

odwrotne. W nauce o podstawach geometrii przestrzeni rzutową zespoloną i rzeczywistą buduje się aksjomatycznie, określając w odpowiedni sposób pojęcie stosunku anharmonicznego. Następnie wyróżnia się dowolną prostą rzeczywistą, którą nazywa się prostą w ∞ , a na niej dwa punkty zespolone sprzężone, które nazywa się cyklicznymi. Proste przechodzące przez te punkty nazywa się minimalnymi. Otóż określając wówczas miary kątów między prostymi za pomocą wzoru (5), można określić odległości punktów za pomocą stosunku anharmonicznego. Geometria grupy przekształceń nie zmieniających tych odległości spełnia wówczas aksjomaty geometrii euklidesowej.

Postępowanie to daje się uogólnić. Uczynił to Cayley.

Niech na płaszczyźnie będzie dana dowolna stożkowa Γ , dwie dowolne proste p i q oraz styczne i_1 i i_2 do Γ , poprowadzone z ich punktu przecięcia. Cayley określił miarę $\omega(p, q)$ kąta między prostymi p i q wzorem

$$\omega(p, q) = \frac{1}{2i} \log(i_1 i_2 p q).$$

Gdy dane są dwa punkty P i Q i prosta przechodząca przez te punkty przecina stożkową Γ w punktach J_1 i J_2 , to odległość $d(P, Q)$ punktów P i Q określił on wzorem

$$d(P, Q) = \frac{1}{2i} \log(J_1 J_2 P Q).$$

Tak określone odległości i kąty noszą w literaturze nazwę *miar Cayleya*.

Mają one inne własności dla stożkowych Γ rzeczywistych niż dla nierzeczywistych. F. Klein, posługując się miarami Cayleya, zbudował za pomocą geometrii rzutowej modele geometrii nieeuklidesowych. Pierwszą z takich geometrii stworzył aksjomatycznie Łobaczewski i niezależnie od niego Bolyai, a rozwinął ją szczególnie Łobaczewski. Jeśli za Γ wziąć stożkową nierzeczywistą, to w geometrii nie ma prostych nie przecinających się, jeśli zaś wziąć za Γ stożkową rzeczywistą, to przez każdy punkt poza prostą przechodzi nieskończenie wiele prostych nie przecinających tej prostej.

Geometria euklidesowa daje się otrzymać w pewien sposób jako przypadek graniczny obu tych geometrii, ale sama nie mieści się wśród geometrii zbudowanych za pomocą miar Cayleya.)

(ROZDZIAŁ XVIII

KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA I DRUGIEJ KLASY

§ 85. Klasyfikacja rzutowa krzywych drugiego stopnia i drugiej klasy

Krzywą n -tego stopnia nazwaliśmy zbiór punktów, który we współrzędnych punktu daje się przedstawić równaniem

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

gdzie lewa strona jest formą n -tego stopnia, lecz który nie daje się przedstawić równaniem niższego stopnia (p. § 40, str. 201).

Dualnie określamy *krzywą n -tej klasy* jako zbiór prostych, który we współrzędnych prostej (p. § 78, str. 423) daje się przedstawić równaniem

$$(2) \quad f(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

gdzie lewa strona jest formą n -tego stopnia, lecz który nie daje się przedstawić równaniem niższego stopnia.

Np. linia prosta jest krzywą 1-go stopnia, gdyż jest zbiorem punktów dających się przedstawić równaniem

$$(3) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Analogicznie, zbiór prostych przechodzących przez punkt jest krzywą 1-ej klasy, gdyż daje się przedstawić równaniem

$$(4) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0.$$

W równaniu (3) współczynniki a_1, a_2 i a_3 są współrzędnymi prostej, a w równaniu (4) — współrzędnymi punktu.

Poprzednio mówiliśmy krótko, że równanie (3) przedstawia prostą. Przez analogię mówimy, że równanie (4) przedstawia punkt.

W tym sensie prosta jest więc krzywą 1-go stopnia, a punkt — krzywą 1-ej klasy.

Zbadaliśmy już przedtem krzywe 2-go stopnia w geometrii afinicznej. Badaliśmy je we współrzędnych jednorodnych na płaszczyźnie właściwej. Tym samym wyłączyliśmy krzywe 2-go stopnia leżące w płaszczyźnie w ∞ . W geometrii rzutowej zatarła się różnica między obydwoma typami krzywych, gdyż nie ma wyróżnionej płaszczyzny w ∞ .

Sklasyfikujemy rzutowo krzywe 2-go stopnia i 2-ej klasy. W tym celu skorzystamy z następującego twierdzenia algebraicznego (p. Przypis I, § 4):

Każdą formę kwadratową trzech zmiennych x_1, x_2, x_3 o współczynnikach rzeczywistych można przez przekształcenie postaci

$$(5) \quad x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + b_{i3}y_3, \quad \text{gdzie } i=1,2,3$$

i gdzie b_{ik} są rzeczywiste, sprowadzić do jednej z postaci kanonicznych:

$$(6) \quad \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm y_3^2, \quad \pm y_1^2 \pm y_2^2, \quad \pm y_1^2.$$

Jeśli w przekształceniu (5) dopuścimy współczynniki b_{ik} zespolone, to dostaniemy tylko trzy postacie kanoniczne:

$$(7) \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad y_1^2 + y_2^2, \quad y_1^2.$$

Na to, aby otrzymać postacie wymienione w (6) i (7) na drugim i trzecim miejscu, potrzeba i wystarcza, aby $|\mathfrak{U}|=0$, gdzie $\mathfrak{U}=(a_{ik})$.

Przez zastosowanie tego twierdzenia dostajemy następujące twierdzenia dualne:

Niech będzie dana krzywa 2-go stopnia

$$(8) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k = 0,$$

o współczynnikach rzeczywistych.

Przez przekształcenie rzutowe rzeczywiste krzywą tę można przekształcić w jedną i tylko jedną z krzywych następujących:

$$(9) \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$

$$(10) \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0,$$

$$(11) \quad y_1^2 + y_2^2 = 0,$$

$$(12) \quad y_1^2 - y_2^2 = 0,$$

Niech będzie dana krzywa 2-ej klasy

$$(8') \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}u_i u_k = 0,$$

o współczynnikach rzeczywistych.

$$(9') \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0,$$

$$(10') \quad v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0,$$

$$(11') \quad v_1^2 + v_2^2 = 0,$$

$$(12') \quad v_1^2 - v_2^2 = 0.$$

W przypadku, gdy lewa strona równania (8) sprowadza się do trzeciej z postaci (7), otrzymujemy prostą, a prosta nie jest krzywą 2-go stopnia. Dlatego mówi się wtedy, że równanie (8) przedstawia *prostą podwójną*.

We współrzędnych plückerowskich dostajemy *punkt podwójny*. Istnieją więc w geometrii rzutowej rzeczywistej dokładnie po 4 różne krzywe 2-go stopnia i 2-ej klasy; są to:

(9) stożkowa właściwa
niereczywista,

(10) stożkowa właściwa
rzeczywista,

(11) para prostych
niereczywistych,

(12) para prostych
rzeczywistych.

(9') krzywa właściwa
niereczywista,

(10') krzywa właściwa
rzeczywista,

(11') para punktów
niereczywistych,

(12') para punktów
rzeczywistych.

Krzywa 2-go stopnia, jak i krzywa 2-ej klasy, jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathfrak{U}| \neq 0$. W przeciwnym razie pierwsza rozpada się na dwie proste, a druga na dwa punkty.

W geometrii rzutowej zespolonej otrzymujemy tylko po 2 krzywe 2-go stopnia i 2-ej klasy, a mianowicie krzywe o równaniach (9) i (11) oraz o równaniach (9') i (11').

§ 86. Styczne i punkty styczności

W § 54 określiliśmy styczną do stożkowej właściwej przedstawioną równaniem

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k = 0$$

jako prostą przecinającą tę stożkową w jednym punkcie (p. str. 226). Tam też wyprowadziliśmy równanie stycznej we współrzędnych jednorodnych:

$$(2) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m) = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i m_k = 0.$$

Styczna w punkcie $(m_1:m_2:m_3)$ ma zatem współrzędne plückerowskie

$$(3) \quad u_1:u_2:u_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(m): \frac{\partial f}{\partial x_2}(m): \frac{\partial f}{\partial x_3}(m).$$

Rozumowanie tam przeprowadzone przenosi się bez żadnych zmian na dowolne rzutowe układy współrzędnych.

Przeprowadzimy obecnie rozumowanie dualne.

Niech będzie dana krzywa właściwa 2-jej klasy o równaniu

$$(4) \quad f(u_1, u_2, u_3) \equiv \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} u_i u_k = 0$$

i niech $|\mathfrak{U}| \neq 0$.

Punktem styczności krzywej (4) nazywamy punkt, przez który przechodzi dokładnie jedna prosta należąca do tej krzywej.

Udowodnimy, że na każdej prostej $(v_1:v_2:v_3)$, należącej do krzywej (4), leży dokładnie jeden punkt styczności; ma on równanie

$$(5) \quad u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}(v) + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}(v) + u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3}(v) \equiv \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} u_i v_k = 0.$$

Punkt ten ma więc współrzędne

$$(6) \quad x_1:x_2:x_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(v) : \frac{\partial f}{\partial u_2}(v) : \frac{\partial f}{\partial u_3}(v).$$

Niech prosta $(v_1:v_2:v_3)$ należy do krzywej (4), czyli

$$(7) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i v_k = 0,$$

i niech punkt P leży na tej prostej. Proste przechodzące przez punkt P można więc przedstawić parametrycznie

$$(8) \quad \varrho u_i = \mu_1 v_i + \mu_2 w_i, \quad \text{gdzie } i=1,2,3 \text{ i } \varrho \neq 0$$

i gdzie $w_1:w_2:w_3$ są współrzędnymi dowolnej innej ustalonej prostej przechodzącej przez punkt P . Aby znaleźć proste wspólne punktowi (8) i krzywej (4), podstawiamy wartości z (8) do równania (4). Otrzymujemy

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} (\mu_1 v_i + \mu_2 w_i) (\mu_1 v_k + \mu_2 w_k) = 0$$

czyli

$$(9) \quad \mu_1^2 \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i v_k + 2\mu_1 \mu_2 \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i w_k + \mu_2^2 \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} w_i w_k = 0.$$

Wobec (7) równanie (9) przybiera postać

$$(10) \quad \mu_2 (2\mu_1 \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i w_k + \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} w_i w_k) = 0.$$

Równanie to ma rozwiązania

$$(11) \quad \mu_1:\mu_2=1:0 \quad \text{ i } \quad \mu_1:\mu_2 = \left(-\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} w_i w_k \right) : \left(2 \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i w_k \right).$$

Na to, aby punkt (8) był punktem styczności, potrzeba i wystarczy, żeby rozwiązania (11) były identyczne, czyli żeby

$$(12) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i w_k = 0$$

(nie może być $\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} w_i w_k = 0$, gdyż wówczas w równaniu (10) zniknęłyby wszystkie współczynniki i krzywa zawierałaby wszystkie proste pęku (8), a więc nie byłaby właściwą).

Zastępując w_k przez u_k w równaniu (12), widzimy, że na to, aby punkt P prostej $(v_1:v_2:v_3)$, należącej do krzywej (4), był punktem styczności tej krzywej, potrzeba i wystarczy, żeby zachodziła równość

$$(13) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} v_i u_k = 0$$

dla każdej prostej $(u_1:u_2:u_3)$ przechodzącej przez P . Równanie (13) po uporządkowaniu względem u_i przybiera postać

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$

gdzie wobec $a_{ik} = a_{ki}$

$$(14) \quad \varrho x_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + a_{i3} v_3 \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u_i}(v) \quad \text{ dla } i=1,2,3.$$

Ponieważ $|\mathfrak{U}| \neq 0$, więc liczby x_i , określone wzorem (14), nie mogą równocześnie zniknąć. Zatem równanie (13) określa jeden i tylko jeden punkt styczności, leżący na prostej $(v_1:v_2:v_3)$, c. b. d. o.

§ 87. Dualizm tworów płaskich drugiego stopnia

Zbiór punktów styczności krzywej właściwej 2-jej klasy jest stożkową właściwą i na odwrót, każda stożkowa właściwa jest zbiorem punktów styczności krzywej właściwej 2-jej klasy.

Zbiór prostych stycznych do stożkowej właściwej jest krzywą właściwą 2-jej klasy i na odwrót, każda krzywa właściwa 2-jej klasy jest zbiorem prostych stycznych do stożkowej właściwej.

Udowodnimy np. twierdzenie prawe; zdualizowanie dowodu nie nastręcza trudności. Niech będzie dana stożkowa

$$(1) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| = |a_{ik}| \neq 0.$$

Styczna do niej w punkcie $(m_1 : m_2 : m_3)$ ma współrzędne

$$(2) \quad \varrho v_i = a_{i1} m_1 + a_{i2} m_2 + a_{i3} m_3, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{i} \quad \varrho \neq 0.$$

Niech

$$(3) \quad \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B} = (b_{ik}).$$

Z (2) dostajemy więc

$$(4) \quad \sigma m_i = b_{i1} v_1 + b_{i2} v_2 + b_{i3} v_3, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{i} \quad \sigma \neq 0.$$

Ponieważ

$$(5) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} m_i m_k = 0,$$

więc podstawiając tu (4), otrzymujemy

$$(6) \quad \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} v_i v_k = 0.$$

Dla macierzy formy stanowiącej lewą stronę tego równania mamy wobec (3) i (4)

$$\mathfrak{C} = (c_{ik}) = \mathfrak{B}^+ \mathfrak{A} \mathfrak{B}.$$

Ponieważ macierz $\mathfrak{A}$ jest symetryczna, więc również macierz $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$ jest symetryczna. Zatem $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+$, skąd

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Wynika stąd, że równanie (6) ma kształt

$$(7) \quad \sum_{i,k=1}^3 b_{ik} v_i v_k = 0,$$

a zatem każda styczna do stożkowej (1) spełnia równanie

$$(8) \quad \sum_{i,k=1}^3 b_{ik} u_i u_k = 0.$$

Na odwrót, każda prosta spełniająca to równanie jest styczną do stożkowej (1). Gdy bowiem zachodzi równanie (8), to określając punkt równaniem (4), sprawdzamy, że zachodzi równanie (5), a więc

punkt ten leży na stożkowej (1), ze wzorów zaś (4) i (2) wynika, że prosta jest styczna w tym punkcie, c. b. d. o.

Niech Z będzie zbiorem prostych. Jeżeli pewna krzywa Γ jest w każdym swym punkcie styczna do dokładnie jednej prostej ze zbioru Z , to krzywą tę nazywamy *obwiednią* zbioru prostych Z .

W myśl tej definicji możemy wysłowić ostatnie twierdzenie tak: *obwiednią zbioru prostych należących do krzywej właściwej 2-ej klasy jest stożkowa właściwa.*

Stożkowa właściwa jest więc wyznaczona albo jako miejsce geometryczne swych punktów, albo jako obwiednia zbioru swych stycznych.

Wobec tego odtąd będziemy rozumieli przez *stożkową właściwą* zbiór złożony z punktów stożkowej właściwej rozumianej w sensie dotychczasowym i ze stycznych do niej.

Tak pojęta stożkowa właściwa jest zatem wyznaczona równaniem we współrzędnych punktu lub we współrzędnych prostej.

Stożkowej właściwej odpowiada w dualizmie płaskim stożkowa właściwa.

Niech bowiem stożkowa właściwa ma równanie

we współrzędnych punktu

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0,$$

we współrzędnych prostej

$$\sum_{i,k=1}^3 b_{ik} u_i u_k = 0,$$

gdzie $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$.

Wówczas korelacja

$$\varrho u_k = x_k, \quad \text{gdzie} \quad k = 1, 2, 3,$$

przekształca ją w stożkową właściwą o równaniu

we współrzędnych punktu

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} u_i u_k = 0.$$

we współrzędnych prostej

$$\sum_{i,k=1}^3 b_{ik} x_i x_k = 0.$$

Udowodnimy teraz np. lewe z następujących dwu twierdzeń dualnych:

Jeśli stożkowa właściwa ma we współrzędnych punktowych równanie

$$(9) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0,$$

Jeśli stożkowa właściwa ma we współrzędnych prostej równanie

$$(9') \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} u_i u_k = 0,$$

to ma ona we współrzędnych
prostej równanie

$$(10) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

to ma ona we współrzędnych
punktowych równanie

$$(10') \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, jak dowiedliśmy, równaniem stożkowej (1) we współrzędnych prostej jest równanie (8), gdzie

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}.$$

Zatem

$$(11) \quad b_{ik} = \frac{A_{ki}}{|\mathfrak{U}|} = \frac{A_{ik}}{|\mathfrak{U}|},$$

gdzie A_{ik} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ik} w macierzy $\mathfrak{U}$ (zamiana wskaźników jest tu dozwolona ze względu na symetrię macierzy $\mathfrak{U}$). Otóż równanie (8) możemy napisać w postaci

$$(12) \quad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$

gdzie

$$\varrho x_i = b_{i1} u_1 + b_{i2} u_2 + b_{i3} u_3 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$ jest więc punktem styczności prostej $(u_1 : u_2 : u_3)$. Wobec (11) mamy dalej

$$\varrho x_1 = A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

$$\varrho x_2 = A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

$$\varrho x_3 = A_{31} u_1 + A_{32} u_2 + A_{33} u_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Podstawiając te wartości do (12), dostajemy po lewej stronie rozwinięcie wyznacznika (10) według ostatniej kolumny, c. b. d. o.

Dowiedziemy jeszcze, że:

Istnieje dokładnie jedna stożkowa przechodząca przez 5 danych punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej.

Istnieje dokładnie jedna stożkowa styczna do 5 danych prostych, z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt.

Znów ograniczymy się do jednego z tych twierdzeń dualnych, np. do lewego. Spośród 5 danych punktów obierzmy dowolne 3 za wierzchołki trójkąta podstawowego układu współrzędnych rzutowych. Niech stożkowa Γ ma w tym układzie równanie (1). Ponieważ punkt $(1:0:0)$ leży na niej, więc musi być $a_{11} = 0$. Podobnie $a_{22} = a_{33} = 0$. Stożkowa Γ musi mieć zatem równanie kształtu

$$(13) \quad a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 = 0.$$

Niech pozostałe dwa punkty M i N spośród danych 5 punktów mają w tymże układzie współrzędne $m_1 : m_2 : m_3$ i $n_1 : n_2 : n_3$. Żadna z tych sześciu współrzędnych nie jest zerem, gdyż w myśl założenia punkty M i N nie leżą na bokach trójkąta podstawowego. Ponieważ stożkowa Γ zawiera punkty M i N , więc na mocy (13)

$$a_{12} m_1 m_2 + a_{13} m_1 m_3 + a_{23} m_2 m_3 = 0, \quad a_{12} n_1 n_2 + a_{13} n_1 n_3 + a_{23} n_2 n_3 = 0.$$

Stąd

$$(14) \quad a_{12} : a_{13} : a_{23} = m_3 n_3 (m_1 n_2 - n_1 m_2) : m_2 n_2 (m_3 n_1 - n_3 m_1) : m_1 n_1 (m_2 n_3 - n_2 m_3).$$

Wyrazy po prawej stronie tej równości nie znikają jednocześnie, gdyż $m_i \neq 0$, $n_i \neq 0$ oraz punkty M i N są różne. Tym samym stosunek $a_{12} : a_{13} : a_{23}$ współczynników równania (13), a więc i stożkowa Γ , został przez równość (14) jednoznacznie wyznaczony, c. b. d. o.

W § 60 dowiedliśmy, że gdy dwa równania

$$(15) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad g(x_1, x_2, x_3) = 0$$

przedstawiają jedną i tę samą stożkową Γ , to istnieje taka liczba rzeczywista ϱ , że

$$(16) \quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv \varrho g(x_1, x_2, x_3).$$

Dowód dzielił się na kilka przypadków: wymagał rozróżnienia elips, hiperbol itd. Obecnie możemy podać dowód jednolity. Dobierzmy układ rzutowy współrzędnych tak, aby jego trzy punkty podstawowe leżały na Γ . Dla współczynników wielomianów (15)

zachodzi wówczas równość (14), a więc i tożsamość (16) dla pewnego ρ . Jeśli zaś tożsamość (16) zachodzi w jednym układzie rzutowym współrzędnych, to oczywiście zachowuje się w każdym.

Uwaga. Dla krzywych stopnia większego od 2 styczną w punkcie $M(m_1:m_2:m_3)$ do krzywej określa się w geometrii różniczkowej jako graniczne położenie prostej przechodzącej przez dwa punkty tej krzywej, gdy obydwa punkty zbiegają do M , i dowodzi się, że ta styczna ma współrzędne o stosunku

$$u_1:u_2:u_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) : \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) : \frac{\partial f}{\partial x_3}(m).$$

Dla krzywych klasy większej od 2 punktem styczności krzywej z prostą $(v_1:v_2:v_3)$ należącą do niej nazywa się graniczne położenie punktu przecięcia tej prostej z inną prostą należącą do tej krzywej, gdy zbliża się do pierwszej prostej, i dowodzi się, że punkt styczności ma współrzędne o stosunku

$$x_1:x_2:x_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(v) : \frac{\partial f}{\partial u_2}(v) : \frac{\partial f}{\partial u_3}(v).$$

W geometrii różniczkowej dowodzi się również, że zbiór stycznych do nierozpadającej się krzywej algebraicznej pewnego stopnia jest krzywą algebraiczną pewnej klasy, a zbiór punktów styczności nierozpadającej się krzywej algebraicznej pewnej klasy jest krzywą algebraiczną pewnego stopnia.

Nazwijmy, ogólniej, *krzywą algebraiczną* zbiór wszystkich punktów i wszystkich stycznych do nierozpadającej się krzywej algebraicznej pojmowanej w dawnym sensie (§ 40, str. 201). Krzywa algebraiczna ma więc dwa równania algebraiczne: we współrzędnych punktu i we współrzędnych prostej, a zatem ma ona stopień i klasę.

Dla stożkowych właściwych stopień i klasa są jednakowe, mianowicie równe 2, ale dla krzywych algebraicznych wyższych stopni stopień i klasa są na ogół różne.

Np. dla krzywej 3-go stopnia o równaniu

$$(17) \quad x_1^3 + x_2^3 - x_3^3 = 0$$

styczna ma współrzędne o stosunku

$$u_1:u_2:u_3 = x_1^2:x_2^2:-x_3^2.$$

Stąd, wyrażając x_j przez u_j i podstawiając do (17), dostajemy równanie tejże krzywej we współrzędnych prostej

$$u_1^6 + u_2^6 + u_3^6 + 4u_1^3u_2^3 + 4u_1^3u_3^3 = 0,$$

które jest 6-go stopnia. Ponieważ — jak się dowodzi — krzywa ta nie daje się przedstawić równaniem we współrzędnych prostej, które byłoby niższego stopnia, więc jest ona krzywą 6-ej klasy.

Natomiast dla tzw. *paraboli Neila*

$$y^2 = x^3,$$

która ma we współrzędnych jednorodnych równanie

$$x_2^2x_3 - x_1^3 = 0,$$

otrzymuje się równanie we współrzędnych prostej

$$27u_2u_3^2 + 4u_1^3 = 0.$$

Krzywa ta jest więc zarazem 3-go stopnia i 3-ej klasy.

Z przykładów tych widać, że klasa krzywej nie zależy wyłącznie od jej stopnia i, na odwrót, stopień krzywej nie zależy jedynie od jej klasy. Zależności między stopniem a klasą zostały zbadane przez Plückera. Okazało się, że gdy dany jest stopień, to do wyznaczenia klasy potrzeba jeszcze znać ilość punktów wielokrotnych i ostrzy, a gdy dana jest klasa, to do wyznaczenia stopnia potrzeba jeszcze znać ilość stycznych wielokrotnych i punktów przecięcia.

§ 88. Biegunowa i biegun

1. Biegunowe we współrzędnych rzutowych. Jak wiadomo (p. Przypis I, § 4), przekształcenie liniowe, które przeprowadza formę kwadratową $\sum a_{ik}x_ix_k$ w formę $\sum b_{ik}x'_ix'_k$, przeprowadza zarazem formę biegunową $\sum a_{ik}x_iy_k$ pierwszej formy w formę biegunową $\sum b_{ik}x'_iy'_k$ drugiej formy. Wynika stąd, że gdy przyporządkujemy punktowi $M(y_1:y_2:y_3)$ prostą

$$(1) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_ix_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

to przyporządkowanie będzie zależne od stożkowej

$$(2) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_ix_k = 0,$$

lecz będzie niezależne od wyboru układu współrzędnych rzutowych i nie zmieni się przy przekształceniach rzutowych. Prosta (1) nazywaliśmy biegunową punktu M .

Biegunowa punktu jest więc pojęciem geometrii rzutowej.

Pojęciu biegunowej punktu odpowiada dwoiście pojęcie bieguna prostej.

Krzywa (2) ma bowiem we współrzędnych prostej równanie

$$(3) \quad \sum_{i,k=1}^3 b_{ik} u_i u_k = 0, \quad \text{gdzie } \mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Biegunowa punktu $(y_1:y_2:y_3)$ względem krzywej (2) ma współrzędne

$$(4) \quad \varrho u_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3, \quad \text{gdzie } i=1,2,3.$$

Przez zdualizowanie tego określenia widzimy, że pojęciem dwoistym do biegunowej jest punkt, przyporządkowany prostej wzorami

$$(5) \quad \varrho x_i = b_{i1} v_1 + b_{i2} v_2 + b_{i3} v_3, \quad \text{gdzie } i=1,2,3,$$

czyli

$$\varrho(x) = \mathfrak{B}(v), \quad \varrho(x) = \mathfrak{A}^{-1}(v),$$

skąd $\sigma(v) = \mathfrak{A}(x)$. Punkt (5) jest więc biegunem prostej $(v_1:v_2:v_3)$ względem krzywej (2), c. b. d. o.

Geometryczne znaczenie biegunowej i bieguna znamy z § 54. A mianowicie:

Jeśli punkt P leży na stożkowej właściwej Γ , to jego biegunowa jest styczna do stożkowej Γ w punkcie P .

Jeśli zaś punkt P nie leży na Γ , to biegunowa tego punktu jest prostą łączącą punkty styczności stycznych do Γ , wyprowadzonych z punktu P .

Jeśli prosta p należy do stożkowej właściwej Γ , to biegun tej prostej jest jej punktem styczności ze stożkową Γ .

Jeśli zaś prosta p nie należy do Γ , to biegun jej jest punktem przecięcia stycznych do Γ , wyprowadzonych z punktów przecięcia prostej p z Γ .

Oczywiście, obie te własności są rzutowe i dualne jedna względem drugiej. Inne geometryczne i rzutowe znaczenie bieguna i biegunowej w przypadku, gdy punkt P nie jest punktem stożkowej (dualnie: gdy prosta p nie jest styczną do stożkowej), wynika z następujących dwu twierdzeń dualnych:

Przez punkt P , który nie leży na stożkowej właściwej Γ , przeprowadźmy wszystkie proste p i znajdziemy punkty przecięcia M, N stożkowej Γ z każdą z tych prostych. Wówczas takie punkty Q prostych p , że

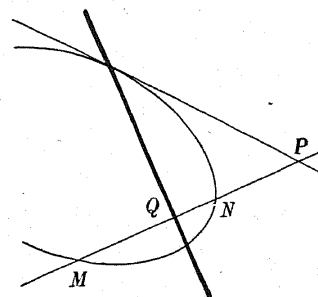
$$(6) \quad (MNPQ) = -1,$$

tworzą prostą, która jest biegunową punktu P (rys. 155).

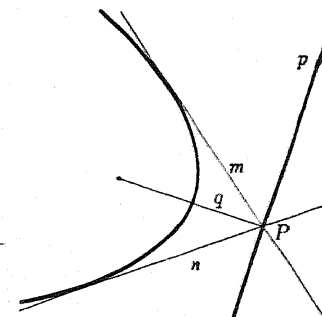
Na prostej p , która nie jest styczna do stożkowej właściwej Γ , weźmy wszystkie punkty P i z każdego z nich poprowadźmy styczne m, n do stożkowej Γ . Wówczas takie proste q , przechodzące przez punkt P , że

$$(6') \quad (mnpq) = -1,$$

tworzą pęk, którego wierzchołek jest biegunem prostej p (rys. 156).



Rys. 155



Rys. 156

Wystarczy udowodnić jedno z tych twierdzeń, np. lewe. Niech punkt P będzie punktem płaszczyzny zawierającej stożkową właściwą o równaniu (2), lecz nie leżącym na tej stożkowej. Przeprowadźmy przez P dowolną prostą. Rozróżnimy dwa przypadki:

1° Prosta p nie jest styczna do stożkowej Γ . Przecina więc tę stożkową w dwóch różnych punktach $M(m_1:m_2:m_3)$ i $N(n_1:n_2:n_3)$, rzeczywistych lub nie. Niech $Q(q_1:q_2:q_3)$ będzie punktem prostej p , różnym od P , N i M . Prosta p daje się więc przedstawić parametrycznie układem równań

$$(7) \quad \varrho x_i = \mu_1 p_i + \mu_2 q_i, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3.$$

W przedstawieniu tym punktom P, Q, M, N odpowiadają stosunki

$$1:0, \quad 0:1, \quad \mu'_1:\mu'_2, \quad \mu''_1:\mu''_2$$

oraz μ'_k i μ''_k są różne od zera, gdyż pary P, Q i M, N są rozłączne.

Zatem (por. wzór (4) z § 74, str. 402)

$$(MNPQ) = \frac{\mu'_2 \mu''_1}{\mu'_1 \mu''_2}.$$

Na to więc, aby zachodziła równość (6), potrzeba i wystarcza, żeby

$$\frac{\mu'_2 \mu''_1}{\mu'_1 \mu''_2} = -1,$$

czyli żeby

$$(8) \quad \frac{\mu'_1}{\mu'_2} + \frac{\mu''_1}{\mu''_2} = 0.$$

Ponieważ punkty M i N leżą na stożkowej Γ , więc stosunki $\mu_1:\mu_2$, wyznaczające te punkty, otrzymamy przez podstawienie wartości z (7) do (2). Po podzieleniu przez μ_2^2 dostajemy równanie

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} p_i p_k + 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} p_i q_k + \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} q_i q_k = 0.$$

Jest to równanie drugiego stopnia o niewiadomej μ_1/μ_2 . Dwa różne pierwiastki tego równania wyznaczają punkty M i N . Warunek (8) wyraża, że suma pierwiastków tego równania jest równa 0. Na to jednak potrzeba i wystarcza, żeby współczynnik przy pierwszej potędze niewiadomej był zerem, czyli żeby

$$(9) \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} p_i q_k = 0.$$

Z równości tej wynika, że punkt Q leży na biegunowej punktu P .

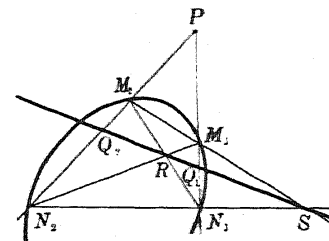
2° Prosta p jest styczną do stożkowej Γ . Punkty M i N są zatem identyczne. Aby zachodziła równość (6), potrzeba więc i wystarcza, by punkt Q był identyczny z punktami M i N (§ 75, str. 412). Wówczas punkt Q leży na stożkowej Γ . Prosta p , jako styczna do niej w punkcie Q , ma równanie

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0$$

i warunek (9) wyraża, że styczna ta przechodzi przez punkt P . Zatem i w tym przypadku punkt Q leży na biegunowej punktu P , c. b. d. o.

Z tego twierdzenia wynika następująca konstrukcja biegunowej punktu P za pomocą samego liniału, gdy nakreślona jest stożkowa Γ (rys. 157):

Z punktu P kreślimy dwie sieczne przecinające stożkową Γ w punktach M_1 i N_1 oraz M_2 i N_2 . Na tych czterech punktach budujemy czworokąt zupełny. Jednym z punktów przekątnych (§ 83, str. 442) tego czworokąta jest P . Pozostałe oznaczmy przez R i S . Prosta RS jest biegunową punktu P , ponieważ para prostych SP, SR przedziela harmonicznie parę prostych SM_1, SN_1 (§ 83, str. 443). Zatem



Rys. 157

$$(M_1 N_1 P Q_1) = -1, \quad (M_2 N_2 P Q_2) = -1,$$

a więc prosta $Q_1 Q_2$, czyli prosta SR , jest biegunową.

Jak wiemy z §§ 57-59 (p. str. 290, 297 i 299), zewnętrznie stożkowej rzeczywistej daje się scharakteryzować jako zbiór punktów, z których można poprowadzić do stożkowej po dwie styczne rzeczywiste. Oczywiście, przekształcenie rzutowe rzeczywiste przeprowadza punkty zewnętrzne stożkowej w punkty zewnętrzne obrazu.

Zatem pojęcia *wewnątrz* i *zewnątrz* stożkowej są pojęciami geometrii rzutowej rzeczywistej.

2. Trójkąt samobiegunowy. Trójkąt nazywa się *samobiegunowym* względem stożkowej Γ , jeśli każdy jego bok jest względem niej biegunową przeciwległego wierzchołka.

Na to, by stożkowa w układzie współrzędnych rzutowych miała równanie postaci

$$(10) \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad \text{gdzie } a_{ii} \neq 0 \text{ dla } i=1,2,3,$$

potrzeba i wystarcza, żeby trójkąt podstawowy tego układu współrzędnych był względem niej trójkątem samobiegunowym.

Dostateczność warunku jest jasna. Jeśli bowiem stożkowa ma równanie (10), to

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv 2a_{11}x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv 2a_{22}x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \equiv 2a_{33}x_3;$$

zatem biegunowa punktu $(x_1:x_2:x_3)$ ma współrzędne o stosunku

$$u_1:u_2:u_3=a_{11}x_1:a_{22}x_2:a_{33}x_3.$$

W szczególności biegunowa punktu $M(1:0:0)$ ma współrzędne $1,0,0$, czyli ma równanie $x_1=0$; jest to więc bok przeciwległy do punktu M . Podobnie dowodzi się tego dla pozostałych boków.

Na odwrót, niech trójkąt podstawowy będzie trójkątem samobiegunowym względem stożkowej Γ o równaniu (2). Biegunową punktu $(y_1:y_2:y_3)$ jest prosta (4); w szczególności biegunową punktu $(1:0:0)$ jest prosta mająca współrzędne o stosunku

$$u_1:u_2:u_3=a_{11}:a_{12}:a_{13}.$$

Wobec założenia, że trójkąt podstawowy jest samobiegunowy, biegunową punktu $(1:0:0)$ jest prosta $x_1=0$, która ma współrzędne o stosunku

$$u_1:u_2:u_3=1:0:0.$$

A więc $a_{12}=a_{13}=0$. Podobnie $a_{23}=0$ i otrzymujemy równanie kształtu (10), c. b. d. o.

Jeśli stożkowa i trójkąt samobiegunowy są rzeczywiste, to współczynniki w równaniu (10) nie mają jednakowego znaku. Możemy wówczas założyć, że stożkowa ta ma równanie

$$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 - \lambda_3^2 x_3^2 = 0, \text{ gdzie } \lambda_i \neq 0 \text{ dla } i=1,2,3.$$

Podstawiając tu $x_1=0$, otrzymujemy dwa punkty przecięcia rzeczywiste. Tym samym biegunowa punktu $(1:0:0)$ przecina stożkową w punktach rzeczywistych, a więc punkt ten leży zewnątrz stożkowej. To samo dotyczy punktu $(0:1:0)$. Punkt $(0:0:1)$ natomiast leży wewnątrz stożkowej. A więc:

Jeśli stożkowa i trójkąt samobiegunowy są rzeczywiste, to jeden wierzchołek trójkąta leży wewnątrz stożkowej, a dwa pozostałe zewnątrz niej.

Ponieważ zewnątrz stożkowej rzeczywistej składa się z punktów, z których można poprowadzić do niej dwie styczne, więc zewnątrz stożkowej odpowiada dualnie zbiór prostych przecinających stożkową w dwóch różnych punktach rzeczywistych. Przez zdualizowanie trójkąta samobiegunowego otrzymujemy ten sam trójkąt.

Zatem:

Na to, by stożkowa miała we współrzędnych prostej równanie

$$(11) \quad a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0, \text{ gdzie } a_i \neq 0 \text{ dla } i=1,2,3,$$

potrzeba i wystarcza, żeby trójkąt podstawowy był samobiegunowy.

Dla elipsy i hiperboli przykładem trójkąta samobiegunowego jest trójkąt utworzony przez parę średnic sprzężonych i prostą w ∞ .

Jak widzieliśmy wielokrotnie w geometrii afinicznej, w badaniu stożkowej ważnym algebraicznym środkiem pomocniczym było doprowadzenie lewej strony jej równania do sumy kwadratów. Postępowanie to nabiera obecnie znaczenia geometrycznego: sprowadza się ono do znalezienia trójkąta samobiegunowego, którego jednym wierzchołkiem jest środek krzywej, a przeciwległym bokiem — prosta w ∞ .

§ 89. Przedstawienie parametryczne i pęk stożkowych

1. Przedstawienie parametryczne. Niech Γ będzie stożkową właściwą. Przyjmijmy za wierzchołki trójkąta podstawowego układu współrzędnych rzutowych dowolne dwa punkty M i P stożkowej Γ oraz biegun N prostej MP (rys. 158). Bokami tego trójkąta są więc prosta MP i styczne w punktach M i P , a punkty M , N i P mają współrzędne $1:0:0$, $0:1:0$ i $0:0:1$.

Ponieważ w myśl założenia punkty M i P leżą na stożkowej Γ , więc w jej równaniu jest $a_{11}=a_{33}=0$. Biegunowa punktu N ma równanie

$$a_{12}x_1 + a_{23}x_2 + a_{32}x_3 = 0,$$

a że jest nią prosta $x_2=0$, więc w równaniu stożkowej Γ jest też $a_{12}=a_{32}=0$. Stożkowa Γ ma zatem równanie

$$2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

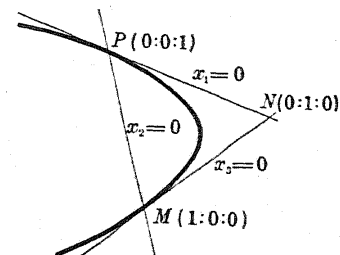
Przez odpowiedni dobór nieustalonego dotychczas punktu jednostkowego $(1:1:1)$ możemy to równanie sprowadzić do postaci

$$(1) \quad x_1x_3 - x_2^2 = 0.$$

Wprowadźmy liczby $\lambda_1 \neq 0$ i λ_2 przez równości

$$\varrho x_1 = \lambda_1^2, \quad \varrho x_2 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Równości te wyznaczają stosunek $\lambda_1:\lambda_2=x_1:x_2$ i z (1) wynika, że $\varrho x_3 = \lambda_2^2$.



Rys. 158

Tym samym

$$(2) \quad \varrho x_1 = \lambda_1^2, \quad \varrho x_2 = \lambda_1 \lambda_2, \quad \varrho x_3 = \lambda_2^2.$$

Łatwo widzieć, że równania te określają odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne między punktami stożkowej a stosunkami $\lambda_1:\lambda_2$ (w szczególności, gdy $\lambda_1=0$, jest również $x_1=0$; wtedy otrzymujemy punkt $(0:0:1)$, który w przedstawieniu (2) odpowiada stosunkowi $0:1$). Zatem równania (2) stanowią parametryczne przedstawienie stożkowej (1).

Stąd: każda krzywa, która daje się przedstawić parametrycznie za pomocą form kwadratowych

$$(3) \quad \varrho x_i = a_{i1}\lambda_1^2 + a_{i2}\lambda_1\lambda_2 + a_{i3}\lambda_2^2, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3 \text{ oraz } |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

jest stożkową właściwą, gdyż powstaje ze stożkowej (2) przez przekształcenie rzutowe

$$\varrho x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

o wyróżniku $|\mathfrak{A}| \neq 0$ (macierz (a_{ik}) nie musi tu być symetryczna).

Na odwrót, każda stożkowa właściwa ma przedstawienie parametryczne postaci (3), gdyż powstaje ze stożkowej (1) przez przekształcenie rzutowe.

Krzywe algebraiczne, które dają się przedstawić parametrycznie za pomocą wielomianów jednorodnych zmiennych λ_1 i λ_2

$$\varrho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2), \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3,$$

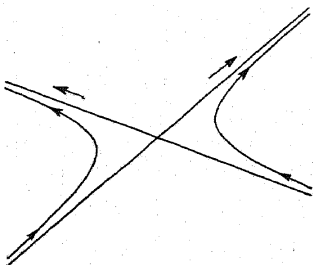
nazywają się *jednobieżnymi*.

Zatem stożkowe właściwe są krzywymi jednobieżnymi.

Liczby o stosunku $\lambda_1:\lambda_2$ mogą być uważane za współrzędne rzutowe punktu na dowolnej prostej rzutowej. Równania (2) dają więc odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne (a ponadto ciągłe) stożkowej na prostą rzutową.

W szczególności wynika stąd, że na płaszczyźnie rzutowej stożkowe właściwe składają się z jednej gałęzi.

Gdy bowiem punkty o współrzędnych λ_1, λ_2 przebiegają prostą rzutową, odpowiadające im punkty płaszczyzny rzutowej przebiegają całą stożkową (2) (dla hiperboli p. rys. 159).



Rys. 159

2. Pęk stożkowych. Udowodnimy, że dwie różne stożkowe albo przecinają się co najwyżej w czterech punktach, albo mają prostą wspólną (i wówczas obie są niewłaściwe).

Istotnie, jeśli stożkowe nie mają wspólnej prostej, to są dwie możliwości:

1° Przynajmniej jedna stożkowa składa się z dwóch prostych. Wówczas każda z obu prostych przecina drugą stożkową co najwyżej w dwóch punktach, a więc łączna ilość punktów przecięcia tych stożkowych jest nie większa niż cztery.

2° Obie stożkowe są właściwe. Wówczas możemy tak dobrać układ współrzędnych rzutowych, by pierwsza stożkowa miała w nim przedstawienie parametryczne (2). Podstawiając wartości z (2) do równania drugiej stożkowej, otrzymujemy równanie czwartego stopnia, a więc mające nie więcej niż cztery rozwiązania (w przeciwnym bowiem razie wszystkie współczynniki tego równania byłyby — jak wiadomo z algebry — zerami, wskutek czego byłoby ono spełnione dla wszelkich wartości λ_1 i λ_2 , a przeto obie stożkowe byłyby identyczne wbrew założeniu).

Tak np. koło i elipsa, które w układzie współrzędnych jednorodnych mają równania

$$x_1^2 + x_2^2 = 4x_3^2, \quad 4x_1^2 + x_2^2 = 4x_3^2,$$

przecinają się w dwóch punktach, a koło i elipsa

$$x_1^2 + (x_2 - 2x_3)^2 = 4x_3^2, \quad 16x_1^2 + 4x_2^2 = 64x_3^2$$

przecinają się w trzech punktach.

Zajmiemy się obecnie przypadkiem dwóch stożkowych Γ_1 i Γ_2 (właściwych lub nie), przecinających się w czterech różnych punktach P_1, P_2, P_3 i P_4 (rzeczywistych lub nie), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Niechaj te stożkowe mają równania

$$(4) \quad \Gamma_1(x) \equiv \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \Gamma_2(x) \equiv \sum_{i,k=1}^3 b_{ik} x_i x_k = 0.$$

Pękiem stożkowych wyznaczonym przez Γ_1 i Γ_2 nazywamy zbiór stożkowych określonych równaniami postaci

$$(5) \quad \lambda_1 \Gamma_1(x) + \lambda_2 \Gamma_2(x) = 0, \quad \text{gdzie } |\lambda_1| + |\lambda_2| > 0.$$

Jest oczywiste, że różnym stożkowym pęku odpowiadają różne stosunki $\lambda_1:\lambda_2$ i na odwrót.

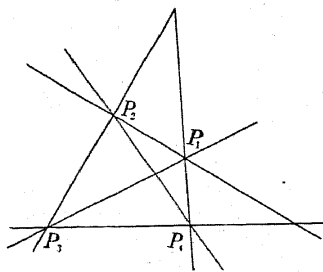
Pęk (5) może też być scharakteryzowany jako zbiór wszystkich stożkowych przechodzących przez punkty P_1, P_2, P_3 i P_4 .

Istotnie, każda stożkowa pęku (5) przechodzi przez cztery punkty P_1, P_2, P_3 i P_4 , w których przecinają się stożkowe Γ_1 i Γ_2 . Na odwrót, jeżeli stożkowa Γ przechodzi przez te cztery punkty i $P(p_1:p_2:p_3)$ jest jej punktem różnym od nich, to liczby $\Gamma_1(p)$ i $\Gamma_2(p)$ określone wzorami (4) nie znikają razem, a więc równanie

$$\Gamma_2(p)\Gamma_1(x) - \Gamma_1(p)\Gamma_2(x) = 0$$

przedstawia stożkową Γ' pęku (5), która ma ze stożkową Γ pięć punktów wspólnych; zarazem jeśli stożkowa Γ jest właściwa, to Γ' także (bo wówczas żadne trzy z tych pięciu punktów nie leżą na jednej prostej), a więc stożkowe Γ i Γ' są identyczne (p. § 87, str. 457).

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy stożkowa Γ rozpada się na proste. Ponieważ w myśl założenia żadne trzy spośród punktów P_1, P_2, P_3 i P_4 nie leżą na jednej prostej, więc te cztery punkty wyznaczają trzy pary prostych przez nie przechodzących, a mianowicie boki przeciwległe (p. str. 442) czworokąta zupełnego, którego wierzchołkami



Rys. 160

są te punkty (rys. 160). Każda z par przeciwległych boków jest jednak wyznaczona przez którykolwiek punkt jednego z tych boków, różny od P_1, P_2, P_3 i P_4 . Zatem i w tym przypadku stożkowe Γ i Γ' są identyczne, c. b. d. o.

Tak więc pęk stożkowych jest wyznaczony przez cztery punkty P_1, P_2, P_3 , i P_4 , z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Punkty te nazywamy *wierzchołkami pęku stożkowych*.

Ponadto stwierdziliśmy w dowodzie, że do każdego pęku stożkowych należą dokładnie trzy stożkowe niewłaściwe, a mianowicie trzy pary przeciwległych boków czworokąta zupełnego, mającego te punkty jako wierzchołki.

Analitycznie znajdujemy te pary prostych wyznaczając λ_1 i λ_2 tak, aby znikał wyróżnik równania (5) czyli, wobec (4), wyróżnik równania

$$(6) \quad \sum_{i,k=1}^3 (\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik}) x_i x_k = 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 b_{21} & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 b_{31} & \lambda_1 a_{32} + \lambda_2 b_{32} & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to równanie trzeciego stopnia, które — jak wynika z ostatnich rozważań geometrycznych — ma trzy rozwiązania różne.

Zauważmy, że pęk jest też wyznaczony przez jakiekolwiek dwie stożkowe do niego należące. Można więc wziąć za Γ_1 i Γ_2 np. dwie pary przeciwległych boków czworokąta.

Podstawmy w (6) $x_3 = 0$. Dla punktów przecięcia stożkowych pęku (6) z prostą $x_3 = 0$ otrzymujemy więc równanie

$$(8) \quad \sum_{i,k=1}^2 (\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik}) x_i x_k = 0.$$

Jeśli prosta $x_3 = 0$ nie przechodzi przez żaden z czwórki punktów P_1, P_2, P_3, P_4 , to równanie (8) wyznacza pęk par punktów na prostej $x_3 = 0$, tworzących involucję (p. § 76, str. 417). Ponieważ $x_3 = 0$ może być dowolną prostą, więc wynika stąd następujące twierdzenie Sturma:

Gdy przetniemy pęk stożkowych dowolną prostą nie przechodzącą przez wierzchołki pęku, to prosta ta przetnie stożkowe pęku w parach punktów należących do jednej involucji.

Punktami stałymi tej involucji są oczywiście punkty styczności tej prostej ze stożkowymi pęku. Ponieważ każda involucja ma dwa punkty stałe (§ 76, str. 414), więc gdy dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, i prosta p nie przechodząca przez żaden z nich, to istnieją dwie różne stożkowe przechodzące przez te cztery punkty i styczne do p .

Z twierdzenia Sturma wynika starsze twierdzenie Desargues'a:

Jeżeli czworokąt zupełny zbudowany na czterech punktach stożkowej przeciąć prostą nie przechodzącą przez jego wierzchołki, to trzy pary punktów przecięcia tej prostej z przeciwległymi bokami czworokąta, jak również para punktów przecięcia tej prostej ze stożkową, należą do jednej involucji.

Wynika stąd również twierdzenie Desargues'a dowiedzione w § 83 (str. 444).

Niech teraz Γ będzie dowolną stożkową pęku o wierzchołkach P_1, P_2, P_3, P_4 , a Q_1, Q_2, Q_3 — punktami przekątnymi czworokąta o tych

wierzchołkach. Wówczas biegunową punktu Q_1 względem Γ jest prosta Q_2Q_3 . Trójkąt $Q_1Q_2Q_3$ jest zatem samobiegunowy względem Γ .

Tak więc dwie stożkowe przecinające się w czterech różnych punktach mają wspólny trójkąt samobiegunowy. Zatem równania tych stożkowych dają się sprowadzić równocześnie do postaci

$$\sum_{i=1}^3 a_{ii}x_i^2=0, \quad \sum_{i=1}^3 b_{ii}x_i^2=0.$$

Przez zdualizowanie powyższych twierdzeń i ich dowodów stwierdzamy, że dwie krzywe właściwe drugiej klasy mają co najwyżej cztery styczne wspólne, a przez zdualizowanie pojęcia pęku stożkowych otrzymujemy zbiór krzywych drugiej klasy

$$\sum_{i,k=1}^3 (\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik}) u_i u_k = 0,$$

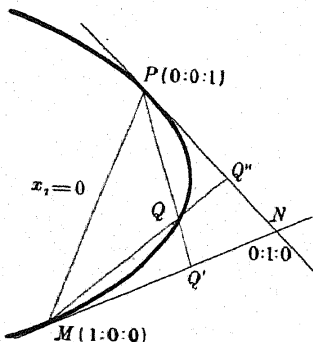
który nazywamy wiązką krzywych drugiej klasy.

W szczególności, zbiór krzywych drugiej klasy zawierających cztery ustalone proste, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, tworzy wiązkę. Wiązka ta zawiera trzy krzywe drugiej klasy będące parami punktów.

§ 90. Twierdzenia i konstrukcje Steinera

1. Twierdzenia Steinera. Niech w układzie współrzędnych rzutowych proste $x_1=0$ i $x_3=0$ będą stycznymi do stożkowej właściwej Γ w punktach M i P , które są wierzchołkami $(1:0:0)$ i $(0:0:1)$. Stożkowa Γ ma więc przedstawienie parametryczne (p. str. 465-466)

$$(1) \quad x_1:x_2:x_3=\lambda_1^2:\lambda_1\lambda_2:\lambda_2^2.$$



Rys. 161

Niech Q będzie dowolnym punktem stożkowej Γ (rys. 161) i niech Q' będzie jego rzutem z punktu P na prostą $x_3=0$.

Gdy Q przebiega stożkową Γ , punkty Q' tworzą tzw. rzut stereograficzny stożkowej Γ z punktu P na styczną do niej w punkcie M .

Prosta przechodząca przez punkt P na równanie

$$a_1x_1+a_2x_2=0;$$

stosunek $x_1:x_2$ jest więc na tej prostej stały. W szczególności, dla punktów Q i Q' jest on ten sam, mianowicie — jak wynika z (1) —

$$(2) \quad x_1:x_2=\lambda_1:\lambda_2$$

zarówno dla Q jak dla Q' .

Z drugiej strony, x_1 i x_2 są współrzędnymi punktu Q' na prostej MN w układzie współrzędnych rzutowych o punktach podstawowych M i N . W ten sposób rzut stereograficzny nadaje znaczenie geometryczne parametrom λ_1 i λ_2 przedstawienia (1).

Podobnie, gdy rzucimy punkt Q z punktu M na prostą NP , otrzymamy punkt $Q''(0:y_2:y_3)$, gdzie

$$(3) \quad y_2:y_3=\lambda_1:\lambda_2.$$

Odwzorujmy styczną MN na styczną PN , przyporządkowując punktowi Q' punkt Q'' . Wobec (2) i (3)

$$\varrho x_1=y_2, \quad \varrho x_2=y_3,$$

a więc odwzorowanie to jest rzutowe.

Stosunek anharmoniczny jest jego niezmiennikiem. Dla rzutów dowolnej czwórki punktów Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 stożkowej Γ z punktów M i P na obie styczne (rys. 162) zachodzi więc równość

$$(4) \quad (Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4) = (Q''_1Q''_2Q''_3Q''_4).$$

Oznaczając dla $i=1,2,3,4$ proste PQ_i przez q'_i , a proste MQ_i przez q''_i , otrzymujemy zatem

$$(Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4) = (q'_1q'_2q'_3q'_4), \quad (Q''_1Q''_2Q''_3Q''_4) = (q''_1q''_2q''_3q''_4),$$

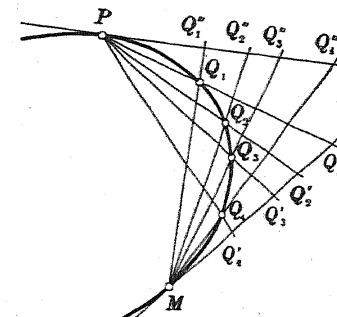
skąd ma mocy (4)

$$(q'_1q'_2q'_3q'_4) = (q''_1q''_2q''_3q''_4).$$

Tym samym udowodniliśmy twierdzenie następujące, obok którego formułujemy tu od razu twierdzenie do niego dualne:

Jeśli przez cztery punkty stożkowej właściwej Γ przeprowadzone są cztery proste pęku, którego wierzchołek leży na Γ , to stosunek anharmoniczny tych czterech prostych nie zależy od wyboru wierzchołka pęku na Γ .

Jeśli cztery styczne do stożkowej właściwej Γ są przecięte dowolną piątą styczną do tej stożkowej, to stosunek anharmoniczny otrzymanych czterech punktów przecięcia jest niezależny od wyboru piątej stycznej do Γ .



Rys. 162

W szczególności, gdy jeden z punktów Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sam jest wierzchołkiem pęku, prosta przezeń jest styczną w tym punkcie.

Z tych dualnych twierdzeń wynikają następujące ważne dwa dualne twierdzenia Steinera:

Niech M i P będą dwoma punktami stożkowej właściwej Γ . Dla każdego punktu Q tej stożkowej przyporządkujemy prostą MQ prostą PQ . Tak określone odwzorowanie pęku o wierzchołku M na pęk o wierzchołku P jest rzutowe. Prostej MP pęku o wierzchołku M odpowiada w pęku o wierzchołku P styczna do Γ w punkcie P , a tej samej prostej MP pęku o wierzchołku P odpowiada w pęku o wierzchołku M styczna do Γ w punkcie M .

Niech m i p będą dwiema stycznymi do stożkowej właściwej Γ . Dla każdej stycznej q do Γ przyporządkujemy jej punkt przecięcia z prostą m jej punkt przecięcia z prostą p . Tak określone odwzorowanie prostej m na prostą p jest rzutowe. Punktowi przecięcia prostych m i p jako punktowi prostej m odpowiada na prostej p punkt jej styczności z Γ , a temu samemu punktowi przecięcia jako punktowi prostej p odpowiada na prostej m jej punkt styczności z Γ .

Dwa te twierdzenia wraz z twierdzeniami odwrotnymi, które teraz udowodnimy, są podstawą rozwiniętej przez Steinera metody syntetycznej w geometrii rzutowej stożkowych, metody nie operującej układami współrzędnych.

Jeśli odwzorowanie rzutowe pęku prostych o wierzchołku M w pęk prostych o wierzchołku P nie jest perspektywiczne (p. str. 434), to zbiór punktów przecięcia prostych odpowiadających sobie wzajemnie jest krzywą właściwą 2-go stopnia, przechodzącą przez punkty M i P .

Jeśli odwzorowanie rzutowe prostej m na prostą p nie jest perspektywiczne (p. str. 434), to zbiór prostych łączących punkty odpowiadające sobie wzajemnie jest krzywą właściwą 2-jej klasy, tj. obwiednią (p. str. 455) stożkowej właściwej stycznej do prostych m i p .

Ze względu na dualność wystarczy dowieść pierwszego z tych twierdzeń. W tym celu udowodnimy wpierw następujący lemat:

Na to, by przekształcenie rzutowe T pęku o wierzchołku M w pęk o wierzchołku P , różnym od M , było perspektywiczne, potrzeba i wystarczy, żeby

$$(5) \quad T(MP) = MP,$$

tj. by przeprowadzało ono prostą łączącą wierzchołki obu pęków w siebie.

Konieczność tego warunku jest oczywista. Dla dowodu jego dostateczności weźmy pod uwagę punkt przecięcia Q_1 prostej MQ_1 z jej obrazem $T(MQ_1) = PQ_1$ oraz, analogicznie, inny punkt przecięcia Q_2 prostych MQ_2 i $T(MQ_2) = PQ_2$. Przekształcenie T' pęku o wierzchołku M w pęk o wierzchołku P , określone za pośrednictwem punktów Q prostej Q_1Q_2 wzorem

$$(6) \quad T'(MQ) = PQ,$$

jest oczywiście perspektywiczne. Z (6) wynika, że

$$T'(MQ_1) = PQ_1 = T(MQ_1), \quad T'(MQ_2) = PQ_2 = T(MQ_2)$$

i $T'(MP) = MP$, skąd zakładając warunek (5), otrzymujemy

$$T'(MP) = T(MP).$$

Tak więc przekształcenie rzutowe T , jako identyczne z przekształceniem T' w trzech parach, jest z nim w ogóle identyczne (p. § 73, str. 399), a zatem też jest perspektywiczne, c. b. d. o.

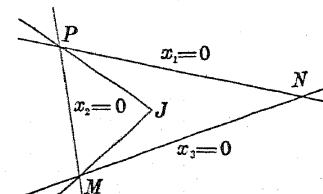
Wróćmy teraz do dowodu twierdzenia. Ponieważ na mocy założenia odwzorowanie rzutowe nie jest perspektywiczne, więc, w myśl lematu, nie przekształca ono prostej MP pęku o wierzchołku M w tę samą prostą MP pęku o wierzchołku P , lecz w inną prostą pęku o wierzchołku P , którą możemy przyjąć za prostą $x_1 = 0$. Analogicznie, prostą pęku o wierzchołku M , która jest obrazem prostej MP pęku o wierzchołku P , przyjmijmy za prostą $x_3 = 0$. Wreszcie samą prostą MP przyjmijmy za prostą $x_2 = 0$.

Niech punkt przecięcia J dowolnej pary odpowiadających sobie prostych będzie punktem jednostkowym tak utworzonego układu współrzędnych rzutowych (rys. 163). Oba pęki dają się więc przedstawić równaniami

$$\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0, \quad \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 = 0.$$

Rys. 163

Prostej $\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 0$ odpowiada prosta $\mu_1 : \mu_2 = 1 : 0$, a prostej $\lambda_1 : \lambda_2 = 0 : 1$ — prosta $\mu_1 : \mu_2 = 0 : 1$. Prostej $\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1$ (czyli prostej MJ) odpowiada prosta $\mu_1 : \mu_2 = 1 : 1$ (czyli prosta PJ). Rozpatry-



wane odwzorowanie rzutowe jest więc identyczne z odwzorowaniem $\lambda_1:\lambda_2=\mu_1:\mu_2$, a tym samym proste

$$(7) \quad \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0, \quad \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = 0$$

odpowiadają sobie wzajemnie. Z (5) wynika dla ich punktu przecięcia równanie

$$(8) \quad x_1 x_3 - x_2^2 = 0.$$

Na odwrót, z przedstawienia parametrycznego (1) wynika, że każdy punkt stożkowej (8) jest punktem przecięcia prostych (7).

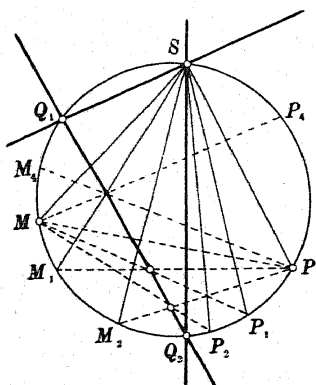
Z twierdzeń odwrotnych Steinera wynika jako szczególny przypadek opisana na str. 290 konstrukcja punktów elipsy, gdy znane są dwie jej średnice sprzężone.

2. Konstrukcje Steinera. W § 74 (p. str. 408) poznaliśmy konstrukcję, która pozwala, gdy dane są w dwóch pękach o różnych wierzchołkach trzy pary prostych przyporządkowanych sobie wzajemnie przez odwzorowanie rzutowe, znaleźć za pomocą samego liniału obraz dowolnej czwartej prostej pęku. Konstrukcja ta zawodzi natomiast, gdy wierzchołki pęków się zlewają; wtedy wymaga ona konstrukcji pomocniczych dla rozłączenia wierzchołków.

Steiner dał prostą konstrukcję również dla tego przypadku, wymaga ona jednak nakreślenia jednej stożkowej (w praktyce — koła). Konstrukcja ta pozwala również wyznaczyć proste stałe w odwzorowaniu rzutowym T pęku na siebie.

Przez wierzchołek S pęku prowadzimy koło (rys. 164). Niech

$$T(SP) = SM, \quad T(SP_1) = SM_1, \quad T(SP_2) = SM_2$$



Rys. 164

i niech T_1 będzie przekształceniem pęku o wierzchołku M w pęk o wierzchołku S , które przyporządkowuje sobie wzajemnie proste przecinające się na kole. Na mocy twierdzenia Steinera (str. 472) T_1 jest przekształceniem rzutowym. Takimże przekształceniem jest przekształcenie T_2 pęku o wierzchołku S w pęk o wierzchołku P , przyporządkowujące sobie wzajemnie również proste przecinające się na kole. Przekształcenie $\bar{T} = T_2 T T_1$ pęku o wierzchołku M w pęk o wierzchołku P jest więc także rzutowe i

$$\bar{T}(MP_1) = PM_1, \quad \bar{T}(MP_2) = PM_2, \quad \bar{T}(MP) = MP.$$

Ponieważ prosta MP przechodzi na samą siebie, więc na mocy lematu przekształcenie T jest perspektywiczne, a zatem zbiór punktów przecięcia prostych wzajemnie sobie przyporządkowanych przez to przekształcenie jest pewną prostą s . Prosta s łączy punkty przecięcia prostych PM_1 i MP_1 oraz prostych PM_2 i MP_2 .

Nazywa się ona *prostą Steinera*.

Gdy prosta s jest wyznaczona, to za pomocą samego liniału możemy dla każdej prostej pęku o wierzchołku M skonstruować jej obraz w pęku o wierzchołku P . Znajdujemy przede wszystkim punkt M_4 , w którym ta prosta przecina koło, a następnie przez punkt przecięcia prostych s i PM_4 oraz przez punkt M prowadzimy prostą przecinającą koło w punkcie P_4 . Prosta SP_4 odpowiada w przekształceniu T prostej SM_4 .

Punkty Q_1 i Q_2 przecięcia prostej s z kołem wyznaczają proste stałe SQ_1 i SQ_2 przekształcenia T . Mogą więc one być albo nierzeczywiste sprzężone, albo rzeczywiste i różne, albo się zlewać w jeden punkt rzeczywisty, zależnie od ilości punktów przecięcia prostej s z kołem.

Całe powyższe rozumowanie, dotyczące konstrukcji Steinera, pozostaje — jak łatwo sprawdzić — w mocy, gdy zamiast koła wziąć dowolną stożkową właściwą.

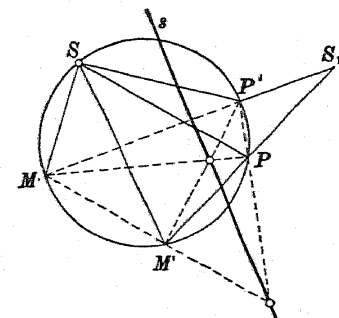
Konstrukcja się upraszcza, gdy T jest inwolucją wyznaczoną przez dwie pary przyporządkowanych sobie prostych. Niech bowiem

$$T(SM) = SP, \quad T(SP) = SM, \quad T(SM') = SP', \quad T(SP') = SM'.$$

Jest więc tutaj

$$M_1 \equiv M, \quad P_1 \equiv P', \quad M_2 \equiv P', \quad P_2 \equiv M'.$$

Wystarczy zatem znaleźć punkty przecięcia (rys. 165) prostych PP' i MM' oraz MP' i PM' . Prosta s łącząca te punkty jest prostą Steinera. Punkt S_1 przecięcia prostych $P'M$ i PM' jest biegunem S_1 prostej s . Prosta s i jej biegun S_1 są zależne od inwolucji, a nie od wyboru par wzajemnie przyporządkowanych sobie prostych.



Rys. 165

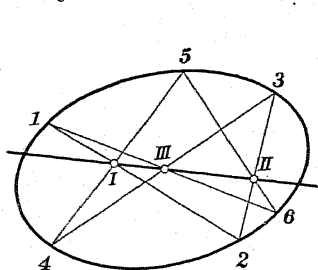
Z rozważań tych wynika, że gdy dowolny punkt P stożkowej właściwej połączymy prostą z wierzchołkiem pęku S , następnie znajdziemy prostą będącą w inwolucji obrazem prostej SP i jej punkt przecięcia M' ze stożkową, to wszystkie proste PM' przejdą przez punkt S_1 . Znalazienie punktu S_1 wymaga nakreślenia tylko dwóch prostych, mianowicie PM' i $P'M$.

Jeśli punkt S_1 leży wewnątrz stożkowej, to inwolucja jest eliptyczna, gdyż biegunowa punktu S_1 nie przecina stożkowej; jeśli zaś punkt S_1 leży zewnątrz stożkowej, to inwolucja jest hiperboliczna.

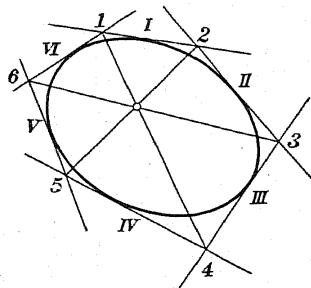
§ 91. Twierdzenia Pascala i Brianchona

Zajmiemy się obecnie dwoma twierdzeniami dualnymi, które grają ważną rolę w geometrii rzutowej. Pierwsze z nich zostało odkryte przez Pascala w pierwszej połowie XVII wieku, a drugie przez Brianchona dopiero w końcu XVIII wieku.

Jak wiemy (p. § 87, str. 457), pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, wyznacza stożkową. Wobec tego między każdymi sześcioma punktami stożkowej musi istnieć pewien związek. Twierdzenie Pascala wyraża ten związek. Twierdzenie zaś Brianchona wyraża, dualnie, związek między sześcioma stycznymi do stożkowej.



Rys. 166



Rys. 167

Ponumerujemy sześć punktów liczbami 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Połączmy je prostymi 12, 23, 34, 45, 56 i 61. Układ tych sześciu punktów i sześciu prostych nazywamy *sześciobokiem* wyznaczonym przez te punkty.

Przy tej definicji zmiana numeracji punktów może pociągnąć za sobą zmianę boków, a zatem i sześcioboku. Sześciobok jest więc zależny od uporządkowanej szóstki punktów.

Wierzchołki 1 i 4, 2 i 5 oraz 3 i 6 nazywamy *przeciwległymi* i tak samo boki 12 i 43, 23 i 56 oraz 34 i 61.

Twierdzenie Pascala.

Jeśli sześć punktów leży na stożkowej, to jakkolwiek byłyby uporządkowane, w sześcioboku przez nie wyznaczonym trzy pary jego boków przeciwległych przecinają się w trzech punktach leżących na jednej prostej.

Nazywa się ona *prostą Pascala* tego sześcioboku (p. rys. 166).

Twierdzenie Brianchona.

Jeśli sześć prostych jest stycznych do stożkowej, to jakkolwiek byłyby uporządkowane, w sześciokącie przez nie wyznaczonym trzy proste łączące trzy pary wierzchołków przeciwległych przecinają się w jednym punkcie.

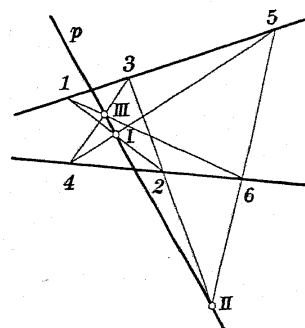
Nazywa się on *punktem Brianchona* tego sześcioboku (p. rys. 167).

Ze względu na dualność wystarczy dowieść twierdzenia Pascala. Oto dowód *:

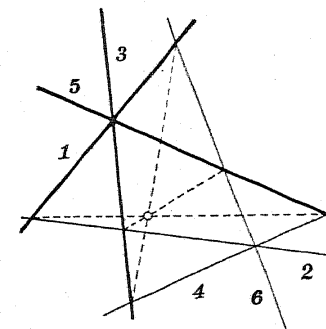
Zakładamy, że punkty 1, 2, 3, 4, 5 i 6 leżą na stożkowej Γ o równaniu

$$g=0.$$

Gdy rozpada się ona na parę prostych (identycznych lub nie), z których jedna zawiera jakiś punkt o numerze parzystym i jakiś punkt o numerze nieparzystym, twierdzenie sprawdza się natychmiast. W przypadku zatem stożkowej zdegenerowanej możemy założyć, że na jednej z obu prostych leżą punkty 1, 3 i 5, a na drugiej — punkty 2, 4 i 6 (p. rys. 168 i dualny względem niego rys. 169).



Rys. 168



Rys. 169

* według G. Darboux, *Géométrie analytique*, Paryż 1917, str. 114.

W każdym więc razie spełniony jest warunek:

(A) Prosta przechodząca przez dwa punkty nieparzyste nie przechodzi przez żaden z punktów parzystych, a prosta przechodząca przez dwa punkty parzyste nie przechodzi przez żaden z punktów nieparzystych.

Bez względu na to, czy stożkowa Γ jest właściwa, czy nie, punkty 1, 2, 3 i 6 są więc wierzchołkami czworokąta zupełnego.

Niech boki 12, 23, 34, 45, 56 i 61 mają równania:

$$(1) \quad u_1=0, \quad u_2=0, \quad u_3=0, \quad u'_1=0, \quad u'_2=0, \quad u'_3=0,$$

a przekątna 36 niechaj ma równanie

$$u=0.$$

Stożkowe o równaniach

$$(2) \quad u_1u=0, \quad u_2u'_3=0$$

są więc parami prostych przechodzącymi przez cztery różne punkty 1, 2, 3 i 6, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Ponieważ stożkowa Γ przechodzi przez te cztery punkty, więc należy ona do pęku stożkowych (p. § 89, str. 468) wyznaczonego przez stożkową (2). Zatem

$$(3) \quad g \equiv \lambda_1 u_1 u + \lambda_2 u_2 u'_3.$$

Podobnie, rozważając punkty 3, 6, 4 i 5, otrzymujemy

$$(4) \quad g \equiv \mu_1 u'_1 u + \mu_2 u'_2 u_3.$$

Z (3) i (4) wynika, że

$$\lambda_1 u_1 u + \lambda_2 u_2 u'_3 \equiv \mu_1 u'_1 u + \mu_2 u'_2 u_3,$$

skąd

$$u(\lambda_1 u_1 - \mu_1 u'_1) \equiv \mu_2 u'_2 u_3 - \lambda_2 u_2 u'_3,$$

a więc równania

$$(5) \quad u(\lambda_1 u_1 - \mu_1 u'_1) = 0,$$

$$(6) \quad \mu_2 u'_2 u_3 - \lambda_2 u_2 u'_3 = 0$$

przedstawiają tę samą krzywą i krzywa ta przechodzi przez punkty przecięcia każdej z czterech par prostych:

$$(7) \quad u_2=0 \text{ i } u_3=0, \quad u'_2=0 \text{ i } u'_3=0, \quad u_3=0 \text{ i } u'_3=0, \quad u_2=0 \text{ i } u'_2=0.$$

Pierwszy i drugi z tych punktów — są to wierzchołki 3 i 6. Leżą one na przekątnej 36, czyli na prostej $u=0$. Na mocy warunku (A) żadne trzy z punktów (7) nie leżą na jednej prostej, a dwa pierwsze leżą na prostej $u=0$. Zatem punkty przecięcia prostych $u_3=0$ i $u'_3=0$ oraz $u_2=0$ i $u'_2=0$ (są to pary boków przeciwnych) leżą na prostej

$$\lambda_1 u_1 - \mu_1 u'_1 = 0,$$

której przechodzi również przez punkt przecięcia prostych $u_1=0$ i $u'_1=0$, c. b. d. o.

Udowodnimy teraz twierdzenia poniekąd odwrotne do twierdzeń Pascala i Brianchona:

Jeśli w pewnym uporządkowaniu sześciu punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, pary boków przeciwnych sześcioboku przez nie wyznaczonego przecinają się w trzech punktach leżących na jednej prostej, to istnieje stożkowa przechodząca przez tych sześć punktów.

Jeśli w pewnym uporządkowaniu sześciu prostych, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, proste łączące pary wierzchołków przeciwnych sześcioboku przez nie wyznaczonego przecinają się w jednym punkcie, to istnieje stożkowa styczna do tych sześciu prostych.

Istotnie, założmy, że punkty 1, 2, 3, 4, 5 i 6 są tak położone, iż przeciwległe boki przecinają się w trzech punktach leżących na jednej prostej. Punkty 1, 2, 3, 4 i 5 wyznaczają stożkową Γ , przecinającą prostą 16 w punkcie 6'. Zastosujmy twierdzenie Pascala do punktów 1, 2, 3, 4, 5 i 6'. Wyznaczają one pewną prostą Pascala p' . Ponieważ dla obu sześcioboków otrzymujemy te same punkty I i III (p. rys. 166), więc proste Pascala p i p' są identyczne. Wobec tego i punkt II jest dla obu sześcioboków ten sam. Wreszcie punkty 6 i 6' są punktami przecięcia prostych I III i 5 II, a więc są też identyczne.

Tym samym twierdzenie odwrotne (lewe, a więc i dualne do niego prawe) zostało dowiedzione.

Twierdzenie Pascala można też udowodnić korzystając z metody Steinera kreślenia stożkowych za pomocą pęków prostych odwzorowanych rzutowo (§ 90, str. 472).

Założmy mianowicie, że punkty 1, 2, 3, 4, 5 i 6 leżą na stożkowej Γ i weźmy pod uwagę pęki prostych o wierzchołkach 1 i 5. Pary prostych 12 i 52, 13 i 53, 14 i 54 oraz 16 i 56 są to więc pary od-

powiadających sobie wzajemnie prostych z obu pęków w odwzorowaniu rzutowym, wyznaczającym stożkową Γ według twierdzenia Steinera. Pierwszy pęk przecinamy prostą 34, a drugi prostą 23. Dostajemy po cztery punkty przecięcia, mianowicie 3, P , III , 4 i 3, Q , I , 2. Odwzorowanie rzutowe prostej 34 na prostą 23, w którym punkty 3 i 3, P i 2, Q i 4 oraz I i III odpowiadają sobie wzajemnie, jest perspektywiczne na mocy lematu dualnego do udowodnionego w § 89 (p. str. 473), ponieważ punkt 3, w którym przecinają się proste 23 i 34, przechodzi sam na siebie. Zatem wszystkie proste łączące punkty, które odpowiadają sobie w tym odwzorowaniu, przechodzą przez jeden punkt. W szczególności więc prosta $I III$ przechodzi przez punkt przecięcia prostych $Q4$ i $2P$, c. b. d. o.

Korzystając z twierdzenia Pascala, można skonstruować za pomocą samego liniału dowolnie wiele punktów stożkowej, gdy danych jest pięć jej punktów 1, 2, 3, 4, 5. Prowadzimy mianowicie przez punkt 1 dowolną prostą 16 (punktu 6 na razie nie znając) i wyznaczamy punkt III przecięcia prostych 34 i 16. Daje to nam prostą Pascala $III II$, a więc i punkt I . Prosta 51 przecina prostą 16 w punkcie 6.

Skorzystaliśmy tu m. in. z tego, że punkty 1, 2, 3, 4 i 5 wyznaczają punkt II jednoznacznie. Zauważmy, że proste 61 i 6 III przechodzą przez stałe punkty 1 i 5, podczas gdy punkty I i III mogą zmieniać swe położenie na (stałych) prostych 34 i 23. Biorąc pod uwagę trójkąt o wierzchołkach $I, III, 6$, otrzymujemy w ten sposób następujące twierdzenie Newtona i Maclaurina:

Jeśli trzy boki trójkąta przechodzą przez trzy stałe punkty, a dwa jego wierzchołki poruszają się po stałych prostych, to trzeci wierzchołek zakresła stożkową.)

(ROZDZIAŁ XIX

KWADRYKI I POWIERZCHNIE DRUGIEJ KLASY

§ 92. Klasyfikacja rzutowa kwadryk

Definicja powierzchni n -tego stopnia i n -tej klasy w przestrzeni jest analogiczna do definicji krzywych n -tego stopnia i n -tej klasy na płaszczyźnie. Np. zbiór punktów leżących na płaszczyźnie tworzy powierzchnię pierwszego stopnia, zbiór płaszczyzn przechodzących przez punkt — powierzchnię pierwszej klasy.

Pierwszym nasuwającym się zagadnieniem jest wyznaczenie wszystkich typów rzutowych powierzchni 2-go stopnia i 2-jej klasy.

Stosując te same rozumowania algebraiczne, co na płaszczyźnie, dostajemy w geometrii rzeczywistej następujące typy rzutowe kwadryk o równaniach rzeczywistych, zależnie od rzędu macierzy $\mathfrak{A}$, który będziemy nazywali rzędem kwadryki, i od znaków pierwiastków równań charakterystycznych:

$$\begin{array}{ll} (1) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \end{array} \right\} R(\mathfrak{A}) = 4, \\ (2) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \end{array} \right\} \\ (3) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{array} \right\} R(\mathfrak{A}) = 3, \\ (4) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{array} \right\} \\ (5) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{array} \right\} R(\mathfrak{A}) = 2. \\ (6) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{array} \right\} \\ (7) & \left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Pierwsze trzy typy powierzchni mają rząd równy 4. Powierzchnia typu (1) jest nierzeczywista. Typ (2) obejmuje elipsoide, hiperboloide dwupowłokową i paraboloidę eliptyczną. Dla paraboloidy eliptycznej, np. o równaniu

$$Ax^2 + By^2 = 2z, \quad \text{gdzie} \quad A > 0 \quad \text{i} \quad B > 0,$$