Na odwrót, z (21) wynika (20), gdyż dla $\lambda\leqslant 0$ jest wobec (21)

$$-\lambda^3\geqslant 0,\qquad A_1\lambda^2\geqslant 0,\qquad -A_2\lambda\geqslant 0,\qquad A_3>0,$$

a zatem $w(\lambda)>0$; wynika stąd, że liczba $\lambda\leqslant 0$ nie może być pierwiastkiem charakterystycznym, a więc zachodzi (20).

2^0 Wszystkie pierwiastki są ujemne:

$$\lambda_1<0,\qquad \lambda_2<0,\qquad \lambda_3<0. \tag{22}$$

Jak w poprzednim przypadku, okazuje się, że na to, aby zachodziły nierówności (22), potrzeba i wystarcza, żeby zachodziły nierówności

$$A_1<0,\qquad A_2>0,\qquad A_3<0.$$

Tak więc *na to, by wszystkie trzy pierwiastki były tego samego znaku, potrzeba i wystarcza, żeby*

$$A_2>0\qquad i\qquad A_1A_3>0. \tag{23}$$

3^0 Wszystkie pierwiastki są różne od zera, lecz nie mają zgodnych znaków. Aby tak było, potrzeba i wystarcza, żeby spełnione było zaprzeczenie warunku (23), czyli żeby

$$A_2\leqslant 0\qquad \text{lub}\qquad A_1A_3\leqslant 0. \tag{23}$$

4^0 Jeden z pierwiastków jest zerem, a dwa — różne od zera. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_2\neq 0\qquad \text{i}\qquad A_3=0.$$

Gdy $A_2>0$, oba pierwiastki różne od zera są tego samego znaku, a gdy $A_2<0$, mają one znaki przeciwne.

5^0 Dwa pierwiastki są równe zeru, a jeden różny od zera. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1\neq 0\qquad \text{i}\qquad A_2=A_3=0.$$

6^0 Wszystkie trzy pierwiastki są równe 0. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy $\mathfrak{A}$ jest zerem, a więc gdy $a_{ik}=0$ dla wszystkich i,k.

PRZYPIS II

ILOCZYN WEKTOROWY

1. Określenie. W § 3 określiliśmy iloczyn skalarowy dwóch wektorów jako pewną liczbę, przyporządkowaną parze wektorów (p. str. 16). Obecnie określimy inne działanie, zwane *mnożeniem wektorowym*, które każdej parze uporządkowanej wektorów przyporządkowuje nie liczbę, lecz wektor.

W tym celu wyróżnijmy i ustalmy jedną z dwóch możliwych orientacji trójek wektorów w przestrzeni i nazwijmy ją orientacją dodatnią (p. § 11, str. 56).

Niech wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ tworzą kąt φ. Jeśli jeden z nich jest wektorem zerowym $\mathfrak{o}$ lub jeśli oba są równoległe, to ich *iloczynem wektorowym* nazywamy wektor $\mathfrak{o}$. W przeciwnym razie ich iloczynem wektorowym nazywamy wektor $\mathfrak{c}$, spełniający następujące trzy warunki:

1^0 wektor $\mathfrak{c}$ jest prostopadły do obu wektorów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$;
2^0 trójka uporządkowana $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ ma orientację dodatnią;
3^0 zachodzi równość

$$|\mathfrak{c}|=|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\sin\varphi. \tag{1}$$

Tak określony iloczyn wektorowy oznacza się przez $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$.

2. Najprostsze własności. Z warunku 3^0 wynika, że długość iloczynu wektorowego $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ jest równa polu równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$.

Z warunku 2^0 wynika, że iloczyn wektorowy $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ zależy od porządku czynników; orientacja bowiem trójki wektorów zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu z nich.

Dokładniej: jeśli zamienimy ze sobą wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, to żeby zachować orientację, musimy zmienić tylko zwrot wektora $\mathfrak{c}$ (gdyż jego kierunek i długość na mocy 1° i 2° pozostaną te same), a więc musimy zastąpić $\mathfrak{c}$ przez $-\mathfrak{c}$. Tym samym

(2) $$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=-(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}).$$

Np. gdy dane są trzy wektory jednostkowe $\mathfrak{i},\mathfrak{j},\mathfrak{k}$, wzajemnie prostopadłe i tworzące w tym uporządkowaniu układ o orientacji dodatniej, to

(3) $$\begin{matrix} \mathfrak{i}\times\mathfrak{j}=\mathfrak{k}, & \mathfrak{j}\times\mathfrak{k}=\mathfrak{i}, & \mathfrak{k}\times\mathfrak{i}=\mathfrak{j}, \\ \mathfrak{j}\times\mathfrak{i}=-\mathfrak{k}, & \mathfrak{k}\times\mathfrak{j}=-\mathfrak{i}, & \mathfrak{i}\times\mathfrak{k}=-\mathfrak{j}. \end{matrix}$$

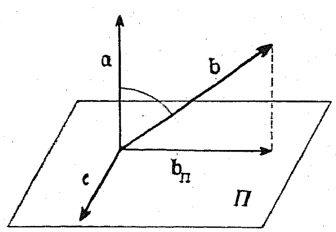
Z określenia iloczynu wektorowego wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej m jest

(4) $$(m\cdot\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\times(m\cdot\mathfrak{b})=m\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}),$$

stąd zaś dla dowolnych liczb rzeczywistych m i n

(5) $$(m\cdot\mathfrak{a})\times(n\cdot\mathfrak{b})=mn\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}).$$

Przyjmijmy, że wybraliśmy tę z obu możliwych orientacji, którą — posługując się anatomią człowieka — oznaczyliśmy jako lewoskrętną (p. § 12, str. 59). Jeśli zatem człowiek stoi na płaszczyźnie, w której leżą wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, zwrócony głową tak, jak wskazuje wektor $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, to widzi najkrótszy obieg doprowadzający wektor $\mathfrak{a}$ do pokrycia się z wektorem $\mathfrak{b}$ jako zgodny z ruchem wskazówek zegara.



Rys. 170

Niech teraz

$$|\mathfrak{a}|=1$$

i niech $\mathfrak{b}$ będzie dowolnym wektorem mającym wspólny początek z wektorem $\mathfrak{a}$, Π — płaszczyzną prostopadłą do $\mathfrak{a}$, wreszcie φ — kątem o ramionach $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ (rys. 170). Wówczas dla rzutu $\mathfrak{b}_\Pi$ wektora $\mathfrak{b}$ na płaszczyznę Π dostajemy

$$|\mathfrak{b}_\Pi|=|\mathfrak{b}|\cos(\pi/2-\varphi)=|\mathfrak{b}|\sin\varphi=|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\sin\varphi=|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|.$$

Obróćmy teraz wektor $\mathfrak{b}_\Pi$ w płaszczyźnie Π o kąt prosty dokoła $\mathfrak{a}$ w ten sposób, żeby człowiek stojący na płaszczyźnie Π i zwrócony głową w półprzestrzeń wskazaną przez $\mathfrak{a}$ widział ten obrót jako zgodny z ruchem wskazówki zegara. Wówczas wektor $\mathfrak{b}_\Pi$ przechodzi w wektor $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$.

Z tej własności rzutów $\mathfrak{b}_\Pi$ skorzystamy dla dowodu rozdzielności lewo- i prawostronnej dodawania wektorów względem mnożenia wektorowego:

(6) $$\mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\times\mathfrak{b},$$

(7) $$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}.$$

Wystarczy udowodnić tylko równość (6), gdyż (7) z niej wynika; mamy bowiem

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=-\{\mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\}=-\{\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\times\mathfrak{b}\}=$$
$$=-\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}+(-\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})=\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}.$$

Dla dowodu równości (6) załóżmy naprzód, że $|\mathfrak{c}|=1$, i niech

(8) $$\mathfrak{d}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}.$$

Dla rzutów wektorów $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{d}$ na płaszczyznę prostopadłą do $\mathfrak{c}$ zachodzi wobec (8) równość

$$\mathfrak{d}_\Pi=\mathfrak{a}_\Pi+\mathfrak{b}_\Pi.$$

Obróćmy teraz w płaszczyźnie Π wszystkie trzy rzuty dokoła $\mathfrak{c}$ o kąt prosty w sposób opisany poprzednio dla rzutu $\mathfrak{b}_\Pi$. Otrzymamy trzy wektory $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{d}_1$, dla których nadal

(9) $$\mathfrak{d}_1=\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1.$$

Na podstawie udowodnionej własności rzutu $\mathfrak{b}_\Pi$ jest

$$\mathfrak{d}_1=\mathfrak{c}\times\mathfrak{d},\qquad \mathfrak{a}_1=\mathfrak{c}\times\mathfrak{a},\qquad \mathfrak{b}_1=\mathfrak{c}\times\mathfrak{b},$$

a więc wobec (9) i (8) dostajemy (6).

Odrzućmy teraz założenie, że $|\mathfrak{c}|=1$. Przyjmijmy więc $|\mathfrak{c}|\neq 1$. Jeśli $|\mathfrak{c}|>0$, niech

$$\mathfrak{c}_1=\frac{\mathfrak{c}}{|\mathfrak{c}|}.$$

Zatem $\mathfrak{c}=|\mathfrak{c}|\mathfrak{c}_1$ i $|\mathfrak{c}_1|=1$. Stąd

$$\mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=|\mathfrak{c}|\{\mathfrak{c}_1\times(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\}=|\mathfrak{c}|\{\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{a}+\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{b}\}=$$
$$=(|\mathfrak{c}|\mathfrak{c}_1)\,\mathfrak{a}+(|\mathfrak{c}|\mathfrak{c}_1)\times\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\times\mathfrak{b}.$$

Jeśli zaś $|\mathfrak{c}|=0$, wzór (6) jest oczywisty.

Z (6) i (7) otrzymujemy przez indukcję rozdzielność lewo- i prawostronną sumy dowolnej ilości wektorów względem mnożenia wektorowego.

Z (6) wynika też w prosty sposób wzór

(10) $$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})=\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{d}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{d}.$$

3. Składowe iloczynu wektorowego. Niech teraz będzie dany w przestrzeni prostokątny układ współrzędnych $Oxyz$. Wyznaczoną przezeń orientację uważajmy za dodatnią i niech $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ będą wektorami podstawowymi tego układu współrzędnych. Wówczas zachodzą wzory (3).

Weźmy ponadto pod uwagę dowolne dwa wektory $\mathfrak{a}_1=[a_1, b_1, c_1]$ i $\mathfrak{a}_2=[a_2, b_2, c_2]$. Jest więc

$$\mathfrak{a}_1=a_1\mathfrak{i}+b_1\mathfrak{j}+c_1\mathfrak{k} \quad \text{i} \quad \mathfrak{a}_2=a_2\mathfrak{i}+b_2\mathfrak{j}+c_2\mathfrak{k}.$$

Stosując wzory (3) i (10), dostajemy stąd

$$\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2=(b_1c_2-c_1b_2)\mathfrak{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\mathfrak{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathfrak{k}. \tag{11}$$

Tym samym wektor $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2$ ma składowe

$$a=b_1c_2-c_1b_2, \qquad b=c_1a_2-a_1c_2, \qquad c=a_1b_2-b_1a_2. \tag{12}$$

Równość (11) można napisać symbolicznie w postaci

$$\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2=\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Rozumieć ją należy w ten sposób, że gdybyśmy rozwinęli w niej formalnie wyznacznik według pierwszego wiersza, to otrzymalibyśmy równość (11).

4. Iloczyn mieszany wektorów. Niechaj będą dane trzy wektory $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c}$. Zajmiemy się znaczeniem geometrycznym tzw. *iloczynu mieszanego* $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}$.

Pomnóżmy zatem skalarowo wektor $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ przez $\mathfrak{c}$.

W tym celu wyprowadźmy wszystkie trzy wektory z jednego punktu. Oczywiście, gdy leżą one wszystkie na jednej płaszczyźnie, to $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}=0$, gdyż wówczas wektory $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c}$ są prostopadłe.

W przypadku zaś, gdy nie leżą one na jednej płaszczyźnie, mamy (p. § 3, str. 16)

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}=|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{c}|\cos\varphi, \tag{14}$$

gdzie φ jest kątem utworzonym przez $\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$. Ponieważ liczba $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$ jest równa polu równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, liczba zaś $|\mathfrak{c}|\cos\varphi$ jest równa długości prostopadłej opuszczonej z końca wektora $\mathfrak{c}$ do płaszczyzny, w której leżą wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, więc wartość bezwzględna wyrażenia po prawej stronie równości (14) jest równa objętości równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ jako na krawędziach.

Oznaczając teraz przez V objętość czworościanu zbudowanego na tychże trzech wektorach, mamy zatem

$$V={}^1/_6|(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}|.$$

Jak łatwo widzieć, jeżeli trójka uporządkowana $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ ma orientację dodatnią, to $\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ leżą po jednej i tej samej stronie płaszczyzny zawierającej wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$; wówczas więc $0<\varphi<{}^\pi/_2$, a zatem $\cos\varphi\geqslant 0$; gdy zaś trójka $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ ma orientację ujemną, otrzymujemy $\varphi>{}^\pi/_2$, a zatem $\cos\varphi<0$.

Tak więc udowodniliśmy twierdzenie:

Dla każdej trójki uporządkowanej wektorów $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$, *wychodzących z jednego punktu, objętość V czworościanu zbudowanego na tych wektorach wyraża się wzorem*

$$V=\pm{}^1/_6(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}, \tag{15}$$

gdzie znak + należy wziąć wtedy, gdy trójka $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ *ma orientację dodatnią, a znak — wtedy, gdy ma ona orientację ujemną.*

Oznaczmy dla $k=1,2,3$ przez a_k,b_k,c_k składowe wektorów $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$. Wobec (12) i wobec wzorów (18) z § 7 (p. str. 33) dostajemy

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}=aa_3+bb_3+cc_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Używając znakowania (8) ze str. 56, otrzymujemy stąd na mocy (15)

$$V=\pm{}^1/_6(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\mathfrak{c}=\pm{}^1/_6\begin{vmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} \end{vmatrix} \tag{17}$$

czyli (12), str. 48.

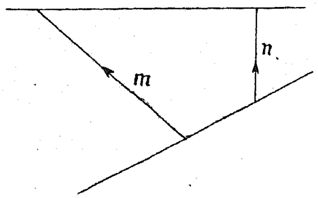
5. Odległość między dwiema prostymi skośnymi. Gdy $|\mathfrak{e}|=1$, długość rzutu wektora $\mathfrak{a}$ na oś zawierającą wektor $\mathfrak{e}$ jest równa wartości bezwzględnej iloczynu skalarowego $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$. Wynika to łatwo ze wzoru (4), str. 17.

Niech teraz będą dane dwie proste mające w układzie *prostokątnym* współrzędnych równania

$$\frac{x-x_k}{a_k}=\frac{y-y_k}{b_k}=\frac{z-z_k}{c_k}, \qquad \text{gdzie } k=1 \text{ i } 2. \tag{18}$$

Niech $\mathfrak{a}_k = [a_k, b_k, c_k]$ i niech $\mathfrak{m}$ będzie wektorem o początku (x_1, y_1, z_1) i końcu (x_2, y_2, z_2), a $\mathfrak{e}$ — wektorem o długości 1, prostopadłym do obu prostych (18). Zatem (p. rys. 171)

$$\mathfrak{e} = \pm \frac{\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|}.$$



Rys. 171

Odległość d między prostymi (18) jest równa długości rzutu wektora $\mathfrak{m}$ na oś zawierającą wektor $\mathfrak{e}$, a więc

$$d = \pm \mathfrak{e}\mathfrak{m}$$

czyli

$$d = \pm \frac{(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)\mathfrak{m}}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|}. \tag{20}$$

Znak zależy w wiadomy sposób od orientacji trójki $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{m}$. Z (16) i (20) wynikają wzory (14) i (15) ze str. 115.