

Ponieważ punkty P'_k tworzą znowu czwórkę harmoniczną, więc

$$x'_3 = \sqrt{x'_1 x'_2},$$

skąd na mocy (5)

$$(6) \quad f(\sqrt{x_1 x_2}) = \sqrt{f(x_1) f(x_2)}.$$

Podstawiając tu $x_1 = x$ i $x_2 = 1$, dostajemy wobec (3)

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{f(x)},$$

stąd zaś i z (6)

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2),$$

w szczególności więc

$$f(x_1^2) = [f(x_1)]^2.$$

Jeśli $x > 0$, to istnieje takie x_1 , że $x_1^2 = x$, a zatem

$$f(x) = f(x_1^2) = [f(x_1)]^2 > 0.$$

Stąd i z (4) wynika dla $x_2 > 0$ nierówność

$$f(x_1 + x_2) > f(x_1),$$

a więc funkcja $f(x)$ jest rosnącą. Zakończenie dowodu jest takie samo jak na str. 152.

2° Załóżmy teraz, że P_∞ nie przechodzi w P'_∞ lub jedna z prostych jest prostą w ∞ . Wówczas bierzemy pod uwagę jakiekolwiek przekształcenie rzutowe T_1 przeprowadzające prostą p' w prostą właściwą p'' tak, by P'_∞ przeszło w P''_∞ . Przekształcenie

$$T'' = T' T$$

przeprowadza p w p'' tak, że P_∞ przechodzi w P''_∞ oraz zachowuje się stosunek harmoniczny (gdyż T i T' zachowują ten stosunek). W myśl udowodnionego już przypadku 1° przekształcenie T'' jest więc rzutowe. To samo dotyczy zatem przekształcenia

$$T = T'^{-1} T''.$$

3° Podobnie rozumiemy w przypadku, gdy obie proste p i p' są prostymi w ∞ .)

(ROZDZIAŁ XVII

WSPÓLRZĘDNE PLÜCKEROWSKIE, DUALIZM I PRZYKŁADY JEGO ZASTOSOWAŃ

§ 78. Współrzędne plückerowskie prostych

1. **Współrzędne prostej i równania punktu.** W jakimkolwiek układzie współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie każdą prostą można przedstawić równaniem postaci

$$(1) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad \sum_k |u_k| > 0.$$

Jeśli w tym równaniu współczynniki u_k zastąpimy przez liczby proporcjonalne do nich, to otrzymamy tę samą prostą. Równania kształtu (1) określają więc odpowiedniość wzajemnie jednoznaczłą między prostymi na płaszczyźnie a stosunkami $u_1 : u_2 : u_3$.

Stosunki te nazywamy *współrzędnymi plückerowskimi prostej* lub krótko *współrzędnymi prostej* w przyjętym układzie współrzędnych rzutowych.

Np. stosunki $u_1 : u_2 : u_3$ o wartościach

$$1 : 0 : 0, \quad 0 : 1 : 0, \quad 0 : 0 : 1$$

są współrzędnymi prostych

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

tj. osi układu współrzędnych.

Podobnie, jak badaliśmy zbiory punktów przedstawione równaniami $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, zbadamy zbiory prostych, przedstawione równaniami $f(u_1, u_2, u_3) = 0$. Zaczniemy od równań 1-go stopnia.

Zauważmy, że w myśl definicji współrzędnych plückerowskich prostej równość (1) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by punkt o współrzędnych $x_1 : x_2 : x_3$ leżał na prostej o współrzędnych $u_1 : u_2 : u_3$.

Wobec tego równanie pierwszego stopnia względem współrzędnych prostej

$$(2) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad |a_1| + |a_2| + |a_3| > 0,$$

przedstawia zbiór prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych $a_1 : a_2 : a_3$.

Dlatego nazywamy je *równaniem punktu*.

Podobnie, jak punkt P o współrzędnych rzutowych $x_1 : x_2 : x_3$ oznaczaliśmy przez $P(x_1 : x_2 : x_3)$ lub przez $(x_1 : x_2 : x_3)$, tak prostą p o współrzędnych plückerowskich $u_1 : u_2 : u_3$ będziemy też oznaczali przez $p(u_1 : u_2 : u_3)$ lub przez $(u_1 : u_2 : u_3)$.

Udowodnimy, że *na to, by proste* $(t_1 : t_2 : t_3)$, $(v_1 : v_2 : v_3)$ i $(w_1 : w_2 : w_3)$ *przechodziły przez jeden punkt, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła równość*

$$(3) \quad \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, niech te proste przechodzą przez punkt $(a_1 : a_2 : a_3)$. Wówczas

$$(4) \quad a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 = 0, \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0, \quad a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = 0.$$

Ponieważ $\sum_i |a_i| > 0$, więc z (4) wynika (3).

Na odwrót, gdy zachodzi równość (3), to układ równań (4) o niewiadomych a_1, a_2, a_3 ma rozwiązanie niezerowe. Wszystkie trzy proste przechodzą zatem przez jeden punkt, c. b. d. o.

Twierdzenie to było dowiedzione w § 35 (str. 175) innym sposobem. Teraz zaś dowiedliśmy go, posługując się współrzędnymi prostej. Na tym przykładzie widzimy, że jedno i to samo rozumowanie algebraiczne przy dwojakiej interpretacji współrzędnych, bądź jako współrzędnych punktu, bądź jako współrzędnych prostej, prowadzić może do dwóch różnych twierdzeń. To samo rozumowanie bowiem doprowadziło nas (p. str. 173) do warunku, by trzy punkty leżały na jednej prostej.

W teorii równań pierwszego stopnia względem współrzędnych prostej punkt gra rolę analogiczną do roli linii prostej w teorii równań pierwszego stopnia względem współrzędnych punktu. Poznamy dalsze tego przykłady.

2. Współrzędne rzutowe prostej w pęku. Jak widzieliśmy w § 73 (str. 400), każdy punkt prostej przechodzącej przez punkty $(m_1 : m_2 : m_3)$ i $(n_1 : n_2 : n_3)$ daje się przedstawić w postaci

$$(5) \quad \varrho x_i = \lambda_1 m_i + \lambda_2 n_i, \quad \text{gdzie} \quad \varrho \neq 0 \quad \text{i} \quad i=1, 2, 3;$$

przy tym odpowiedniość między stosunkami $\lambda_1 : \lambda_2$ a punktami tej prostej jest wzajemnie jednoznaczna.

Obecnie udowodnimy analogiczne twierdzenie dla prostych.

Każda prosta przechodząca przez punkt przecięcia prostych $(v_1 : v_2 : v_3)$ i $(w_1 : w_2 : w_3)$ *daje się przedstawić w postaci*

$$(6) \quad \varrho u_i = \lambda_1 v_i + \lambda_2 w_i, \quad \text{gdzie} \quad \varrho \neq 0 \quad \text{i} \quad i=1, 2, 3;$$

przy tym odpowiedniość między stosunkami $\lambda_1 : \lambda_2$ a prostymi tego pęku jest wzajemnie jednoznaczna.

Istotnie, aby prosta należała do pęku wyznaczonego przez proste $(v_1 : v_2 : v_3)$ i $(w_1 : w_2 : w_3)$, potrzeba i wystarcza, żeby spełniona była równość

$$(7) \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

(p. warunek (3)).

Z (7) wynika, że układ równań (6) o niewiadomych ϱ, λ_1 i λ_2 ma rozwiązanie niezerowe. Nie może być $\varrho = 0$, gdyż dane dwie proste byłyby identyczne. Tym samym twierdzenie jest dowiedzione.

Analogię do zbioru punktów prostej stanowi więc zbiór prostych pęku. Jak okazaliśmy w § 73 (str. 401), w równaniach (5) stosunki $\lambda_1 : \lambda_2$ są współrzędnymi rzutowymi punktu w układzie współrzędnych rzutowych, w którym punktami podstawowymi są punkty o współrzędnych $0:1$, $1:0$ i $1:1$.

Przez analogię nazywamy stosunki $\lambda_1 : \lambda_2$ w przedstawieniu (6) *współrzędnymi rzutowymi prostej w pęku* w układzie współrzędnych plückerowskich, którego prostymi podstawowymi są proste o współrzędnych $0:1$, $1:0$ i $1:1$.

Współrzędne rzutowe prostej w pęku zostały więc określone w sposób określony: naprzód zbudowaliśmy na płaszczyźnie układ współrzędnych rzutowych dla punktu, następnie określiliśmy w tym układzie współrzędne prostej na płaszczyźnie, a wreszcie określiliśmy współrzędne rzutowe prostej w pęku. Aby pozbyć się tej

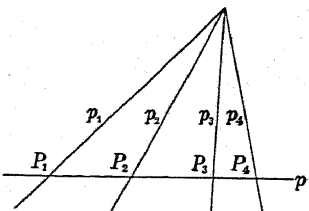
niedogodności, podamy znaczenie geometryczne tych współrzędnych. Udowodnimy mianowicie twierdzenie:

Niech p_1, p_2, p_3, p_4 będą prostymi pęku (6), odpowiadającymi stosunkom

$$0:1, \quad 1:0, \quad 1:1, \quad \lambda_1:\lambda_2.$$

Przetnijmy te proste dowolną prostą p , nie należącą do pęku (6), i oznaczmy punkty przecięcia przez P_1, P_2, P_3, P_4 . Wówczas

$$(8) \quad \lambda_1/\lambda_2 = (P_1 P_2 P_3 P_4).$$



Rys. 144

Istotnie, prosta p_1 (rys. 144), jako odpowiadająca stosunkowi $0:1$, ma współrzędne $v_1:v_2:v_3$, a więc ma ona równanie

$$p_1(x) \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0;$$

podobnie prosta p_2 ma równanie

$$p_2(x) \equiv w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0,$$

prosta p_3 ma równanie

$$(9) \quad p_3(x) \equiv p_1(x) + p_2(x) = 0$$

i prosta p_4 ma równanie

$$(10) \quad p_4(x) \equiv \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = 0.$$

Oznaczmy przez m_1, m_2, m_3 i n_1, n_2, n_3 współrzędne punktów przecięcia P_1 i P_2 prostej p z prostymi p_1 i p_2 . Prosta p ma więc przedstawienie parametryczne

$$(11) \quad \varrho x_i = \mu_1 m_i + \mu_2 n_i, \quad \text{gdzie} \quad \varrho \neq 0 \quad \text{i} \quad i=1,2,3$$

oraz gdzie

$$(12) \quad p_1(m) = 0, \quad p_2(m) \neq 0, \quad p_1(n) \neq 0, \quad p_2(n) = 0.$$

Aby znaleźć stosunek $\mu_1:\mu_2$, wyznaczający punkt P_3 w przedstawieniu (11), podstawiamy do równania (9) wartości x_i wyznaczone z równań (11). Dostajemy

$$p_1(\mu_1 m + \mu_2 n) + p_2(\mu_1 m + \mu_2 n) = 0,$$

czyli

$$\mu_1 p_1(m) + \mu_2 p_1(n) + \mu_1 p_2(m) + \mu_2 p_2(n) = 0,$$

a stąd wobec (12)

$$\mu_2 p_1(n) + \mu_1 p_2(m) = 0,$$

czyli

$$\mu_1:\mu_2 = -p_1(n):p_2(m).$$

Aby znaleźć stosunek $\mu_1:\mu_2$, wyznaczający punkt P_4 , podstawiamy wartość x_i z (11) do (10). Dostajemy analogicznie

$$\mu_1:\mu_2 = -\lambda_1 p_1(n):\lambda_2 p_2(m).$$

W przedstawieniu (11) punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są zatem wyznaczone przez stosunki

$$1:0, \quad 0:1, \quad p_1(n):-p_2(m), \quad -\lambda_1 p_1(n):\lambda_2 p_2(m),$$

wobec czego dostajemy (p. wzór (4) z § 74, str. 402):

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -p_1(n) & p_2(m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -p_1(n) & p_2(m) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 p_1(n) & \lambda_2 p_2(m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda_1 p_1(n) & \lambda_2 p_2(m) \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_1 p_2(m) p_1(n)}{\lambda_2 p_2(m) p_1(n)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

czyli (8), c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie uwalnia określenie współrzędnych prostej w pęku od pomocniczych układów współrzędnych, gdyż wzór (8) nadaje im znaczenie geometryczne.

Ze wzoru (8) wynika też m. in. udowodnione już inną drogą (p. § 74, str. 407) twierdzenie Pappusa, gdyż lewa strona tego wzoru nie zależy od wyboru prostej p .

Ponieważ stosunek anharmoniczny punktów P_1, P_2, P_3, P_4 , w których prosta p przecina proste p_1, p_2, p_3, p_4 pęku, nie zależy od wyboru prostej p , więc zależy on jedynie od wyboru prostych pęku. Jest on zatem wielkością geometryczną. Nazywamy ją *stosunkiem anharmonicznym czterech prostych pęku* i oznaczamy przez $(p_1 p_2 p_3 p_4)$.

W myśl określenia stosunku anharmonicznego czterech prostych jest więc

$$(13) \quad (p_1 p_2 p_3 p_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4).$$

Weźmy pod uwagę pęk prostych i nie należącą do niego prostą p . Każdej prostej pęku przyporządkujemy jej punkt przecięcia z prostą p . To odwzorowanie pęku na prostą jest wzajemnie jednoznaczne. Nazywa się ono *perspektywicznym*.

Niech teraz będą dane dowolne dwa pęki o wierzchołkach P i P' , mogące leżeć w różnych płaszczyznach, oraz takie przekształcenie wzajemnie jednoznaczne T pierwszego pędu w drugi, że dla wszelkich przyporządkowanych sobie czterech par prostych zachodzi równość

$$(14) \quad (p_1 p_2 p_3 p_4) = (p'_1 p'_2 p'_3 p'_4).$$

Takie odwzorowanie T nazywa się *przekształceniem rzutowym pędu w pęk*.

Niech wreszcie będzie dane odwzorowanie perspektywiczne T_1 pędu o wierzchołku P na prostą p , tj. odwzorowanie przyporządkowujące prostej q pędu punkt Q , w którym q przecina p . Weźmy jeszcze pod uwagę analogiczne odwzorowanie perspektywiczne T'_1 pędu o wierzchołku P' na prostą p' . Wówczas za pośrednictwem przekształcenia rzutowego T pierwszego pędu w drugi dostajemy

$$T_1(Q) = q, \quad T(q) = q', \quad T'_1(q') = Q'.$$

Odwzorowanie przyporządkowujące punktowi Q punkt Q' jest wówczas rzutowe, gdyż

$$(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = (Q'_1 Q'_2 Q'_3 Q'_4).$$

Weźmy pod uwagę pęk o wierzchołku Q i odwzorujmy go perspektywicznie na prostą q . Obierzmy w nim dowolne trzy proste p_1, p_2, p_3 za proste podstawowe (rys. 145) a ich punkty przecięcia P_1, P_2, P_3 z prostą q — za punkty podstawowe układu współrzędnych rzutowych na prostej.

Wówczas *współrzędne odpowiadających sobie punktów i prostych w obu układach są te same*.

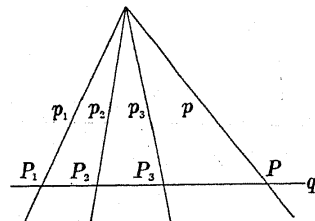
Istotnie, niech $u_1 : u_2$ będą współrzędnymi prostej p w pęku, a $x_1 : x_2$ — współrzędnymi punktu P odpowiadającego jej na prostej q .

Wówczas

$$x_1 : x_2 = (P_1 P_2 P_3 P) : 1 = (p_1 p_2 p_3 p) : 1 = u_1 : u_2.$$

Z tego wynika, że *gdy obierzemy w pęku dwie trójki prostych podstawowych, względem których ta sama prosta ma współrzędne $u_1 : u_2$ i $v_1 : v_2$, to*

$$(v) = \mathfrak{A}(u), \quad |\mathfrak{A}| \neq 0,$$



Rys. 145

ponieważ jest to prawdziwe dla zmiany układu współrzędnych rzutowych na prostej.

Takimi samymi wzorami wyrażają się przekształcenia rzutowe pędu w pęk.

Przez odwzorowanie perspektywiczne przenoszą się też na pęki twierdzenia udowodnione w poprzednim rozdziale o stosunku anharmonicznym, harmonicznym, inwolucjach itd.

Przykładem inwolucji w pęku jest dla elips i hiperbol wzajemne przyporządkowanie par średnic sprzężonych.

§ 79. Korelacje

1. Przekształcenia rzutowe we współrzędnych plückerowskich. Niech

$$(1) \quad \varrho(y) = \mathfrak{A}(x), \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

będzie przekształceniem rzutowym płaszczyzny. Zbadamy, jaka jest wówczas zależność między współrzędnymi u_1, u_2, u_3 dowolnej prostej a współrzędnymi v_1, v_2, v_3 obrazu tejże prostej. Niech więc prosta p ma równanie

$$(2) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Z (1) dostajemy $\varrho^{-1}(x) = \mathfrak{A}^{-1}(y)$ czyli

$$\varrho^{-1} x_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + b_{i3} y_3, \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{B} = (b_{ik}) = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Zatem

$$(3) \quad \sum_{i=1}^3 u_i x_i = \sum_{i=1}^3 (u_i \sum_{k=1}^3 b_{ik} y_k) = \sum_{k=1}^3 (y_k \sum_{i=1}^3 b_{ik} u_i).$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$(4) \quad \sigma_k = b_{1k} u_1 + b_{2k} u_2 + b_{3k} u_3, \quad \text{gdzie} \quad k=1, 2, 3.$$

Obrazem prostej (2) jest więc prosta

$$(5) \quad v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0.$$

Wzór (4) daje nam szukaną zależność. Możemy ją napisać w postaci równania macierzowego *

$$\sigma(v) = \mathfrak{B}^+(u),$$

czyli

$$(6) \quad \sigma(v) = \mathfrak{A}^{+-1}(u),$$

* + oznacza, że macierz jest przestawiona.

skąd

$$(7) \quad \tau(u) = \mathfrak{U}^+(v);$$

τ jest nowym współczynnikiem proporcjonalności.

Udowodniliśmy, że przekształcenie rzutowe płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' przeprowadza zbiór prostych płaszczyzny Π w zbiór prostych płaszczyzny Π' w ten sposób, że zależności między współrzędnymi prostej i jej obrazu są formami liniowymi o wyznaczniku różnym od zera.

Niech teraz będzie dane przekształcenie zbioru prostych płaszczyzny Π w zbiór prostych płaszczyzny Π' postaci

$$(8) \quad \sigma(v) = \mathfrak{U}(u), \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{U}| \neq 0.$$

Łatwo udowodnić, że przekształcenie (8) przeprowadza proste przechodzące przez jeden punkt w proste również przechodzące przez jeden punkt. Tym samym przekształcenie (8) określa przekształcenie wzajemnie jednoznaczne punktów płaszczyzny Π w punkty płaszczyzny Π' . Ostatnie przekształcenie jest rzutowe i wyraża się wzorem

$$(9) \quad \varrho(y) = \mathfrak{U}^{+^{-1}}(x).$$

Możemy zatem przekształcenia rzutowe płaszczyzny pisać albo we współrzędnych punktu w postaci (1), albo we współrzędnych prostej w postaci (8).

2. Korelacje dla płaszczyzn. Niech teraz $\mathfrak{U}$ będzie macierzą nieosobliwą trzeciego stopnia, x_1, x_2, x_3 — współrzędnymi punktu w płaszczyźnie Π , a u_1, u_2, u_3 — współrzędnymi prostej w płaszczyźnie Π' . Wówczas wzór

$$(10) \quad \varrho(u) = \mathfrak{U}(x)$$

określa przekształcenie wzajemnie jednoznaczne punktów płaszczyzny Π w proste płaszczyzny Π' .

Przekształcenie takie nazywa się *korelacją*.

Ważnym przykładem korelacji jest znane nam z § 54 przyporządkowanie każdemu punktowi jego prostej biegunowej względem stożkowej właściwej. Gdy bowiem stożkowa ta ma równanie

$$(11) \quad \sum_{i,k=1}^4 a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

to biegunowa punktu $(x_1 : x_2 : x_3)$ względem niej ma współrzędne plückerowskie (por. wzór (27) z § 54, str. 268)

$$(12) \quad \varrho u_i = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3, \quad \text{gdzie} \quad k=1, 2, 3.$$

Macierz $\mathfrak{U}$ tej korelacji jest symetryczna.

Na odwrót, korelacja o macierzy symetrycznej jest korelacją biegunową względem pewnej stożkowej właściwej, mianowicie względem stożkowej, która jest miejscem geometrycznym punktów leżących na prostych przyporządkowanych tym punktem.

Każda korelacja przeprowadza punkty leżące na jednej prostej w proste przechodzące przez jeden punkt.

Punktom bowiem prostej mającej przedstawienie parametryczne

$$(13) \quad \sigma x_i = \mu_1 m_i + \nu_1 n_i, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3,$$

czyli krótko

$$\sigma(x) = \mu_1(m) + \nu_1(n),$$

odpowiadają proste

$$\sigma \varrho(u) = \sigma \mathfrak{U}(x) = \mu_1 \mathfrak{U}(m) + \nu_1 \mathfrak{U}(n).$$

Przyjmując oznaczenia

$$\mathfrak{U}(m) = (v), \quad \mathfrak{U}(n) = (w),$$

mamy zatem

$$(14) \quad \tau(u) = \mu_1(v) + \nu_1(w),$$

a więc pęk prostych, c. b. d. o.

Każde przekształcenie T punktów płaszczyzny Π w proste płaszczyzny Π' , które punkty leżące na jednej prostej przeprowadza w proste przechodzące przez jeden punkt, jest korelacją.

Niech bowiem T_1 będzie dowolną korelacją przekształcającą proste płaszczyzny Π' w punkty tejże płaszczyzny. Wówczas $T_1 T$ jest przekształceniem punktowym płaszczyzny, przeprowadzającym proste w proste, a tym samym jest przekształceniem punktowym rzutowym. Niech $T_1 T = T_2$. Zatem $T = T_1^{-1} T_2$, czyli T jest iloczynem kolineacji i korelacji, a więc jest korelacją.

Tak samo dowodzi się, że każde przekształcenie prostych płaszczyzny Π w proste płaszczyzny Π' , które proste przechodzące przez jeden punkt przeprowadza w proste przechodzące przez jeden punkt, jest przekształceniem rzutowym.

Udowodnimy, że jeśli korelacja T przekształca cztery punkty P_1, P_2, P_3, P_4 leżące na jednej prostej w cztery proste p_1, p_2, p_3, p_4 przechodzące przez jeden punkt, to

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (p_1 p_2 p_3 p_4).$$

Istotnie, ze wzorów (13) i (14) wynika, że korelacja T przekształca punkt, który na prostej (13) w pewnym układzie współrzędnych rzutowych ma współrzędne $\mu_1:\mu_2$, w prostą pęku (14), która w pewnym układzie współrzędnych rzutowych ma te same współrzędne $\mu_1:\mu_2$.

§ 80. Dualizm na płaszczyźnie

Niechaj na płaszczyźnie będzie dany jakikolwiek zbiór Z punktów i prostych. Weźmy pod uwagę na tej płaszczyźnie dowolną korelację T . Przekształca więc ona zbiór Z w pewien zbiór Z' w ten sposób, że proste przekształca w punkty, punkty w proste, proste przechodzące przez jeden punkt w punkty leżące na jednej prostej i czwórki punktów, mające pewien stosunek anharmoniczny, w czwórki prostych, mające ten sam stosunek.

Weźmy teraz pod uwagę jakiekolwiek twierdzenie prawdziwe o zbiorze Z , *należące do geometrii rzutowej* (p. § 71, str. 389), i zamieńmy w nim wszędzie słowa „punkt” i „prosta”, dokonując przy tym niezbędnych zmian stylistycznych, jak np. „punkt leży na prostej” zamieniając na „prosta przechodzi przez punkt”. Można dowieść, że otrzymamy wówczas prawdziwe twierdzenie o zbiorze Z' .

Dowodzi się ogólnie, że *przez zamianę słów „punkt” i „prosta” z każdego prawdziwego twierdzenia geometrii rzutowej otrzymuje się znowu prawdziwe twierdzenie geometrii rzutowej*.

Jest to podstawowe twierdzenie o geometrii rzutowej, zwane *zasadą dwoistości płaskiej* lub *dualizmem płaskim*.

Oto dwa pierwsze przykłady tej zasady:

1. Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

2. Gdy cztery proste pęku przecięć prostą, która nie należy do tego pęku, to stosunek anharmoniczny tych czterech punktów przecięcia nie zależy od wyboru prostej przecinającej.

1'. Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny.

2'. Gdy przez cztery punkty prostej przeprowadzić cztery proste pęku, którego wierzchołek nie leży na tej prostej, to stosunek anharmoniczny tych czterech prostych nie zależy od wyboru wierzchołka pęku.

Dualizm może też być stosowany w formie analitycznej.

Przez korelację bowiem

$$qu_k = x_k, \quad \text{gdzie } k=1,2,3,$$

otrzymujemy z każdego związku między współrzędnymi punktów P i prostych p związek między współrzędnymi prostych odpowiadających punktom P i punktów odpowiadających prostym p .

Oto przykłady:

3. Na to, by punkt $(x_1:x_2:x_3)$ leżał na prostej $(u_1:u_2:u_3)$, potrzeba i wystarcza, żeby

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

4. Równanie

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

przedstawia prostą.

5. Trzy punkty leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Punkty leżące na prostej mają przedstawienie parametryczne

$$qx_i = \lambda_1 m_i + \lambda_2 n_i,$$

gdzie $i=1,2,3$.

3'. Na to, by prosta $(u_1:u_2:u_3)$ przeszła przez punkt $(x_1:x_2:x_3)$, potrzeba i wystarcza, żeby

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0.$$

4'. Równanie

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$$

przedstawia punkt.

5'. Trzy proste przechodzą przez jeden punkt wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6'. Proste przechodzące przez punkt mają przedstawienie parametryczne

$$qu_i = \lambda_1 v_i + \lambda_2 w_i,$$

gdzie $i=1,2,3$.

W dalszym ciągu będziemy rozważania należące do geometrii rzutowej prowadzili systematycznie wraz z dualnymi.

Należy podkreślić, że *zasada dwoistości stosuje się jedynie w geometrii rzutowej*. Już w afinicznej przestaje być prawdziwą, gdyż wyróżniamy w niej na płaszczyźnie specjalnie jedną prostą, mianowicie prostą w ∞ , nie wyróżniając jednak żadnego punktu, który mógłby odegrać rolę pojęcia dualnego do niej.

§ 81. Współrzędne plückerowskie płaszczyzn

1. Twory jednowymiarowe. *Współzrędnymi plückerowskimi płaszczyzny o równaniu*

$$(1) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

nazywamy liczby u_1, u_2, u_3, u_4 .

Otrzymujemy w ten sposób odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między stosunkami $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ a płaszczyznami w przestrzeni.

Równanie pierwszego stopnia względem współrzędnych plückerowskich jako zmiennych:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0$$

przedstawia zbiór płaszczyzn przechodzących przez punkt o współrzędnych a_1, a_2, a_3, a_4 .

Dowolna płaszczyzna pęku wyznaczonego przez płaszczyzny o równaniach

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0, \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 = 0$$

ma równanie

$$\sum_{k=1}^4 (\lambda_1 u_k + \lambda_2 v_k) x_k = 0,$$

a zatem ma ona współrzędne plückerowskie

$$(2) \quad \varrho u_k = \lambda_1 v_k + \lambda_2 w_k, \quad \text{gdzie } k=1, 2, 3, 4.$$

Liczby λ_1 i λ_2 nazywają się *współzrędnymi rzutowymi płaszczyzny w pęku*.

Dokładnie tak samo jak dla pęku prostych, wypowiada się i udowadnia twierdzenie Pappusa dla czterech płaszczyzn i przebijającej je prostej oraz wprowadza się stosunek anharmoniczny czterech płaszczyzn pęku, ich stosunek harmoniczny, inwolucje itd.

Następujące trzy twory geometryczne: zbiór punktów prostej, pęk prostych i pęk płaszczyzn łączymy w jedno pojęcie i nazywamy *tworami liniowymi jednowymiarowymi*.

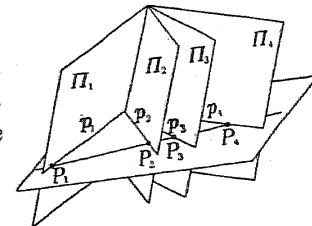
Możemy wprowadzić jednolite pojęcie *perspektywiczności dwóch tworów liniowych jednowymiarowych*. Znamy już mianowicie pojęcie perspektywiczności punktów prostej i pęku prostych. Definiujemy je analogicznie dla punktów prostej i pęku płaszczyzn. Następnie, odwzorowanie punktów dwóch prostych nazywamy perspektywiczno-

ścią, gdy proste łączące punkty, które odpowiadają sobie w tym odwzorowaniu, tworzą pęk (rzut środkowy prostej na prostą). Dalej odwzorowanie pęku prostych na pęki płaszczyzn nazywamy perspektywicznym, gdy każda prosta tego pęku leży na płaszczyźnie odpowiadającej jej w tym odwzorowaniu. Perspektywiczność między pękiem prostych a pękiem płaszczyzn otrzymujemy więc, przecinając pęk płaszczyzn płaszczyzną Π nie należącą do pęku i przyporządkowując każdej płaszczyźnie pęku jej krawędź przecięcia z płaszczyzną Π . Wreszcie, analogicznie określa się perspektywiczność dwóch pęków płaszczyzn i dwóch pęków prostych.

Gdy dwa twory liniowe jednowymiarowe są perspektywiczne, to stosunek anharmoniczny czterech odpowiadających sobie elementów jest ten sam.

Istotnie (p. rys. 146),

$$(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4) = (p_1 p_2 p_3 p_4).$$



Rys. 146.

2. Korelacje i dualizm przestrzenny. Gdy $|\mathfrak{A}| \neq 0$, to wzór

$$(3) \quad \varrho u_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 + a_{k4} x_4, \quad \text{gdzie } k=1, 2, 3, 4 \text{ i } |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie płaszczyzny punktom.

Odwzorowanie to nazywamy *korelacją przestrzenną*.

Przykładem korelacji przestrzennej jest przyporządkowanie punktowi jego płaszczyzny biegunowej względem kwadryki rzędu 4 (p. § 63, str. 337).

Korelacje przestrzenne przekształcają zbiór punktów leżących w jednej płaszczyźnie w zbiór płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt.

Niech bowiem będzie dana płaszczyzna

$$(4) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Z (3) dostajemy

$$(5) \quad \sigma x_k = b_{k1} u_1 + b_{k2} u_2 + b_{k3} u_3 + b_{k4} u_4, \quad \text{gdzie } k=1, 2, 3, 4$$

i gdzie

$$(6) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}, \quad |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|^{-1} \neq 0.$$

Podstawiając wartości (5) do (4), dostajemy

$$(7) \quad b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4 = 0,$$

gdzie

$$b_s = a_1 b_{1s} + a_2 b_{2s} + a_3 b_{3s} + a_4 b_{4s} \quad \text{dla} \quad s=1, 2, 3, 4.$$

Wobec (6) liczby b_s nie znikają równocześnie, a więc równanie (7) przedstawia zbiór płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt, c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie możemy wypowiedzieć krótko:

Korelacje przestrzenne przekształcają punkty w płaszczyzny oraz płaszczyzny w punkty.

Udowodnimy jeszcze, że *korelacje przestrzenne przekształcają proste w proste*. Ścisłej: korelacja taka przekształca zbiór punktów prostej w pęk płaszczyzn przechodzących przez prostą.

Istotnie, zbiór punktów leżących na prostej daje się przedstawić w postaci

$$(8) \quad \varrho x_k = \mu m_k + \nu n_k, \quad \text{gdzie} \quad k=1, 2, 3, 4.$$

Obrazem punktu (8) jest płaszczyzna

$$\begin{aligned} \sigma u_k &= a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 + a_{k4} x_4 = \\ &= \mu(a_{k1} m_1 + a_{k2} m_2 + a_{k3} m_3 + a_{k4} m_4) + \nu(a_{k1} n_1 + a_{k2} n_2 + a_{k3} n_3 + a_{k4} n_4) = \\ &= \mu v_k + \nu w_k. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc pęk płaszczyzn, c. b. d. o.

Niech teraz w przestrzeni będzie dany jakikolwiek zbiór Z punktów, prostych i płaszczyzn. Weźmy pod uwagę dowolną korelację przestrzenną. Przekształca ona zbiór Z w pewien zbiór Z' tak, że punkty przechodzą w płaszczyzny, proste w proste, a płaszczyzny w punkty. Obrazem punktu leżącego na prostej jest płaszczyzna przechodząca przez obraz tej prostej, obrazem płaszczyzny przechodzącej przez punkt jest punkt leżący na płaszczyźnie, która jest obrazem tego punktu, itd.

Z każdego prawdziwego twierdzenia geometrii rzutowej o zbiorze Z dostajemy więc prawdziwe twierdzenie o zbiorze Z' (por. § 80, str. 432) zastępując słowo „punkt” słowem „płaszczyzna”, a słowo „płaszczyzna” słowem „punkt” (i uzupełniając te zmiany niezbędnymi poprawkami stylistycznymi). Otrzymujemy tzw. *zasadę dwoistości przestrzennej* czyli *dualizm przestrzenny*.

Oto kilka pierwszych przykładów dualizmu przestrzennego:

1. Przez każde dwa różne punkty przechodzi prosta.

2. Przez każde trzy różne punkty przechodzi jedna płaszczyzna.

3. Jeśli prosta zawiera dwa punkty leżące na płaszczyźnie Π , to sama ona leży na tej płaszczyźnie.

4. Na to, żeby cztery punkty leżały na jednej płaszczyźnie, potrzeba i wystarcza, by

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

1'. Każde dwie różne płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej.

2'. Każde trzy różne płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie.

3'. Jeśli prosta leży na dwóch płaszczyznach przechodzących przez punkt P , to sama ona przechodzi przez ten punkt.

4'. Na to, żeby cztery płaszczyzny przechodziły przez jeden punkt, potrzeba i wystarcza, by

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 82. Twierdzenie Desargues'a o trójkątach

Jednym z podstawowych twierdzeń geometrii rzutowej jest twierdzenie Desargues'a o trójkątach. Dowiedzimy go wprawdzie dla płaszczyzny.

Trójkątem nazywamy tu zbiór złożony z:

1° trzech prostych leżących na jednej płaszczyźnie i nie przecinających się w jednym punkcie,

2° trzech punktów przecięcia tych prostych.

Tworem dualnym do trójkąta na płaszczyźnie jest więc znowu trójkąt.

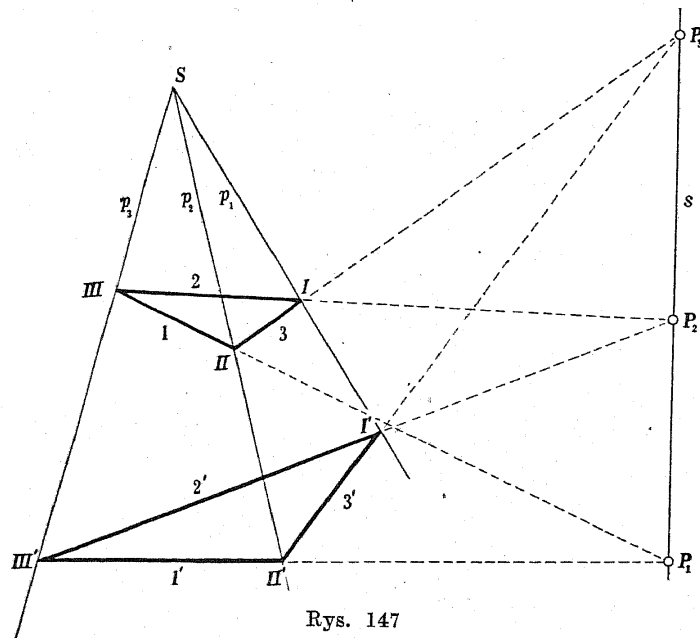
Twierdzenie Desargues'a na płaszczyźnie formułujemy równocześnie z odwrotnym, które jest do niego dualne:

Niech będą dane na płaszczyźnie dwa trójkąty o bokach ponumerowanych cyframi 1, 2, 3 i 1', 2', 3'. Niech wierzchołek przeciwny do boku 1 będzie oznaczony cyfrą I itd.

Niech będą dane na płaszczyźnie dwa trójkąty o wierzchołkach ponumerowanych cyframi I, II, III i I', II', III'. Niech bok przeciwny do wierzchołka I będzie oznaczony cyfrą 1 itd.

Jeśli boki 1 i 1', 2 i 2', 3 i 3' przecinają się parami w punktach P_1, P_2, P_3 leżących na jednej prostej s , to proste p_1, p_2, p_3 łączące pary wierzchołków I i I', II i II', III i III' przechodzą przez jeden punkt S (rys. 147).

Jeśli proste p_1, p_2, p_3 łączące pary wierzchołków I i I', II i II', III i III' przechodzą przez jeden punkt S , to boki 1 i 1', 2 i 2', 3 i 3' przecinają się parami w punktach P_1, P_2, P_3 , leżących na jednej prostej s (rys. 147).



Rys. 147

Dowód. W dowolnym układzie współrzędnych rzutowych:

niech boki trójkątów mają równania

$$u_i = 0, u'_i = 0, \text{ gdzie } i=1, 2, 3,$$

i niech $u=0$ będzie równaniem prostej s . Prosta s należy do każdego z trzech pęków wyznaczonych przez pary prostych o numerach j, j' , gdzie $j=1, 2, 3$. Istnieją więc trzy pary stałych λ_i, λ'_i , dla których

niech wierzchołki trójkątów mają równania

$$U_i = 0, U'_i = 0, \text{ gdzie } i=1, 2, 3,$$

i niech $U=0$ będzie równaniem punktu S . Punkt S leży na każdej z trzech prostych łączących pary punktów o numerach i, i' , gdzie $i=I, II, III$. Istnieją więc trzy pary stałych λ_i, λ'_i , dla których

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 u_1 + \lambda'_1 u'_1, \\ (1) \quad u &= \lambda_2 u_2 + \lambda'_2 u'_2, \\ u &= \lambda_3 u_3 + \lambda'_3 u'_3. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda'_1 u'_1 &= \lambda_2 u_2 + \lambda'_2 u'_2 = \\ &= \lambda_3 u_3 + \lambda'_3 u'_3, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} \lambda_2 u_2 - \lambda_3 u_3 &= \lambda'_3 u'_3 - \lambda'_2 u'_2, \\ (2) \quad \lambda_3 u_3 - \lambda_1 u_1 &= \lambda'_1 u'_1 - \lambda'_3 u'_3, \\ \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 &= \lambda'_2 u'_2 - \lambda'_1 u'_1. \end{aligned}$$

Oznaczmy kolejno przez $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ i $\bar{u}_3$ wspólną wartość obu stron każdej z tych tożsamości. Żaden z wielomianów $\bar{u}_i$ nie znika tożsamościowo, bo np. w razie $\bar{u}_1=0$ byłoby

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = 0$$

i wobec (1) równanie $u=0$ nie przedstawiałoby prostej, wbrew przyjętemu założeniu.

Na mocy (2) prosta $\bar{u}_1=0$ przechodzi zarówno przez punkt przecięcia boków 2 i 3 czyli przez punkt I , jak przez punkt przecięcia boków 2' i 3' czyli przez punkt I' . Prosta $\bar{u}_1=0$ jest więc prostą p_1 . Podobnie, prosta $\bar{u}_2=0$ jest prostą p_2 , a prosta $\bar{u}_3=0$ — prostą p_3 . Ale dodając stronami tożsamości (2), otrzymujemy

$$\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 = 0,$$

więc proste p_1, p_2, p_3 przechodzą przez jeden punkt, c. b. d. o.

$$\begin{aligned} U &= \lambda_1 U_1 + \lambda'_1 U'_1, \\ (1') \quad U &= \lambda_2 U_2 + \lambda'_2 U'_2, \\ U &= \lambda_3 U_3 + \lambda'_3 U'_3. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_1 + \lambda'_1 U'_1 &= \lambda_2 U_2 + \lambda'_2 U'_2 = \\ &= \lambda_3 U_3 + \lambda'_3 U'_3, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} \lambda_2 U_2 - \lambda_3 U_3 &= \lambda'_3 U'_3 - \lambda'_2 U'_2, \\ (2') \quad \lambda_3 U_3 - \lambda_1 U_1 &= \lambda'_1 U'_1 - \lambda'_3 U'_3, \\ \lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2 &= \lambda'_2 U'_2 - \lambda'_1 U'_1. \end{aligned}$$

Oznaczmy kolejno przez $\bar{U}_1, \bar{U}_2$ i $\bar{U}_3$ wspólną wartość obu stron każdej z tych tożsamości. Żaden z wielomianów $\bar{U}_i$ nie znika tożsamościowo, bo np. w razie $\bar{U}_1=0$ byłoby

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = 0$$

i wobec (1') równanie $U=0$ nie przedstawiałoby punktu, wbrew przyjętemu założeniu.

Na mocy (2') punkt $\bar{U}_1=0$ leży zarówno na prostej łączącej wierzchołki II i III czyli na boku 1, jak na prostej łączącej wierzchołki II' i III' czyli na boku 1'. Punkt $\bar{U}_1=0$ jest więc punktem P_1 . Podobnie, punkt $\bar{U}_2=0$ jest punktem P_2 , a punkt $\bar{U}_3=0$ — punktem P_3 . Ale dodając stronami tożsamości (2'), otrzymujemy

$$\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 = 0,$$

więc punkty P_1, P_2, P_3 leżą na jednej prostej, c. b. d. o.

W ten sposób twierdzenie Desargues'a zostało dowiedzione dla płaszczyzny. Jest ono prawdziwe i w przestrzeni, jak również twierdzenie do niego odwrotne. Tu jednak twierdzenie dualne nie jest zarazem odwrotnym, gdyż w przestrzeni figurą dualną do trójkąta nie jest trójkąt.

Trójkątem w przestrzeni nazywamy twór złożony z trzech punktów nie leżących na jednej prostej i trzech prostych je łączących.

Twierdzenie Desargues'a dla przestrzeni oraz twierdzenie do niego dualne można wysłowić, jak następuje:

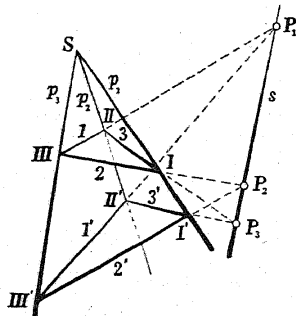
Niech będą dane dwa trójkąty, leżące na różnych płaszczyznach, o wierzchołkach I, II, III i I', II', III' oraz o przeciętłych bokach $1, 2, 3$ i $1', 2', 3'$.

Jeśli boki 1 i 1', 2 i 2', 3 i 3' przecinają się parami w punktach P_1, P_2, P_3 leżących na jednej prostej s , to proste p_1, p_2, p_3 łączące pary wierzchołków I i I', II i II', III i III' mają wspólny punkt S (rys. 148).

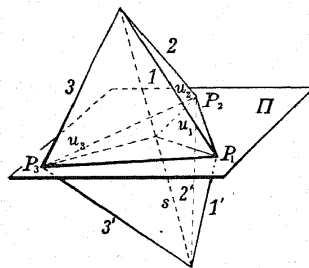
Trójscianem w przestrzeni nazywamy twór złożony z trzech płaszczyzn nie przechodzących przez jedną prostą i trzech ich krawędzi przecięcia.

Niech będą dane dwa trójsiany, mające różne wierzchołki, o ścianach I, II, III i I', II', III' oraz o przeciwległych krawędziach $1, 2, 3$ i $1', 2', 3'$.

Jeśli pary krawędzi 1 i 1', 2 i 2', 3 i 3' leżą w płaszczyznach u_1, u_2, u_3 mających wspólną prostą s , to krawędzie p_1, p_2, p_3 przecięcia par ścian I i I', II i II', III i III' leżą na jednej płaszczyźnie Π (rys. 149).



Rys. 148



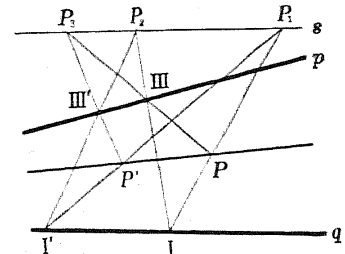
Rys. 149

Dowód przeprowadzimy dla twierdzenia prostego; zdualizowanie tego dowodu nie nastrecza trudności.

Oznaczmy trójkami cyfr III III' i II' III' płaszczyzny, w których leżą dane trójkąty. Prosta s jest z założenia krawędzią przecięcia tych płaszczyzn (rys. 148). Boki I i I' , jako przecinające się w jednym punkcie P_1 , leżą na jednej płaszczyźnie; oznaczmy ją czwórką II III II' III' (wystarczyłaby oczywiście dowolna trójka z tych czterech cyfr). Analogicznie otrzymujemy płaszczyzny III I III' I' i III I II' I' . Wszystkie trzy płaszczyzny są różne, bo gdyby np. płaszczyzny II III II' III' i III I II' I' były identyczne, to oba dane trójkąty leżałyby na jednej płaszczyźnie, wbrew założeniu. Płaszczyzny te przecinają się parami wzdłuż prostych p_1 , p_2 , p_3 , wszystkie trzy zaś w jednym punkcie S . Proste p_1 , p_2 , p_3 przechodzą zatem przez punkt S , c. b. d. o.

Łatwo dowodzi się twierdzenia odwrotnego.

Przykładem praktycznego zastosowania twierdzenia Desargues'a może służyć konstrukcja pozwalająca przeprowadzić za pomocą samego liniału prostą przez dany punkt i przez punkt przecięcia dwóch innych prostych, gdy ten punkt przecięcia leży poza arkuszem rysunku (p. rys. 150).



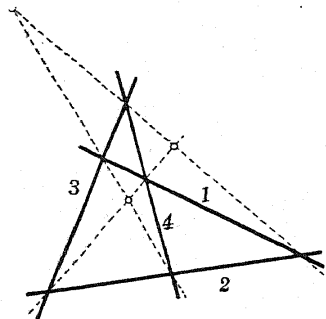
Rys. 150

Dany jest punkt P oraz proste p i q . Kreślimy dowolną prostą s i obieramy na niej dwa punkty P_1 i P_3 tak, by prosta P_1P przecinała prostą q w obrębie rysunku w punkcie I , a prosta P_3P przecinała prostą p w punkcie III . Na prostej q obieramy dowolnie punkt I' . Wówczas prosta przez punkty I i III przecina prostą s w punkcie P_2 , prosta przez punkty I' i P_2 przecina prostą p w punkcie III' , a prosta przez punkty P_3 i III' przecina prostą P_1I' w punkcie P' . Na mocy twierdzenia Desargues'a dla płaszczyzny, zastosowanego do trójkątów o wierzchołkach I', III', P' i I, III, P , prosta PP' przechodzi przez punkt przecięcia prostych p i q .

Jeżeli możliwe jest użycie dwóch ekierok, a więc gdy łatwe jest kreślenie równoległych, można punkty III i III' oraz I i I' obrać na prostych p i q dowolnie, a następnie przez punkt III' przeprowadzić równoległą do prostej przechodzącej przez punkty III i P , przez punkt zaś I' — równoległą do prostej przechodzącej przez punkty I i P . Punkt P' przecięcia tych równoległych znów wyznacza wraz z punktem P prostą przechodzącą przez punkt przecięcia prostych p i q . W tym przypadku s jest prostą w ∞ .

§ 83. Czworobok zupełny i czworokąt zupełny

Czworobokiem zupełnym na płaszczyźnie (rys. 151) nazywamy twór złożony z czterech prostych, zwanych *bokami czworoboku*, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, oraz z ich sześciu punktów przecięcia, zwanych *wierzchołkami czworoboku*.



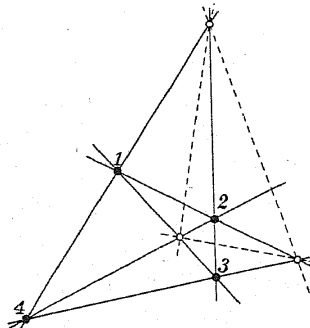
Rys. 151

Proste, które nie są bokami, a łączą dwa wierzchołki, nazywają się *prostymi przekątnymi* (proste kreskowane na rysunku).

Proste przekątne są bokami trójkąta, którego wierzchołki nazywają się *punktami przekątnymi* (kółka na rysunku).

Na każdej prostej przekątnej czworoboku zupełnego leżą dwa wierzchołki tego czworoboku i dwa punkty przekątne.

Czworokątem zupełnym na płaszczyźnie (rys. 152) nazywamy twór złożony z czterech punktów, zwanych *wierzchołkami czworokąta*, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, oraz z sześciu prostych je łączących, zwanych *bokami czworokąta*.



Rys. 152

Punkty, które nie są wierzchołkami, a są punktami przecięcia boków, nazywają się *punktami przekątnymi* (kółka na rysunku).

Punkty przekątne są wierzchołkami trójkąta, którego boki nazywają się *prostymi przekątnymi* (kreskowane na rysunku).

Przez każdy punkt przekątny czworokąta zupełnego przechodzą dwa boki tego czworokąta i dwie proste przekątne.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Para wierzchołków i para punktów przekątnych leżących na jednej prostej przekątnej czworoboku zupełnego przedziela ją harmonicznie.

Para prostych przekątnych i para boków przechodzących przez jeden punkt przekątny czworokąta zupełnego przedziela ją harmonicznie.

Udowodnimy to twierdzenie dla czworoboku zupełnego; zdualizowanie dowodu nie nastrecza trudności.

Oznaczmy cyframi 1, 2, ..., 6 wierzchołki czworoboku zupełnego, a cyframi I, II, III — punkty przekątne (rys. 153). Punkty I i II są różne, w przeciwnym bowiem razie punkty 3, 4, 5 i 6 leżałyby na jednej prostej, a więc proste łączące punkty 3 i 5 oraz 4 i 6 byłyby identyczne, wbrew założeniu. Wynika stąd, że

$$(1 \ 2 \ I \ II) \neq 1.$$

Weźmy pod uwagę proste przekątne przez punkty 1 i 2 oraz 4 i 5. Na tych przekątnych nie leżą wierzchołki 3 i 6 czworoboku.

Utwórzmy rzut perspektywiczny przekątnej przez punkty 4 i 5 na przekątną przez punkty 1 i 2 z punktu 3. Wówczas stosunek anharmoniczny nie ulegnie zmianie (p. § 74, str. 402), a ponieważ punkt 5 przechodzi w punkt 1, punkt 4 w punkt 2, punkt III w punkt I i wreszcie punkt II sam w siebie, więc

$$(1 \ 2 \ I \ II) = (5 \ 4 \ III \ II).$$

Utwórzmy rzut perspektywiczny przekątnej przez punkty 4 i 5 na przekątną przez punkty 1 i 2 z punktu 6. Otrzymujemy analogicznie

$$(1 \ 2 \ I \ II) = (4 \ 5 \ III \ II).$$

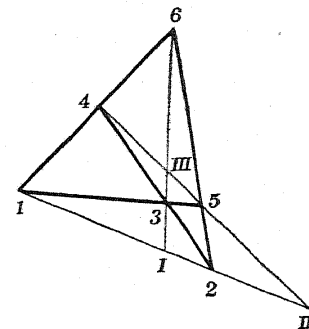
Niech $(1 \ 2 \ I \ II) = \lambda$. Ponieważ (p. wzór (8) z § 74, str. 404)

$$(5 \ 4 \ III \ II) = \frac{1}{(4 \ 5 \ III \ II)},$$

wiec

$$\lambda = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda^2 = 1,$$

skąd wobec (1) dostajemy $\lambda = -1$, c. b. d. o.



Rys. 153

Udowodnione twierdzenie o czworoboku zupełnym umożliwia konstrukcję czwartego punktu czwórki harmonicznej za pomocą samego liniału. Niech bowiem będą dane (jak na rysunku 153) punkty $1, 2$ i I . Obieramy punkt 6 dowolnie (lecz nie na prostej przechodzącej przez punkty 1 i 2). Na prostej przez punkty 6 i I bierzemy różny od nich obu punkt 4 . Znajdujemy punkt 3 przecięcia prostych przechodzących przez 1 i 6 oraz przez 2 i 4 , a następnie punkt 5 przecięcia prostych przechodzących przez 1 i 3 oraz przez 2 i 6 . Prosta przechodząca przez 4 i 5 przecina prostą przechodzącą przez 1 i 2 w czwartym punkcie harmonicznym II .

W szczególności, gdy punkt I jest środkiem odcinka, punkt II jest punktem w ∞ . Jeśli więc środek odcinka jest dany, możemy za pomocą samego liniału kreślić proste równoległe do odcinka i na odwrót. Są to znane nam (z § 30, str. 153) konfiguracje Steinera.

W czworoboku zupełnym nazywamy *wierzchołkiem przeciwnym* do wierzchołka P punkt przecięcia boków nie przechodzących przez wierzchołek P .

Wierzchołki czworoboku zupełnego możemy więc podzielić na trzy pary wierzchołków wzajemnie przeciwnych.

Zachodzą dwa następujące dualne względem siebie twierdzenia Desargues'a o czworoboku i czworokacie zupełnym:

Dowolny punkt P nie leżący na boku czworoboku zupełnego połączmy z parami wierzchołków przeciwnych trzema parami prostych p i p' , q i q' oraz r i r' . Inwolucja, która przyporządkowuje sobie wzajemnie proste p i p' oraz proste q i q' , przyporządkowuje sobie również proste r i r' .

Dowód przeprowadzimy dla twierdzenia o czworokacie; przejdzie do dualnego nie nastrojąc trudności.

W czworokacie zupełnym nazywamy *bokiem przeciwnym* do boku p bok przechodzący przez wierzchołki nie leżące na boku p .

Boki czworokata zupełnego możemy więc podzielić na trzy pary boków wzajemnie przeciwnych.

Dowolną prostą p nie przechodzącą przez wierzchołek czworokata zupełnego przetnijmy jego boki przeciwnie w trzech parach punktów P i P' , Q i Q' oraz R i R' . Inwolucja, która przyporządkowuje sobie wzajemnie punkty P i P' oraz punkty Q i Q' , przyporządkowuje sobie również punkty R i R' .

Oznaczmy wierzchołki czworokata cyframi $1, 2, 3$ i 4 , a punkt przecięcia boków łączących 1 i 3 oraz 2 i 4 — cyfrą 5 (rys. 154). Utwórzmy rzuty perspektywiczne punktów $P, 5, 1$ i 3 na prostą p z punktów 2 i 4 .

Wobec tego, że stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem rzutu perspektywicznego, zachodzą równości

$$(P\ 5\ 1\ 3) = (P\ P'\ R' Q), \quad (P\ 5\ 1\ 3) = (P\ P' Q' R),$$

a ponieważ na mocy wzoru (8) z § 74 (str. 404) jest

$$(P\ P' Q' R) = (P' P R Q'),$$

więc

$$(2) \quad (P\ P' R' Q) = (P' P R Q').$$

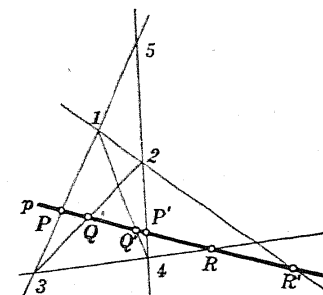
Weźmy teraz pod uwagę inwolucję, wyznaczoną przez pary punktów P, P' i Q, Q' (p. § 76, str. 413) przyporządkowanych sobie wzajemnie. Z (2) wynika, że inwolucja ta przyporządkowuje sobie wzajemnie punkty R i R' , c. b. d. o.

Twierdzenie o czworoboku zupełnym, udowodnione na str. 443, można uważać za szczególny przypadek dowiedzonego teraz twierdzenia Desargues'a, mianowicie gdy punkt R jest identyczny z punktem R' , a punkt Q z punktem Q' , a więc gdy R i Q są punktami stałymi inwolucji.

Wówczas pozostałe punkty przecięcia danej prostej z bokami czworokata, tj. punkty P i P' , przedzielają harmonicznie parę punktów stałych.

Uwaga. Szczególnym przypadkiem czworoboku zupełnego jest równoległobok z jego przekątnymi. Tu jedną z przekątnych jest prosta w ∞ , a więc dwa punkty przekątne są punktami w ∞ . Czwarty punkt harmoniczny jest zatem środkiem odcinka. Wynika stąd, że przekątne właściwe równoległoboku się połowią.

Możemy też traktować równoległobok jako szczególny przypadek czworokata zupełnego. Prowadząc przez punkt przecięcia przekątnych proste równoległe do boków, dostajemy wraz z przekątnymi, na mocy twierdzenia o czworokacie zupełnym, czwórkę harmoniczną prostych.



Rys. 154

§ 84. Twierdzenie Laguerre'a

W § 41 (p. str. 209) udowodniliśmy, że każde przekształcenie rzutowe, które parę punktów cyklicznych płaszczyzny Π przeprowadza w parę punktów cyklicznych płaszczyzny Π' , jest podobieństwem, a więc zachowuje kąty. Głębszą przyczynę tego faktu wyjaśnia twierdzenie Laguerre'a, którym się obecnie zajmujemy. Ponieważ występuje w nim pojęciem logarytmu liczby zespolonej, przypominamy, że dla $z=a+bi$ oznaczamy przez $\log z$ każdą z nieskończenie wielu liczb

$$(1) \quad \log|z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad \text{gdzie } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

i gdzie

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Logarytm ten ma następujące dwie własności:

$$1^\circ \quad e^{\log z} = z,$$

$$2^\circ \quad \text{gdy } e^w = z, \text{ to } w \text{ jest jedną z liczb (1).}$$

Skorzystamy również z *tożsamości Eulera*

$$(2) \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Niech p i q będą prostymi właściwymi, przecinającymi się w punkcie właściwym O . Przez punkt ten przeprowadźmy proste minimalne i_1 i i_2 . Umieśćmy w punkcie O początek układu współrzędnych. Oznaczmy przez α i β kąty zorientowane, jakie tworzą proste p i q z osią Ox . Proste p i q mają zatem równania

$$(3) \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0, \quad x \sin \beta - y \cos \beta = 0.$$

Proste minimalne i_1 i i_2 mają równania (por. wzór (4) z § 41, str. 206)

$$(4) \quad x - iy = 0, \quad x + iy = 0.$$

Proste (3) i (4) należą do pęku o wierzchołku O . Jeśli osie $x=0$ i $y=0$ przyjmiemy w tym pęku za proste podstawowe, to proste (3) będą w nim miały współrzędne (p. § 78, str. 425)

$$\sin \alpha : -\cos \alpha, \quad \sin \beta : -\cos \beta,$$

a prosta (4) — współrzędne

$$1 : -i, \quad 1 : i.$$

Obliczmy teraz stosunek anharmoniczny:

$$\begin{aligned} (i_1 i_2 p q) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -i \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & i \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & i \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -i \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)} = \frac{e^{-i\alpha} e^{i\beta}}{e^{i\alpha} e^{-i\beta}} = e^{2(\beta - \alpha)i}. \end{aligned}$$

Liczba $\omega = \beta - \alpha$ jest równa jednej z wartości kąta zorientowanego, którego pierwszym ramieniem jest p , a drugim q . Zatem

$$e^{2\omega i} = (i_1 i_2 p q).$$

skąd

$$(5) \quad \omega = \frac{1}{2i} \log(i_1 i_2 p q),$$

gdzie wartość logarytmu po prawej stronie jest odpowiednio dobrana. Jeśli zamiast niej weźmiemy inną wartość logarytmu, to ponieważ różni się ona od poprzedniej o wielokrotność liczby $2\pi i$, więc prawa strona wzoru (5) zmienia się o wielokrotność liczby π . Otrzymujemy wtedy bądź inną z miar tego samego kąta zorientowanego, bądź jedną z miar kąta zorientowanego przyległego.

Jeśli we wzorze (5) zmienimy porządek prostych i_1 i i_2 lub prostych p i q , to ponieważ

$$(i_1 i_2 p q) = \frac{1}{(i_2 i_1 p q)} = \frac{1}{(i_1 i_2 q p)},$$

więc prawa strona wzoru (5) zmienia znak i dostaniemy znowu miary kątów utworzonych przez proste p i q .

Wynika stąd, że *prawa strona wzoru (5) przybiera nieskończenie wiele wartości, z których każda jest miarą jednego z kątów zorientowanych, utworzonych przez proste p i q , oraz każda z tych miar daje się przedstawić wzorem (5).*

Jest to *twierdzenie Laguerre'a*.

Budując geometrię rzutową, postąpiliśmy w sposób następujący. Przestrzeń euklidesową powiększyliśmy za pomocą pojęć geometrii euklidesowej (kierunków) do przestrzeni rzutowej, w której zbudowaliśmy geometrię rzutową za pomocą przekształceń rzutowych. Twierdzenie Laguerre'a umożliwia nam postępowanie

odwrotne. W nauce o podstawach geometrii przestrzeni rzutową zespoloną i rzeczywistą buduje się aksjomatycznie, określając w odpowiedni sposób pojęcie stosunku anharmonicznego. Następnie wyróżnia się dowolną prostą rzeczywistą, którą nazywa się prostą w ∞ , a na niej dwa punkty zespolone sprzężone, które nazywa się cyklicznymi. Proste przechodzące przez te punkty nazywa się minimalnymi. Otóż określając wówczas miary kątów między prostymi za pomocą wzoru (5), można określić odległości punktów za pomocą stosunku anharmonicznego. Geometria grupy przekształceń nie zmieniających tych odległości spełnia wówczas aksjomaty geometrii euklidesowej.

Postępowanie to daje się uogólnić. Uczynił to Cayley.

Niech na płaszczyźnie będzie dana dowolna stożkowa Γ , dwie dowolne proste p i q oraz styczne i_1 i i_2 do Γ , poprowadzone z ich punktu przecięcia. Cayley określił miarę $\omega(p, q)$ kąta między prostymi p i q wzorem

$$\omega(p, q) = \frac{1}{2i} \log(i_1 i_2 p q).$$

Gdy dane są dwa punkty P i Q i prosta przechodząca przez te punkty przecina stożkową Γ w punktach J_1 i J_2 , to odległość $d(P, Q)$ punktów P i Q określił on wzorem

$$d(P, Q) = \frac{1}{2i} \log(J_1 J_2 P Q).$$

Tak określone odległości i kąty noszą w literaturze nazwę *miar Cayleya*.

Mają one inne własności dla stożkowych Γ rzeczywistych niż dla nierzeczywistych. F. Klein, posługując się miarami Cayleya, zbudował za pomocą geometrii rzutowej modele geometrii nieeuklidesowych. Pierwszą z takich geometrii stworzył aksjomatycznie Łobaczewski i niezależnie od niego Bolyai, a rozwinął ją szczególnie Łobaczewski. Jeśli za Γ wziąć stożkową nierzeczywistą, to w geometrii nie ma prostych nie przecinających się, jeśli zaś wziąć za Γ stożkową rzeczywistą, to przez każdy punkt poza prostą przechodzi nieskończenie wiele prostych nie przecinających tej prostej.

Geometria euklidesowa daje się otrzymać w pewien sposób jako przypadek graniczny obu tych geometrii, ale sama nie mieści się wśród geometrii zbudowanych za pomocą miar Cayleya.)

(ROZDZIAŁ XVIII

KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA I DRUGIEJ KLASY

§ 85. Klasyfikacja rzutowa krzywych drugiego stopnia i drugiej klasy

Krzywą n -tego stopnia nazwaliśmy zbiór punktów, który we współrzędnych punktu daje się przedstawić równaniem

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

gdzie lewa strona jest formą n -tego stopnia, lecz który nie daje się przedstawić równaniem niższego stopnia (p. § 40, str. 201).

Dualnie określamy *krzywą n -tej klasy* jako zbiór prostych, który we współrzędnych prostej (p. § 78, str. 423) daje się przedstawić równaniem

$$(2) \quad f(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

gdzie lewa strona jest formą n -tego stopnia, lecz który nie daje się przedstawić równaniem niższego stopnia.

Np. linia prosta jest krzywą 1-go stopnia, gdyż jest zbiorem punktów dających się przedstawić równaniem

$$(3) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Analogicznie, zbiór prostych przechodzących przez punkt jest krzywą 1-ej klasy, gdyż daje się przedstawić równaniem

$$(4) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0.$$

W równaniu (3) współczynniki a_1, a_2 i a_3 są współrzędnymi prostej, a w równaniu (4) — współrzędnymi punktu.

Poprzednio mówiliśmy krótko, że równanie (3) przedstawia prostą. Przez analogię mówimy, że równanie (4) przedstawia punkt.