powiadających sobie wzajemnie prostych z obu pęków w odwzorowaniu rzutowym, wyznaczającym stożkową Γ według twierdzenia Steinera. Pierwszy pęk przecinamy prostą *34*, a drugi prostą *23*. Dostajemy po cztery punkty przecięcia, mianowicie *3*, P, III, *4* i *3*, Q, I, *2*. Odwzorowanie rzutowe prostej *34* na prostą *23*, w którym punkty *3* i *3*, P i *2*, Q i *4* oraz I i III odpowiadają sobie wzajemnie, jest perspektywiczne na mocy lematu dualnego do udowodnionego w § 89 (p. str. 473), ponieważ punkt *3*, w którym przecinają się proste *23* i *34*, przechodzi sam na siebie. Zatem wszystkie proste łączące punkty, które odpowiadają sobie w tym odwzorowaniu, przechodzą przez jeden punkt. W szczególności więc prosta $I\,III$ przechodzi przez punkt przecięcia prostych $Q4$ i $2P$, c. b. d. o.

Korzystając z twierdzenia Pascala, można skonstruować za pomocą samego liniału dowolnie wiele punktów stożkowej, gdy danych jest pięć jej punktów *1*, *2*, *3*, *4*, *5*. Prowadzimy mianowicie przez punkt *1* dowolną prostą *16* (punktu *6* na razie nie znając) i wyznaczamy punkt III przecięcia prostych *34* i *16*. Daje to nam prostą Pascala $III\,II$, a więc i punkt I. Prosta *5I* przecina prostą *16* w punkcie *6*.

Skorzystaliśmy tu m. in. z tego, że punkty *1*, *2*, *3*, *4* i *5* wyznaczają punkt II jednoznacznie. Zauważmy, że proste *6* I i *6* III przechodzą przez stałe punkty *1* i *5*, podczas gdy punkty I i III mogą zmieniać swe położenie na (stałych) prostych *34* i *23*. Biorąc pod uwagę trójkąt o wierzchołkach I, III, *6*, otrzymujemy w ten sposób następujące *twierdzenie Newtona i Maclaurina*:

Jeśli trzy boki trójkąta przechodzą przez trzy stałe punkty, a dwa jego wierzchołki poruszają się po stałych prostych, to trzeci wierzchołek zakreśla stożkową.

ROZDZIAŁ XIX

KWADRYKI I POWIERZCHNIE DRUGIEJ KLASY

§ 92. Klasyfikacja rzutowa kwadryk

Definicja powierzchni n-tego stopnia i n-tej klasy w przestrzeni jest analogiczna do definicji krzywych n-tego stopnia i n-tej klasy na płaszczyźnie. Np. zbiór punktów leżących na płaszczyźnie tworzy powierzchnię pierwszego stopnia, zbiór płaszczyzn przechodzących przez punkt — powierzchnię pierwszej klasy.

Pierwszym nasuwającym się zagadnieniem jest wyznaczenie wszystkich typów rzutowych powierzchni 2-go stopnia i 2-ej klasy.

Stosując te same rozumowania algebraiczne, co na płaszczyźnie, dostajemy w *geometrii rzeczywistej* następujące typy rzutowe kwadryk *o równaniach rzeczywistych*, zależnie od rzędu macierzy $\mathfrak{A}$, który będziemy nazywali *rzędem kwadryki*, i od znaków pierwiastków równań charakterystycznych:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\\ (2) & x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0\\ (3) & x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0\end{array}\right\}\quad R(\mathfrak{A})=4,$$

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\\ (5) & x_1^2+x_2^2-x_3^2=0\end{array}\right\}\quad R(\mathfrak{A})=3,$$

$$\left.\begin{array}{ll}(6) & x_1^2+x_2^2=0\\ (7) & x_1^2-x_2^2=0\end{array}\right\}\quad R(\mathfrak{A})=2.$$

Pierwsze trzy typy powierzchni mają rząd równy 4. Powierzchnia typu (1) jest nierzeczywista. Typ (2) obejmuje elipsoidę, hiperboloidę dwupowłokową i paraboloidę eliptyczną. Dla paraboloidy eliptycznej, np. o równaniu

$$Ax^2+By^2=2z,\qquad \text{gdzie}\quad A>0\quad \text{i}\quad B>0,$$

otrzymujemy równanie jednorodne

$$Ax_1^2+Bx_2^2=2x_3x_4$$

czyli

$$Ax_1^2+Bx_2^2+\tfrac{1}{2}(x_3-x_4)^2-\tfrac{1}{2}(x_3+x_4)^2=0,$$

które przez przekształcenie

$$y_1=\sqrt{A}x_1,\qquad y_2=\sqrt{B}x_2,\qquad y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_3-x_4),\qquad y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_3+x_4)$$

o wyznaczniku $\sqrt{AB}\neq 0$ sprowadza się do (2).

Typ (3) obejmuje paraboloidę hiperboliczną i hiperboloidę jednopowłokową.

W geometrii rzutowej rzeczywistej możemy więc podzielić powierzchnie rzędu 4 na trzy typy: nierzeczywiste, rzeczywiste o tworzących nierzeczywistych i rzeczywiste o tworzących rzeczywistych. Można zatem przekształcić rzutowo każdą z trzech powierzchni — elipsoidę, hiperboloidę dwupowłokową i paraboloidę eliptyczną — w każdą z dwóch pozostałych.

Jeśli przekształcenie rzutowe przeprowadza jedną z płaszczyzn stycznych do elipsoidy w płaszczyznę w ∞, to elipsoida przechodzi w paraboloidę.

Jeśli płaszczyzna przecinająca elipsoidę wzdłuż elipsy rzeczywistej przechodzi w płaszczyznę w ∞, to obrazem elipsoidy jest hiperboloida dwupowłokowa.

Jeśli płaszczyznę styczną do hiperboloidy jednopowłokowej przekształcić rzutowo w płaszczyznę w ∞, to hiperboloida ta przechodzi w paraboloidę hiperboliczną.

Powierzchnie rzędu 3 są to stożki. Należą do nich: stożki i walce nierzeczywiste (typ (4)) oraz stożki i walce rzeczywiste (typ (5)). Walce są to stożki, których wierzchołek jest punktem w ∞.

Jeśli przekształcenie rzutowe przeprowadza płaszczyznę przechodzącą przez środek stożka w płaszczyznę w ∞, to stożek przechodzi w walec eliptyczny, hiperboliczny lub paraboliczny, zależnie od tego, czy płaszczyzna przecina ten stożek wzdłuż dwóch tworzących nierzeczywistych, rzeczywistych, czy wzdłuż jednej tworzącej (czyli jest styczna).

Powierzchnia typu (6) rozpada się na parę płaszczyzn nierzeczywistych, a typu (7) — rzeczywistych.

Prócz przypadków (1)-(7) równanie drugiego stopnia można sprowadzić do postaci

(8) $$x_1^2=0,$$

gdy $R(\mathfrak{A})=1$. Równanie to nie przedstawia kwadryki (*płaszczyzna podwójna*).

W *geometrii zespolonej* otrzymujemy następujące trzy typy kwadryk:

(9) $$\begin{aligned} &x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0, && R(\mathfrak{A})=4,\\ &x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, && R(\mathfrak{A})=3,\\ &x_1^2+x_2^2=0, && R(\mathfrak{A})=2.\end{aligned}$$

Każdy z tych typów jest w zupełności scharakteryzowany już przez rząd kwadryki.

§ 93. Powierzchnie drugiej klasy

Przez zdualizowanie klasyfikacji rzutowej kwadryk z poprzedniego paragrafu stwierdzamy, że powierzchnie drugiej klasy dzielą się również na 7 typów rzutowych rzeczywistych i 3 zespolone w zależności od rzędu macierzy, który będziemy nazywali *rzędem powierzchni*. Powierzchnie drugiej klasy rzędu 2, czyli powierzchnie o równaniach

$$u_1^2+u_2^2=0,\qquad u_1^2-u_2^2=0,$$

są: pierwsza parą punktów nierzeczywistych, a druga — rzeczywistych.

Ażeby zbadać powierzchnie dualne do powierzchni typów (1)-(5) z § 92, zdualizujemy pojęcie stycznej. Prostą nazwaliśmy styczną do kwadryki, jeśli ma z nią jeden punkt wspólny lub w całości na niej leży. Obecnie prostą będziemy nazywali *styczną do powierzchni 2-ej klasy*, jeśli ma z tą powierzchnią jedną płaszczyznę wspólną lub jeśli każda zawierająca ją płaszczyzna jest elementem tej powierzchni.

Przez zdualizowanie dowodu ze str. 345 stwierdzamy, że *na to, by prosta leżąca na płaszczyźnie* $(v_1:v_2:v_3:v_4)$, *należącej do powierzchni* $f(u_1,u_2,u_3,u_4)=0$, *była styczna do tej powierzchni, potrzeba i wystarcza, żeby każda płaszczyzna v, zawierająca tę prostą, spełniała równanie*

(1) $$u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}(v)+u_2\frac{\partial f}{\partial u_2}(v)+u_3\frac{\partial f}{\partial u_3}(v)+u_4\frac{\partial f}{\partial u_4}(v)=0.$$

Niech

$$\varrho m_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(v) \equiv a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + a_{i3}v_3 + a_{i4}v_4, \qquad \text{gdzie} \quad \varrho \neq 0. \tag{2}$$

Liczby m_i mogą znikać równocześnie wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathfrak{A}|=0$. Jeśli $|\mathfrak{A}|=0$ i $R(\mathfrak{A})=3$, to istnieje tylko jedna płaszczyzna osobliwa, dla której liczby (2) są jednocześnie równe 0 (płaszczyzna ta odpowiada dualnie osobliwemu punktowi stożka, tj. jego środkowi). Poza tym przypadkiem wyjątkowym (niemożliwym dla powierzchni rzędu 4) równania (1) wyznaczają punkt. Równanie (1) wyraża, że każda płaszczyzna przechodząca przez daną prostą przechodzi przez punkt (2). Tym samym i prosta przechodzi przez punkt (2).

Udowodniliśmy więc, że *wszystkie proste styczne do powierzchni drugiej klasy, rzędu* 3 *lub* 4, *położone na płaszczyźnie należącej do tej powierzchni, przechodzą przez jeden punkt (z wyjątkiem płaszczyzny osobliwej w przypadku, gdy* $R(\mathfrak{A})=3$) *i że punkt ten ma współrzędne* (2).

Nazywamy go *punktem styczności prostej do powierzchni 2-ej klasy.*

Zachodzą następujące twierdzenia dualne:

Zbiór punktów styczności powierzchni 2-ej klasy rzędu 4 *jest kwadryką rzędu* 4 *i na odwrót, każda kwadryka rzędu* 4 *jest zbiorem punktów styczności powierzchni drugiej klasy rzędu* 4.

Zbiór płaszczyzn stycznych do kwadryki rzędu 4 *jest powierzchnią 2-ej klasy rzędu* 4 *i na odwrót, każda powierzchnia 2-ej klasy rzędu* 4 *jest zbiorem płaszczyzn stycznych do kwadryki rzędu* 4.

Twierdzeń tych dowodzi się w taki sam sposób jak analogicznych twierdzeń o krzywych (p. § 87, str. 453). Można je krótko tak wysłowić:

Kwadryki rzędu 4 *są obwiedniami zbioru płaszczyzn stanowiących powierzchnię 2-ej klasy rzędu* 4 — *i na odwrót.*

W dalszym ciągu będziemy nazywali *kwadryką rzędu* 4 zbiór punktów i płaszczyzn stycznych do kwadryk rzędu 4 w dotychczasowym sensie.

Tak określona kwadryka rzędu 4 jest dualna sama ze sobą. Tak samo jak na płaszczyźnie, dowodzi się następujących twierdzeń w przestrzeni:

Jeśli kwadryka rzędu 4 *ma równanie we współrzędnych punktu*

$$\sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}x_i x_k = 0, \tag{3}$$

to ma równanie we współrzędnych prostej

$$\sum_{i,k=1}^{4} b_{ik}u_i u_k = 0, \tag{4}$$

gdzie

$$\mathfrak{B} = (b_{ik}) = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Równanie (4) *można też napisać w postaci*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Jeśli kwadryka rzędu 4 *ma równanie we współrzędnych płaszczyzny*

$$\sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}u_i u_k = 0, \tag{3'}$$

to ma równanie we współrzędnych punktu

$$\sum_{i,k=1}^{4} b_{ik}x_i x_k = 0, \tag{4'}$$

gdzie

$$\mathfrak{B} = (b_{ik}) = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Równanie (4′) *można też napisać w postaci*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5'}$$

Zauważmy jeszcze, że *każdemu z trzech typów kwadryk* (1)-(3) *z* § 92 (p. str. 481) *odpowiada dualnie ten sam typ.*

Wynika to natychmiast stąd, że kwadryka o równaniu we współrzędnych punktu

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + A_4x_4^2 = 0, \qquad \text{gdzie} \quad A_i \neq 0,$$

ma równanie we współrzędnych prostej

$$\frac{u_1^2}{A_1} + \frac{u_2^2}{A_2} + \frac{u_3^2}{A_3} + \frac{u_4^2}{A_4} = 0,$$

a więc znak współczynników nie ulega zmianie.

Pozostają do rozpatrzenia powierzchnie dualne do powierzchni typów (4) i (5) z § 92, czyli do stożków. Udowodnimy, że *dualnym do stożka jest zbiór płaszczyzn przeprowadzonych przez wszystkie styczne do stożkowej właściwej.*

Stożkowi zatem odpowiada dualnie stożkowa właściwa.

Istotnie, stożek (rzeczywisty lub nierzeczywisty) można skonstruować w następujący sposób: przez dowolny punkt P, nie leżący na kwadryce Λ rzędu 4, prowadzimy proste styczne do Λ. Miejscem geometrycznym punktów leżących na wszystkich tych prostych jest kwadryka rzędu 3 (czyli stożek).

Zdualizujmy tę konstrukcję: na dowolnej płaszczyźnie Π, która nie jest styczna do kwadryki Λ rzędu 4, prowadzimy wszystkie proste styczne do Λ (są one styczne do stożkowej, która jest przekrojem kwadryki Λ płaszczyzną Π). Miejscem geometrycznym płaszczyzn przechodzących przez te styczne jest powierzchnia 2-giej klasy rzędu 3.

Analitycznie przekonujemy się o tym, jak następuje:

Niech będzie dana stożkowa Γ równaniami

(6) $$x_1^2+x_2^2+\varepsilon x_3^2=0, \qquad x_4=0, \qquad \text{gdzie} \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Prosta styczna do niej w punkcie $(m_1:m_2:m_3:0)$ ma równania

$$m_1x_1+m_2x_2+\varepsilon m_3x_3=0, \qquad x_4=0.$$

Płaszczyzna zawierająca tę styczną ma równanie

$$\lambda_1(m_1x_1+m_2x_2+\varepsilon m_3x_3)+\lambda_2m_4x_4=0,$$

więc ma współrzędne

$$\varrho u_1=\lambda_1m_1, \qquad \varrho u_2=\lambda_1m_2, \qquad \varrho u_3=\varepsilon\lambda_1m_3, \qquad \varrho u_4=\lambda_2m_4.$$

Wobec tego, że m_i spełniają równania (6), dostajemy

(7) $$u_1^2+u_2^2+\varepsilon u_3^2=0,$$

czyli typ dualny do (4) i (5) z § 92 (str. 481).

Na odwrót, jak łatwo widzieć, każda płaszczyzna $(u_1:u_2:u_3)$ spełniająca równanie (7) zawiera styczną do stożkowej Γ, c. b. d. o.

W równaniu stożkowych na płaszczyźnie występuje 6 współczynników a_{ik}. Parametrów istotnych, wyznaczających stożkową, jest więc 5, skąd wniosek (p. § 87, str. 457), że 5 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej, wyznacza stożkową. Podobnie w równaniu kwadryk jest 10 współczynników, a więc 9 parametrów istotnych. Mogłoby się wobec tego wydać słusznym twierdzenie, że 9 punktów, z których żadne 4 nie leżą w jednej płaszczyźnie, wyznacza kwadrykę. Twierdzenie to jednak nie jest prawdziwe, przekrój bowiem dwóch kwadryk jest na ogół krzywą przestrzenną, np. przekrój kuli $x^2+y^2+z^2=4$ i walca $(x-1)^2+y^2=1$. Na krzywej tej można z łatwością wskazać 9 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej prostej, a mimo to przechodzą przez tę krzywą dwie różne kwadryki (mianowicie kula i walec). Tych 9 punktów nie wyznacza zatem kwadryki.

Pomijamy tu dokładną analizę przypadków, w których 9 punktów wystarcza do wyznaczenia kwadryki, jak również dowód twierdzenia, że przez każde 9 punktów, z których żadne 4 nie leżą na jednej płaszczyźnie, przechodzi co najmniej jedna kwadryka.

§ 94. Płaszczyzna biegunowa i biegun

Podobnie jak względem stożkowej na płaszczyźnie, dowodzi się, że względem kwadryki w przestrzeni płaszczyzna biegunowa i biegun płaszczyzny są niezmiennikami przekształceń rzutowych.

Biegun i płaszczyzna biegunowa odpowiadają sobie dualnie.

W § 63 pominęliśmy teorię płaszczyzn biegunowych punktu względem walca. Ograniczyliśmy się tam do powierzchni rzędu 4 i do stożków. Wobec tego, że w geometrii rzutowej walec jest szczególnym przypadkiem stożka, wszystkie własności rzutowe płaszczyzn biegunowych względem stożka obejmują też własności płaszczyzn biegunowych względem walca.

Bez zmiany dowodów przenoszą się z geometrii płaskiej do przestrzennej twierdzenia:

Przez punkt P nie leżący na kwadryce rzędu 3 lub 4 poprowadźmy proste, przecinające tę kwadrykę w punktach M i N. Miejscem geometrycznym punktów Q, dla których $$(MNPQ)=-1,$$ *jest płaszczyzna biegunowa punktu P.*	*Na płaszczyźnie π nie należącej do powierzchni 2-ej klasy rzędu 3 lub 4 poprowadźmy prostą, przez którą przechodzą płaszczyzny styczne μ i ν do tej powierzchni. Płaszczyzny $\varkappa$, dla których* $$(\mu\nu\pi\varkappa)=-1,$$ *przechodzą przez jeden punkt, którym jest biegun płaszczyzny π.*

Czworościanem samobiegunowym względem kwadryki rzędu 4 (powierzchni 2-ej klasy rzędu 4) nazywa się czworościan, którego każda ściana (wierzchołek) jest płaszczyzną biegunową (biegunem) przeciwległego wierzchołka (ściany).

Na to, by kwadryka miała w jakimś układzie współrzędnych rzutowych równanie kształtu

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2=0, \tag{1}$$

potrzeba i wystarcza, żeby czworościan podstawowy tego układu współrzędnych był względem niej samobiegunowy.

W przypadku stożka wszystkie płaszczyzny biegunowe przechodzą przez wierzchołek, a więc czworościan samobiegunowy nie istnieje.

W § 66 dowiedliśmy, że gdy punkt porusza się po prostej l, to jego płaszczyzna biegunowa względem kwadryki obraca się dokoła pewnej prostej l'. Proste l i l' nazwaliśmy biegunowo sprzężonymi względem tej kwadryki.

Na to, by prosta l była biegunowo sprzężona sama ze sobą, potrzeba i wystarcza, żeby była tworzącą kwadryki.

Jeśli bowiem prosta l jest tworzącą, to płaszczyzna biegunowa każdego jej punktu jest płaszczyzną styczną w tymże punkcie, a więc zawiera tę prostą.

Konieczność warunku jest równie łatwa do udowodnienia. Mianowicie:

Jeśli prosta l jest styczna do kwadryki w punkcie P, lecz nie jest tworzącą tej kwadryki, to prosta l' biegunowo sprzężona z prostą l jest styczną w punkcie P, różną od stycznej l'.

Płaszczyzna biegunowa każdego punktu prostej l musi bowiem przejść przez punkt P.

W czworościanie samobiegunowym krawędzie przeciwległe są biegunowo sprzężone.

Dwie proste biegunowo sprzężone, jeśli nie są styczne do kwadryki, są przeciwległymi krawędziami nieskończenie wielu czworościanów samobiegunowych. Wynika stąd twierdzenie:

Gdy kwadryka rzędu 4 ma tworzące nierzeczywiste, to z dwóch prostych biegunowo sprzężonych, które nie są styczne do tej kwadryki, jedna przebija ją w dwóch różnych punktach rzeczywistych, a druga w nierzeczywistych.

Istotnie, obierając je za krawędzie $x_1=0$, $x_2=0$ i $x_3=0$, $x_4=0$ czworościanu podstawowego, możemy przez odpowiedni dobór punktu jednostkowego nadać równaniu kwadryki postać

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0;$$

stąd wynika teza twierdzenia.

Ostatnie twierdzenie nie zachodzi dla kwadryk o tworzących rzeczywistych. Jest to w związku z nieistnieniem u tych kwadryk ani wnętrza, ani zewnętrza.

§ 95. Tworzenie kwadryk przez pęki płaszczyzn

Niech będzie dana kwadryka rzędu 4. Jak wiemy z § 65, str. 352, jest ona powierzchnią prostokreślną, utworzoną przez dwa zbiory prostych, Σ_1 i Σ_2, o następujących własnościach:

1⁰ przez każdy punkt powierzchni przechodzi dokładnie jedna tworząca z każdego zbioru;

2⁰ każda płaszczyzna przechodząca przez tworzącą jednego zbioru przechodzi przez tworzącą drugiego zbioru;

3⁰ oba zbiory nie mają prostych wspólnych;

4⁰ każda prosta jednego zbioru przecina każdą prostą drugiego zbioru;

5⁰ każde dwie proste jednego zbioru są skośne.

Niech t_1 i t_2 będą tworzącymi należącymi do zbioru Σ_1. Są one zatem skośne. Każda z nich jest osią (wspólną krawędzią) pęku płaszczyzn; oznaczmy te pęki przez Θ i Θ'. Przez każdą prostą zbioru Σ_2 można przeciągnąć płaszczyznę Π należącą do pęku Θ i płaszczyznę Π' należącą do pęku Θ'. Przyporządkujmy płaszczyźnie Π płaszczyznę Π'.

Otrzymujemy w ten sposób odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne T pęku Θ na pęk Θ'.

Odwzorowanie T jest rzutowe, każde bowiem cztery pary Π_k, Π_k' (gdzie $k=1,2,3,4$) płaszczyzn odpowiadających sobie wzajemnie według odwzorowania T spełniają równość

$$(\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4)=(\Pi_1'\Pi_2'\Pi_3'\Pi_4'). \tag{1}$$

Istotnie, weźmy pod uwagę dowolną tworzącą p ze zbioru Σ_1. Oznaczmy dla $i=1,2,3,4$ przez P_i punkty przebicia płaszczyzn Π_i tą tworzącą. Płaszczyzna Π_i jest wyznaczona przez tworzącą, wzdłuż której przecina się ona z płaszczyzną Π_i', a punkt P_i jest punktem przecięcia tych tworzących z prostą p. Zatem, na podstawie twierdzenia Pappusa dla pęku płaszczyzn i prostej, obie strony równości (1) są równe $(P_1P_2P_3P_4)$.

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne.

Jeżeli dwa pęki płaszczyzn Θ_1 i Θ_2 o osiach skośnych t_1 i t_2 są odwzorowane na siebie rzutowo, to proste przecięcia odpowiadających sobie płaszczyzn tworzą kwadrykę właściwą.

Istotnie, obierzmy prostą t_1 za krawędź $x_1=0$, $x_2=0$, a prostą t_2 — za krawędź $x_3=0$, $x_4=0$ czworościanu podstawowego układu współrzędnych rzutowych. Wówczas płaszczyzny pęków Θ_1 i Θ_2 mają równania

$$(2) \qquad \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=0 \quad \text{i} \quad \mu_1 x_3+\mu_2 x_4=0.$$

Ściany czworościanu możemy dobrać tak, by płaszczyzną $x_3=0$ była płaszczyzna odpowiadająca w odwzorowaniu jednego pęku na drugi płaszczyźnie $x_1=0$, płaszczyzną $x_4=0$ była płaszczyzna odpowiadająca w tym odwzorowaniu płaszczyźnie $x_2=0$, a płaszczyzną $x_3-x_4=0$ — płaszczyzna odpowiadająca płaszczyźnie $x_1-x_2=0$. Odwzorowanie rzutowe

$$\lambda_1:\lambda_2=\mu_1:\mu_2$$

jednego z pęków (2) na drugi jest więc identyczne z danym odwzorowaniem pęku Θ_1 na pęk Θ_2. Zatem w odwzorowaniu tym odpowiadają sobie płaszczyzny

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2' x_2=0, \qquad \lambda_1 x_3+\lambda_2 x_4=0.$$

Dla punktów przecięcia obu płaszczyzn otrzymujemy przez eliminację λ_1 i λ_2

$$(3) \qquad x_1x_4-x_2x_3=0,$$

czyli kwadrykę rzędu 4, c. b. d. o.

Dowiedliśmy równocześnie, że *każda kwadryka daje się przedstawić równaniem kształtu* (3).

W tym przedstawieniu punkty podstawowe układu współrzędnych rzutowych mogą być nierzeczywiste.

Każda powierzchnia utkana z dwóch różnych zbiorów linii prostych jest płaszczyzną lub kwadryką rzędu 4.

Ściślej: *jeśli na powierzchni istnieją dwa zbiory prostych mające własności* 1°, 3° *i* 4° (p. str. 489), *to powierzchnia jest płaszczyzną lub kwadryką rzędu* 4.

Mogą bowiem zajść tylko dwa przypadki:

(a) Dwie spośród tworzących z jednego zbioru, np. ze zbioru Σ_1, leżą na jednej płaszczyźnie. Wówczas z własności 4° wynika, że powierzchnia jest płaszczyzną.

(b) Żadne dwie tworzące ze zbioru Σ_1 nie przecinają się. Wybierzmy z tego zbioru dwie tworzące t_1 i t_2; niech Θ_1 i Θ_2 będą pękami płaszczyzn przechodzących przez nie. Przyporządkowując sobie wzajemnie te płaszczyzny pęków Θ_1 i Θ_2, które przecinają się wzdłuż tworzących ze zbioru Σ_2, dowodzimy jak poprzednio, że to przyporządkowanie jest odwzorowaniem rzutowym.

Zatem na mocy poprzedniego twierdzenia krawędzie przecięcia płaszczyzn, wzajemnie sobie przyporządkowanych w tym odwzorowaniu, tworzą kwadrykę. ❫