnie różne intuicje z pojęciem zbioru. Wskutek takiego stanu rzeczy oparcie teorii mnogości wyłącznie na podstawach intuicyjnych stało się niemożliwe.

Stanowisko intuicyjne jest nie tylko niewłaściwe ze wspomnianych wyżej względów, ale jest też z punktu widzenia matematycznego niepotrzebne. Nie jest bowiem rzeczą matematyki rozstrzygać, czy istnieje np. zbiór wszystkich przedmiotów. Teoria mnogości dotyczy zbiorów, z którymi ma się do czynienia w matematyce, jak zbiory liczb o danej własności, zbiory punktów figur płaskich czy przestrzennych lub zbiory funkcji. Własności zbiorów tego rodzaju stanowią obiekt teorii mnogości.

Metodą ich badania jest metoda aksjomatyczna. Podobnie jak w geometrii nie odpowiadamy wprost na pytanie czym są punkty, proste i płaszczyzny i inne „terminy pierwotne” geometrii, lecz z pewnego układu aksjomatów (pewników) wyprowadzamy wszystkie twierdzenia geometrii bez odwoływania się do intuicyjnego znaczenia terminów pierwotnych, — tak samo i teorię mnogości oprzemy na kilku aksjomatach, z których w drodze dedukcji otrzymywać będziemy twierdzenia. Aczkolwiek aksjomaty te mają swe źródło w intuicyjnym pojmowaniu zbiorów rozważanych w matematyce, to jednak treść intuicyjna wyrazu „zbiór” nie będzie — dzięki metodzie aksjomatycznej — interweniowała w dowodach twierdzeń ani w definicjach pojęć teorii mnogości.

Aby jednak rola teorii mnogości w obrębie innych nauk matematycznych mogła być należycie uwidatniona i aby dobór aksjomatów i pojęć podstawowych teorii mnogości był dla czytelnika zrozumiały, ilustrować będziemy często twierdzenia i pojęcia teorii mnogości przykładami zaczerpniętymi z innych teorii matematycznych, zwłaszcza z arytmetyki i geometrii. W tym przypadku, obok przyjętych aksjomatów teorii mnogości, *implicite* przyjmować będziemy aksjomatykę odnośnej teorii. Tak np. stosując teorię mnogości do zbiorów położonych na płaszczyźnie, zakładać będziemy milcząco aksjomatykę geometrii płaszczyzny.

W pewnikach teorii mnogości prócz pojęcia zbioru występować będzie ściśle z nim związane pojęcie stosunku przynależności elementu do zbioru. Zamiast pisać „ x należy do zbioru A ”, pisać będziemy krótko „ $x \in A$ ”¹⁾. Jeśli $x \in A$, to mówimy też, że x jest elementem zbioru A ²⁾. Zaprzeczenie zdania $x \in A$, czyli zdanie $(x \in A)'$, zapisujemy jako $x \text{ non } \in A$ lub $x \notin A$.

¹⁾ Znak $\in$ wprowadzony przez G. Peano jest skrótem greckiego słowa *ἐστίν* (być).

²⁾ Zbiory oznaczać będziemy z reguły dużymi literami $A, B, X, \dots$, ich elementy zaś — małymi.

Przyjmijmy na razie cztery aksjomaty:

I. **Aksjomat jednoznaczności.** Jeśli zbiory A i B mają te same elementy, to A i B są identyczne.

II. **Aksjomat sumy.** Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B , i który żadnych innych elementów nie zawiera.

II'¹⁾. **Aksjomat różnicy.** Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru A , które nie są elementami zbioru B .

II''¹⁾. **Aksjomat istnienia.** Istnieje co najmniej jeden zbiór.

Aksjomat jednoznaczności I możemy zapisać w postaci

jeśli przy wszelkim x jest: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, to $A = B$,

przy czym znak równości między dwoma symbolami wskazuje, że symbole te oznaczają jeden i ten sam przedmiot.

Z aksjomatów I i II wynika, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieje dokładnie jeden zbiór, czyniący zadość warunkom wymienionym w aksjomacie II. Istotnie, gdyby były dwa takie zbiory C_1 i C_2 , to oba zawierałyby te same elementy (a mianowicie te, które należą do A oraz te, które należą do B), a więc w myśl aksjomatu I byłoby $C_1 = C_2$.

Jedyny zbiór, spełniający warunki aksjomatu II, nazywamy *sumą* zbiorów A i B i oznaczamy symbolem $A + B$ ²⁾. Mamy zatem dla dowolnego x i dowolnych zbiorów A i B równoważność

$$(1) \quad (x \in A + B) \Leftrightarrow (x \in A) + (x \in B),$$

przy czym znak $+$ po lewej stronie oznacza działanie na zbiorach, a po prawej stronie działanie na zdaniach (alternatywę).

Z aksjomatów I i II' wynika w podobny sposób, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieje dokładnie jeden zbiór, którego elementami są przedmioty należące do A i nie należące do B . Zbiór ten nazywamy *różnicą* zbiorów A i B i oznaczamy przez $A - B$. Mamy więc dla dowolnego x i dowolnych zbiorów A i B

$$(2) \quad (x \in A - B) \Leftrightarrow (x \in A) \cdot (x \notin B).$$

Na podstawie prawa de Morgana i prawa podwójnego przecięcia (§ 1, str. 4) wynika stąd także

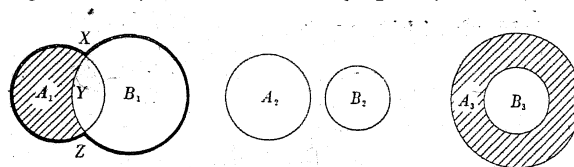
$$(3) \quad (x \in A - B)' = (x \in A)' + (x \in B),$$

¹⁾ Oznaczenia II' i II'' wprowadzone zostały ze względu na to, że w dalszych rozdziałach aksjomaty te będą zastąpione przez ogólniejsze (V i VIII, ob. str. 44 i 51).

²⁾ Niektórzy autorzy używają symbolu $A \cup B$ zamiast $A + B$.

tnz. x nie jest elementem różnicy $A - B$, jeśli x nie jest elementem A lub też jest elementem B .

Działania dodawania i odejmowania zbiorów dają się z łatwością zilustrować geometrycznie. Niech $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ będą zbiorami punktów, leżących wewnątrz nakreślonych poniżej kół. Wówczas $A_1 + B_1$ jest zbiorem punktów leżących wewnątrz grubej linii otaczającej oba koła, $A_1 - B_1$ jest zbiorem punktów leżących w obszarze zakreskowanym i na linii XYZ . Dalej jest $A_2 - B_2 = A_2$, $B_2 - A_2 = B_2$, $A_3 - B_3$ jest zbiorem punktów, leżących wewnątrz zacieniowanego pierścienia z włączeniem mniejszego obwodu, wreszcie nie istnieje punkt, należący do $B_3 - A_3$.



Przy pomocy działań $+$ i $-$ zdefiniować można dwa dalsze działania na zbiorach.

Iloczyn AB ¹⁾ zbiorów A i B definiujemy jako

$$AB = A \cdot (A - B).$$

Zgodnie z definicją różnicy mamy dla dowolnego x

$$x \in AB = (x \in A) \cdot (x \in A - B)',$$

skąd na mocy (3) i pierwszego prawa rozdzielności (ob. str. 3), wynika

$$\begin{aligned} x \in AB &= (x \in A) \cdot [(x \in A)' + (x \in B)] \\ &= (x \in A) \cdot (x \in A)' + (x \in A) \cdot (x \in B) \\ &= 0 + (x \in A) \cdot (x \in B) \\ &= (x \in A) \cdot (x \in B), \end{aligned}$$

czyli ostatecznie

$$(4) \quad x \in AB = (x \in A) \cdot (x \in B).$$

Iloczyn jest więc częścią wspólną czynników; elementami jego są te i tylko te przedmioty, które należą do obu czynników iloczynu. Np. jeśli A jest zbiorem liczb pierwszych, a B zbiorem liczb parzystych, to AB jest zbiorem, którego jedynym elementem jest liczba 2.

¹⁾ Zbiór ten bywa też oznaczany symbolem $A \cap B$.

Różnicę symetryczną dwu zbiorów A i B określamy jako

$$(5) \quad A \dot{-} B = (A - B) + (B - A).$$

Elementami zbioru $A \dot{-} B$ są więc te przedmioty, które należą do A , ale nie należą do B , oraz te przedmioty, które należą do B , ale nie należą do A .

ĆWICZENIA. 1. Zdefiniować działania $+$, $\cdot$, $-$, przy pomocy:

a) $\dot{-}$, $\cdot$; b) $\dot{-}$, $+$; c) $\dot{-}$, $-$.

2. Wykazać, że nie można zdefiniować sumy przy pomocy iloczynu i różnicy, ani różnicy przy pomocy sumy i iloczynu.

§ 3. Inkluzja. Zbiór pusty. Zbiór A nazywa się *podzbiorem* zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B . Piszemy wówczas ACB lub $B \supset A$ i mówimy, że zbiór A jest *zawarty* w B . Stosunek C nazywamy stosunkiem *inkluzji*.

Z definicji wynika równoważność

$$(1) \quad \{ \text{dla każdego } x \text{ jest } (x \in A \rightarrow x \in B) \} = ACB.$$

Oczywiście z $A=B$ wynika, że ACB , ale nie na odwrót.

Jeśli ACB i $A \dot{=} B$, to mówimy, że A jest *podzbiorem właściwym* B .

Jeśli A jest podzbiorem B i B jest podzbiorem A , to $A=B$, tj.

$$(ACB) \cdot (BCA) \rightarrow (A=B).$$

Z założenia wynika bowiem, że dla każdego x

$$x \in A \rightarrow x \in B \quad \text{ i } \quad x \in B \rightarrow x \in A,$$

skąd wynika równoważność $x \in A = x \in B$, a więc $A=B$ na mocy aksjomatu I.

Z łatwością dowodzimy, że jeśli A jest podzbiorem B i B jest podzbiorem C , to A jest podzbiorem C :

$$(2) \quad (ACB) \cdot (BCO) \rightarrow (ACO),$$

tzn. że stosunek inkluzji jest *przechodni*.

Suma dwu zbiorów zawiera każdy składnik; iloczyn dwu zbiorów jest zawarty w każdym czynniku:

$$(3) \quad ACA + B, \quad BCA + B,$$

$$(4) \quad ABCA, \quad ABCB.$$

Istotnie, z prawa $p \rightarrow (p+q)$ wynika, że dla każdego x jest

$$x \in A \rightarrow [(x \in A) + (x \in B)],$$

a więc na mocy wzoru (1) z § 2, str. 6,

$$x \in A \rightarrow x \in (A+B),$$

skąd wobec (1) wynika $ACA+B$. Dowód drugiego wzoru (3) jest podobny, a dowód wzorów (4) opiera się na prawie $p \cdot q \rightarrow p$.

Ze wzoru (2) z § 2 wynika

$$A-BCA.$$

Różnica dwu zbiorów jest więc zawarta w odjemnej.

Stosunek inkluzji może być zdefiniowany przy pomocy stosunku równości i jednego z działań $+$ lub $\cdot$. Zachodzą mianowicie równoważności

$$(5) \quad (ACB) = (A+B=B) = (AB=A).$$

Istotnie, jeśli ACB , to dla każdego x mamy $x \in A \rightarrow x \in B$, a więc na mocy prawa $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p+q) \rightarrow q]$,

$$[(x \in A) + (x \in B)] \rightarrow (x \in B),$$

co dowodzi, że $A+BCB$. Z drugiej strony $BCA+B$, a więc $A+B=B$.

Na odwrót, jeśli $A+B=B$, to na mocy (3) ACB .

W podobny sposób dowodzi się drugiej części równoważności (5).

Z aksjomatu II' wynika, że o ile istnieje choć jeden zbiór A , to istnieje też zbiór $A-A$, który nie zawiera żadnego elementu. Istotnie, z $x \in (A-A)$ wynikałoby $(x \in A) \cdot (x \in A)'$, wbrew prawu sprzeczności.

Na mocy aksjomatu II'' istnieje co najmniej jeden zbiór. Otrzymujemy zatem wniosek, że istnieje zbiór nie zawierający żadnego elementu. Zbiór taki jest tylko jeden. Istotnie, gdyby były dwa takie zbiory Z_1 i Z_2 , to mielibyśmy dla każdego x równoważność

$$x \in Z_1 = x \in Z_2,$$

która jest prawdziwa, gdyż oba jej człony są fałszywe. Z aksjomatu I wynika zatem $Z_1=Z_2$.

Jedyny zbiór, który nie zawiera żadnego elementu, nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy przez 0 . Mamy więc dla każdego x

$$x \text{ non } \in 0,$$

czyli

$$(x \in 0) = 0.$$

Symbol 0 po lewej stronie równoważności oznacza tu zbiór pusty, po prawej stronie — zdanie fałszywe.

Ponieważ implikacja o poprzedniku fałszywym jest prawdziwa, więc dla każdego x jest słuszna implikacja $x \in 0 \rightarrow x \in A$, skąd

$$0 \subset A.$$

Zbiór pusty jest więc podzbiorem każdego zbioru.

Ze wzoru (1) z § 2, str. 6, wynika

$$x \in (A + 0) = (x \in A) + (x \in 0) = (x \in A) + 0 = x \in A,$$

gdyż $p + 0 = p$. Wnosimy stąd, że

$$A + 0 = A.$$

W podobny sposób z prawa $p \cdot 0 = 0$ wnosimy, że

$$A \cdot 0 = 0, \quad 0 - A = 0,$$

z prawa zaś $0' = 1$, że

$$A - 0 = A.$$

Równość $AB = 0$ oznacza, że zbiory A i B nie mają wspólnego elementu, czyli — jak mówimy — są *rozłączne*. $0 + 0 = 0$ a podobnie $0C = 0$.

Równość $B - A = 0$ oznacza, że $B \subset A$.

Rola zbioru pustego w teorii mnogości jest analogiczna do roli liczby zero w algebrze: bez zbioru 0 mnożenie i odejmowanie nie zawsze byłoby wykonalne, co w konsekwencji prowadziłoby do znacznych komplikacji rachunkowych.

§ 4. Prawa dodawania, mnożenia i odejmowania. Działania dodawania, mnożenia i odejmowania zbiorów mają liczne własności wspólne z działaniami dodawania, mnożenia i odejmowania liczb. W obecnym paragrafie wymienimy najważniejsze. Zanotujemy także kilka twierdzeń, wskazujących na różnicę między algebrą zbiorów a arytmetyką¹⁾.

Prawa przemienności:

$$(1) \quad A + B = B + A, \quad AB = BA.$$

Prawa te wynikają wprost z praw przemienności dla alternatywy i koniunkcji $p + q = q + p$ i $pq = qp$.

Prawa łączności:

$$(2) \quad A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Dowód opiera się na prawach łączności dla alternatywy i koniunkcji: $p + (q + r) = (p + q) + r$, $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.

¹⁾ Twierdzenia podane w § 4 odkrył matematyk angielski G. Boole (1813—1864), którego prace zapoczątkowały badania nad logiką matematyczną.

Wzory (1) i (2) stwierdzają, że suma i iloczyn skończonej ilości zbiorów nie zależą ani od porządku, w jakim dokonywamy dodawania (mnożenia), ani też od tego, czy dodajemy do siebie po kolei poszczególne składniki (lub mnożymy czynniki), czy też dodajemy do siebie składniki w poszczególnych grupach (mnożymy grupy czynników) i potem dodajemy sumy poszczególnych grup (lub mnożymy ich iloczyny). Np.

$$A + \{B + [C + (D + E)]\} = [A + (D + C)] + (B + E) = (E + C) + [B + (A + D)].$$

Wynika stąd, że przy dodawaniu lub mnożeniu skończonej liczby zbiorów możemy opuszczać nawiasy wskazujące porządek działań.

Prawa rozdzielności:

$$(3) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C).$$

Dowody opierają się na prawach rozdzielności: koniunkcji względem alternatywy i alternatywy względem koniunkcji, znanych nam z § 1.

Pierwsze z praw rozdzielności jest zupełnie analogiczne do arytmetycznego prawa rozdzielności. Podobnie jak w arytmetyce, wynika z tego prawa, że aby pomnożyć dwie sumy przez siebie mnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej i dodajemy do siebie utworzone w ten sposób iloczyny:

$$(A + B + \dots + H)(X + Y + \dots + T) = \\ = AX + AY + \dots + AT + BX + BY + \dots + BT + \dots + HX + HY + \dots + HT.$$

Drugie prawo rozdzielności nie ma swego odpowiednika arytmetycznego.

Prawa tautologii:

$$(4) \quad A + A = A, \quad AA = A.$$

Dowód otrzymujemy natychmiast z praw tautologii: $p + p = p$ i $p \cdot p = p$. Prawa tautologii wskazują, że w algebrze zbiorów nie są potrzebne ani współczynniki, ani wykładniki potęg.

Udowodnimy teraz kilka praw dotyczących odejmowania.

$$(5) \quad A + (B - A) = A + B.$$

Dowód. Na mocy wzorów (1) i (2) z § 2, str. 6, mamy

$$x \in [A + (B - A)] = (x \in A) + (x \in B) \cdot (x \in A)',$$

skąd wobec prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji

$$x \in [A + (B - A)] = [(x \in A) + (x \in B)] \cdot [(x \in A) + (x \in A)'] = \\ = (x \in A) + (x \in B),$$

gdyż $(x \in A) + (x \in A)' = 1$, a czynnik 1 można pominąć w koniunkcji. Wynika stąd, że

$$x \in [A + (B - A)] = x \in (A + B),$$

co dowodzi wzoru (5).

Ze wzoru (5) wnosimy, że odejmowanie zbiorów nie jest działaniem odwrotnym do dodawania. Np. jeśli A jest zbiorem liczb parzystych, a B — zbiorem liczb podzielnych przez 3, to zbiór $A + (B - A)$ jest różny od B , zawiera bowiem wszystkie liczby parzyste.

Natomiast w przypadku, gdy ACB , mamy na mocy wzoru (5) i wzoru (5) z § 3, str. 9,

$$A + (B - A) = B,$$

tak jak w arytmetyce.

$$(6) \quad A - B = A - AB.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} x \in A - AB &= (x \in A) \cdot (x \in AB)' = (x \in A) \cdot [(x \in A) \cdot (x \in B)]' \\ &= (x \in A) \cdot [(x \in A)' + (x \in B)'] \\ &= (x \in A) \cdot (x \in A)' + (x \in A) \cdot (x \in B)' \\ &= 0 + (x \in A) \cdot (x \in B)' = (x \in A) \cdot (x \in B)' \\ &= x \in A - B. \end{aligned}$$

Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania ma w algebrze zbiorów postać

$$(7) \quad A(B - C) = AB - C.$$

Prawo to wynika z równoważności

$$\begin{aligned} x \in A(B - C) &= (x \in A) \cdot (x \in B) \cdot (x \in C)' \\ &= (x \in AB) \cdot (x \in C)' = x \in AB - C. \end{aligned}$$

Ze wzoru (7) wynika, że

$$A(B - A) = AB - A = BA - A = B(A - A) = B \cdot 0 = 0,$$

a więc

$$A(B - A) = 0.$$

Prawa de Morgana w rachunku zbiorów mają postać

$$(8) \quad A - BC = (A - B) + (A - C), \quad A - (B + C) = (A - B)(A - C).$$

W dowodach powołujemy się na prawa de Morgana z rachunku zdań. Zanotujemy wreszcie bez dowodu równości:

$$(9) \quad (A + B) - C = (A - C) + (B - C),$$

$$(10) \quad A - (B - C) = (A - B) + AC,$$

$$(11) \quad A - (B + C) = (A - B) - C.$$

Następujące wzory dotyczą stosunku inkluzji i ilustrują analogię, zachodzącą między tym stosunkiem a stosunkiem nierówności:

$$(12) \quad (ACB) \cdot (OCD) \rightarrow (A + OCB + D),$$

$$(13) \quad (ACB) \cdot (OCD) \rightarrow (AOCBD),$$

$$(14) \quad (ACB) \cdot (OCD) \rightarrow (A - DCB - O).$$

Inkluzje można zatem dodawać i mnożyć stronami, przy odejmowaniu zaś należy zmienić kierunek inkluzji w odjemniku.

Ze wzoru (14) wynika jako łatwy wniosek

$$(15) \quad (OCD) \rightarrow (A - DCA - C).$$

Jest to odpowiednik arytmetycznego twierdzenia

$$x \leq y \rightarrow z - y \leq z - x.$$

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić wzór: $N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB)$, w którym $N(X)$ oznacza liczbę elementów zbioru X (przy założeniu, że jest ona skończona).

Wyrazić $N(A - B)$ przez $N(A)$ i $N(AB)$.

2. Uogólnić wynik ćwiczenia 1 w sposób następujący:

$$N(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = \sum_i N(A_i) - \sum_{i,j} N(A_i A_j) + \sum_{i,j,h} N(A_i A_j A_h) - \dots,$$

przy czym wskaźniki sumowania przebiegają wartości od 1 do k i są różne między sobą.

3. Korzystając z wyniku ćwiczenia 2, wykazać, że ilość liczb mniejszych od n i pierwszych względem n jest dana wzorem

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_r$ oznaczają wszystkie różne czynniki pierwsze liczby n .

***§ 5. Własności różnicy symetrycznej¹⁾.** Różnica symetryczna $A \dot{-} B$ została określona w § 2, str. 8, przez wzór następujący:

$$(0) \quad A \dot{-} B = (A - B) + (B - A).$$

Działanie $\dot{-}$ jest przemienne i łączne:

$$(1) \quad A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

$$(2) \quad A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C.$$

Wzór (1) jest bezpośrednim wnioskiem ze wzoru (0).

¹⁾ Własności różnicy symetrycznej badał szczegółowo M. H. Stone. Ob. *The theory of representations for Boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936) str. 37—111. Por. też F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3-e wyd., rozdział X.

Dla dowodu wzoru (2) obliczymy na mocy (0) lewą i prawą stronę:

$$\begin{aligned} A \dot{-} (B \dot{-} C) &= A \dot{-} [(B - C) + (C - B)] \\ &= [A - [(B - C) + (C - B)]] + \{[(B - C) + (C - B)] - A\}. \end{aligned}$$

Stosując teraz wzory (8), (9), (10) i (11) z § 4, str. 12, otrzymamy

$$\begin{aligned} A \dot{-} (B \dot{-} C) &= [A - (B - C)] \cdot [A - (C - B)] + [(B - C) - A] + [(C - B) - A] \\ &= [(A - B) + AC] \cdot [(A - C) + AB] + [B - (C + A)] + [C - (B + A)] \\ &= (A - B) \cdot (A - C) + (A - B) \cdot B + (A - C) \cdot C + ABC + [B - (C + A)] \\ &\quad + [C - (B + A)] \\ &= [A - (B + C)] + [B - (C + A)] + [C - (A + B)] + ABC. \end{aligned}$$

Zbiór $A \dot{-} (B \dot{-} C)$ składa się więc z elementów, które należą bądź do wszystkich trzech zbiorów A , B i C , bądź też do dokładnie jednego z nich.

Aby obliczyć prawą stronę wzoru (2) nie potrzeba już powtarzać rachunku. Wystarczy zauważyć, że na mocy (1)

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = C \dot{-} (A \dot{-} B),$$

skąd (zastępując we wzorze na $A \dot{-} (B \dot{-} C)$ litery A , B , C odpowiednio przez C , A , B) otrzymamy

$$\begin{aligned} (A \dot{-} B) \dot{-} C &= [C - (A + B)] + [A - (B + C)] + [B - (C + A)] + CAB \\ &= [A - (B + C)] + [B - (C + A)] + [C - (A + B)] + ABC. \end{aligned}$$

Łączność działania $\dot{-}$ została w ten sposób udowodniona. Ze wzorów (1) i (2) wynika, że przy wielokrotnym stosowaniu operacji $\dot{-}$ możemy pomijać nawiasy.

Działanie mnożenia jest rozdzielne względem $\dot{-}$, tj.

$$(3) \quad A(B \dot{-} C) = AB \dot{-} AC.$$

Istotnie, zgodnie ze wzorami (6) i (7) z § 4, str. 12, jest

$$\begin{aligned} A(B \dot{-} C) &= A[(B - C) + (C - B)] \\ &= (AB - C) + (AC - B) \\ &= B(A - C) + C(A - B) \\ &= B(A - AC) + C(A - AB) \\ &= (AB - AC) + (AC - AB) = AB \dot{-} AC. \end{aligned}$$

Zbiór pusty jest modulem dla działania $\dot{-}$, tj.

$$(4) \quad A \dot{-} 0 = A.$$

Istotnie $(A - 0) + (0 - A) = A + 0 = A$.

Dotychczas udowodnione twierdzenia nie wykazują istotnej różnicy między działaniami $\dot{-}$ i $+$. Różnica ta uwidoczni się w następujących twierdzeniach:

$$(5) \quad A \dot{-} A = 0.$$

Istotnie, $A \dot{-} A = (A - A) + (A - A) = 0$.

Działanie dodawania nie posiada działania odwrotnego. Widzieliśmy w szczególności, że działanie odejmowania zbiorów nie jest działaniem odwrotnym do dodawania. Natomiast do działania $\dot{-}$ istnieje działanie odwrotne: dla dowolnych zbiorów A i C istnieje dokładnie jeden zbiór B taki, że $A \dot{-} B = C$, mianowicie $B = A \dot{-} C$; inaczej mówiąc:

$$(6) \quad A \dot{-} (A \dot{-} C) = C,$$

$$(7) \quad A \dot{-} B = C \rightarrow B = A \dot{-} C.$$

Istotnie, z (2), (4) i (5) wynika

$$A \dot{-} (A \dot{-} C) = (A \dot{-} A) \dot{-} C = 0 \dot{-} C = C \dot{-} 0 = C,$$

co dowodzi wzoru (6). Jeśli zaś $A \dot{-} B = C$, to $A \dot{-} (A \dot{-} B) = A \dot{-} C$, a więc $B = A \dot{-} C$ na mocy (6).

Udowodnione w ten sposób wzory (6) i (7) wykazują, że działanie $\dot{-}$ ma działanie odwrotne; tym działaniem odwrotnym jest samo działanie $\dot{-}$.

W algebrze i teorii liczb rozważa się wielokrotnie układy pewnych przedmiotów, które nazywać można liczbami, oraz dwa działania $+$ i $\cdot$ (zwane dodawaniem i mnożeniem), wykonalne na tych przedmiotach i spełniające następujące warunki:

- (i) $x + y = y + x$, (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (iii) istnieje liczba 0 taka, że $x + 0 = x$,
- (iv) dla dowolnych x i y istnieje dokładnie jedna liczba $z = x - y$ (różnica) taka, że $y + z = x$,
- (v) $x \cdot y = y \cdot x$, (vi) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- (vii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Układy takie noszą nazwę *pierścieni* (dokładniej: pierścieni przemennych). Jeśli istnieje liczba 1 taka, że

$$(viii) \quad x \cdot 1 = x$$

dla każdego x , to mówimy, że *pierścień ma jedność*.

Rachunki algebraiczne w pierścieniach wykonywamy zupełnie tak samo, jak w zwykłej arytmetyce. Dowody bowiem praw rachunkowych arytmetyki korzystają tylko z założeń, że liczby tworzą pierścień.

Wzory (1)–(7) wykazują, że zbiory tworzą pierścień (bez jednostki) o ile jako „sumę” przyjmijemy działanie $\dot{+}$, a jako „iloczyn” działanie $\dot{\cdot}$. Osobliwością tego pierścienia jest to, że działanie „odejmowania” pokrywa się z działaniem „dodawania”, a nadto „kwadrat” każdego elementu jest z nim identyczny¹⁾.

Przy użyciu działań $\dot{+}$ i $\dot{\cdot}$ jako działań podstawowych, rachunek w algebrze zbiorów układają się więc tak samo, jak w zwykłej arytmetyce, z tym, że można pomijać wszelkie wykładniki potęg, a współczynnik redukowować według modułu 2 (tzn. $2kA=0$ i $(2k+1)A=A$).

Wynik, do którego doszliśmy, posiada tym większe znaczenie, że działania $\dot{+}$ i $\dot{-}$ dają się wyrazić przy pomocy działań $\dot{+}$ i $\dot{\cdot}$, dzięki czemu cała algebra zbiorów, rozwinięta w poprzednich paragrafach daje się ująć jako arytmetyka omówionego tu pierścienia zbiorów. Istotnie jak łatwo sprawdzić:

$$(8) \quad A+B=A\dot{-}B\dot{-}AB,$$

$$(9) \quad A-B=A\dot{-}AB.$$

Ze wzorów (8) i (4) wynika następujące twierdzenie:

(10) *jeśli zbiory A i B są rozłączne, to $A+B=A\dot{-}B$.*

PRZYKŁADY. 1. Udowodnimy prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia:

$$(11) \quad (A+B)(A+C)=A+BC,$$

korzystając z własności różnicy symetrycznej. W tym celu wyrażać jedną stronę przy pomocy działań $\dot{+}$ i $\dot{\cdot}$; otrzymujemy

$$(A\dot{-}B\dot{-}AB)(A\dot{-}C\dot{-}AC).$$

Przemnażamy następnie te dwa wyrażenia tak jak gdyby były o wielomianami i korzystamy z prawa $A\dot{\cdot}A=A$; otrzymujemy

$$\begin{aligned} A^2\dot{-}AC\dot{-}A^2C\dot{-}BA\dot{-}BC\dot{-}BAC\dot{-}A^2B\dot{-}ABC\dot{-}A^2BC= \\ =A\dot{-}AC\dot{-}AC\dot{-}AB\dot{-}BC\dot{-}ABC\dot{-}AB\dot{-}ABC\dot{-}ABC. \end{aligned}$$

W powyższym wyrażeniu skracamy składniki występujące dwukrotnie i otrzymujemy na mocy (8)

$$A\dot{-}BC\dot{-}ABC=A+BC.$$

Wzór (11) jest w ten sposób udowodniony.

2. Sposób, w jaki różnica symetryczna występuje często w zastosowaniach, zilustrujemy na następującym przykładzie.

¹⁾ W algebrze mówi się, że mnożenie takie jest *idempotentne*.

Dwa zbiory A i B nazywamy *prawie równymi*, jeśli ich różnica symetryczna $A\dot{-}B$ składa się ze skończonej liczby elementów (w szczególności liczbą tą może być 0). Piszemy wówczas $A\dot{\approx}B$.

Ponieważ zbiór pusty jest skończony, wynika ze wzoru (5), że

$$A\dot{\approx}A,$$

tzn. że stosunek $\dot{\approx}$ jest zwrotny.

Z (1) wynika, że

$$A\dot{\approx}B \rightarrow B\dot{\approx}A,$$

tzn. że stosunek $\dot{\approx}$ jest symetryczny.

Wreszcie z tożsamości $A\dot{-}B=(A\dot{-}C)\dot{-}(B\dot{-}C)$ wynika, że $A\dot{-}BC(A\dot{-}C)+(B\dot{-}C)$, gdyż różnica symetryczna dwu zbiorów jest zawarta w ich sumie. Ponieważ suma dwu zbiorów skończonych jest skończona, więc wnosimy stąd, że

$$(A\dot{-}B)(B\dot{-}C)\rightarrow(A\dot{-}C),$$

tzn. że stosunek $\dot{\approx}$ jest przechodni.

Zastępując w niektórych poprzednio podanych definicjach znak równości przez znak $\dot{\approx}$ otrzymujemy nowe pojęcia; np. (por. str.10) dwa zbiory A i B nazywamy *prawie rozłącznymi*, jeśli $AB\dot{\approx}0$; mówimy, że A jest *prawie zawarte* w B , jeśli $A-B\dot{\approx}0$ itp.

UWAGA. Dowodząc, że relacja $\dot{\approx}$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, oparliśmy się tylko na następujących trzech własnościach zbiorów skończonych:

1^o suma dwu zbiorów skończonych jest skończona,

2^o podzbiór zbioru skończonego jest skończony,

3^o zbiór pusty jest skończony.

Można zatem przeprowadzić analogiczne rozumowanie, biorąc zamiast skończoności jakąkolwiek inną własność, spełniającą założenia 1^o, 2^o, 3^o. Powstające w ten sposób różne relacje „prawie równości” odgrywają nieraz dużą rolę.

ĆWICZENIA. 1. Zbiór $A_1\dot{-}A_2\dot{-}\dots\dot{-}A_n$ zawiera te i tylko te elementy, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_i ($i=1,2,\dots,n$).

2. Udowodnić, że jeśli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są skończone i zbiór A_i zawiera $N(A_i)$ elementów, to

$$\begin{aligned} N(A_1\dot{-}A_2\dot{-}\dots\dot{-}A_n)= \\ =\sum_i N(A_i)-2\sum_{i,j} N(A_iA_j)+4\sum_{i,j,k} N(A_iA_jA_k)-8\sum_{i,j,k,l} N(A_iA_jA_kA_l)+\dots \end{aligned}$$

3. Wykazać, że:

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) \subset (A_1 \cdot B_1) + \dots + (A_n \cdot B_n),$$

$$(A_1 A_2 \dots A_n) \cdot (B_1 B_2 \dots B_n) \subset (A_1 \cdot B_1) + \dots + (A_n \cdot B_n) \quad [\text{Hausdorff}]$$

§ 6. Zbiór 1, uzupełnienie. W wielu zastosowaniach teorii mnogości rozpatruje się tylko zbiory zawarte w pewnym stałym zbiorze Np. w rozumowaniach geometrycznych rozpatruje się tylko zbiory punktów danej przestrzeni, w arytmetyce — zbiory liczb itp.

W obecnym paragrafie założymy, że litery $A, B, \dots$ oznaczają zbiory zawarte w pewnym ustalonym zbiorze, który nazwiemy *przestrzenią* lub ogólnie rozważanych przedmiotów i oznaczymy symbolem 1. Mamy więc dla każdego A

$$A \subset 1,$$

skąd

$$(1) \quad A \cdot 1 = A, \quad A + 1 = 1.$$

Zbiór $1 - A$ nazywamy *uzupełnieniem* zbioru A i oznaczamy przez A' :

$$A' = 1 - A.$$

Jest jasne, że

$$(2) \quad AA' = 0, \quad A + A' = 1.$$

Ponieważ $A'' = 1 - (1 - A)$, więc na mocy prawa (10) z § 4 (str. 15) otrzymujemy następujące prawo „podwójnego uzupełnienia”:

$$(3) \quad A'' = A.$$

Przyjmując w prawach de Morgana (§ 4, wzory (8), str. 12) $A =$ i zastępując litery B i C przez A i B , otrzymamy

$$(4) \quad (AB)' = A' + B', \quad (A + B)' = A'B'.$$

Uzupełnienie iloczynu dwu zbiorów jest więc równe sumie uzupełnień a uzupełnienie sumy dwu zbiorów jest równe iloczynowi uzupełnień

Jest godnym uwagi, że wzory, jakie otrzymujemy wprowadzając do rozważań pojęcie uzupełnienia, są zupełnie analogiczne do praw rachunku zdań, omówionych w § 1. Wystarczy zastąpić w prawach (1) — (4) znak równości przez znak równoważności i interpretować litery A, B , jako zmienne zdaniowe, a symbole $+$, $\cdot$, $'$, 0 , 1 jako alternatywę, koniunkcję, negację, zdanie fałszywe i zdanie prawdziwe, by otrzymać prawa rachunku zdań (por. str. 4). Na odwrót: można z praw rachunku zdań otrzymać przez prostą zmianę znaczenia symboli twierdzenia algebry zbiorów. Z tego względu rachunki na zbiorach zawartych w pewnym stałym zbiorze 1 układają się najprościej przy użyciu działań $+$, $\cdot$ i $'$.

Odejmnowanie daje się zdefiniować przy pomocy działania $'$ i jednego z działań $+$ albo $\cdot$. Mamy istotnie

$$A - B = A \cdot 1 - B = A \cdot (1 - B) = AB'$$

oraz

$$A - B = AB' = (A' + B)'$$

Stosunek inkluzji daje się sprowadzić do stosunku równości na podstawie następującego wzoru

$$(5) \quad (A \subset B) = (AB' = 0).$$

Istotnie, z inkluzji $A \subset B$ otrzymujemy przez obustronne pomnożenie przez B' wzór $AB'CB' = 0$, skąd wynika $AB' = 0$. Na odwrót, jeśli $AB' = 0$, to

$$A = A \cdot 1 = A(B + B') = AB + AB' = AB + 0 = ABCB.$$

Ponieważ $(A = B) = (ACB)(BCA)$, więc ze wzoru (5) wynika wzór:

$$(A = B) = (AB' = 0)(BA' = 0),$$

a ponieważ równoczesne zachodzenie równości $X = 0$ i $Y = 0$ równoważne jest równości $X + Y = 0$, więc

$$(6) \quad (A = B) = (AB' + BA' = 0) = (A + B = 0).$$

Ze wzoru (5) wynika natychmiast (por. prawo kontrapozycji, str. 4)

$$(7) \quad (A \subset B) = (B' \subset A').$$

Układ wszystkich zbiorów zawartych w 1 tworzy pierścień ze względu na działanie $+$ jako działanie dodawania i $\cdot$ jako działanie mnożenia. Pierścień ten różni się od pierścienia zbiorów rozpatrywanego w § 5 tym, że ma on jedność. Jednością jest mianowicie zbiór 1. Wzór (1) stwierdza w samej rzeczy, że zbiór 1 spełnia charakterystyczny dla jedności pierścienia warunek (viii) z § 5 (str. 15).

Wynika stąd, że rachunki w algebrze zbiorów można upodobnić formalnie do rachunków wykonywanych w algebrze liczb.

ĆWICZENIE. Określamy dzielenie zbiorów wzorem

$$A : B = A + B'.$$

Znaleźć wzory na $A : (BC)$ i $A : (B + C)$ (odpowiedniki wzorów de Morgana). Obliczyć $A : (B : A)$.

***§ 7. Składowe. Normalna postać twierdzeń.** Rozpatrywać będziemy obecnie zbiory, które utworzyć można z dowolnych n zbiorów przy pomocy operacji dodawania, mnożenia i odejmowania. Wykażemy, że ilość takich zbiorów jest skończona i że wszystkie one dają się zapisać w pewnej postaci zwanej *postacią normalną*.

Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ będą dowolnymi podzbiórmi przestrzeni 1, którą w ciągu wszystkich rozważań tego paragrafu pozostawiamy stałą.

Przyjmijmy

$$A_i^1 = 1 - A_i, \quad A_i^0 = A_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Każdy iloczyn postaci

$$A_1^{i_1} A_2^{i_2} \dots A_n^{i_n} \quad (i_k = 1 \text{ lub } i_k = 0 \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n)$$

nazywamy *składową*.

Ilość składowych wynosi co najwyżej 2^n , każdy bowiem ze wskaźników i_k może przyjmować dwie wartości 0 lub 1. Ilość składowych może jednak być mniejsza niż 2^n . Jeśli np. $n = 2$ i $A_1 = 1 - A_2$, to istnieją tylko trzy składowe

$$0 = A_1^0 \cdot A_2^0 = A_1^1 \cdot A_2^1, \quad A_1 = A_1^0 \cdot A_2^1, \quad A_2 = A_1^1 \cdot A_2^0.$$

Dwie różne składowe są zawsze rozłączne. Istotnie, jeśli składowe $S_1 = A_1^{i_1} \cdot A_2^{i_2} \dots A_n^{i_n}$ i $S_2 = A_1^{j_1} \cdot A_2^{j_2} \dots A_n^{j_n}$ nie są równe, to co najmniej dla jednej liczby $k \leq n$ jest $i_k \neq j_k$, np. $i_k = 0$, $j_k = 1$. A więc $A_k^{i_k} A_k^{j_k} = 0$ i tym bardziej $S_1 \cdot S_2 = 0$.

Suma wszystkich składowych jest równa 1.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

$$1 = (A_1^0 + A_1^1) \cdot (A_2^0 + A_2^1) \cdot \dots \cdot (A_n^0 + A_n^1),$$

przemnożyć prawą stronę zgodnie z prawem rozdzielności mnożenia względem dodawania. Po prawej stronie otrzymujemy wówczas sumę składowych.

Zbiór A_i jest równy sumie tych składowych, które zawierają czynnik A_i

Istotnie $1 = S_1 + S_2 + \dots + S_h$, gdzie $S_1, S_2, \dots, S_h$ są wszystkimi składowymi ($h = 2^n$). Wynika stąd, że

$$A_i = A_i S_1 + A_i S_2 + \dots + A_i S_h.$$

Jeśli S_p zawiera czynnik A_i^1 , to $A_i S_p = 0$, gdyż $A_i A_i^1 = A_i (1 - A_i) = 0$. Jeśli natomiast S_p zawiera czynnik A_i^0 , to $A_i S_p = S_p$. Wynika stąd, że A_i jest sumą tych S_p , które zawierają czynnik A_i^0 , c. b. d. o.

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie 1. *Każdy zbiór niepusty, powstający ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ przez stosowanie działań dodawania, odejmowania i mnożenia jest sumą pewnej liczby składowych.*

Dowód. Twierdzenie jest prawdziwe dla zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$. Wystarczy zatem wykazać, że jeśli zbiory X i Y są sumami pewnej liczby składowych, to również zbiory $X+Y$, XY i $X-Y$ dają się przedstawić jako sumy składowych (o ile nie są puste).

Założmy, że X i Y dają się przedstawić jako sumy składowych:

$$X = S_1 + S_2 + \dots + S_k, \quad Y = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_l.$$

Wynika stąd, że

$$X + Y = (S_1 + \dots + S_k) + (\bar{S}_1 + \dots + \bar{S}_l),$$

a zatem $X+Y$ jest sumą składowych.

Z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania wynika, że

$$X \cdot Y = S_1 \cdot \bar{S}_1 + S_1 \cdot \bar{S}_2 + \dots + S_1 \cdot \bar{S}_l + \dots + S_k \cdot \bar{S}_1 + \dots + S_k \cdot \bar{S}_l.$$

$S_i \cdot \bar{S}_j = 0$ o ile $S_i \neq \bar{S}_j$; w przeciwnym razie $S_i \cdot \bar{S}_j = S_i$. Wnosimy stąd, że iloczyn $X \cdot Y$ jest sumą pewnej liczby składowych S_i :

$$X \cdot Y = S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_p},$$

lub też jest pusty.

Jeśli wśród składowych $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_p}$ występują wszystkie składowe $S_1, S_2, \dots, S_k$, to

$$X - Y = X - X Y C (S_1 + \dots + S_k) - (S_1 + \dots + S_k) = 0.$$

W przeciwnym razie, niech $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_q}$ będą tymi ze składowych $S_1, S_2, \dots, S_k$, które nie występują wśród składowych $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_p}$. Mamy

$$\begin{aligned} X - Y &= X - X Y = [(S_{i_1} + \dots + S_{i_p}) + (S_{j_1} + \dots + S_{j_q})] - (S_{i_1} + \dots + S_{i_p}) \\ &= (S_{j_1} + \dots + S_{j_q}) - (S_{j_1} + \dots + S_{j_q}) \\ &= (S_{j_1} + \dots + S_{j_q}) - (S_{j_1} + \dots + S_{j_q}) (S_{i_1} + \dots + S_{i_p}) \\ &= S_{j_1} + \dots + S_{j_q}, \end{aligned}$$

gdyż $(S_{i_1} + \dots + S_{i_p})(S_{j_1} + \dots + S_{j_q}) = 0$.

Twierdzenie jest w ten sposób udowodnione.

Zauważmy, że w dowodzie korzystaliśmy wyłącznie z następujących praw rachunku zbiorów:

$$\begin{aligned}
A+B &= B+A, & A \cdot B &= B \cdot A, \\
(A+B)+C &= A+(B+C), & (A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C), \\
A+0 &= A, & A \cdot 0 &= 0, \\
A+1 &= 1, & A \cdot 1 &= A, \\
A+A &= A, & A \cdot A &= A, \\
A \cdot (A+B) &= A, & A \cdot (B+C) &= A \cdot B + A \cdot C, \\
(A-B) \cdot B &= 0, & (A-B)+B &= A+B, \\
A-B &= A-A \cdot B, & A-(A+B) &= 0, \\
(A+B)-A &= B-A.
\end{aligned}$$

Wniosek 2. Z n zbiorów można przy pomocy działań $+$, $\cdot$ i $-$ utworzyć co najwyżej 2^{2^n} zbiorów.

Istotnie, każdy taki zbiór, z wyjątkiem zbioru pustego, jest sumą składowych; ponieważ zaś ilość składowych nie przekracza 2^n , więc ilość różnych sum, utworzonych z pewnej (niezerowej) liczby składowych, nie przekracza $2^{2^n}-1$.

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy wszystkie składowe są różne od 0. Mówimy wówczas, że zbiory $A_1, \dots, A_n$ są *niezależne*¹⁾.

Twierdzenie 3. Jeśli zbiory $A_1, \dots, A_n$ są niezależne, to liczba różnych składowych wynosi 2^n .

Dowód. Jeśli

$$(0) \quad S = A_1^{i_1} \dots A_n^{i_n} = A_1^{j_1} \dots A_n^{j_n}$$

i nie wszystkie równości $i_1=j_1, \dots, i_n=j_n$ zachodzą, to $S=0$. Istotnie, jeśli np. $i_p=1, j_p=0$, to mnożąc podwójną równość (0) przez A_p^1 , otrzymamy $S=0$. Zatem, jeśli zbiory $A_1, \dots, A_n$ są niezależne, to równość (0) zachodzi tylko wtedy, gdy $i_1=j_1, \dots, i_n=j_n$, c. b. d. o.

Podobnie dowodzi się, że jeśli zbiory $A_1, \dots, A_n$ są niezależne i $S_1 + \dots + S_k = \bar{S}_1 + \dots + \bar{S}_k$, gdzie $S_1, \dots, S_k, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_k$ są składowymi, to $h=k$ i każda ze składowych S_i jest równa pewnej składowej $\bar{S}_j$, a każda składowa $\bar{S}_j$ jest równa pewnej składowej S_i .

PRZYKŁAD. Niech zbiór D_m składa się z takich ciągów $(z_1, \dots, z_n)$, że każde z_i równa się bądź 0 bądź 1, zaś $z_m=0$. Zbiory $D_1, \dots, D_n$ są niezależne. Istotnie, D_m^1 składa się z ciągów $(z_1, \dots, z_n)$, dla których $z_m=i_m$, zatem $(i_1, \dots, i_n) \in D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}$ (por. też rozdział II, § 11, str. 76-77).

¹⁾ Pojęcie zbiorów niezależnych gra ważną rolę w zagadnieniach związanych z podstawami rachunku prawdopodobieństwa.

Por. E. Marczewski, *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), str. 122—132.

Składowe znajdują zastosowanie przy klasyfikacji elementów dowolnego zbioru ze względu na pewne własności (cechy).

Przypuśćmy np., że chcemy rozklasyfikować wszystkie trójkąty ze względu na następujące cechy: własność posiadania dwu boków przystających, własność posiadania trzech boków przystających, własność posiadania kąta prostego.

W tym celu przyjmujemy jako 1 zbiór wszystkich trójkątów, jako A zbiór trójkątów równoramiennych, jako B — zbiór trójkątów równobocznych i jako C zbiór trójkątów prostokątnych. Żadana klasyfikacja dana jest przez rozkład zbioru 1 na składowe ze względu na zbiory A, B, C . Łatwo sprawdzić, że tylko następujących 5 składowych jest różnych od 0: $A \cdot B \cdot C' = B$, $A \cdot B' \cdot C$, tj. zbiór trójkątów równoramiennych prostokątnych, $A \cdot B' \cdot C'$, tj. zbiór trójkątów równoramiennych nierównobocznych i nieprostokątnych, $A' \cdot B' \cdot C$, tj. zbiór trójkątów prostokątnych nierównoramiennych i $A' \cdot B' \cdot C'$, tj. zbiór trójkątów nierównoramiennych i nieprostokątnych. Mamy więc:

$$(i) \quad 1 = B + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B' \cdot C' + A' \cdot B' \cdot C + A' \cdot B' \cdot C',$$

czyli

$$(ii) \quad A \cdot B \cdot C + A' \cdot B \cdot C + A' \cdot B \cdot C' = 0.$$

Rozpatrzmy jeszcze inne zastosowanie składowych, mianowicie do sprowadzania zdań rachunku zbiorów do postaci normalnej.

Nazwijmy *zdaniami algebry zbiorów* każde zdanie mające postać równości lub inkluzji, po obu stronach której występują wyrażenia zbudowane ze zmiennych $A_1, A_2, \dots, A_n$ i symboli 0, 1, +, $\cdot$ i $-$.

Twierdzenie 4. Istnieje metoda pozwalająca każde zdanie algebry zbiorów przekształcić w równoważne zdanie postaci $0=0$ lub $S_1+S_2+\dots+S_k=0$, gdzie $S_1, S_2, \dots, S_k$ są składowymi.

Istotnie, równoważności

$$(A=B) \equiv [(A-B)+(B-A)=0], \quad (A \subset B) \equiv (A-B=0)$$

dowodzą, że każde zdanie algebry zbiorów daje się sprowadzić do postaci $A=0$, gdzie A jest wyrażeniem zbudowanym ze zmiennych $A_1, A_2, \dots, A_n$ i symboli 0, 1, +, $\cdot$, $-$. Jak udowodniliśmy, A może być wyrażone jako suma $S_1+S_2+\dots+S_k$ lub jako 0, c. b. d. o.

Otrzymana w twierdzeniu 4 ogólna postać zdań algebry zbiorów nazywa się *postacią normalną*. Taką jest np. postać zdania (ii) o przestąpieniu wszystkich trójkątów.

PRZYKŁADY. 1. Sprowadzimy do postaci normalnej zdanie

$$(1) \quad [A-(B-C)] \subset (A+C).$$

Jest ono równoważne zdaniu $[A - (B - C)] - (A + C) = 0$, którego lewą stronę przedstawiamy jako sumę składowych. W tym celu zauważmy, że

$$(2) \quad A = A^0 B^0 C^0 + A^0 B^0 C^1 + A^0 B^1 C^0 + A^0 B^1 C^1,$$

$$(3) \quad B = A^0 B^0 C^0 + A^1 B^0 C^0 + A^0 B^0 C^1 + A^1 B^0 C^1,$$

$$(4) \quad C = A^0 B^0 C^0 + A^1 B^0 C^0 + A^0 B^1 C^0 + A^1 B^1 C^0,$$

gdzie $A^0 = A$ i $A^1 = 1 - A$ (podobnie dla zbiorów B i C).

Mnożąc stronami (3) i (4) otrzymamy

$$BC = A^0 B^0 C^0 + A^1 B^0 C^0,$$

a więc

$$B - C = B - BC = A^0 B^0 C^1 + A^1 B^0 C^1.$$

Stąd $A(B - C) = A^0 B^0 C^1$, a więc

$$(5) \quad A - (B - C) = A - A(B - C) = A^0 B^0 C^0 + A^0 B^1 C^0 + A^0 B^1 C^1.$$

Dodając (2) i (4) otrzymamy

$$A + C = A^0 B^0 C^0 + A^0 B^0 C^1 + A^0 B^1 C^0 + A^0 B^1 C^1 + A^1 B^0 C^0 + A^1 B^1 C^0,$$

$$(6) \quad [A - (B - C)](A + C) = A^0 B^0 C^0 + A^0 B^1 C^0 + A^0 B^1 C^1.$$

Z (5) i (6) wynika $[A - (B - C)] - (A + C) = 0$.

Zdanie (1) zostało w ten sposób sprowadzone do postaci $0 = 0$; jest więc ono prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B, C .

2. Rozpatrzmy zdanie

$$(7) \quad A - (B - C) = B + C,$$

które jest równoważne zdaniu

$$\{[A - (B - C)] - (B + C)\} + \{(B + C) - [A - (B - C)]\} = 0.$$

Lewa strona wyraża się jako następująca suma składowych

$$(8) \quad A^0 B^1 C^1 + A^1 B^0 C^1 + A^1 B^0 C^0 + A^1 B^1 C^0 + A^0 B^0 C^1.$$

Zdanie (7) nie jest więc prawdziwe dla wszystkich zbiorów, np. jest fałszywe, jeśli $A^0 B^1 C^1 \neq 0$. Na to, by zachodziła równość (7), potrzeba i wystarcza, by wszystkie składowe występujące w (8) były puste. Nastąpi to wówczas, gdy

$$\begin{aligned} A^0 B^1 C^1 &= 0, & A^1 B^0 C^1 + A^1 B^0 C^0 &= 0, \\ A^1 B^0 C^1 + A^0 B^0 C^1 &= 0, & A^1 B^0 C^0 + A^1 B^1 C^0 &= 0, \end{aligned}$$

tnzn. gdy

$$A^0 B^1 C^1 = 0, \quad A^1 B^0 = 0, \quad B^0 C^1 = 0, \quad A^1 C^0 = 0,$$

czyli $ACB + C, BCA, BCC$ i CCA . Łatwo wykazać, że warunki te są równoważne warunkowi $BCA = C$.

Widzimy na tych przykładach, że metoda sprowadzania wzorów do postaci normalnej pozwala mechanicznie rozwiązywać zagadnienia dotyczące prawdziwości zdań algebry zbiorów. Jest to jeden z nielicznych przypadków, w którym udało się dla pewnej gałęzi matematyki znaleźć metodę dowodzenia lub obalania twierdzeń, czyli rozwiązać pozytywnie tzw. *problem rozstrzygalności*.

ĆWICZENIE. Niech I będzie jednostkową kostką n -wymiarową, tj. zbiorem ciągów $(x_1, \dots, x_n)$ takich, że $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Niech I_m składa się z takich ciągów $(x_1, \dots, x_n) \in I$, że $1/2 \leq x_m \leq 1$. Wykazać, że zbiory $I_1, \dots, I_n$ są niezależne. Podać interpretację geometryczną dla $n = 2$ i dla $n = 3$.

***§ 8. Zastosowania algebry zbiorów do topologii¹⁾.** Aby zilustrować zastosowania, jakie rachunek rozwinięty w poprzednich paragrafach, znajduje poza ogólną teorią mnogości, rozpatrzmy tutaj aksjomaty tzw. topologii ogólnej i wyprowadzimy z nich przy pomocy algebry zbiorów niektóre wnioski.

W topologii ogólnej bada się zbiór niepusty 1 , zwany przestrzenią, którego elementy nazywają się punktami. Zakłada się dalej, że każdemu zbiorowi A zawartemu w 1 odpowiada pewien zbiór $\bar{A}$, zwany *domknięciem* zbioru A i również zawarty w 1 . Operacja, prowadząca od A do $\bar{A}$, czyli operacja domknięcia zbioru czynić ma przy tym zadość następującym warunkom (aksjomatom topologii ogólnej):

$$(1) \quad \overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B},$$

$$(2) \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A},$$

$$(3) \quad A \subset \bar{A},$$

$$(4) \quad \bar{0} = 0.$$

W aksjomatach (1)–(3) litery A i B oznaczają dowolne podzbiory przestrzeni.

Aksjomaty (1)–(4) są np. spełnione, gdy 1 jest zbiorem punktów płaszczyzny, a operacja domknięcia $\bar{A}$ polega na dołączeniu do zbioru A

¹⁾ Rozwinięty w tym paragrafie rachunek topologiczny przedstawiony jest szczegółowo w monografii: K. Kuratowski, *Topologie I*, wyd. 2-e, Monografie Matematyczne **20** (1948) rozdz. I. Por. dalsze badania nad tym rachunkiem przeprowadzone z punktu widzenia algebraicznego w pracy: J. C. C. McKinsey i A. Tarski, *The algebra of topology*, *Annals of Mathematics* **45** (1944), str. 141–191.

wszystkich *punktów skupienia* tego zbioru, tj. takich punktów p , że dowolne koło o środku p zawiera w swym wnętrzu co najmniej jeden punkt zbioru A różny od p . Tę interpretację układu aksjomatów (1)–(4) będziemy nazywali w dalszym ciągu interpretacją *naturalną*.

Pokażemy jak z aksjomatów (1)–(4) można wyprowadzić rozmaite własności operacji domknięcia, korzystając jedynie z praw rachunku zbiorów.

$$(5) \quad \bar{\bar{A}} = A.$$

Dowód. Dla każdego A mamy $\bar{A} \subset A$, zaś aksjomat (3) daje $A \subset \bar{\bar{A}}$.

$$(6) \quad \bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B}.$$

Dowód. Wobec $B + (A - B) = A + B$ mamy, stosując aksjomat (1), $\bar{B} + \overline{A - B} = \bar{A} + \bar{B}$. Wynika stąd, że $\bar{A} \subset \bar{B} + \overline{A - B}$, a więc

$$\bar{A} - \bar{B} \subset \overline{A - B} - \bar{B} = \overline{A - B - B} = \bar{A} - \bar{B},$$

co dowodzi wzoru (6).

$$(7) \quad A \subset B \rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}.$$

Dowód. Założenie $A \subset B$ jest równoważne równości $A + B = B$, z której na mocy aksjomatu (1) wynika $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B}$, a więc $\bar{A} \subset \bar{B}$ (por. § 3, wzór (5), str. 9).

$$(8) \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

Dowód. Ponieważ $ABCA$ i $ABCB$, więc twierdzenie (7) daje $\overline{ABC\bar{A}}$ i $\overline{ABC\bar{B}}$. Mnożąc te inkluzje stronami i stosując prawo tautologii (§ 4, wzór (4), str. 11) otrzymamy wzór (8).

$$(9) \quad \text{Jeśli } A = \bar{A} \text{ i } B = \bar{B}, \text{ to } \overline{A \cdot B} = A \cdot B.$$

Istotnie, $\overline{ABC\bar{A}}$ na mocy aksjomatu (3), zaś $\overline{ABC\bar{A}} \cdot \bar{B} = A \cdot B$ zgodnie z (8) i z założeniem twierdzenia. Zatem $A \cdot B = \overline{A \cdot B}$.

Zbiór, który jest równy swemu domknięciu nazywamy *domkniętym*. Twierdzenie (9) orzeka zatem, że iloczyn dwu zbiorów domkniętych jest domknięty, podczas gdy aksjomat (1) stwierdza, że suma dwu zbiorów domkniętych jest domknięta.

Uzupełnienie zbioru domkniętego nazywamy *zbiorem otwartym*. Z praw de Morgana wynika, że suma i iloczyn dwu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

W naturalnej interpretacji aksjomatów (1)–(4) *zbiory domknięte* są takie zbiory, które zawierają wszystkie swoje punkty skupienia. Zbiory otwarte mają natomiast następującą charakterystyczną własność: jeśli punkt p należy do zbioru otwartego A , to istnieje koło o środku p całkowicie zawarte w A .

Zbiór ¹⁾

$$\text{Int}(A) = 1 - \overline{1 - A} = A''.$$

nazywamy *wnętrzem* zbioru A . Wnętrze dowolnego zbioru jest oczywiście zbiorem otwartym. W naturalnej interpretacji aksjomatów (1)–(4) zbiór $\text{Int}(A)$ składa się z takich punktów p , dla których istnieje koło o środku p , zawarte całkowicie w A .

$$(10) \quad \text{Int}(A) \subset A.$$

Dowód. Z aksjomatu (3) wnosimy, że $A' \subset A''$, skąd na podstawie wzoru (7) z § 6, str. 19, wynika

$$1 - A' \subset 1 - A'',$$

czyli

$$A'' \subset A'.$$

Z wzoru (10) wynika w szczególności, że $\text{Int}(\text{Int}(A)) \subset \text{Int}(A)$. Wzór ten może być wzmocniony; zachodzi bowiem twierdzenie

$$(11) \quad \text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A).$$

Dowód. Z definicji wynika

$$\text{Int}(A) = A'', \quad \text{Int}(\text{Int}(A)) = [\text{Int}(A)]'' = [A'']''.$$

Ponieważ działanie ' powtórzone dwukrotnie znosi się (prawo podwójnego uzupełnienia), więc

$$\text{Int}(\text{Int}(A)) = A'''' = A,$$

a ponieważ $A'' = A'$ na mocy aksjomatu (2), więc

$$\text{Int}(\text{Int}(A)) = A'' = \text{Int}(A).$$

$$(12) \quad \text{Int}(A \cdot B) = \text{Int}(A) \cdot \text{Int}(B).$$

Dowód. Na mocy praw de Morgana jest

$$(AB)'' = (A' + B')'',$$

skąd przez zastosowanie aksjomatu (1) otrzymamy

$$\text{Int}(AB) = (AB)'' = (A' + B')''$$

i powtórne zastosowanie praw de Morgana daje

$$\text{Int}(AB) = A'' \cdot B'' = \text{Int}(A) \cdot \text{Int}(B).$$

Jako prosty wniosek wyprowadzimy z (12):

$$(13) \quad A \subset B \rightarrow \text{Int}(A) \subset \text{Int}(B).$$

¹⁾ Zamiast pisać $\bar{A}$ niekiedy dogodnie będzie pisać A^- .

Stosując do zbiorów wypisanych po obu stronach operację domknięcia, otrzymamy (wobec $\bar{B}=B$):

$$B + \overline{1 - (A + B)} \supset \overline{1 - A},$$

skąd

$$[1 - \overline{1 - A}] + B + \overline{1 - (A + B)} = 1,$$

czyli

$$\text{Int}(A) + B + \overline{1 - (A + B)} = 1.$$

Z równości tej wynika, że

$$\text{Int}(A) + \overline{1 - (A + B)} \supset 1 - B,$$

a więc

$$\overline{\text{Int}(A)} + \overline{1 - (A + B)} \supset \overline{1 - B}.$$

Dodając do obu stron zbiór $1 - \overline{1 - B} = \text{Int}(B)$ otrzymamy

$$\overline{\text{Int}(A)} + \text{Int}(B) + \overline{1 - (A + B)} = 1,$$

skąd

$$\overline{\text{Int}(A)} + \text{Int}(B) \supset 1 - \overline{1 - (A + B)} = \text{Int}(A + B).$$

Stosując po obu stronach operację domknięcia i opierając się na aksjomatach (1) i (3), otrzymamy

$$(19_2) \quad \overline{\text{Int}(A)} + \overline{\text{Int}(B)} \supset \overline{\text{Int}(A + B)}.$$

Wzór (19₂) łącznie z (19₁) dowodzi tezy twierdzenia (19).

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że jeśli zbiór A jest otwarty, to

$$\overline{A \cdot \bar{X}} = \bar{A} \cdot \bar{X}$$

dla każdego zbioru X .

2. Przyjmijmy $\text{Fr}(A) = \bar{A} \cdot \overline{1 - A}$ (ograniczenie zbioru A).

Udowodnić wzory¹⁾:

$$(a) \quad \text{Fr}(A + B) + \text{Fr}(AB) + \text{Fr}(A) \cdot \text{Fr}(B) = \text{Fr}(A) + \text{Fr}(B) \quad [\text{A. H. Stone}],$$

$$(b) \quad \text{Fr}(A) = A \cdot \overline{1 - A} + (\bar{A} - A),$$

$$(c) \quad A + \text{Fr}(A) = \bar{A},$$

$$(d) \quad \text{Fr}[\text{Int}(A)] \subset \text{Fr}(A),$$

$$(e) \quad \overline{\text{Int}[\text{Fr}(A)]} = \bar{A} \cdot \text{Int}[\text{Fr}(A)] = \overline{\text{Int}[\text{Fr}(A)] - A}.$$

¹⁾ Wiele innych analogicznych wzorów znajduje się w pracy: M. Zarycki, *Quelques notions fondamentales de l'Analyse Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique*, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), str. 3—15.

3. Zbiór A nazywamy zbiorem *brzegowym*, jeśli $\overline{1 - A} = 1$. Zbiór A nazywamy *nigdziegęstym*, jeśli zbiór $\bar{A}$ jest brzegowy.

Dowieść, że

(a) suma zbioru brzegowego i nigdziegęstego jest zbiorem brzegowym,

(b) suma dwóch zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem nigdziegęstym,

(c) na to, żeby zbiór $\text{Fr}(A)$ był nigdziegęsty, potrzeba i wystarcza, aby zbiór A był sumą zbioru otwartego i nigdziegęstego.

4. Niech 1 oznacza przestrzeń spełniającą prócz aksjomatów (1)–(4) (str. 25) aksjomat następujący: jeśli zbiór A składa się z jednego punktu, to $\bar{A} = A$.

Mówimy, że punkt p jest punktem skupienia zbioru A , jeśli $p \in \overline{A - \{p\}}$ (dla płaszczyzny warunek ten równoważny jest założeniu, że $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, gdzie $p_n \in A - \{p\}$, tj. warunkowi podanemu na str. 26). Przez A' oznaczamy zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A , zwany *pochodną* zbioru A .

Udowodnić wzory:

$$(A + B)' = A' + B', \quad A' - B' \subset (A - B)', \quad A'' \subset A', \quad \bar{A} = A + A', \quad \bar{A}' = A'.$$

5. Niech 1 oznacza przestrzeń rozważaną w ćw. 4. Zbiór A nazywamy *w sobie gęstym*, jeśli $A \subset A'$.

Udowodnić, że

(a) jeśli przestrzeń jest w sobie gęsta, to i każdy zbiór otwarty jest w sobie gęsty,

(b) jeśli zbiory A i $1 - A$ są brzegowe, to przestrzeń jest w sobie gęsta,

(c) zbiory $\text{Int}[\text{Fr}(A)]$ i $A \cdot \text{Int}[\text{Fr}(A)]$ są w sobie gęste.

6. Warunki (1)–(3) równoważne są warunkowi

$$A + \bar{A} + \bar{B} = \bar{A} + \bar{B} \quad [\text{Iseki}].$$

§ 9. Algebra Boole'a. Zakończymy ten rozdział rozważaniami o charakterze aksjomatycznym. W przeważającej większości dotychczas podanych twierdzeń o zbiorach nie figuruje znak ϵ oznaczający stosunek przynależności elementu do zbioru, mimo, że znak ten figuruje w dowodach i definicjach. Nasuwa się wobec tego zagadnienie ugruntowania tej części rachunku zbiorów jako odrębnej teorii, nie posługującej się stosunkiem ϵ . Mówić w niej będziemy tylko o równości i nierówności pewnych przedmiotów zwanych zbiorami i o pewnych działaniach (dodawanie, mnożenie, odejmowanie) wykonalnych na tych przedmiotach. Scharakteryzujemy przy tym zbiory i działania ich dotyczące odpowiednimi aksjomatami w taki sposób, aby wszystkie twierdzenia poprzednich paragrafów, w których nie figurował znak ϵ , można było wyprowadzić z tych aksjomatów.

Teoria, do której w ten sposób dochodzimy, nosi nazwę *algebry Boole'a*¹⁾. Znajduje ona zastosowania w licznych działach matematyki²⁾.

Prosty układ aksjomatów algebry Boole'a otrzymamy, obierając jako pojęcia pierwotne: zbiór 0 i działania $+$, $\cdot$ oraz $-$. Następujący układ aksjomatów³⁾ wystarcza do wyprowadzenia wszystkich praw, które poznaliśmy poprzednio:

- | | |
|----------------------------------|--|
| (1) $A + B = B + A,$ | (2) $A \cdot B = B \cdot A,$ |
| (3) $A + (B + C) = (A + B) + C,$ | (4) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$ |
| (5) $A + 0 = A,$ | (6) $A \cdot 0 = 0,$ |
| (7) $A + A = A,$ | (8) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$ |
| (9) $A \cdot (A + B) = A,$ | (10) $(A - B) + B = A + B,$ |
| (11) $(A - B) \cdot B = 0.$ | |

Wyprowadzimy tytułem przykładu kilka twierdzeń z tych aksjomatów.

$$(12) \quad A \cdot A = A.$$

Dowód. Przyjmujemy w (9) $B = 0$ i stosujemy aksjomat (5).

$$(13) \quad A + A \cdot B = A.$$

Dowód. Z (12) wynika, że $A + A \cdot B = A \cdot A + A \cdot B$. Stosując aksjomat (8) otrzymujemy stąd $A + A \cdot B = A \cdot (A + B)$, skąd wynika (13) przez zastosowanie (9).

$$(14) \quad A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C).$$

Dowód. W myśl (8), (2), (9), (3) i (13)

$$(A + B) \cdot (A + C) = (A + B) \cdot A + (A + B) \cdot C = A + (A \cdot C + B \cdot C) = A + B \cdot C$$

$$(15) \quad \text{Jeśli } X + B = A + B \text{ i } XB = 0, \text{ to } X = A - B.$$

Dowód. Zbiór $X = A - B$ spełnia założenia twierdzenia (15). Wystarczy zatem wykazać, że nie ma dwu różnych zbiorów, czyniących zadość tym założeniom.

¹⁾ Ob. monograficzne opracowanie algebry Boole'a w książce: G. Birkhoff *Lattice theory*, wyd. 2-e, American Mathematical Society Colloquium Publications tom 25 (1948).

²⁾ W ostatnich czasach algebra Boole'a znajduje coraz więcej zastosowań również poza matematyką, np. w teorii sieci elektrycznych i w teorii systemu nerwowego. Por. W. Szestakow, *Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класса А*, Moskwa 1938.

C. A. Shannon, *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 1938.

M. A. Gawrilow, *Теория релейно-контактных схем*, Moskwa—Leningrad 1950.
N. Rashevsky, *Mathematical Biophysics* (Ch. XLVI, Boolean Algebra of neural nets), Chicago 1948.

³⁾ Por. też E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Transactions of the American Mathematical Society 5 (1904), str. 288—309.

Przypuśćmy, że

- | | | |
|------|------------------|------------------|
| (i) | $X + B = A + B,$ | $X \cdot B = 0,$ |
| (ii) | $Y + B = A + B,$ | $Y \cdot B = 0.$ |

Z (i) oraz (9) wynika $X = X \cdot (X + B) = X \cdot (A + B)$, co na mocy (8), (5) i (i) daje $X = X \cdot A + X \cdot B = X \cdot A$. Mnożąc teraz pierwszą z równości (ii) przez X stronami otrzymamy $X \cdot (Y + B) = X \cdot (A + B)$, skąd $X \cdot Y + X \cdot B = X \cdot A + X \cdot B$, a więc wobec $X \cdot B = 0$

$$X \cdot Y = X \cdot A = X.$$

Analogicznie dowodzimy, że $Y \cdot X = Y$, a więc $X = Y$, na mocy (2).

$$(16) \quad A - B = A - A \cdot B.$$

Istotnie, różnica $R = A - A \cdot B$ czyni zadość równościom $R \cdot A \cdot B = 0$ i $R + A \cdot B = A + A \cdot B$. Tym samym równościom czyni jednak zadość różnica $A - B$, zatem $R = A - B$.

W podobny sposób dowodzi się wzorów

$$(17) \quad A - (A + B) = 0,$$

$$(18) \quad (A + B) - A = B - A.$$

Prawa (1)—(12), (16)—(18) wystarczają do ugruntowania teorii postaci normalnych, wyłożonej w § 7.

Istotnie przyjmijmy dla dowolnych lecz ustalonych $A_1, \dots, A_n$

$$1 = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Zachodzą wówczas równości $1 + X = 1$, $1 \cdot X = X$ dla każdego X powstającego z $A_1, \dots, A_n$ przez stosowanie operacji dodawania, mnożenia i odejmowania, co przy użyciu wspomnianych wzorów wystarcza do powtórzenia wszystkich rozumowań z § 7 (por. str. 22).

Teoria postaci normalnych obowiązuje zatem w algebrze Boole'a i może służyć do automatycznego sprawdzania wzorów tej algebry.

Wynika stąd, że każde twierdzenie teorii mnogości, dotyczące zbiorów i dające się zapisać jako równość między wyrażeniami, zbudowanymi ze zmiennych $A, B, \dots$, oznaczających dowolne zbiory, i symbol $+$, $\cdot$, $-$, 0 , daje się wyprowadzić z aksjomatów (1)—(11).

Relację inkluzji oznaczamy w algebrze Boole'a zazwyczaj symbolem $\leq$ (rezerwując znak $\subset$ dla stosunku zawierania między zbiorami). Definicja relacji $\leq$ brzmi:

$$(19) \quad (A \leq B) = (A + B = B).$$

Wykażemy, że

$$(20) \quad (A \leq B) = (A \cdot B = A).$$

Istotnie, jeśli $A+B=B$, to $A \cdot B = A \cdot (A+B)$, a więc $A \cdot B = A$ n mocy (9). Jeśli zaś $A \cdot B = A$, to $A+B = A \cdot B + B$, a więc $A+B=B$ n mocy (13).

Wyprowadzimy tytułem przykładu kilka twierdzeń dotyczących inkluzji.

Z (7) wynika, że $A \leq A$, zaś z (5), że $0 \leq A$.

Jeśli $A \leq B$ i $B \leq C$, to $A = A \cdot B$ i $B = B \cdot C$, zatem $A = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot C$, skąd wynika, że $A \leq C$.

Jeśli $A \leq B$ i $B \leq A$, to $A = A \cdot B$ i $B = B \cdot A$, zatem $A = B$.

Aksjomaty (1)–(11) nie są wystarczające dla algebry zbiorów zawartych w stałym zbiorze 1 (por. § 6, str. 18), gdyż nie znajduje w nich wyrazu fakt, że zmienne $A, B, \dots$ przyjmują jako wartości tylko zbiory zawarte w 1.

Aby uzyskać dostateczną podstawę do aksjomatycznego ujęcia algebry zbiorów, zawartych w stałym zbiorze, wprowadzamy nowy termin pierwotny 1, o którym zakładamy, że oznacza zbiór („przestrzeń”).

Przyjmujemy nadto aksjomat

$$(21) \quad A \cdot 1 = A.$$

$$(22) \quad \text{Z (19) i (20) wynika, że } A + 1 = 1.$$

Uzupełnienie zbioru A definiujemy jako

$$A' = 1 - A.$$

Z (10) i (11) wynikają na mocy (22) twierdzenia

$$(23) \quad A' + A = 1, \quad A \cdot A' = 0.$$

Można też przyjąć jako terminy pierwotne 0, 1, +, · i ', a jako aksjomaty — wzory (1)–(9), (21) i (23). Definiując różnicę wzorem $A - B = A \cdot B'$ uzyskamy prawa (10) i (11) jako twierdzenia.

Definicja. Każdy zbiór K , który zawiera element 0 i w którym określone są działania +, ·, —, czyniące zadość aksjomatom (1)–(11), nazywamy *pierścieniem Boole'a* (dokładniej: pierścieniem Boole'a ze względu na działania +, · i —). Jeśli w pierścieniu K istnieje element 1, czyniący zadość aksjomatowi (21), to mówimy, że K jest *pierścieniem Boole'a z jednością*.

PRZYKŁADY. 1) Przykładem pierścienia Boole'a jest rodzina wszystkich podzbiorów pewnego ustalonego zbioru 1, przy czym działania +, · i — mają zwykłe znaczenie dodawania, mnożenia i odejmowania zbiorów, a 0 jest zbiorem pustym. Tą interpretacją układu aksjomatów (1)–(11) zajmowaliśmy się w § 6.

2) Ogólniej rozpatrywać możemy zamiast rodziny wszystkich podzbiorów zbioru 1 taką rodzinę K jego podzbiorów, że suma i różnica dwu zbiorów należących do K znów należy do K ¹⁾. Rodzina taka przy zwykłym znaczeniu stałych +, ·, — i 0 jest też pierścieniem Boole'a. Tak np. rodzina wszystkich zbiorów płaskich ograniczonych stanowi pierścień Boole'a bez jedności.

3) Niech 1 będzie jakąkolwiek przestrzenią z operacją domknięcia $\bar{A}$ (por. § 8, str. 25). Zbiór $AC1$ nazywa się *dziedzina domknięta*, jeśli

$$A = \overline{\text{Int}(A)}.$$

Oznaczmy przez K rodzinę wszystkich dziedzin domkniętych zawartych w 1. Jest jasne, że 0 i 1 należą do K , gdyż

$$\overline{\text{Int}(0)} = \bar{0} = 0 \quad \text{ i } \quad \overline{\text{Int}(1)} = \bar{1} = 1.$$

Jeśli $A \in K$, to $\bar{A} = A$, gdyż

$$\bar{A} = \overline{\text{Int}(\bar{A})} = \overline{\text{Int}(A)} = A.$$

Każdy więc zbiór należący do K jest domknięty (por. § 8, str. 26); zgodnie z twierdzeniem (19) z § 8, str. 29, wynika stąd, że jeśli $A \in K$ i $B \in K$, to

$$A + B = \overline{\text{Int}(A)} + \overline{\text{Int}(B)} = \overline{\text{Int}(A + B)},$$

co dowodzi, że $A + B \in K$.

Przyjmijmy dla $A \in K$ i $B \in K$

$$A \odot B = \overline{\text{Int}(A \cdot B)}, \quad A \ominus B = \overline{\text{Int}(A - B)}.$$

Z określenia tego wyniku na mocy wzoru (14) z § 8, str. 28, że jeśli $A \in K$ i $B \in K$, to $A \odot B \in K$ i $A \ominus B \in K$.

Twierdzenie. K jest pierścieniem Boole'a (z jednością) ze względu na działania +, $\odot$ i $\ominus$.

Dowód. Należy wykazać, że działania +, $\odot$ i $\ominus$ spełniają aksjomaty (1)–(11).

Aksjomaty (1), (3), (5) i (7) są oczywiście spełnione, gdyż działanie dodawania spełnia te aksjomaty. Aksjomat (2) wynika ze wzoru

$$A \odot B = \overline{\text{Int}(A \cdot B)} = \overline{\text{Int}(B \cdot A)} = B \odot A.$$

Równie łatwo sprawdzamy, że spełniony jest aksjomat (21):

$$A \odot 1 = \overline{\text{Int}(A \cdot 1)} = \overline{\text{Int}(A)} = A.$$

¹⁾ Mówimy też w tym przypadku, że K jest *ciałem* zbiorów.

Aby wykazać, że spełniony jest aksjomat (4), opieramy się na prawach (12), (8) i (13) z § 8 i otrzymujemy

$$\text{Int}[(A \odot B) \cdot C] = \text{Int}(A \odot B) \cdot \text{Int}(C),$$

$$A \odot B = \overline{\text{Int}(A \cdot B)} = \overline{\text{Int}(A) \cdot \text{Int}(B)} \subset \overline{\text{Int}(A) \cdot \text{Int}(B)} = A \cdot B,$$

skąd wynika na mocy wzoru (10) z § 8, że

$$(24) \quad \text{Int}[(A \odot B) \cdot C] \subset (A \odot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C \subset B \cdot C,$$

a więc

$$\text{Int}\{\text{Int}[(A \odot B) \cdot C]\} \subset \text{Int}(B \cdot C),$$

czyli (por. § 8, wzór (11))

$$\text{Int}[(A \odot B) \cdot C] \subset \text{Int}(B \cdot C) \subset \overline{\text{Int}(B \cdot C)} = B \odot C.$$

Ponieważ (na mocy (24)) $\text{Int}[(A \odot B) \cdot C] \subset A$, więc

$$\text{Int}[(A \odot B) \cdot C] \subset A \cdot (B \odot C),$$

skąd

$$\text{Int}\{\text{Int}[(A \odot B) \cdot C]\} \subset \text{Int}[A \cdot (B \odot C)],$$

tj. $\text{Int}[(A \odot B) \cdot C] \subset \text{Int}[A \cdot (B \odot C)]$. Biorąc domknięcia po obu stronach, otrzymamy

$$\overline{\text{Int}[(A \odot B) \cdot C]} \subset \overline{\text{Int}[A \cdot (B \odot C)]},$$

czyli $(A \odot B) \odot C \subset A \odot (B \odot C)$. W zupełnie podobny sposób wyprowadzamy też inkluzję odwrotną. Równość $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$ możemy zatem uznać za udowodnioną.

Aksjomat (6) jest spełniony, gdyż

$$A \odot 0 = \overline{\text{Int}(A \cdot 0)} = \overline{\text{Int}(0)} = 0.$$

Rozpatrzmy obecnie aksjomat (8). Mamy

$$A \odot (B + C) = \overline{\text{Int}[A \cdot (B + C)]} = \overline{\text{Int}(A \cdot B + A \cdot C)}.$$

Zbiory A , B i C są domknięte, a więc (por. § 8, wzór (9), str. 26) $A \cdot B = A \cdot B$ i $A \cdot C = A \cdot C$. Na mocy twierdzenia (19) z § 8, str. 29, wnosiśmy stąd, że

$$\overline{\text{Int}(A \cdot B + A \cdot C)} = \overline{\text{Int}(A \cdot B)} + \overline{\text{Int}(A \cdot C)} = (A \odot B) + (A \odot C).$$

A więc

$$A \odot (B + C) = (A \odot B) + (A \odot C).$$

Aksjomat (9) sprawdzamy w następujący sposób:

$$A \odot (A + B) = \overline{\text{Int}[A \cdot (A + B)]} = \overline{\text{Int}(A)} = A.$$

Aksjomat (10) jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia (17) z § 8, str. 29, i z uwagi, że dziedziną domkniętą jest zbiorem domkniętym. Istotnie,

$$(A \odot B) + B = \overline{\text{Int}(A \cdot B)} + B = \overline{\text{Int}(A)} + B = A + B.$$

Aksjomat (11) wynika z twierdzenia (18) z § 8, str. 29. Jeśli bowiem B jest dziedziną domkniętą, to $B = \overline{\text{Int}(B)} = B''''$. Przyjmując $X = B'$ mamy zatem $B = X''''$ i wzór (18) z § 8 daje

$$\text{Int}[\overline{\text{Int}(A \cdot B)} \cdot B] = 0,$$

czyli $\text{Int}[(A \odot B) \cdot B] = 0$, skąd wynika, że

$$(A \odot B) \odot B = \overline{\text{Int}[(A \odot B) \cdot B]} = 0.$$

4) Niech 1 oznacza płaszczyznę. Każde koło wraz z obwodem jest oczywiście dziedziną domkniętą. Ponieważ zaś każdy niepusty zbiór postaci $\text{Int}(A)$ zawiera pewne koło, więc wnosimy stąd, że pierścien Boole'a $\mathbf{K}$ utworzony z dziedzin domkniętych płaskich ma własność następującą:

Jeśli $A \in \mathbf{K}$ i $A \neq 0$, to istnieje takie B , że $B \in \mathbf{K}$, $0 \neq B \subset A$ i $B \neq A$.

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że układ aksjomatów (1)–(11) i (21) jest równoważny następującemu układowi aksjomatów:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, & A \cdot B &= B \cdot A, \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C, & A \cdot B + C &= (A + C) \cdot (B + C), \\ A + 0 &= A, & A \cdot 1 &= A, \\ A + A' &= 1, & A \cdot A' &= 0, \end{aligned}$$

gdzie różnica $A - B$ jest zdefiniowana jako $A \cdot B'$, a uzupełnienie A' jako $1 - A$. [Huntington].

2. Z każdego twierdzenia algebry Boole'a zapisanego w postaci równości, po której obu stronach stoją wyrażenia utworzone ze zmiennych, symboli 0 i 1 oraz symboli $+$, $\cdot$ i $'$, można otrzymać nowe twierdzenie algebry Boole'a, zastępując wzajemnie przez siebie symbole 0 i 1 oraz $+$ i $\cdot$ (zasada dwoistości).

3. Wykazać równoważność teorii opartej na aksjomatach (1)–(11) i teorii, w której terminami pierwotnymi są symbole: $\cdot$ (mnożenie) i $-$ (różnica symetryczna), a której aksjomaty stwierdzają, że zbiory tworzą pierścien algebraiczny ze względu na działania $\cdot$ i $-$, przy czym mnożenie jest idempotentne (por. § 5, str. 15–16) [Stone].