

Prawe strony równości (14) są niezmiennikami I_1, I_2, I_3 równania (9) podzielonego przez ABC ; równości (14) dają kształt tych niezmienników w specjalnych układach współrzędnych ukośno-kątnych, w których kwadryka ma równanie kształtu (10).

Wyrazimy teraz równości (14) za pomocą osi głównych a, b, c i średnic sprzężonych a', b', c' kwadryki. W układach współrzędnych, złożonych z tych osi i tych średnic, równania kwadryki mają postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c^2} = \eta, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b'^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c'^2} = \eta.$$

Zatem

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{\varepsilon_1}{b^2}, \quad C = \frac{\varepsilon_2}{c^2}, \quad A' = \frac{1}{a'^2}, \quad B' = \frac{\varepsilon_1}{b'^2}, \quad C' = \frac{\varepsilon_2}{c'^2}.$$

Podstawiając te wartości do (14), dostajemy następujące uogólnienia twierdzenia Apoloniusza, do których po raz pierwszy doszli Livet i Bonnet:

$$(15) \quad a'^2 + \varepsilon_1 b'^2 + \varepsilon_2 c'^2 = a^2 + \varepsilon_1 b^2 + \varepsilon_2 c^2, \\ a'^2 b'^2 \sin^2 \nu + \varepsilon_1 a'^2 c'^2 \sin^2 \mu + \varepsilon_2 b'^2 c'^2 \sin^2 \lambda = a^2 b^2 + \varepsilon_1 a^2 c^2 + \varepsilon_2 b^2 c^2, \\ a'b'c'\sqrt{g} = abc.$$

W szczególności, gdy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, tj. dla elipsoidy, równości (15) mają następujące znaczenie geometryczne:

W równoległościanach utworzonych przez płaszczyzny styczne do elipsoidy w końcach trzech średnic sprzężonych

- 1° suma kwadratów krawędzi jest stała;
- 2° suma kwadratów pól ścian jest stała;
- 3° objętość jest stała.)

(ROZDZIAŁ XVI

PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWE, WSPÓLRZĘDNE RZUTOWE, STOSUNEK ANHARMONICZNY

§ 71. Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej

Niechaj w przestrzeni rzutowej będzie dany dowolny układ współrzędnych jednorodnych; punkt niech będzie wyznaczony przez stosunek $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$. Weźmy pod uwagę równania

$$(1) \quad \varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3, 4$$

i gdzie macierz $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ jest nieosobliwa, czyli

$$(2) \quad |\mathfrak{A}| \neq 0.$$

Jeśli liczby x_i nie znikają równocześnie, to wobec (2) również liczby y_i mają tę samą własność. Dwom układom liczb x_i , mających równe stosunki $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$, odpowiadają dwa układy liczb y_i , także mających równe stosunki $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$.

Gdy bowiem w równaniach (1) zastąpimy x_i przez σx_i , to stosunek liczb po lewej stronie nie ulegnie zmianie; oznaczając przez b_{ik} elementy macierzy odwrotnej $\mathfrak{A}^{-1}$, otrzymujemy

$$(3) \quad \varrho^{-1} x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + b_{i3}y_3 + b_{i4}y_4,$$

gdzie

$$(4) \quad |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|^{-1} \neq 0;$$

z (3) i (4) wynika, że stosunek $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ jest jednoznacznie wyznaczony przez stosunek $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$.

Udowodniliśmy więc, że równania postaci (1), przy założeniu (2), wyznaczają odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne między stosunkami $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ i $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$. Każdy z tych stosunków wyznacza w przyjętym układzie współrzędnych jednorodnych pewien

punkt. Zatem równania (1), przy założeniu (2), wyznaczają wzajemnie jednoznaczne przekształcenie przestrzeni rzutowej w siebie.

Przekształcenie takie nazywamy liniowym lub rzutowym.

Równania (1) możemy napisać krótko równaniem macierzowym

$$(5) \quad \varrho(y) = \mathfrak{U}(x).$$

Wszystkie przekształcenia afiniczne są rzutowe, gdyż mają one postać (5). Dla nich jest

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \quad \text{i} \quad a_{44} \neq 0.$$

Przykładem przekształcenia rzutowego, które nie jest afiniczne, jest przekształcenie określone równaniami

$$\varrho y_1 = x_1, \quad \varrho y_2 = x_2, \quad \varrho y_3 = x_3, \quad \varrho y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Przeprowadza ono bowiem płaszczyznę

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

w płaszczyznę w ∞ , a więc nie jest afiniczne.

Przekształcenie afiniczne możemy określić jako przekształcenie rzutowe przeprowadzające płaszczyznę w ∞ w siebie.

Istotnie, płaszczyzna w ∞ o równaniu $y_4 = 0$ jest w myśl (1) obrazem płaszczyzny

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0.$$

Na to, by ostatnia płaszczyzna była płaszczyzną w ∞ , potrzeba i wystarcza, żeby $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, czyli żeby przekształcenie było afiniczne.

Przekształcenia rzutowe tworzą grupę.

Istotnie, przekształcenie odwrotne do (1) ma postać (3), jest więc wobec (4) rzutowe; iloczyn dwóch przekształceń rzutowych

$$\varrho(y) = \mathfrak{U}(x), \quad |\mathfrak{U}| \neq 0 \quad \text{i} \quad \sigma(z) = \mathfrak{B}(y), \quad |\mathfrak{B}| \neq 0$$

jest postaci

$$\sigma\varrho(z) = \varrho\mathfrak{B}(y) = \mathfrak{B}\mathfrak{U}(x),$$

zatem postaci (1), gdzie $|\mathfrak{B}\mathfrak{U}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{U}| \neq 0$, c. b. d. o.

We wzorach (1) współczynniki mogą być rzeczywiste lub zespolone. Jeśli ograniczamy się tylko do współczynników rzeczywistych, to grupę nazywamy rzutową rzeczywistą. W przeciwnym razie nazywamy ją grupą rzutową zespoloną.

W myśl programu Kleina (p. § 31) grupa przekształceń rzutowych określa pewną geometrię, zwaną geometrią rzutową.

Do pojęć tej geometrii należy nadal pojęcie punktu, ale nie należy np. pojęcie punktu w ∞ , gdyż przekształcenia rzutowe mogą przeprowadzać punkty w ∞ w punkty właściwe.

Geometrie odpowiadające dwóm wymienionym grupom rzutowym noszą nazwy: geometrii rzutowej rzeczywistej i geometrii rzutowej zespolonej.

Będziemy się zajmowali głównie geometrią rzutową rzeczywistą.

Stopień powierzchni algebraicznej jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych.

Dowód przebiega tak samo jak na str. 204. Wynika stąd w szczególności, że przekształcenia rzutowe przeprowadzają płaszczyzny w płaszczyzny, a więc i proste w proste. Tym samym płaszczyzny i proste są pojęciami geometrii rzutowej (w geometrii rzutowej rzeczywistej występują pojęcia płaszczyzn i prostych rzeczywistych i nierzeczywistych).

W geometrii rzutowej nie ma pojęcia prostych równoległych. Proste te, jako przecinające się w punkcie w ∞ , mogą bowiem przejść w proste przecinające się w punkcie właściwym. Z tej samej przyczyny nie występuje w geometrii rzutowej pojęcie środka odcinka.

Przekształcenie rzutowe zostało określone w zależności od pewnego układu współrzędnych jednorodnych. Udowodnimy jednak, że w każdym układzie współrzędnych jednorodnych współrzędne rzutowe wyrażają się wzorami postaci (1). Co więcej, jeśli współrzędne x_i jakiegoś punktu są wzięte w jednym układzie, a współrzędne y_i obrazu tego punktu — w innym układzie współrzędnych jednorodnych, to przekształcenie rzutowe ma również postać (1) i spełniony jest warunek (2).

W istocie, niech będzie dane przekształcenie (1). Obierzmy dwa nowe układy współrzędnych jednorodnych. Współrzędne punktu w nowych układach są związane ze współrzędnymi w dawnych układach wzorami

$$\sigma(x) = \mathfrak{B}(x'), \quad |\mathfrak{B}| \neq 0 \quad \text{i} \quad \tau(y') = \mathfrak{C}(y), \quad |\mathfrak{C}| = 0.$$

Dla przekształcenia (1) mamy więc

$$\tau(y') = \mathfrak{C}(y) = \varrho^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{U}(x) = \varrho^{-1}\sigma^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{U}\mathfrak{B}(x')$$

czyli

$$\varrho_1(y') = \mathfrak{C}\mathfrak{U}\mathfrak{B}(x'), \quad \text{gdzie} \quad \varrho_1 = \varrho\sigma\tau.$$

Jest to znowu postać (1) i

$$|\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{C}| \cdot |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}| \neq 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

§ 72. Współrzędne rzutowe w przestrzeni rzutowej

W poprzednim paragrafie dowiedliśmy, że wzory

$$(1) \quad \varrho(y) = \mathbb{A}(x), \quad |\mathbb{A}| \neq 0,$$

określają odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne między stosunkami $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ i $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$. Niech liczby x_1, x_2, x_3, x_4 będą współzrędnymi jednorodnymi punktu w pewnym układzie współzrędných jednorodnych. Wówczas wzory (1) wyznaczają przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne między punktami przestrzeni rzutowej a stosunkami $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$. Te stosunki mogą więc być uważane za nowy rodzaj współzrędných punktu, wyznaczonych przez macierz $\mathbb{A}$.

Nazywamy je *współzrędnymi rzutowymi*.

Współzrędné jednorodne są szczególnym przypadkiem współzrędných rzutowych.

Przejsie bowiem od jednego układu współzrędných jednorodnych do innego jest wyznaczone przez wzory postaci (1), gdzie

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0.$$

Gdy zmienimy wyjściowy układ współzrędných jednorodnych, to w nowym układzie współzrędné rzutowe y_i wyrażają się przez współzrędné jednorodne również wzorami kształtu (1).

Jeśli prócz układu (1) jest dany drugi układ współzrędných rzutowych z_i , wyznaczonych wzorem

$$\sigma(z) = \mathbb{B}(x), \quad \text{gdzie} \quad |\mathbb{B}| \neq 0,$$

to

$$\varrho\sigma^{-1}(y) = \mathbb{C}(z), \quad \text{gdzie} \quad |\mathbb{C}| = |\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}| \neq 0.$$

Zatem przejście od jednego układu współzrędných rzutowych do innego odbywa się również za pomocą wzorów kształtu (1).

Z ostatnich twierdzeń wynika, że gdy dla danego układu współzrędných jednorodnych macierz $\mathbb{A}$ przebiega wszystkie możliwe macierze nieosobliwe, to wyznaczone w ten sposób układy współzrędných rzutowych y_i przebiegają wszystkie możliwe układy współzrędných, jakie można otrzymać przez zmianę zarówno danego układu współzrędných jednorodnych jak i macierzy.

Weźmy pod uwagę równania

$$(2) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 = 0, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Każde z tych czterech równań wyznacza pewną płaszczyznę. Wobec tego, że $|\mathbb{A}| \neq 0$, płaszczyzny te nie przechodzą przez jeden punkt (§ 35, str. 177), a więc wyznaczają czworościan.

Nazywamy go *czworościanem podstawowym* danego układu współzrędných rzutowych.

Ściany tego czworościanu mają we współzrędných y_i równania

$$y_i = 0, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, 4,$$

krawędzie zaś — równania

$$y_i = 0, \quad y_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad i \neq k.$$

Wierzchołki czworościanu podstawowego mają po trzy współzrędné rzutowe równe zeru:

$$0:0:0:1, \quad 0:0:1:0, \quad 0:1:0:0, \quad 1:0:0:0.$$

Gdy jedna ze ścian czworościanu jest płaszczyzną w ∞ , to otrzymujemy najogólniejsze współzrędné jednorodne, z dowolnymi wektorami podstawowymi na osiach (mogącymi mieć różne długości).

Sam czworościan podstawowy nie wyznacza jeszcze układu współzrędných rzutowych. Już bowiem współzrędné jednorodne nie są wyznaczone przez same osie układu, lecz wymagają wskazania wektorów podstawowych. Wskazanie zaś wektorów podstawowych na osiach sprowadza się do wybrania punktu o współzrędných niejednorodnych 1, 1, 1, a więc o współzrędných jednorodnych 1:1:1:1.

Punktem jednostkowym układu współzrędných rzutowych w przestrzeni nazywa się punkt o współzrędných rzutowych 1:1:1:1.

Udowodnimy, że *współzrędné rzutowe są wyznaczone przez podanie czworościanu podstawowego i punktu jednostkowego (nie leżącego na żadnej z płaszczyzn układu)*.

Istotnie, obierzmy pomocniczy układ współzrędných jednorodnych. Czworościan podstawowy wyznacza 4 równania swych ścian:

$$(3) \quad b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3 + b_{i4}x_4 = 0, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Ponieważ zarazem ściany czworościanu podstawowego mają równania (2), więc

$$a_{i1} : a_{i2} : a_{i3} : a_{i4} = b_{i1} : b_{i2} : b_{i3} : b_{i4}$$

czyli

$$a_{ik} = \lambda_i b_{ik}, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, 4$$

i gdzie $\lambda_i \neq 0$ jest czynnikiem na razie nie wyznaczonym. Dla współrzędnych rzutowych jest więc

$$(4) \quad \varrho y_i = \lambda_i (b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3 + b_{i4}x_4).$$

Oznaczmy przez p_i wartość, jaką przybiera w punkcie jednostkowym wielomian stojący po lewej stronie wzoru (3). Jest $p_i \neq 0$, gdyż punkt jednostkowy nie leży na ścianach czworościanu podstawowego. Ponieważ w tym punkcie

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 1 : 1 : 1 : 1,$$

więc

$$\lambda_1 p_1 : \lambda_2 p_2 : \lambda_3 p_3 : \lambda_4 p_4 = 1 : 1 : 1 : 1,$$

czyli

$$(5) \quad \lambda_i = \frac{\sigma}{p_i}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma \neq 0.$$

Tym samym wartość czynnika λ_i została wyznaczona. Przyjmując $\tau = \sigma^{-1}$, dostajemy z (5) wobec (4)

$$(6) \quad \tau y_i = \frac{1}{p_i} (b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3 + b_{i4}x_4), \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Tak więc podanie czworościanu podstawowego i punktu jednostkowego umożliwiło nam wyznaczenie macierzy układu współrzędnych rzutowych za pomocą przyjętego układu pomocniczego współrzędnych jednorodnych. Ostatni układ jednak w myśl dowiedzionych twierdzeń nie gra żadnej roli. Czworościan podstawowy i punkt jednostkowy wystarcza zatem do wyznaczenia układu współrzędnych rzutowych, c. b. d. o.

Twór złożony z czworościanu i punktu nie leżącego na żadnej z jego ścian jest tworem rzutowym, gdyż każde przekształcenie rzutowe przeprowadza go w twór analogiczny. Wyznaczone przezeń współrzędne rzutowe muszą więc być określone przez pewne jego własności rzutowe. Dotychczas jednak nie znamy takich własności, ponieważ na razie umiemy budować współrzędne rzutowe tylko za pomocą współrzędnych jednorodnych, w które wchodzi w sposób istotny pojęcie płaszczyzny w ∞ , a więc pojęcie nierzutowe. Dopiero w § 74 będziemy mogli określić współrzędne rzutowe przez własności czysto rzutowe.

W układzie współrzędnych rzutowych powierzchnia algebraiczna stopnia n ma równanie $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$, gdzie f jest formą stopnia n .

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia z § 40, str. 204, o przekształceniu afinicznym.

W szczególności, każda płaszczyzna ma równanie kształtu

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 = 0, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{i=1}^4 |A_i| > 0$$

i na odwrót.

Prosta daje się przedstawić dwoma równaniami tego kształtu.

We współrzędnych rzutowych każde przekształcenie rzutowe można przedstawić równaniem

$$(7) \quad \varrho(y) = \mathfrak{A}(x), \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0;$$

stosunek $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ może być przy tym brany w jednym układzie współrzędnych rzutowych, a stosunek $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ — w innym.

Dowód przebiega tak samo jak dowód ostatniego twierdzenia z § 71 (str. 389).

Istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe, przeprowadzające pięć z góry danych punktów P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie, w pięć z góry danych punktów Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 o tej samej własności.

Dowód można otrzymać przez inną interpretację rozumowania algebraicznego, użytego w dowodzie twierdzenia, że układ rzutowy jest wyznaczony przez czworościan podstawowy i punkt jednostkowy (p. str. 391). Można go też przeprowadzić w sposób następujący. Obierzmy dwa układy współrzędnych rzutowych: pierwszy o czworościanie podstawowym P_1, P_2, P_3, P_4 i o punkcie jednostkowym P_5 , a drugi zbudowany analogicznie z punktów Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 i Q_5 . Współrzędne x_i występujące w (6) będziemy liczyli w pierwszym układzie, a współrzędne y_i — w drugim. Przekształcenie (6) przeprowadza zatem punkty, które mają w pierwszym układzie współrzędne

$$0:0:0:1, \quad 0:0:1:0, \quad 0:1:0:0, \quad 1:0:0:0, \quad 1:1:1:1,$$

w punkty o tych samych współrzędnych w drugim układzie. Z tego jednak, że punkt o współrzędnych $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0:0:0:1$ przechodzi w punkt o współrzędnych $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 0:0:0:1$, wynika po podstawieniu do (1), że $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Podobnie dla następnych trzech punktów dostajemy $a_{ik} = 0$, gdy $i \neq k$. Jest więc

$$\varrho y_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho y_2 = a_{22}x_2, \quad \varrho y_3 = a_{33}x_3, \quad \varrho y_4 = a_{44}x_4.$$

Ponieważ punkt o współrzędnych 1:1:1:1 przechodzi w punkt o tych samych współrzędnych, więc

$$\varrho = a_{11}, \quad \varrho = a_{22}, \quad \varrho = a_{33}, \quad \varrho = a_{44},$$

skąd wynika, że przekształcenie ma postać

$$y_1:y_2:y_3:y_4 = x_1:x_2:x_3:x_4,$$

a więc jest określone jednoznacznie, c. b. d. o.

Z udowodnionego twierdzenia wynika w szczególności następujący wniosek:

Jeśli przekształcenie rzutowe przeprowadza w siebie każdy z pięciu punktów, z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie, to jest ono identycznością.

§ 73. Współrzędne rzutowe i przekształcenia rzutowe na płaszczyźnie i na prostej

1. Współrzędne rzutowe i przekształcenia rzutowe na płaszczyźnie. Niech Π będzie płaszczyzną właściwą lub płaszczyzną w ∞ . Przyjmijmy ją za płaszczyznę $y_4=0$ czworościanu podstawowego układu rzutowego współrzędnych w przestrzeni. Wówczas każdy punkt płaszczyzny Π jest wyznaczony przez stosunek $y_1:y_2:y_3:0$, a więc przez stosunek trzech liczb y_1, y_2, y_3 .

Liczbę te będziemy nazywali *współrzędnymi rzutowymi punktu na płaszczyźnie Π* .

W ten sposób daliśmy jednolitą definicję współrzędnych rzutowych punktu dla wszystkich płaszczyzn przestrzeni rzutowej. Po raz pierwszy występują obecnie współrzędne na płaszczyźnie w ∞ , rozważanej jako twór samodzielny. Dotychczas bowiem badając płaszczyznę niezależnie od otaczającej ją przestrzeni i wprowadzając na niej współrzędne, używaliśmy współrzędnych jednorodnych, które były określone za pomocą pojęcia odległości. Tym samym płaszczyzna taka musiała być właściwa. W geometrii rzutowej jednak zanika różnica między płaszczyznami właściwymi a płaszczyzną w ∞ i dlatego właśnie definicja współrzędnych powinna być jednolita.

Współrzędne jednorodne na płaszczyźnie właściwej są szczególnym przypadkiem współrzędnych rzutowych.

Istotnie, układ współrzędnych jednorodnych na płaszczyźnie właściwej możemy uzupełnić w jakikolwiek sposób do układu współ-

rzędnych jednorodnych, a więc i rzutowych, w przestrzeni oraz tak ponumerować współrzędne, by ta płaszczyzna miała równanie $x_4=0$.

Gdy na płaszczyźnie Π dane są dwa układy współrzędnych rzutowych: $y_1:y_2:y_3$ i $x_1:x_2:x_3$, to między współzrędnymi tego samego punktu w obu układach zachodzi zależność

$$(1) \quad \varrho(y) = \mathfrak{A}(x), \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

i $\mathfrak{A}$ jest macierzą stopnia 3.

Istotnie, każdy z tych układów współrzędnych tworzymy za pomocą pewnego czworościanu, którego czwartą płaszczyzną jest Π . Między współzrędnymi rzutowymi przestrzennymi zachodzi zależność o macierzy nieosobliwej

$$(2) \quad \varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Płaszczyzna $y_4=0$ drugiego układu ma w pierwszym układzie równanie

$$(3) \quad a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0.$$

Ponieważ jednak równania $y_4=0$ i $x_4=0$ przedstawiają w myśl założenia tę samą płaszczyznę Π , więc w równaniu (3) musi być $a_{41}=a_{42}=a_{43}=0$. Równania (2) mają zatem postać

$$(4) \quad \begin{aligned} \varrho y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, & \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3, \\ \varrho y_4 &= & a_{44}x_4, & \text{gdzie} \quad a_{44} \neq 0. \end{aligned}$$

W szczególności dla punktów płaszczyzny Π otrzymujemy przez podstawienie $x_4=y_4=0$

$$\varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3,$$

czyli zależność (1). Warunek $|\mathfrak{A}| \neq 0$ wynika z tego, że macierz układu równań (4) jest nieosobliwa.

Na odwrót, gdy na płaszczyźnie Π dany jest układ współrzędnych rzutowych $x_1:x_2:x_3$ i liczby y_1, y_2, y_3 są związane z liczbami x_1, x_2, x_3 zależnościami kształtu (1), to $y_1:y_2:y_3$ jest również układem współzrędnymi rzutowymi na płaszczyźnie Π .

Weźmy bowiem taki układ przestrzenny współzrędnymi rzutowych, którego płaszczyzną o równaniu $x_4=0$ jest Π i który wyznacza na niej układ współzrędnymi rzutowych $x_1:x_2:x_3$. Utwórzmy równania (4), gdzie $a_{44} \neq 0$. Wówczas $y_1:y_2:y_3:y_4$ jest pewnym układem przestrzennym współzrędnymi rzutowych, którego płaszczyzna

$y_4=0$ jest wobec (4) identyczna z płaszczyzną $x_4=0$ czyli z płaszczyzną Π . Zatem $y_1:y_2:y_3$ jest układem współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie Π , c. b. d. o.

Z ostatnich dwóch twierdzeń wynika, że *gdy wziąć na płaszczyźnie pewien układ współrzędnych rzutowych, a następnie macierz $\mathcal{M}$ przebiega wszystkie macierze nieosobliwe, to trójka liczb y_1, y_2, y_3 wyznaczona przez (1) przebiega wszystkie możliwe układy współrzędnych rzutowych na tej płaszczyźnie.*

Podobnie jak w przestrzeni, dowodzi się, że *na płaszczyźnie krzywa algebraiczna stopnia n ma w każdym układzie współrzędnych rzutowych równanie stopnia n .*

Odnosi się to także do krzywych leżących w płaszczyźnie w ∞ . Istotnie, krzywa algebraiczna płaska stopnia n jest przekrojem płaszczyzną powierzchni stopnia n , ale nie powierzchni stopnia niższego (p. § 40, str. 205). Wynika stąd, że taki przekrój płaszczyzną w ∞ ma w układzie współrzędnych jednorodnych równania

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_4 = 0,$$

gdzie f jest wielomianem stopnia n .

W szczególności, *każda prosta ma równanie pierwszego stopnia.*

Niech dane będą dwa równania

$$(5) \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0, \quad B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 = 0.$$

Dla punktu spełniającego oba równania jest

$$x_1:x_2:x_3 = \left| \begin{array}{cc} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{array} \right|.$$

Punkt taki jest więc jednoznacznie wyznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1:A_2:A_3 \neq B_1:B_2:B_3.$$

Tak więc *na to, by równania (5) przedstawiały tę samą prostą, potrzeba i wystarcza, żeby*

$$A_1:A_2:A_3 = B_1:B_2:B_3.$$

Analogicznie do pojęcia czworoboku podstawowego w przestrzeni wprowadzamy na płaszczyźnie *trójkąt podstawowy*.

Bokami tego trójkąta są krawędzie czworoboku podstawowego leżące w płaszczyźnie Π . W rozpatrywanym układzie współrzędnych rzutowych boki tego trójkąta mają równania

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Punktem jednostkowym układu współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie nazywa się punkt o współrzędnych

$$y_1:y_2:y_3 = 1:1:1.$$

Np. gdy w przestrzeni rzutowej dany jest układ współrzędnych jednorodnych, to w płaszczyźnie w ∞ powstaje układ współrzędnych rzutowych, w którym wierzchołkami trójkąta podstawowego są punkty przecięcia płaszczyzny w ∞ osiami Ox , Oy i Oz , punktem jednostkowym zaś — punkt w ∞ prostej $x=y=z$.

Układ współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie jest jednoznacznie wyznaczony przez trójkąt podstawowy i punkt jednostkowy, nie leżący na bokach tego trójkąta.

Dla dowodu obierzmy na płaszczyźnie jakikolwiek układ współrzędnych rzutowych $x_1:x_2:x_3$. Każdy inny układ współrzędnych rzutowych na tej płaszczyźnie jest wyznaczony przez wzory kształtu

$$(6) \quad \varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad |\mathcal{M}| \neq 0, \quad i=1, 2, 3,$$

gdzie współczynniki a_{ik} są odpowiednio dobrane. Dalszy tok rozumowania jest analogiczny jak w dowodzie twierdzenia przestrzennego (§ 72, str. 391). Zastępujemy jedynie współrzędne jednorodne przez rzutowe, ponieważ dana płaszczyzna może być płaszczyzną w ∞ .

Określimy obecnie *przekształcenia rzutowe płaszczyzny*. Przekształcenie rzutowe przestrzeni przeprowadza płaszczyznę Π w pewną płaszczyznę Π_1 . Takie wzajemnie jednoznaczne przekształcenie Π w Π_1 nazywamy rzutowym. Oczywiście płaszczyzny Π i Π_1 mogą być identyczne.

Niech będzie dane przekształcenie rzutowe płaszczyzny Π w płaszczyznę Π_1 . W obu płaszczyznach niech będą dane układy współrzędnych rzutowych: $x_1:x_2:x_3$ w Π , a $y_1:y_2:y_3$ w Π_1 . Wówczas to przekształcenie rzutowe wyrazi się wzorami postaci

$$(7) \quad \varrho(y) = \mathcal{M}(x), \quad |\mathcal{M}| \neq 0.$$

Istotnie, w myśl definicji współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie możemy uzupełnić układy przyjęte na płaszczyznach Π i Π_1 do układów przestrzennych tak, by płaszczyzna Π miała równanie $x_4=0$, a płaszczyzna Π_1 — równanie $y_4=0$. W tych układach przekształcenie rzutowe przestrzeni wyraża się wzorami kształtu

$$(8) \quad \varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \quad i=1, 2, 3, 4, \quad |\mathcal{M}| \neq 0.$$

Ponieważ płaszczyzna $y_4=0$ jest obrazem płaszczyzny $x_4=0$, więc $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$ i przekształcenie ma postać

$$(9) \quad \begin{aligned} \varrho y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad \text{dla} \quad i=1, 2, 3, \\ \varrho y_4 &= a_{44}x_4. \end{aligned}$$

W szczególności dla punktów płaszczyzny $x_4=0$ dostajemy

$$\varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3,$$

czyli postać (7), c. b. d. o.

Jak widzimy, dowód ostatniego twierdzenia jest pod względem algebraicznym identyczny z dowodem twierdzenia, że zależności między współrzędnymi rzutowymi wyrażają się wzorami (7).

Tak samo dowodzi się, że każde przekształcenie postaci (7) płaszczyzny Π w płaszczyznę Π_1 jest rzutowe.

Tak samo również dowodzi się, że przekształcenie rzutowe płaszczyzny Π w płaszczyznę Π_1 jest jednoznacznie wyznaczone przez dwie czwórki odpowiadających sobie punktów

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \quad \text{i} \quad Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,$$

z których żadne trzy punkty jednej czwórki nie leżą na jednej prostej.

W szczególności, przekształcenie rzutowe płaszczyzny, przeprowadzające w siebie cztery punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, jest identycznością.

Każde przekształcenie afiniczne płaszczyzny jest rzutowe.

Przekształcenia afiniczne płaszczyzny można scharakteryzować, jako te przekształcenia rzutowe, które prostą w ∞ przeprowadzają w siebie.

Przekształcenia rzutowe płaszczyzny przeprowadzają proste w proste.

2. Współrzędne rzutowe i przekształcenia rzutowe na prostej.

Niech p będzie prostą właściwą lub prostą w ∞ . Przyjmijmy ją za krawędź przecięcia płaszczyzn $y_3=0$ i $y_4=0$ układu przestrzennego współrzędnych rzutowych. Wówczas każdy punkt prostej p ma współrzędne $y_1:y_2:0:0$, jest więc wyznaczony przez stosunek dwóch liczb y_1, y_2 .

Liczby te będziemy nazywali *współrzędnymi rzutowymi punktu na prostej p* .

Równoważną definicję współrzędnych rzutowych na prostej można podać w sposób następujący:

Przez prostą p przeprowadzamy dowolną płaszczyznę Π i obieramy na niej trójkąt podstawowy tak, by prosta p była jego bokiem $y_3=0$. Punkt na tej prostej jest wyznaczony przez stosunek $y_1:y_2:0$. Liczby y_1, y_2 są współrzędnymi rzutowymi punktu na prostej.

Równoważność obu definicji wynika stąd, że współrzędne rzutowe na płaszczyźnie Π , w których prosta p ma równanie $y_3=0$, mają czworościan podstawowy, którego płaszczyzna $y_4=0$ jest płaszczyzną Π , a płaszczyzna $y_3=0$ przechodzi przez p .

Podobnie jak na płaszczyźnie dowodzi się, że:

Gdy na prostej p dane są dwa układy współrzędnych rzutowych $x_1:x_2$ i $y_1:y_2$, to między współrzędnymi tego samego punktu w obu układach zachodzi zależność

$$(10) \quad \varrho(y) = \mathfrak{A}(x), \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

a macierz $\mathfrak{A}$ jest teraz stopnia 2.

Na odwrót, jeśli $x_1:x_2$ jest układem współrzędnych rzutowych na prostej p i liczby y_1, y_2 są związane z liczbami x_1, x_2 zależnościami kształtu (10), to $y_1:y_2$ jest również układem współrzędnych rzutowych na prostej p .

Analogicznie przyjmujemy też następującą definicję:

Punktami podstawowymi układu współrzędnych rzutowych na prostej nazywamy punkty o współrzędnych rzutowych

$$1:0, \quad 0:1, \quad 1:1.$$

Układ współrzędnych rzutowych na prostej jest jednoznacznie wyznaczony przez trójkę różnych punktów podstawowych.

Przekształcenie rzutowe przestrzeni przeprowadza proste w proste. To przekształcenie wzajemnie jednoznaczne prostej w prostą nazywamy *przekształceniem rzutowym prostej w prostą*.

Jeśli na prostych p i p_1 są dane układy współrzędnych rzutowych: $x_1:x_2$ na p i $y_1:y_2$ na p_1 , to przekształcenie rzutowe prostej p w prostą p_1 wyraża się wzorami postaci (10); na odwrót, każde przekształcenie tej postaci prostej w prostą jest rzutowe.

Przekształcenie rzutowe prostej p w prostą p_1 jest jednoznacznie wyznaczone przez dwie trójki odpowiadających sobie punktów

$$P_1, P_2, P_3 \quad \text{i} \quad Q_1, Q_2, Q_3,$$

z których każde dwa punkty jednej trójki są różne.

W szczególności, przekształcenie rzutowe prostej, przeprowadzające w siebie trzy różne punkty, jest identycznością.

3. Przedstawienie parametryczne prostej. Jak widzieliśmy (str. 396), prosta na płaszczyźnie ma w układzie współrzędnych rzutowych równanie pierwszego stopnia

$$(11) \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0.$$

Na mocy takiego samego rozumowania jak w § 35 (str. 171) wynika z tego, że prosta przechodząca przez punkty $M(m_1:m_2:m_3)$ i $N(n_1:n_2:n_3)$ ma równanie

$$(12) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Prostą w płaszczyźnie można przedstawić w dowolnym układzie współrzędnych rzutowych parametrycznie:

$$(13) \quad \varrho x_i = \mu m_i + \nu n_i, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3.$$

Dowód jest identyczny z przeprowadzonym na str. 192. Tak samo rozumując, dowodzi się, że w przestrzeni prosta ma w dowolnym układzie współrzędnych rzutowych przedstawienie parametryczne

$$(14) \quad \varrho x_i = \mu m_i + \nu n_i, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3, 4.$$

W przedstawieniach (13) i (14) każdemu punktowi prostej odpowiada jeden stosunek $\mu:\nu$ i na odwrót.

Okazemy, że analogiczne przedstawienie prosta ma też w dowolnym układzie współrzędnych rzutowych na niej samej, rozważanej niezależnie od otaczającej ją przestrzeni. Wskaźnik i przybiera wtedy wartości 1 i 2. Przedstawienie to ma więc postać

$$(15) \quad \varrho x_1 = \mu m_1 + \nu n_1, \quad \varrho x_2 = \mu m_2 + \nu n_2.$$

Istotnie, uważając (15) za równania o niewiadomych μ i ν , mamy

$$(16) \quad \mu = \varrho \frac{n_2x_1 - n_1x_2}{m_1n_2 - n_1m_2}, \quad \nu = \varrho \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1n_2 - n_1m_2}.$$

Równości (16) można napisać w postaci

$$(17) \quad \mu = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \nu = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

gdzie $\mathfrak{A}=(a_{ik})$ jest macierzą odwrotną do macierzy

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}.$$

Z (17) wynika, że μ i ν są również współrzędnymi rzutowymi na prostej. Punktami podstawowymi tego układu współrzędnych są punkty, którym odpowiadają stosunki $\mu:\nu$ wynoszące 0:1, 1:0 i 1:1, czyli punkty N , M i punkt $J(m_1+n_1:m_2+n_2)$.

Wynika stąd, że w przedstawieniach parametrycznych (13) i (14) prostej na płaszczyźnie i w przestrzeni liczby μ i ν są również współrzędnymi rzutowymi na tej prostej.

Weźmy bowiem naprzód daną prostą jako krawędź $x_3=0$, $x_4=0$ czworoscianu podstawowego. Wówczas x_1 i x_2 są współrzędnymi rzutowymi na tej prostej i zachodzą wzory (15). A zatem μ i ν są też współrzędnymi rzutowymi na niej. Przejdźmy obecnie do jakiegokolwiek innego układu współrzędnych rzutowych $y_1:y_2:y_3:y_4$. Wówczas dla $i=1, 2, 3, 4$

$$(18) \quad \sigma y_i = \sum_{k=1}^2 a_{ik} x_k, \quad \sigma m'_i = \sum_{k=1}^2 a_{ik} m_k, \quad \sigma n'_i = \sum_{k=1}^2 a_{ik} n_k$$

(dobieramy współrzędne tak, by współczynnik proporcjonalności σ był wszędzie ten sam). Sumowanie rozciąga się tu na wartości $k=1$ i 2 , gdyż rozważamy współrzędne tylko dla punktów prostej, na której $x_3=0$ i $x_4=0$. Mamy zatem wobec (18) i (15)

$$\sigma y_i = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \varrho^{-1} (\mu m_k + \nu n_k) = \varrho^{-1} \mu \sum_{k=1}^2 a_{ik} m_k + \varrho^{-1} \nu \sum_{k=1}^2 a_{ik} n_k,$$

czyli wobec (18)

$$(19) \quad y_i = \mu m'_i + \nu n'_i.$$

Tak więc przy przejściu do nowego układu współrzędnych rzutowych, w którym liczby m'_i i n'_i dobieramy według (18) z tym samym współczynnikiem proporcjonalności σ , stosunek $\mu:\nu$ w przedstawieniach parametrycznych (15) i (19) jest ten sam; zatem w przedstawieniach (13) i (14) liczby μ i ν są współrzędnymi rzutowymi na prostej, c. b. d. o.

§ 74. Stosunek anharmoniczny

1. Własności podstawowe. Niech dany będzie na prostej dowolny układ współrzędnych rzutowych oraz dwa punkty $M(m_1:m_2)$ i $P(p_1:p_2)$. Niech

$$(1) \quad W(m, p) = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}.$$

Wyrażenie (1) nie ma znaczenia geometrycznego, gdyż zależy od wyboru stosunku $m_1:m_2$, wyznaczającego punkt M , i stosunku $p_1:p_2$, wyznaczającego punkt P . Jeśli stosunki te zastąpimy przez $\sigma m_1:\sigma m_2$ i $\varrho p_1:\varrho p_2$, to

$$W(\sigma m, \varrho p) = \sigma \varrho \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = \sigma \varrho W(m, p).$$

Jeśli zmienimy układ współrzędnych i punkty M i P będą miały w nowym układzie współrzędne $m'_1:m'_2$ i $p'_1:p'_2$, to

$$(2) \quad m'_i = \varrho(a_{i1}m_1 + a_{i2}m_2), \quad p'_i = \sigma(a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2).$$

Stąd wynika, że

$$W(m', p') = \varrho \sigma \begin{vmatrix} a_{11}m_1 + a_{12}m_2 & a_{21}m_1 + a_{22}m_2 \\ a_{11}p_1 + a_{12}p_2 & a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{vmatrix}.$$

W oznaczeniu $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ mamy więc

$$W(m', p') = \varrho \sigma |\mathfrak{A}| W(m, p).$$

Czynnik $|\mathfrak{A}|$ jest niezależny od wyboru punktów M i P : jest on ten sam dla wszystkich par punktów. Wynika stąd, że gdy dane są dwie pary punktów M, N i P, Q oraz $N \neq P$ i $Q \neq M$, to liczba

$$(3) \quad \frac{W(m, p) W(n, q)}{W(n, p) W(m, q)}$$

nie ulega zmianie ani wtedy, gdy zmienimy współrzędne wyznaczające którykolwiek z tych punktów, ani wtedy, gdy zmienimy układ współrzędnych.

Wzory (2) określają zarazem najogólniejsze przekształcenia rzutowe prostej; zatem liczba (3) nie ulega zmianie przy przekształceniach rzutowych. Wynika stąd, że ma ona znaczenie geometryczne i jest niezmiennikiem rzutowym.

Liczba (3) nazywa się *stosunkiem anharmonicznym*, lub *dwustosunkiem*, lub *stosunkiem podwójnego podziału* czwórki punktów M, N, P, Q .

Oznaczamy ją symbolem $(MNPQ)$.

Mamy więc wzór

$$(4) \quad (MNPQ) = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}.$$

Zanim zbadamy dalsze własności stosunku anharmonicznego, podamy pewne znaczenie tego stosunku dla punktów prostej właściwej, wyrażające się przez odległości punktów. W tym celu niech cztery punkty właściwe M, N, P, Q mają w pewnym układzie (kartezjańskim) współrzędnych niejednorodnych współrzędne x_M, x_N, x_P, x_Q . Punkty te mają zatem współrzędne jednorodne

$$m_1:m_2 = x_M:1, \quad n_1:n_2 = x_N:1, \quad p_1:p_2 = x_P:1, \quad q_1:q_2 = x_Q:1.$$

Podstawiając je do (4), dostajemy

$$(5) \quad (MNPQ) = \frac{(x_P - x_M)(x_Q - x_N)}{(x_P - x_N)(x_Q - x_M)} = \frac{MP \cdot NQ}{NP \cdot MQ},$$

gdzie w liczniku i mianowniku iloczyny wektorów są skalarowe.

Jeśli punkt Q jest punktem w ∞ prostej, a punkty M, N i P są właściwe, to $q_1:q_2 = 1:0$ i dostajemy

$$(MNP\infty) = \frac{x_P - x_M}{x_P - x_N} = -(MNP),$$

gdzie (MNP) oznacza stosunek pojedynczego podziału (p. § 37, str. 182). Podobnie

$$(MN\infty Q) = -(NMQ), \quad (M\infty PQ) = -(PQM), \quad (\infty NPQ) = -(QPN).$$

Widzimy stąd, że stosunek pojedynczego podziału wyraża się przez stosunek anharmoniczny, gdy jednym z punktów jest punkt w ∞ . Ponieważ stosunek anharmoniczny i punkt w ∞ są niezmiennikami przekształceń afinicznych, więc i stosunek pojedynczego podziału jest niezmiennikiem takich przekształceń (jak tego dowiedliśmy w sposób bezpośredni w § 37, str. 184).

Przejdźmy obecnie do prostej dowolnej.

Gdy punkty P i Q są identyczne, lecz różne od M i N (które też mogą być identyczne), to z (4) wynika, że

$$(6) \quad (MNPP) = 1.$$

Żałujemy, że wszystkie cztery punkty są różne.

Ze wzoru (4) wynika, że wartość stosunku anharmonicznego $(MNPQ)$ zależy od porządku punktów w każdej parze, a nie zależy od porządku par. Mamy bowiem

$$(MNQP) = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}}.$$

Oznaczając więc wartość tego stosunku przez λ :

$$(7) \quad (MNPQ) = \lambda,$$

mamy

$$(8) \quad (MNQP) = (NMPQ) = 1/\lambda.$$

Natomiast

$$(9) \quad (MNPQ) = (PQMN) = \lambda.$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że gdy zamienimy punkt drugi z trzecim, to λ przechodzi w $1-\lambda$. Stosując wielokrotnie te trzy działania: przestawianie punktów w jednej parze, przestawianie drugiego punktu z trzecim oraz zamianę porządku par, dostajemy wszystkie 6 możliwych wartości stosunku anharmonicznego 4 różnych punktów:

$$(10) \quad \begin{aligned} (MNPQ) &= (PQMN) = (NMQP) = (QPNM) = \lambda, \\ (MNQP) &= (NMPQ) = (PQNM) = (QPNM) = 1/\lambda, \\ (MPNQ) &= (PMQN) = (NQMP) = (QNP M) = 1-\lambda, \\ (MPQN) &= (PMNQ) = (QNMP) = (NQPM) = 1/(1-\lambda), \\ (MQPN) &= (QMNP) = (NPQM) = (PNMQ) = \lambda/(\lambda-1), \\ (MQNP) &= (QMPN) = (NPMQ) = (PNQM) = (\lambda-1)/\lambda. \end{aligned}$$

Udowodnimy, że gdy są dane na prostej trzy różne punkty M, N i P , to do każdej liczby λ istnieje dokładnie jeden punkt Q , dla którego

$$(11) \quad (MNPQ) = \lambda.$$

Istotnie, przyjmijmy dla krótkości oznaczenie

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}},$$

i niech $\alpha \neq 0$. Ze wzoru (4) dostajemy przy założeniu (11)

$$\lambda(q_2 m_1 - q_1 m_2) = \alpha(q_2 n_1 - q_1 n_2)$$

czyli

$$q_2(\lambda m_1 - \alpha n_1) = q_1(\lambda m_2 - \alpha n_2).$$

Ponieważ punkty M i N są w myśl założenia różne oraz $\alpha \neq 0$, więc współczynniki przy q_1 i q_2 w ostatnim równaniu nie znikają równocześnie. Zatem

$$(12) \quad q_1 : q_2 = \lambda m_1 - \alpha n_1 : \lambda m_2 - \alpha n_2,$$

a ponieważ liczby α, m_i i n_i są wyznaczone przez punkty M, N i P jednoznacznie, więc ze wzoru (12) wynika, że stosunek $q_1 : q_2$ jest wyznaczony przez liczbę λ też jednoznacznie, c. b. d. o.

Niech na prostej właściwej będą dane cztery różne punkty właściwe M, N, P, Q . Obierzmy układ niejednorodny współrzędnych w ten sposób, żeby punkt M był początkiem układu, a punkt N miał współrzędną niejednorodną 1. Wówczas

$$(13) \quad (MNPQ) = \frac{(x_P - x_M)(x_Q - x_N)}{(x_P - x_N)(x_Q - x_M)} = \frac{x_P(x_Q - 1)}{x_Q(x_P - 1)}.$$

Zbadamy teraz znaczenie geometryczne nierówności

$$(14) \quad (MNPQ) > 0.$$

Wobec (13) nierówność (14) zachodzi zawsze i tylko w następujących przypadkach:

1^0	$x_P < 0$	i	$x_Q < 0,$	$\frac{M}{M} \quad \frac{N}{P} \quad \frac{P}{Q} \quad \frac{Q}{N}$
2^0	$x_P < 0$	i	$x_Q > 1,$	$\frac{M}{M} \quad \frac{P}{P} \quad \frac{Q}{Q} \quad \frac{N}{N}$
3^0	$0 < x_P < 1$	i	$0 < x_Q < 1,$	Rys. 133
4^0	$x_P > 1$	i	$x_Q < 0,$	$\frac{M}{M} \quad \frac{P}{P} \quad \frac{N}{N} \quad \frac{Q}{Q}$
5^0	$x_P > 1$	i	$x_Q > 1.$	Rys. 134

Gdy więc zachodzi nierówność (14), to jeden z odcinków MN i PQ nie zawiera punktów końcowych drugiego odcinka (rys. 133). Jeśli zaś zachodzi nierówność

$$(15) \quad (MNPQ) < 0,$$

to w każdym z tych dwóch odcinków leży punkt końcowy drugiego odcinka (rys. 134).

Podobnie, gdy jeden z punktów, np. Q , jest punktem w ∞ , to z (14) wynika, że jeden z końców odcinka MN leży zewnątrz, a drugi wewnątrz odcinka PQ .

Uzasadnia to następującą definicję:

Niech na prostej będą dane cztery różne punkty M, N, P, Q . Powiadamy, że para punktów M, N przedziela parę punktów P, Q , gdy $(MNPQ) < 0$, oraz że pierwsza para nie przedziela drugiej, gdy $(MNPQ) > 0$.

Z (10) wynika, że definicja ta nie zależy ani od porządku punktów w parach, ani od porządku par.

Poprzednio wprowadziliśmy współrzędne rzutowe za pomocą współrzędnych jednorodnych. Obecnie możemy wskazać ich znaczenie geometryczne rzutowe, zależne jedynie od pojęcia stosunku anharmonicznego.

Niech M, N i P będą punktami podstawowymi danego układu współrzędnych rzutowych na prostej (p. § 73, str. 397). Punkty te mają zatem współrzędne

$$m_1:m_2=0:1, \quad n_1:n_2=1:0, \quad p_1:p_2=1:1.$$

Niech Q będzie punktem o współrzędnych rzutowych $x_1:x_2$. Wówczas z (4) wynika, że

$$(16) \quad \frac{x_2}{x_1} = (MNPQ).$$

Jest to właśnie znaczenie geometryczne współrzędnych rzutowych.

Jak widzieliśmy (str. 402), stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych. Obecnie udowodnimy, że jest to własność charakterystyczna przekształceń rzutowych:

Każde przekształcenie wzajemnie jednoznaczne prostej w prostą, które nie zmienia stosunku anharmonicznego, jest rzutowe.

Istotnie, przyjmijmy trzy punkty M, N i P jednej prostej za punkty podstawowe układu współrzędnych rzutowych x_1, x_2 . Na obrazie tej prostej punktami podstawowymi niech będą obrazy M', N' i P' tych punktów, a współrzędnymi rzutowymi niech będą x'_1, x'_2 . Mamy zatem wobec (16)

$$\frac{x_2}{x_1} = (MNPQ) = (M'N'P'Q') = \frac{x'_2}{x'_1}$$

czyli

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2,$$

a więc przekształcenie jest rzutowe.

2. Twierdzenie Pappusa. Wprowadzimy pewne specjalne przekształcenie rzutowe, grające w geometrii rzutowej taką rolę jak rzut równoległy w geometrii afinicznej.

Niech na płaszczyźnie dane będą dowolne dwie proste p i p' oraz punkt M nie leżący na żadnej z nich (rys. 135). Punktowi P prostej p przyporządkujemy punkt P' , w którym prosta MP przecina prostą p' .

Otrzymujemy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne prostej p w p' , zwane rzutem perspektywicznym lub środkowym.

Punkt M nazywa się środkiem rzutu.

Rzuty równoległe, spotykane przez nas w geometrii afinicznej, są szczególnym przypadkiem rzutów perspektywicznych, mianowicie gdy środkiem rzutu jest punkt w ∞ .

Udowodnimy następujące twierdzenie, zwane *twierdzeniem Pappusa*:

Rzut perspektywiczny jest przekształceniem rzutowym.

Niech punkt M będzie wierzchołkiem $(0:0:1)$ układu współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie, punkt przecięcia prostych p i p' — wierzchołkiem $(1:0:0)$ trójkąta podstawowego, a prosta p — bokiem $x_3=0$ tego trójkąta (rys. 136). Niechaj prosta p' przecina bok $x_1=0$ trójkąta podstawowego w punkcie $(0:l_2:l_3)$. Jest więc $l_2 \neq 0$ i $l_3 \neq 0$. Prosta p' ma zatem przedstawienie parametryczne

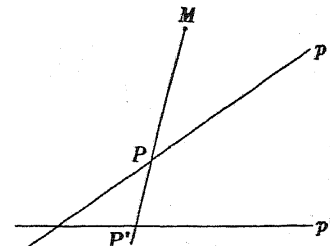
$$x_1:x_2:x_3 = \mu:vl_2:vl_3,$$

(17) gdyż przechodzi przez punkty $(1:0:0)$ i $(0:l_2:l_3)$. Jak wiemy (p. str. 401), liczby μ i v , których stosunek wyznacza punkt na prostej p' , są współrzędnymi rzutowymi w pewnym układzie współrzędnych na tej prostej. Niech punkt P na prostej p ma w nim współrzędne $p_1:p_2:0$. Prosta przechodząca przez M ma równanie kształtu

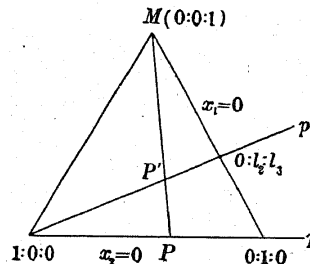
$$A_1x_1 + A_2x_2 = 0.$$

Jeśli prosta ta przechodzi przez P , to $A_1p_1 + A_2p_2 = 0$, skąd $A_1:A_2 = -p_2:p_1$. Prosta ta ma więc równanie

$$(18) \quad p_2x_1 - p_1x_2 = 0.$$



Rys. 135



Rys. 136

Aby znaleźć jej punkt przecięcia z prostą p' , podstawiamy wartości z (17) do (18). Stąd $p_2\mu - p_1\nu l_2 = 0$, więc $\mu:\nu = p_1l_2:p_2$ czyli

$$(19) \quad q\mu = p_1l_2, \quad q\nu = p_2.$$

Stosunki $p_1:p_2$ są współrzędnymi rzutowymi na prostej p , a stosunki $\mu:\nu$ — na prostej p' . Zatem równania (19) wyznaczają zależność liniową między współrzędnymi rzutowymi na obu prostych. Ponieważ tu

$$|\mathfrak{A}| = \begin{vmatrix} l_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = l_2 \neq 0,$$

więc przekształcenie jest rzutowe, c. b. d. o.

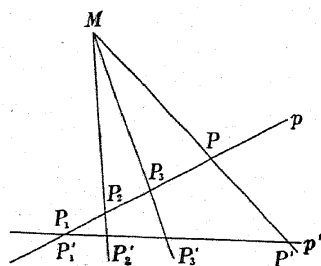
Z twierdzenia Pappusa wynika następujący wniosek:

Gdy cztery proste należące do jednego pęku przetniemy dwiema dowolnymi prostymi p i p' , przecinającymi je w czwórkach punktów M, N, P, Q i M', N', P', Q' , to

$$(MNPQ) = (M'N'P'Q').$$

Pappus wypowiedział swe twierdzenie w tej właśnie postaci.

Na str. 399 udowodniliśmy, że przekształcenie rzutowe prostej p w prostą p' jest wyznaczone, gdy znamy trzy pary P_k, P'_k , gdzie $k=1, 2, 3$, punktów wzajemnie sobie przyporządkowanych. Na mocy twierdzenia Pappusa można podać prostą konstrukcję, wyznaczającą za pomocą samego tylko liniału punkt P' prostej p' , przyporządkowany danemu punktowi P prostej p . Zakładamy przy tym, że proste p i p' są różne. Rozpatrzmy dwa przypadki:



Rys. 137

1° Punkty P_1 i P'_1 są identyczne (rys. 137). Niech M będzie punktem przecięcia prostych $p_2p'_2$ i $p_3p'_3$. Rzut środkowy z punktu M jest przekształceniem rzutowym, które przeprowadza punkt P_k w punkt P'_k . Punkt P' przecięcia prostych p' i PM jest więc obrazem punktu P .

2° Punkty P_k i P'_k dla $k=1, 2, 3$ są różne. Niech M i M' będą dowolnymi dwoma punktami prostej $p_1p'_1$, a R_2 punktem przecięcia prostych MP_2 i $M'P'_2$. Analogiczne znaczenie niech ma punkt R_3 (rys. 138). Oznaczmy przez r prostą R_2R_3 i niech R będzie punktem przecięcia prostych r i MP .

Punkt P' przecięcia prostych p' i $M'R$ jest obrazem punktu P . Stosując bowiem twierdzenie Pappusa do pęku prostych o wierzchołku M , mamy

$$(P_1P_2P_3P) = (R_1R_2R_3R);$$

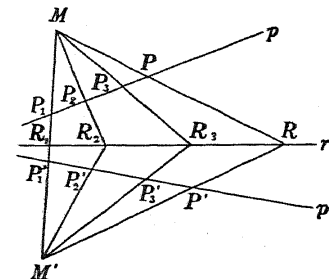
podobnie dla pęku o wierzchołku M'

$$(P'_1P'_2P'_3P') = (R_1R_2R_3R),$$

zatem

$$(P_1P_2P_3P) = (P'_1P'_2P'_3P'),$$

c. b. d. o.



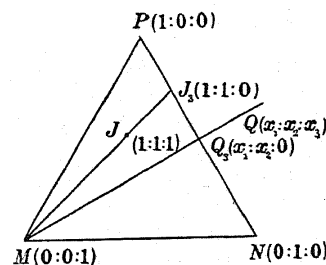
Rys. 138

W przypadku, gdy proste p i p' są identyczne, konstrukcja ta zawodzi.

Można by przez rzut prostej p na inną prostą, a następnie przez zastosowanie powyższej konstrukcji znaleźć punkt P' i w tym przypadku. Wygodniejsza jest jednak metoda Steinera, którą poznamy w § 90 (p. str. 474).

Poprzednio, za pomocą stosunku anharmonicznego, nadaliśmy znaczenie geometryczne współrzednym rzutowym na prostej. Za pomocą stosunku anharmonicznego i rzutu perspektywicznego możemy nadać znaczenie geometryczne współrzednym rzutowym na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Niech mianowicie M, N i P będą wierzchołkami trójkąta podstawowego, J — punktem jednostkowym, a Q — dowolnym punktem o współrzednych $x_1:x_2:x_3$ (rys. 139). Oznaczmy przez J_3 i Q_3 rzuty perspektywiczne punktów J i Q z punktu M na prostą $x_3=0$. Punkty te mają współrzedne $1:1:0$ i $x_1:x_2:0$ (każda bowiem prosta



Rys. 139

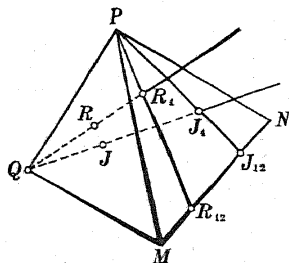
przechodząca przez M ma równanie kształtu $A_1x_1 + A_2x_2 = 0$, skąd wynika, że dla wszystkich punktów tej prostej stosunek dwóch pierwszych współrzednych jest stały, mianowicie $x_1:x_2 = -A_2:A_1$). Punkt Q_3 ma współrzedne rzutowe $x_1:x_2$ na prostej NP w układzie współrzednych rzutowych, którego punktami podstawowymi są N, P i J_3 . Zatem w myśl (16)

$$x_1:x_2 = (PNJ_3Q_3):1$$

i podobnie

$$x_2:x_3=(NMJ_1Q_1):1, \quad x_1:x_3=(PMJ_2Q_2):1.$$

W analogiczny sposób można postąpić w przestrzeni. Przez rzut punktów R i J z punktu Q na płaszczyznę $x_4=0$ (rys. 140) dostajemy punkty R_4 i J_4 o współrzędnych $x_1:x_2:x_3:0$ i $1:1:1:0$. Punkt R_4 ma współrzędne rzutowe $x_1:x_2:x_3$ na płaszczyźnie $x_4=0$ w układzie, którego punktami podstawowymi są M, N, P i J_4 . Współrzędne te wyrażają się przez stosunek anharmoniczny.



Rys. 140

Np. oznaczając rzuty punktów J_4, R_4 z punktu P na prostą MN przez J_{12}, Q_{12} , mamy

$$x_1:x_2=(MNJ_{12}R_{12}):1.$$

Podobnie

$$x_1:x_3=(MPJ_{13}R_{13}):1 \quad \text{itd.}$$

§ 75. Stosunek harmoniczny

W myśl wzorów (10) z § 74, str. 404, stosunek anharmoniczny czterech różnych punktów M, N, P, Q może przybierać 6 wartości, zależnie od uporządkowania tych punktów. Jeśli którąkolwiek z nich oznaczmy przez λ , to wartościami tymi są:

$$(1) \quad \lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1-\lambda, \quad 1-\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Wartości (1) na ogół są różne. Np. gdy $\lambda=3$, to pozostałe wartości wynoszą $1/3, -2, 2/3, -1/2$ i $3/2$.

Jednakże w pewnych przypadkach szczególnych niektóre z wartości (1) mogą być równe.

Udowodnimy, że gdy λ jest liczbą rzeczywistą i dwie spośród wartości (1) są równe, to pomiędzy liczbami (1) są tylko trzy liczby różne, mianowicie liczby $-1, 2$ i $1/2$.

Istotnie, ponieważ punkty M, N, P, Q są różne, więc $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 1$. Jeśli $\lambda=1/\lambda$, to $\lambda^2=1$, więc $\lambda=-1$; wówczas pozostałe liczby (1) mają wartości 2 i $1/2$. Jeśli zaś $\lambda=1-\lambda$, to $\lambda=1/2$; wówczas dla pozostałych liczb dostajemy wartości 2 i -1 . Jeśli z kolei $\lambda=1-1/\lambda$, to λ nie jest liczbą rzeczywistą wbrew założeniu. Podobnie jest dla $\lambda=1/(1-\lambda)$. Jeśli wreszcie $\lambda=\lambda/(\lambda-1)$, to $\lambda=2$;

wówczas dla pozostałych liczb dostajemy wartości -1 i $1/2$. Tym samym twierdzenie jest dowiedzione.

Przypadek, gdy λ jest liczbą rzeczywistą i wartości (1) są równe, gra w geometrii ważną rolę i dlatego zajmiemy się nim specjalnie.

Mówimy wówczas, że punkty M, N, P, Q tworzą czwórkę harmoniczną.

Harmoniczność jest więc własnością czwórki punktów niezależną od ich porządku. Uporządkujmy je obecnie tak, by

$$(2) \quad (MNPQ) = -1.$$

Mówimy wówczas, że para M, N przedziela parę P, Q harmonicznie.

Ze wzorów (10) z § 74 (str. 404) wynika, że przedzielanie się harmoniczne dwóch par punktów jest niezależne od porządku tych par i od porządku punktów w każdej parze.

Z równości (2) wynika, że pary M, N i P, Q przedzielają się wzajemnie (w sensie definicji ze str. 406).

Rozpatrzmy teraz w szczególności przypadek, gdy prosta jest właściwa i Q jest jej punktem w ∞ . Wówczas (p. str. 403)

$$(MNPQ) = -(MNP) = -1$$

czyli

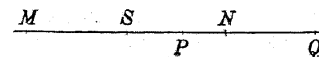
$$\frac{x_P - x_M}{x_N - x_P} = 1, \quad x_P = \frac{x_M + x_N}{2}.$$

Zatem, gdy jeden z punktów jednej pary jest punktem w ∞ , to drugi punkt tej pary jest środkiem odcinka wyznaczonego przez drugą parę i na odwrót.

Niech obecnie M, N, P, Q będą czterema różnymi punktami właściwymi prostej właściwej. Nadajmy tej prostej zwrot od M ku N i oznaczmy przez S środek odcinka łączącego MN (rys. 141). Niech $\overline{SP}, \overline{SQ}, \overline{SM}$ i $\overline{SN}$ oznaczają wartości wektorów SP, SQ, SM i SN na tak otrzymanej osi.

Udowodnimy, że na to, by para M, N przedzielała harmonicznie parę P, Q , potrzeba i wystarcza, żeby

$$(3) \quad \overline{SP} \cdot \overline{SQ} = \overline{SM}^2 = \overline{SN}^2.$$



Rys. 141

Dla dowodu obierzmy S za początek układu współrzędnych niejednorodnych. Zatem $x_M = -x_N$ i warunek (2) przybiera postać

$$(4) \quad \frac{(x_P + x_M)(x_Q - x_M)}{(x_P - x_M)(x_Q + x_M)} = -1,$$

ten zaś warunek jest równoważny równości

$$x_P x_Q = x_M^2$$

czyli warunkowi (3), c. b. d. o.

Z równości (3) wynika, że $\overline{SP}$ i $\overline{SQ}$ mają ten sam znak, a więc punkty P i Q leżą po tej samej stronie środka S odcinka MN . Gdy $\overline{SP}$ dąży do $\overline{SN}$, to $\overline{SQ}$ dąży do $\overline{SN}$. Gdy więc jeden z punktów P i Q zmierza do N , to i drugi zmierza do N , lecz z przeciwnej strony.

Z tego względu będziemy mówili, że para P, Q przedziela harmonicznie parę M, N , również w przypadku, gdy punkty P, Q i N są identyczne.

W tym jednak przypadku nie można mówić o stosunku anharmonicznym czterech punktów.

§ 76. Inwolucje rzutowe na prostej

Przekształcenie T zbioru punktów w siebie, które nie jest identycznością, nazywa się *inwolucją*, jeśli $T^2 = E$ czyli $T = T^{-1}$.

Zajmiemy się teraz *inwolucjami rzutowymi*, które będziemy nazywali krótko *inwolucjami*, gdyż nierzutowych rozważać nie będziemy.

Udowodnimy, że na to, by przekształcenie rzutowe

$$(1) \quad \varrho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \varrho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

było *inwolucją*, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(2) \quad a_{22} = -a_{11}.$$

Zauważymy wpraw, że przekształcenie (1) może być również napisane w postaci równoważnej

$$y_1 : y_2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) : (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

czyli

$$(3) \quad a_{21}x_1y_1 - a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_1x_2 - a_{11}x_1y_2 = 0.$$

Ażby przekształcenie było *inwolucją*, musi ono przeprowadzać równocześnie $x_1 : x_2$ w $y_1 : y_2$ i $y_1 : y_2$ w $x_1 : x_2$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym więc, by przekształcenie (3) było *inwolucją*, jest to, żeby wraz z (3) była spełniona równość powstająca z (3) przez zamianę x_i i y_i , czyli równość

$$(4) \quad a_{21}x_1y_1 - a_{12}x_2y_2 + a_{22}x_1y_2 - a_{11}y_1x_2 = 0.$$

Odejmując stronami (4) od (3), dostajemy

$$(5) \quad (a_{11} + a_{22})(x_2y_1 - y_2x_1) = 0$$

dla każdej pary punktów wzajemnie sobie przyporządkowanych. Na odwrót, gdy zachodzi (5), to (3) i (4) zachodzą równocześnie, a więc przekształcenie jest *inwolucją*. Ponieważ na mocy twierdzenia z § 73, str. 399, przekształcenie rzutowe, które nie jest identycznością, przeprowadza co najwyżej dwa punkty w siebie, więc równość

$$x_2y_1 - y_2x_1 = 0$$

zachodzi co najwyżej w dwóch punktach. Z (5) wynika więc, że

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

czyli (2) i, na odwrót, z (2) wynika (5), c. b. d. o.

Lewa strona wzoru (3) jest formą dwuliniową

$$(6) \quad a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1,$$

gdzie

$$a_{11} = a_{21}, \quad a_{22} = -a_{12}, \quad a_{12} = a_{22}, \quad a_{21} = -a_{11}.$$

Warunek (2) wyraża, że

$$a_{12} = a_{21},$$

czyli że ta forma dwuliniowa jest symetryczna. Zatem:

Na to, by przekształcenie rzutowe, przedstawione za pomocą formy dwuliniowej w postaci (3) lub (6), było *inwolucją*, potrzeba i wystarcza, żeby ta forma była symetryczna.

Jeśli przekształcenie rzutowe T ma tę własność, że dla jednej pary różnych punktów P, P' jest $T(P) = P'$ i $T(P') = P$, to T jest *inwolucją*.

Dla tej pary bowiem zachodzi (3) i (4) równocześnie, a więc i (5). Ponieważ punkty P i P' są różne, więc $x_2y_1 - y_2x_1 \neq 0$; z (5) wynika zatem, że $a_{11} + a_{22} = 0$, c. b. d. o.

Gdy dane są dwie różne pary różnych punktów P, P' i Q, Q' , to istnieje dokładnie jedna *inwolucja*, która zamienia ze sobą równocześnie punkty P i P' oraz punkty Q i Q' .

Istnieje bowiem dokładnie jedno przekształcenie rzutowe T , dla którego

$$T(P)=P', \quad T(P')=P, \quad T(Q)=Q',$$

gdyż przekształcenie rzutowe jest jednoznacznie wyznaczone przez trzy pary różnych punktów (p. § 73, str. 399). Na podstawie poprzedniego twierdzenia T jest inwolucją, a więc $T(Q')=Q$, c. b. d. o.

Punktem stałym przekształcenia T nazywamy każdy punkt, który T przekształca w niego samego.

Zbadamy punkty stałe inwolucji. Na to, by punkt o współrzędnych $x_1:x_2$ był punktem stałym inwolucji

$$(7) \quad a_{21}x_1y_1 - a_{12}x_2y_2 - a_{11}(x_1y_2 + x_2y_1) = 0,$$

potrzeba i wystarcza, żeby $x_1:x_2=y_1:y_2$, czyli żeby

$$(8) \quad a_{21}x_1^2 - 2a_{11}x_1x_2 - a_{12}x_2^2 = 0.$$

Równanie to wyznacza parę punktów stałych inwolucji o współrzędnych

$$x_1:x_2 = a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}a_{21}} : a_{21}.$$

Nie może być $a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 0$, gdyż wobec (2) jest

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -|\mathfrak{A}| \neq 0,$$

gdzie $\mathfrak{A}$ jest macierzą inwolucji.

Niech inwolucja będzie rzeczywista, a więc niech współczynniki a_{ik} i układ współrzędnych będą rzeczywiste.

Jeśli wyróżnik jest dodatni:

$$D = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} > 0,$$

to inwolucja ma dwa punkty stałe rzeczywiste. W tym przypadku nazywa się ona *inwolucją hiperboliczną*.

Jeśli zaś $D < 0$, to inwolucja nazywa się *inwolucją eliptyczną*; ma ona dwa punkty stałe nierzeczywiste, sprzężone.

Każda para różnych punktów wzajemnie sobie przyporządkowanych przez inwolucję przedziela harmonicznie parę punktów stałych tej inwolucji.

Istotnie, niech S_1 i S_2 będą punktami stałymi, a P i P' punktami wzajemnie sobie przyporządkowanymi. Mamy wykazać, że

$$(9) \quad (S_1S_2PP') = -1.$$

Niech

$$(S_1S_2PP') = \lambda.$$

Ponieważ $T(S_1)=S_1$, $T(S_2)=S_2$, $T(P)=P'$ i $T(P')=P$, więc wobec niezmienniczości stosunku anharmonicznego mamy

$$(S_1S_2P'P) = \lambda.$$

Ale przy zamianie punktów jednej pary stosunek anharmoniczny przechodzi na odwrotny, czyli

$$\lambda = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Wobec $(S_1S_2PP)=1$ nie może być $\lambda=1$; jest więc $\lambda=-1$, c. b. d. o.

Jeśli ustalimy dwa różne punkty S_1 i S_2 , a następnie przyporządkujemy sobie wzajemnie punkty P i P' tak, by spełniony był warunek (9), to otrzymamy inwolucję.

Istotnie, dobierzmy układ współrzędnych rzutowych tak, by punkty S_1 i S_2 miały współrzędne $0:1$ i $1:0$. Wówczas dla dowolnych dwóch punktów P i P' o współrzędnych $x_1:x_2$ i $y_1:y_2$ jest

$$(S_1S_2PP') = \frac{x_1y_2}{x_2y_1}.$$

Z warunku (9) dostajemy

$$x_1y_2 + x_2y_1 = 0,$$

a więc przyporządkowanie jest inwolucją, c. b. d. o.

Jeśli P, P' i Q, Q' są różnymi parami różnych punktów, to istnieje dokładnie jedna para punktów S_1, S_2 przedzielająca harmonicznie obie pary równocześnie.

Gdy bowiem para S_1, S_2 przedziela harmonicznie obie pary, to w inwolucji, której punktami stałymi są punkty S_1 i S_2 , punkty P i P' oraz punkty Q i Q' są sobie wzajemnie przyporządkowane. Ale — jak dowiedliśmy na str. 413 — istnieje dokładnie jedna inwolucja wyznaczona przez pary P, P' i Q, Q' , c. b. d. o.

Punkty S_1 i S_2 , występujące w poprzednim twierdzeniu, mogą nie być rzeczywiste. Dowiedzimy, że gdy punkty P, P', Q, Q' są rzeczywiste oraz pary P, P' i Q, Q' nie przedzielają się, to punkty S_1 i S_2 , przedzielające harmonicznie obie pary równocześnie, są rzeczywiste; w przeciwnym razie są one nierzeczywiste sprzężone.

Dla dowodu obierzmy punkty P, P' i Q za punkty podstawowe układu współrzędnych rzutowych. Mają więc one współrzędne $0:1$, $1:0$ i $1:1$. Niech punkt Q' ma współrzędne $q_1:q_2$. Podstawmy więc

$$x_1:x_2 = 0:1 \quad \text{ i } \quad y_1:y_2 = 1:0$$

do równania (7), przedstawiającego inwolucję wyznaczoną przez te pary. Dostajemy $a_{11}=0$, skąd

$$a_{21}x_1y_1 - a_{12}x_2y_2 = 0.$$

Tu możemy dalej podstawić

$$x_1:x_2=1:1 \quad \text{i} \quad y_1:y_2=q_1:q_2.$$

Dostajemy $a_{21}q_1 - a_{12}q_2 = 0$ czyli $a_{21}:a_{12}=q_2:q_1$. Inwolucja jest więc wyznaczona przez równanie

$$q_2x_1y_1 - q_1x_2y_2 = 0.$$

Dla punktów stałych zachodzi zatem równość

$$q_2x_1^2 - q_1x_2^2 = 0.$$

Jeśli więc q_1 i q_2 mają ten sam znak, dostajemy dwa punkty rzeczywiste, a w przeciwnym razie — nierzeczywiste sprzężone. Zgodnie ze znaczeniem geometrycznym współrzędnych rzutowych jest

$$q_1:q_2 = (PP'QQ'):1.$$

Punkty rzeczywiste dostajemy więc, gdy

$$(PP'QQ') > 0,$$

a w przeciwnym razie — nierzeczywiste, c. b. d. o.

Niech obecnie na prostej będą dane dwie inwolucje: jedna o punktach stałych S_1 i S_2 , a druga o punktach stałych S'_1 i S'_2 ; ponadto niech punkty S_1 i S_2 będą różne od punktów S'_1 i S'_2 . Wówczas istnieje dokładnie jedna para punktów P, P' , przedzielająca harmonicznie zarówno parę S_1, S_2 jak parę S'_1, S'_2 .

Tak więc, *gdy dwie inwolucje nie mają punktów stałych wspólnych, to istnieje dokładnie jedna para punktów odpowiadających sobie wzajemnie w obu inwolucjach równocześnie.*

Niech na prostej będą dane dwie różne pary różnych punktów, wyznaczone równaniami

$$(10) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

$$(11) \quad b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0.$$

Na to, by pary (10) i (11) przedzielały się harmonicznie, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(12) \quad a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11} = 0.$$

Istotnie, niech $(m_1:m_2)$ i $(n_1:n_2)$ będą punktami, wyznaczonymi przez równanie (10). Zachodzi więc tożsamość

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (x_1m_2 - x_2m_1)(x_1n_2 - x_2n_1),$$

skąd

$$(13) \quad a_{11}=m_2n_2, \quad a_{22}=m_1n_1, \quad 2a_{12}=2a_{21}=-(m_2n_1+m_1n_2).$$

Punkty pary (11) są punktami stałymi inwolucji

$$(14) \quad b_{11}x_1y_1 + b_{12}(x_1y_2 + y_1x_2) + b_{22}x_2y_2 = 0.$$

Na to, by pary (10) i (11) przedzielały się harmonicznie, potrzeba i wystarcza, żeby punkty pary (10) były sobie wzajemnie przyporządkowane w inwolucji (14), a więc żeby

$$b_{11}m_1n_1 + b_{12}(m_1n_2 + n_1m_2) + b_{22}m_2n_2 = 0.$$

Na mocy (13) równość ta jest równoważna równości (12), c. b. d. o.

Niech teraz na prostej będą dane dwie różne pary różnych punktów, wyznaczone równaniami (10) i (11). Możemy te równania napisać krótko w postaci

$$(15) \quad \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}x_ix_k = 0, \quad \sum_{i,k=1}^2 b_{ik}x_ix_k = 0.$$

Przez analogię do pęków prostych, kół i płaszczyzn nazywamy *pękiem par punktów* zbiór par wyznaczonych przez równanie

$$(16) \quad \lambda_1 \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}x_ix_k + \lambda_2 \sum_{i,k=1}^2 b_{ik}x_ix_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| > 0,$$

czyli

$$(17) \quad \sum_{i,k=1}^2 (\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik})x_ix_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| > 0.$$

Współczynniki w równaniu (17) nie mogą zniknąć równocześnie, gdyż wówczas a_{ik} i b_{ik} byłyby proporcjonalne i równania (15) przedstawiałyby tę samą parę. Z (16) wynika, że każdy punkt prostej należy dokładnie do jednej z par pęku. Podstawiając bowiem do (17) współrzędne punktu, dostajemy

$$\lambda_1:\lambda_2 = -\sum b_{ik}x_ix_k : \sum a_{ik}x_ix_k,$$

a więc stosunek $\lambda_1:\lambda_2$ jest wyznaczony przez punkt na prostej jednoznacznie.

Jeśli każdemu punktowi prostej przyporządkujemy drugi punkt pary pęku, do której on należy, dostajemy involucję.

Rzeczywiście, istnieje dokładnie jedna para punktów S_1, S_2 przedzielająca harmonicznie obie pary (15) równocześnie. Jeśli para ta jest wyznaczona przez równanie

$$\sum_{i,k=1}^3 c_{ik} x_i x_k = 0,$$

to zachodzą jednocześnie równości (p. wzór (12))

$$a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12} + a_{22}c_{11} = 0, \quad b_{11}c_{22} - 2b_{12}c_{12} + b_{22}c_{11} = 0,$$

z których wynika, że dla wszelkich λ_1 i λ_2 jest

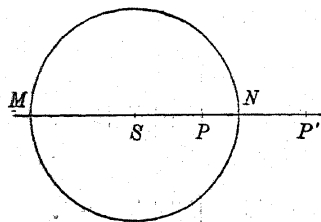
$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})c_{22} - 2(\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12})c_{12} + (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22})c_{11} = 0.$$

Z ostatniej równości wynika dalej, że para S_1, S_2 przedziela harmonicznie każdą parę z pęku (16), a więc że pary tego pęku tworzą involucję, której punktami stałymi są S_1 i S_2 .

Podamy kilka przykładów involucji.

Najprostszą involucją na prostej jest odbicie w punkcie; we współrzędnych niejednorodnych wyraża się ono równaniem

$$y = -x \quad \text{czyli} \quad y + x = 0.$$



Rys. 142

Punktami stałymi są tu początek układu współrzędnych i punkt w ∞ .

Innego przykładu dostarcza inwersja czyli odbicie w kole. Tu każda prosta przechodząca przez środek przechodzi na siebie. Na każdej z tych prostych inwersja wyznacza involucję, której punktami stałymi są punkty M i N przecięcia prostej z kołem. Mamy bowiem dla każdej pary punktów P, P' ,

przyporządkowanych sobie wzajemnie (rys. 142) $\overline{SP} \cdot \overline{SP'} = r^2$ czyli $\overline{SP} \cdot \overline{SP'} = \overline{SM}^2 = \overline{SN}^2$, skąd $(MNPP') = -1$ (p. str. 411).

Weźmy teraz pod uwagę pęk kół przechodzących przez dwa dane punkty i prostą właściwą, która nie jest prostą potęgową tego pęku (p. § 44, str. 221). Każde koło przecina ją więc w parze punktów lub jest do niej styczne. Przyporządkujemy sobie wzajemnie punkty przecięcia, gdy są one różne, a każdy punkt styczności sam sobie. Otrzymujemy involucję na prostej.

Pęk kół możemy bowiem przedstawić we współrzędnych jednorodnych równaniem (por. wzór (2) z § 44, str. 221):

$$(18) \quad \lambda_1 K_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 K_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Obierzmy rozpatrywaną prostą za oś Ox . Punkty przecięcia osi Ox z kołami (18) są wyznaczone przez równanie

$$(19) \quad \lambda_1 K_1(0, x_2, x_3) + \lambda_2 K_2(0, x_2, x_3) = 0.$$

Ponieważ oś Ox nie jest prostą potęgową pęku, więc koła K_1 i K_2 przecinają oś Ox w czterech różnych punktach. Tym samym równanie (19) wyznacza pęk par punktów, c. b. d. o.

W ostatnim przykładzie punktami stałymi involucji są punkty styczności prostej z kołami pęku. Zatem prosta, która nie jest prostą potęgową pęku, jest styczna dokładnie do dwóch kół pęku.

Zauważmy, że jeśli koła tworzą pęk eliptyczny, to na prostej środków dostajemy involucję hiperboliczną i odwrotnie.

Niech w płaszczyźnie właściwej będzie dana elipsa lub hiperbola. Punkty w ∞ możemy wówczas podzielić na pary, odpowiadające kierunkom sprzężonym względem tej stożkowej. Dostajemy wówczas involucję na prostej w ∞ . Oznaczając bowiem kierunki sprzężone przez $\lambda_1: \lambda_2$ i $\mu_1: \mu_2$, mamy (p. wzór (9) z § 55, str. 277)

$$a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + a_{22}\lambda_2\mu_2 = 0.$$

Punktami stałymi tej involucji są więc punkty przecięcia stożkowej z prostą w ∞ czyli punkty styczności asymptot.

Dla elipsy involucja kierunków sprzężonych jest eliptyczna, a dla hiperboli — hiperboliczna.

§ 77. Pewne własności charakterystyczne przekształceń rzutowych

1. Przedstawienie przekształceń rzutowych przez rzuty perspektywiczne. W § 30 udowodniliśmy, że każde przekształcenie afiniczne daje się złożyć ze skończonej ilości rzutów równoległych. Rzuty te są szczególnym przypadkiem rzutów perspektywicznych. Twierdzenie to uogólnia się na przekształcenia rzutowe:

Każde przekształcenie rzutowe daje się złożyć ze skończonej ilości rzutów perspektywicznych.

Udowodnimy to dla prostych. Jeśli przekształcenie rzutowe T przeprowadza prostą p w prostą p' i $T(P_\infty) = P'_\infty$, to T jest przekształceniem afinicznym i twierdzenie jest prawdziwe.

Założmy więc, że

$$T(P_\infty) = P', \quad \text{gdzie} \quad P' \neq P_\infty.$$

Niech p'' będzie dowolną trzecią prostą (rys. 143) równoległą do p , a T' rzutem środkowym prostej p' na prostą p'' przeprowadzającym P' w P_∞ . Środek rzutu leży więc na prostej przechodzącej przez P' równoległe do P_∞ . Dla przekształcenia $T'' = T'T$ jest

$$T''(P_\infty) = T'T(P_\infty) = T'(P') = P_\infty,$$

a więc T'' jest przekształceniem afijnym prostej p w prostą p'' . Tym samym

$$T'' = T_1 T_2 \dots T_k,$$

Rys. 143

gdzie T_i są rzutami środkowymi (a nawet równoległymi). Stąd

$$T = T'^{-1} T_1 T_2 \dots T_k.$$

Ponieważ T'^{-1} jest rzutem środkowym prostej p'' na prostą p' , więc twierdzenie jest udowodnione.

Aby dowieść go dla płaszczyzny, należy w pierw obraz prostej w ∞ płaszczyzny Π przekształcić rzutem środkowym w prostą w ∞ płaszczyzny pomocniczej.

2. Twierdzenie Staudta i Darboux dla przekształceń rzutowych. Udowodniliśmy, że warunkiem wystarczającym do rzutowości przekształcenia prostej jest niezmienniczość stosunku anharmonicznego (§ 74, str. 406). Warunek ten da się osłabić. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie, wypowiedziane po raz pierwszy przez Staudta w 1847 r., a udowodnione przez Darboux dopiero w 1879 r.:

Jeśli przekształcenie wzajemnie jednoznaczne T prostej p w prostą p' przeprowadza pary przedzielające się harmonicznie w pary o tej samej własności, to jest ono rzutowe.

Dla dowodu rozpatrzmy trzy przypadki:

1° Założmy w pierw, że p i p' są prostymi właściwymi i że P_∞ przechodzi w P'_∞ . Niech początkiem układu niejednorodnych współrzędnych na prostej p będzie punkt O , a na prostej p' punkt O' . Przekształcenie T możemy wówczas wyrazić we współrzędnych niejednorodnych równaniem

$$(1) \quad x' = f(x),$$

gdzie

$$(2) \quad f(0) = 0.$$

Punkty jednostkowe na prostych p i p' dobierzmy tak, żeby obrazem punktu $x=1$ był punkt $x'=1$, czyli żeby

$$(3) \quad f(1) = 1.$$

Niech P_1 i P_2 będą dowolnymi punktami prostej p o współrzędnych x_1 i x_2 , a punkt P o współrzędnej x niech będzie środkiem odcinka $P_1 P_2$. Jest więc

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ponieważ (p. § 75, str. 411)

$$(P_1 P_2 P_\infty P) = -1,$$

więc na mocy założenia twierdzenia jest również

$$(P'_1 P'_2 P'_\infty P') = -1,$$

skąd

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2}{2}.$$

czyli

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Wnosimy stąd tak jak w § 30 (str. 151), że

$$(4) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(-x) = -f(x)$$

i że $f(w) = w$ dla w wymiernych.

Niech teraz $P_1(x_1)$ i $P_2(x_2)$ będą dowolnymi punktami, dla których $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$. Istnieje wówczas dokładnie jedna taka para punktów $P_3(x_3)$, $P_4(-x_3)$, że $x_3 > 0$ i że pary $P_1 P_2$ i $P_3 P_4$ przedzielają się harmonicznie. Na to bowiem potrzeba i wystarcza, żeby (p. § 75, str. 411)

$$\overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2 = \overline{OP}_3^2,$$

czyli żeby

$$(5) \quad x_3 = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Obrazami punktów P_k są punkty P'_k dla $k=1, 2, 3, 4$, skąd w szczególności

$$x'_4 = f(-x_3) = -f(x_3) = -x'_3.$$

Ponieważ punkty P'_k tworzą znowu czwórkę harmoniczną, więc

$$x'_3 = \sqrt{x'_1 x'_2},$$

skąd na mocy (5)

$$(6) \quad f(\sqrt{x_1 x_2}) = \sqrt{f(x_1) f(x_2)}.$$

Podstawiając tu $x_1 = x$ i $x_2 = 1$, dostajemy wobec (3)

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{f(x)},$$

stąd zaś i z (6)

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2),$$

w szczególności więc

$$f(x_1^2) = [f(x_1)]^2.$$

Jeśli $x > 0$, to istnieje takie x_1 , że $x_1^2 = x$, a zatem

$$f(x) = f(x_1^2) = [f(x_1)]^2 > 0.$$

Stąd i z (4) wynika dla $x_2 > 0$ nierówność

$$f(x_1 + x_2) > f(x_1),$$

a więc funkcja $f(x)$ jest rosnącą. Zakończenie dowodu jest takie samo jak na str. 152.

2° Załóżmy teraz, że P_∞ nie przechodzi w P'_∞ lub jedna z prostych jest prostą w ∞ . Wówczas bierzemy pod uwagę jakiekolwiek przekształcenie rzutowe T_1 przeprowadzające prostą p' w prostą właściwą p'' tak, by P'_∞ przeszło w P''_∞ . Przekształcenie

$$T'' = T' T$$

przeprowadza p w p'' tak, że P_∞ przechodzi w P''_∞ oraz zachowuje się stosunek harmoniczny (gdyż T i T' zachowują ten stosunek). W myśl udowodnionego już przypadku 1° przekształcenie T'' jest więc rzutowe. To samo dotyczy zatem przekształcenia

$$T = T'^{-1} T''.$$

3° Podobnie rozumiemy w przypadku, gdy obie proste p i p' są prostymi w ∞ .)

(ROZDZIAŁ XVII

WSPÓŁRZĘDNE PLÜCKEROWSKIE, DUALIZM I PRZYKŁADY JEGO ZASTOSOWAŃ

§ 78. Współrzędne plückerowskie prostych

1. **Współrzędne prostej i równania punktu.** W jakimkolwiek układzie współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie każdą prostą można przedstawić równaniem postaci

$$(1) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad \sum_k |u_k| > 0.$$

Jeśli w tym równaniu współczynniki u_k zastąpimy przez liczby proporcjonalne do nich, to otrzymamy tę samą prostą. Równania kształtu (1) określają więc odpowiedniość wzajemnie jednoznaczłą między prostymi na płaszczyźnie a stosunkami $u_1 : u_2 : u_3$.

Stosunki te nazywamy *współrzędnymi plückerowskimi prostej* lub krótko *współrzędnymi prostej* w przyjętym układzie współrzędnych rzutowych.

Np. stosunki $u_1 : u_2 : u_3$ o wartościach

$$1 : 0 : 0, \quad 0 : 1 : 0, \quad 0 : 0 : 1$$

są współrzędnymi prostych

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

tj. osi układu współrzędnych.

Podobnie, jak badaliśmy zbiory punktów przedstawione równaniami $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, zbadamy zbiory prostych, przedstawione równaniami $f(u_1, u_2, u_3) = 0$. Zaczniemy od równań 1-go stopnia.

Zauważmy, że w myśl definicji współrzędnych plückerowskich prostej równość (1) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by punkt o współrzędnych $x_1 : x_2 : x_3$ leżał na prostej o współrzędnych $u_1 : u_2 : u_3$.