

Stożek asymptotyczny elipsoidy (16) ma równanie (21), jest więc on nierzeczywisty.

Wynika to, niezależnie od tych rozważań, również stąd, że przekrój elipsoidy płaszczyzną w  $\infty$  jest krzywą nierzeczywistą.

W podobny sposób dowodzi się następującego twierdzenia:

Niech  $\Lambda$  będzie paraboloida, a  $\Pi$  — płaszczyzną styczną do  $\Lambda$  w punkcie  $P$ . Obierzmy  $P$  za początek układu współrzędnych  $Oxyz$ ,  $\Pi$  — za płaszczyznę  $Oxy$ , średnicę przechodzącą przez  $P$  — za oś  $Oz$ , dowolną styczną w  $P$  różną od tworzącej — za oś  $Ox$  i wreszcie prostą sprzężoną z nią biegunowo — za oś  $Oy$ . W tym układzie współrzędnych paraboloida ma równanie

$$(23) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b'^2} = 2z,$$

gdzie

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla paraboloidy eliptycznej,} \\ -1 & \text{dla paraboloidy hiperbolicznej.} \end{cases}$$

## ROZDZIAŁ XV

### WŁASNOŚCI METRYCZNE KWADRYK

#### § 67. Kierunki główne. Osie

Zachowajmy nadal założenie

$$(1) \quad R(\mathfrak{A})=3 \quad \text{lub} \quad R(\mathfrak{A})=4.$$

Kierunek nazywamy *głównym*, jeżeli jest prostopadły do płaszczyzny średnicowej z nim sprzężonej.

W przypadku paraboloidy zaliczamy do kierunków głównych również wspólny kierunek wszystkich średnic.

Podamy metodę wyznaczania kierunków głównych kwadryki w prostokątnym układzie współrzędnych  $Oxyz$ .

Niech kwadryka ma w tym układzie równanie we współrzędnych niejednorodnych

$$(2) \quad g(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Niech  $\alpha:\beta:\gamma$  będzie dowolnym kierunkiem. Przyjmijmy oznaczenia:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_\alpha &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \varphi_\beta &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \varphi_\gamma &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{aligned}$$

W tych oznaczeniach płaszczyzna średnicowa sprzężona z kierunkiem  $\alpha:\beta:\gamma$  ma równanie

$$(4) \quad x\varphi_\alpha + y\varphi_\beta + z\varphi_\gamma + 2(a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma) = 0.$$

Wektor o składowych  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma$  jest prostopadły do płaszczyzny (4). Na to więc, by kierunek  $\alpha:\beta:\gamma$  był prostopadły do tej płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(5) \quad \varphi_\alpha = \lambda\alpha, \quad \varphi_\beta = \lambda\beta, \quad \varphi_\gamma = \lambda\gamma, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \neq 0.$$

Wobec (3) dostajemy stąd

$$(6) \quad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta + a_{32}\gamma &= 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-\lambda)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Gdy zaś  $\lambda=0$ , równania te zachodzą także dla kierunku średnic paraboloidey, kierunek ten bowiem wyznacza jako punkt w  $\infty$  środek paraboloidey (str. 341).

Z równań (6) wynika, że

$$(7) \quad w(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem, każdemu kierunkowi głównemu  $\alpha:\beta:\gamma$  odpowiada pewien pierwiastek charakterystyczny  $\lambda$  macierzy  $\mathfrak{A}$ , związany z nim równaniami (6).

Na odwrót, każdy kierunek związany w ten sposób z jakimkolwiek pierwiastkiem charakterystycznym macierzy  $\mathfrak{A}$  jest główny.

Jeśli bowiem  $\lambda=0$ , to  $|\mathfrak{A}|=0$  i wobec założeń (1) jest  $R(\mathfrak{A})=4$ , a więc kwadryka jest paraboloidą; wówczas równania (6) wyznaczają kierunek średnic paraboloidey czyli kierunek główny.

Jeśli zaś  $\lambda \neq 0$ , to z równań (6) wynikają równości (5); wówczas kierunek  $\alpha:\beta:\gamma$  jest prostopadły do płaszczyzny (4), a więc jest znowu główny.

Kierunki  $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$  i  $\alpha_2:\beta_2:\gamma_2$ , odpowiadające różnym pierwiastkom charakterystycznym  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , są prostopadłe.

Jeśli bowiem

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1} &= \lambda_1 \alpha_1, & \varphi_{\beta_1} &= \lambda_1 \beta_1, & \varphi_{\gamma_1} &= \lambda_1 \gamma_1, \\ \varphi_{\alpha_2} &= \lambda_2 \alpha_2, & \varphi_{\beta_2} &= \lambda_2 \beta_2, & \varphi_{\gamma_2} &= \lambda_2 \gamma_2, \end{aligned}$$

to

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \varphi_{\alpha_2} + \beta_1 \varphi_{\beta_2} + \gamma_1 \varphi_{\gamma_2} &= \lambda_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2), \\ \alpha_2 \varphi_{\alpha_1} + \beta_2 \varphi_{\beta_1} + \gamma_2 \varphi_{\gamma_1} &= \lambda_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2). \end{aligned}$$

Wobec tożsamości

$$\alpha_1 \varphi_{\alpha_2} + \beta_1 \varphi_{\beta_2} + \gamma_1 \varphi_{\gamma_2} = \alpha_2 \varphi_{\alpha_1} + \beta_2 \varphi_{\beta_1} + \gamma_2 \varphi_{\gamma_1}$$

z (8) wynika, że

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) = 0.$$

Stąd wynika dalej, wobec  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , że

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$$

czyli prostopadłość obu kierunków.

Skorzystamy obecnie z następującego twierdzenia Weierstrassa (p. Przypis I, § 5):

*Jeśli wyznacznik charakterystyczny macierzy symetrycznej  $n$ -tego stopnia ma pierwiastek  $k$ -krotny, to macierz charakterystyczna ma rząd  $n-k$ .*

Rozróżnimy trzy przypadki:

1° Pierwiastki charakterystyczne macierzy  $\mathfrak{A}$  są różne. Wybierzmy jeden z tych pierwiastków. Wówczas macierz układu równań (6) ma rząd 2; możemy zatem jedno z równań odrzucić. Kierunek  $\alpha:\beta:\gamma$  jest jednoznacznie wyznaczony przez pozostałe dwa równania. W tym przypadku istnieją więc dokładnie trzy kierunki główne i są one wzajemnie prostopadłe.

2° Jeden z pierwiastków macierzy  $\lambda$  jest dwukrotny. Wówczas macierz układu równań (6) ma rząd 1; możemy zatem dwa równania odrzucić. Kierunki główne odpowiadające temu pierwiastkowi są wyznaczone przez jedno równanie, np.

$$(a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0.$$

Kierunków tych jest więc nieskończenie wiele. Są one prostopadłe do wektora o składowych  $a_{11}-\lambda$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ , który zatem wyznacza w tym przypadku kierunek główny odpowiadający trzeciemu pierwiastkowi.

3° Wszystkie trzy pierwiastki charakterystyczne są równe. Wówczas macierz układu równań (6) ma rząd 0: wszystkie współczynniki znikają. A zatem  $a_{ik}=0$  dla  $i \neq k$  oraz  $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\lambda$ . W tym przypadku powierzchnia jest kulą i równania (6) są spełnione dla dowolnych  $\alpha, \beta, \gamma$ , czyli każdy kierunek jest główny.

Jak wiadomo (Przypis I, § 4), równanie charakterystyczne (7) ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste. Wobec tego w każdym z powyższych trzech przypadków otrzymujemy co najmniej trzy kierunki główne rzeczywiste.

Jeżeli kwadryka ma środek właściwy, a więc gdy  $R(\mathfrak{A})=3$  (p. § 63, str. 342), kierunki główne nie są asymptotyczne, gdyż nie leżą w płaszczyznach średnicowych z nimi sprzężonych. Wobec tego

płaszczyzny średnicowe połowią cięciwy o tych kierunkach. Zatem *płaszczyzny średnicowe kwadryk o środku właściwym, sprzężone z kierunkami głównymi, są płaszczyznami symetrii.*

Płaszczyzny te nazywają się *płaszczyznami głównymi.*

Oczywiście, jest też na odwrót: *każda płaszczyzna symetrii jest główna.*

Dla paraboloid zaś *płaszczyznami głównymi* nazywamy płaszczyzny sprzężone z kierunkami głównymi różnymi od kierunku średnic.

Tu również *płaszczyzny główne są identyczne z płaszczyznami symetrii.*

*Oś* kwadryki nazywa się średnica sprzężona z płaszczyzną do niej prostopadłą.

*W kwadrykach o środku właściwym istnieją co najmniej trzy osie; osie te mają kierunki główne.*

*W paraboloidach istnieje tylko jedna oś; ma ona również kierunek główny.*

Osie są krawędziami przecięcia płaszczyzn głównych jako też osiami symetrii.

## ( § 68. Kwadryki obrotowe

Rozpatrzmy naprzód kwadryki o środku właściwym, a więc dla których  $R(\mathfrak{U})=3$ . Obierzmy trzy prostopadłe osie główne kwadryki za osie układu współrzędnych. Ponieważ tworzą one układ osi sprzężonych, więc kwadryka ma w nim równanie

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c^2} + \eta = 0.$$

Dla elipsoidy jest  $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$  i  $\eta=\pm 1$ . Możemy założyć, że  $a \leq b \leq c$ . Jeżeli  $a=b$  lub  $b=c$ , równanie (1) przedstawia elipsoidę obrotową i, na odwrót, jeżeli równanie (1) przedstawia elipsoidę obrotową, to  $a=b$  lub  $b=c$ .

Dla hiperboloidy jednopowłokowej jest  $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=-1$  i  $\eta=-1$ . Hiperboloida ta jest obrotowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $a=b$ .

Dla hiperboloidy dwupowłokowej jest  $\eta=\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$ ; jest ona obrotowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $b=c$ .

Dla stożka, wreszcie, możemy przyjąć  $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=\pm 1$  i  $\eta=0$ . Jest on obrotowy, gdy  $a=b$ .

W każdym z tych przypadków widzimy, że powierzchnia (1) jest obrotowa wtedy i tylko wtedy, gdy dwie spośród liczb

$$\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\varepsilon_1}{b^2}, \quad \frac{\varepsilon_2}{c^2}$$

są równe. Jak wynika z (1), liczby te są pierwiastkami charakterystycznymi macierzy  $\mathfrak{U}$ .

Rozpatrzmy teraz kwadryki o środku niewłaściwym, a więc dla których  $R(\mathfrak{U}) \leq 2$ . Obierzmy układ prostokątny współrzędnych tak, żeby płaszczyzna  $Oxy$  była styczna do paraboloidy w punkcie  $O$  i prostopadła do wszystkich jej średnic, a oś  $Oz$  żeby była średnicą z nią sprzężoną. Oś  $Oz$  przechodzi zatem przez punkt styczności  $O$ . Osie  $Ox$  i  $Oy$  niech mają kierunki główne. Wówczas paraboloida ma równanie

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

gdzie  $\varepsilon = \pm 1$  (p. § 66, str. 368).

Ponieważ oś obrotu kwadryki obrotowej jest oczywiście jej oś i przekroje prostopadłe do osi są kołami, więc gdy  $\varepsilon = -1$ , paraboloida nie może być obrotowa, bo przekroje  $z=k$  są wówczas hiperbolami lub rozpadają się na pary tworzących paraboloidy. Paraboloida jest więc obrotowa tylko wtedy, gdy jest eliptyczna i  $a=b$ . Łatwo widzieć, że i na odwrót. W tym przypadku dwa spośród pierwiastków charakterystycznych

$$\frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2}, \quad 0$$

macierzy  $\mathfrak{U}$  są równe.

Tak samo sprawdzamy dla walców

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

że mogą one być obrotowe wtedy i tylko wtedy, gdy  $\varepsilon=1$  i  $a=b$ , czyli gdy dwie spośród liczb

$$\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\varepsilon}{b^2}, \quad 0$$

są równe.

Pozostałe kwadryki, tj. walec paraboliczny i kwadryki rozpadające się na płaszczyzny, nie mogą być obrotowe.

Tak więc udowodniliśmy twierdzenie:

*Na to, by kwadryka właściwa była obrotowa, potrzeba i wystarcza, żeby macierz  $\mathfrak{A}$  miała podwójny pierwiastek charakterystyczny różny od zera.*

Wobec niezależności pierwiastków charakterystycznych od prostokątnego układu współrzędnych, możemy wyprowadzić z pomocą tego twierdzenia kryteria na to, by kwadryka właściwa, określona w dowolnym prostokątnym układzie współrzędnych była obrotowa.

Mianowicie, jeśli  $\lambda$  jest pierwiastkiem podwójnym równania charakterystycznego, to w myśl twierdzenia Weierstrassa (p. str. 371) macierz wyznacznika charakterystycznego jest rzędu co najwyżej 1, a więc znikają minory drugiego stopnia. Na odwrót, gdy te minory znikają, to  $w(\lambda)=0$  i  $\lambda$  jest pierwiastkiem co najmniej dwukrotnym. Obliczając te minory i przyrównując je do zera, dostajemy sześć równości:

$$(3) \quad (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)=a_{12}^2, \quad (a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)=a_{23}^2, \quad (a_{33}-\lambda)(a_{11}-\lambda)=a_{13}^2,$$

$$(4) \quad (a_{11}-\lambda)a_{23}=a_{12}a_{13}, \quad (a_{22}-\lambda)a_{13}=a_{21}a_{23}, \quad (a_{33}-\lambda)a_{12}=a_{31}a_{32}.$$

Prawdziwość równości (3) i (4) dla pewnego  $\lambda \neq 0$  jest więc warunkiem koniecznym i dostatecznym obrotowości kwadryki.

Równości te można uprościć. Mianowicie, gdy  $a_{13}a_{23}a_{12} \neq 0$ , to z równości (4) wynikają równości

$$(5) \quad a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}} \neq 0.$$

Łatwo widzieć, że z równości (5) wynikają równości (3) i (4).

Jeśli znika tylko jeden ze współczynników  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ , to powierzchnia nie może być obrotowa, bo np. gdy  $a_{12}=0$ ,  $a_{13} \neq 0$  i  $a_{23} \neq 0$ , trzecia z równości (4) jest sprzeczna.

Jeśli zaś znikają dwa z tych współczynników, np.

$$(6) \quad a_{12}=a_{13}=0,$$

to rozróżniamy dwa przypadki:

1°  $a_{23} \neq 0$ . Wówczas pierwsza z równości (4) pociąga równość  $\lambda=a_{11}$ ; pozostałe oczywiście też zachodzą. Zachodzi również pierwsza i trzecia z równości (3), druga zaś przybiera postać

$$(7) \quad (a_{22}-a_{11})(a_{33}-a_{11})=a_{23}^2.$$

Na odwrót, z (6) i (7) wynika (3) i (4) dla  $\lambda=a_{11}$ .

2°  $a_{23}=0$ . Jest oczywiste, że wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by kwadryka była obrotowa, jest równość dwu z liczb  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ .

Dowodnione kryteria możemy zebrać w twierdzeniu:

*Kwadryka właściwa jest obrotowa wtedy i tylko wtedy gdy:*

1° w przypadku  $a_{12}a_{13}a_{23} \neq 0$  zachodzą równości (5);

2° w przypadku  $a_{12}a_{13}a_{23}=0$  znikają co najmniej dwie z liczb  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  oraz

jeśli  $a_{ik}=a_{il}=0$  i  $a_{kl} \neq 0$ , to  $(a_{kk}-a_{ll})(a_{ll}-a_{ii})=a_{kl}^2$ ,

jeśli zaś  $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ , to  $(a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{33})(a_{22}-a_{33})=0$ . )

## ( § 69. Przekroje kołowe

Zajmiemy się obecnie pytaniem, czy kwadryki nieobrotowe mają również przekroje kołowe. Pytanie to zostało rozstrzygnięte przez Monge'a i Hachette'a w 1802 r. Udowodnili oni, że z wyjątkiem paraboloidy hiperbolicznej wszystkie kwadryki nieobrotowe właściwe rzeczywiste mają po dwie serie równoległych przekrojów kołowych rzeczywistych, położone symetrycznie względem jednej z płaszczyzn głównych.

Kwadryki zaś obrotowe rzeczywiste mają tylko po jednej serii równoległych przekrojów kołowych; stanowią ją przekroje prostopadłe do osi obrotu. Przypadkiem wyjątkowym jest kula, której każdy przekrój płaski jest kołem.

Dla dowodu tych twierdzeń wykazemy wpierw, że jeśli przekroje równoległe kwadryki są elipsami, to są podobne.

Rozpatrzmy naprzód przypadek  $R(\mathfrak{A})=3$ . Jeśli płaszczyzna  $\Pi$  przecina kwadrykę wzdłuż elipsy  $\Gamma$ , to nie jest asymptotyczna (p. § 64, str. 351). Istnieje więc średnica kwadryki sprzężona z płaszczyzną  $\Pi$ ; przyjmijmy ją za oś  $Oz$  układu współrzędnych *Oxyz*. Przyjmijmy płaszczyznę średnicową kwadryki, równoległą do  $\Pi$ , za płaszczyznę *Oxy* tego układu, a w niej dwie dowolne średnice sprzężone elipsy  $\Gamma$  za osie  $Ox$  i  $Oy$ . Kwadryka ma wówczas równanie postaci

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c^2} = \eta,$$



a jej przekroje równoległe do płaszczyzny  $\Pi$  mają równania

$$(2) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = \eta - \varepsilon_2 \frac{k^2}{c^2}, \quad z=k.$$

Jeśli  $\eta - \varepsilon_2 k^2/c^2 \neq 0$ , to przekrój (2) jest właściwy i można go przedstawić w postaci

$$(3) \quad \frac{x^2}{a'^2 \lambda} + \frac{y^2}{b'^2 \lambda} = 1, \quad z=k, \quad \text{gdzie } \lambda = \eta - \varepsilon_2 \frac{k^2}{c^2}.$$

Elipsy (3) powstają z elipsy

$$(4) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad z=k$$

przez przekształcenie homotetyczne

$$x = x' \sqrt{\lambda}, \quad y = y' \sqrt{\lambda},$$

a więc są podobne.

Należy zauważyć, że dopuszczamy homotetie nierzeczywiste w przypadku, gdy  $\lambda < 0$ . Dla przekrojów eliptycznych rzeczywistych jednak, jak to wynika z (3), jest  $\lambda > 0$  i homotetia jest rzeczywista.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy kwadryka jest paraboloidą. Wtedy płaszczyzna  $\Pi$  przekroju eliptycznego nie jest równoległa do osi kwadryki. Za płaszczyznę  $Oxy$  przyjmujemy płaszczyznę styczną równoległą do  $\Pi$  i tak dobieramy osie współrzędnych, by paraboloida miała równanie postaci (p. wzór (23) z § 66, str. 368)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Dalszy tok rozumowania jest taki jak w poprzednim przypadku.

Dla walców twierdzenie jest oczywiste, gdyż ich przekroje równoległe właściwe są przystające.

Zauważmy z kolei, że przekrój właściwy powierzchni (1) płaszczyzną  $z=k$  jest podobny do krzywej (4) niezależnie od wartości  $\eta$ . Wynika stąd, że przekroje równoległe właściwe kwadryki i jej stożka asymptotycznego są podobne.

Udowodnimy, wreszcie, następujące twierdzenie pomocnicze, grające dużą rolę w badaniu przekrojów kwadryk:

Jeżeli część wspólna dwu kwadryk

$$(5) \quad f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

zawiera stożkową  $\Gamma$  leżącą na płaszczyźnie właściwej  $\Pi$  i nie zawiera żadnych innych punktów tej płaszczyzny, to istnieje taka stała  $\lambda$ , że

$$(6) \quad f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = V(x, y, z) W(x, y, z),$$

gdzie  $V$  i  $W$  są wielomianami pierwszego stopnia.

Istotnie, założmy naprzód, że stożkowa  $\Gamma$  leży na płaszczyźnie  $Oxy$  (stożkowa ta może nie być rzeczywista). Niech

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44},$$

$$g(x, y, z) = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + \\ + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44}.$$

Przekroje kwadryk (5) płaszczyzną  $z=0$  mają równania

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0, \\ b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{14}x + 2b_{24}y + b_{44} = 0.$$

Nie mogą tu zniknąć wszystkie współczynniki, gdyż wówczas część wspólna obu kwadryk byłaby całą płaszczyzną  $Oxy$  wbrew założeniu. Ponieważ oba równania przedstawiają tę samą stożkową  $\Gamma$ , więc (p. str. 303)

$$a_{11} = \lambda b_{11}, \quad a_{22} = \lambda b_{22}, \quad a_{12} = \lambda b_{12}, \quad a_{14} = \lambda b_{14}, \quad a_{24} = \lambda b_{24}, \quad a_{44} = \lambda b_{44}.$$

Z tego wynika, że

$$f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = (a_{33} - \lambda b_{33})z^2 + \\ + 2(a_{13} - \lambda b_{13})xz + 2(a_{23} - \lambda b_{23})yz + 2(a_{34} - \lambda b_{34})z = zW(x, y, z),$$

gdzie  $W(x, y, z)$  jest wielomianem pierwszego stopnia. W tym więc przypadku twierdzenie zostało udowodnione.

Założmy teraz, że stożkowa  $\Gamma$  leży na płaszczyźnie właściwej  $\Pi$ , różnej od płaszczyzny  $Oxy$ . Wówczas istnieje przekształcenie afiniczne  $T$ , przeprowadzające płaszczyznę  $\Pi$  w płaszczyznę  $Oxy$ . Wielomiany  $f(x, y, z)$  i  $g(x, y, z)$  przejdą w pewne wielomiany  $f_1(x, y, z)$  i  $g_1(x, y, z)$ , a kwadryki

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad g_1(x, y, z) = 0$$

przetną się wzdłuż krzywej zawierającej stożkową leżącą na płaszczyźnie  $Oxy$ . Na mocy więc poprzedniego przypadku dla pewnego  $\lambda$  będzie zachodziła równość

$$f_1(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) = V_1(x, y, z) W_1(x, y, z),$$

w której  $V_1$  i  $W_1$  są wielomianami pierwszego stopnia.

Stąd dostajemy (6) przez przekształcenie odwrotne.

Na odwrót, jeśli tożsamość (6) zachodzi, to część wspólna kwadryk (5) jest identyczna z przekrojami każdej z nich parą płaszczyzn o równaniach  $V(x, y, z) = 0$  i  $W(x, y, z) = 0$ .

Gdy bowiem  $f(x, y, z) = 0$  i  $V(x, y, z) = 0$ , to wobec  $\lambda \neq 0$  musi być również  $g(x, y, z) = 0$  i  $V(x, y, z) = 0$  — i tak samo dla  $W$  zamiast  $V$ , c. b. d. o.

Możemy przejść obecnie do dowodu twierdzeń Monge'a i Hachette'a.

Rozpatrzmy naprzód przypadek elipsoid i hiperboloid, przedstawionych w układzie prostokątnym współrzędnych równaniem

$$(7) \quad f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

Możemy założyć, że

$$(8) \quad A \leq B \leq C.$$

Każde koło jest przekrojem płaskim kuli o tym samym środku co koło. Jeśli kwadryka (7) ma przekrój kołowy, to i przekrój przez środek kwadryki jest kołowy, gdyż — jak wykazaliśmy na str. 375 — jest on podobny do koła (może jednak być nierzeczywisty). Przeprowadźmy przez to koło kulę

$$(9) \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Kwadryki (7) i (9) przecinają się wzdłuż stożkowej zawierającej koło. Na podstawie twierdzenia pomocniczego zachodzi zatem dla pewnego  $\lambda \neq 0$  tożsamość postaci (6). Dla tego  $\lambda$  równanie

$$(10) \quad f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = 0$$

przedstawia więc kwadrykę rozpadającą się na płaszczyzny. Równanie (10) ma kształt

$$(11) \quad (A - \lambda)x^2 + (B - \lambda)y^2 + (C - \lambda)z^2 - (1 - \lambda r^2) = 0.$$

Ponieważ przedstawia ono parę płaszczyzn, więc  $R(\mathfrak{U}) \leq 2$  (p. § 62, str. 334). Musi zatem zachodzić co najmniej jedna z równości

$$(12) \quad A - \lambda = 0, \quad B - \lambda = 0, \quad C - \lambda = 0$$

i gdy zachodzi tylko jedna z nich, to mamy ponadto

$$(13) \quad 1 - \lambda r^2 = 0.$$

Rozróżnimy cztery przypadki:

1°  $A < B < C$ . W tym przypadku zachodzi tylko jedna z równości (12). Jeśli przekrój kołowy jest rzeczywisty, to równanie (11) musi przedstawiać parę płaszczyzn rzeczywistych. Na to potrzeba i wystarcza, by jedna z liczb  $A - \lambda$ ,  $B - \lambda$ ,  $C - \lambda$  była równa zeru, a pozostałe miały znaki przeciwne. Musi być więc  $\lambda = B$ , skąd na mocy (13)  $r = 1/\sqrt{B}$ , wobec czego dostajemy parę płaszczyzn

$$(A - \lambda)x^2 + (C - \lambda)z^2 = 0,$$

czyli

$$(14) \quad \sqrt{C - B}z \pm \sqrt{A - B}x = 0.$$

Istnieją więc dwie serie przekrojów kołowych rzeczywistych, równoległych do płaszczyzn (14). Każdy przekrój rzeczywisty równoległy do tych płaszczyzn jest kołem. Płaszczyzny (14) są położone symetrycznie względem płaszczyzny  $Oxz$ , która jest płaszczyzną główną przechodzącą przez oś  $Oy$ .

W przypadku hiperboloidy dwupowłokowej płaszczyzny (14) mogą same przecinać ją wzdłuż kół nierzeczywistych, jednakże przekroje rzeczywiste równoległe do nich są kołami rzeczywistymi.

Gdy  $\lambda = A$  lub  $\lambda = C$ , również dostajemy przekroje kołowe, lecz nierzeczywiste, i poza nimi nie ma żadnych przekrojów kołowych rzeczywistych ani nierzeczywistych.

2°  $A < B = C$ . Wówczas kwadryka jest powierzchnią obrotową; osią obrotu jest oś  $Ox$ . Nie może być wówczas  $\lambda = A$ , gdyż płaszczyzny (11) nie byłyby rzeczywiste. Zatem  $\lambda = B = C$  i równanie (11) przedstawia płaszczyznę  $x = 0$  lub parę płaszczyzn do niej równoległych. Jedynymi przekrojami kołowymi rzeczywistymi są przekroje prostopadłe do osi  $Ox$ , a więc do osi obrotu.

3°  $A = B < C$ . Wówczas kwadryka znów jest powierzchnią obrotową, ale osią obrotu jest oś  $Oz$ . Jak poprzednio, musi być  $\lambda = A = B$  i znowu przekroje kołowe rzeczywiste są prostopadłe do osi obrotu.

4°  $A = B = C$ . Wówczas każdy przekrój płaski jest kołem, gdyż powierzchnia jest kulą.

Ponieważ przekroje właściwe kwadryki i jej stożka asymptotycznego jedną i tą samą płaszczyzną są podobne (p. str. 376), więc płaszczyzny przecinające stożek

$$(15) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

wzdłuż kół są identyczne z płaszczyznami przecinającymi kwadrykę (7) wzdłuż kół (z wyjątkiem pary płaszczyzn (14), jako przechodzących przez środek stożka asymptotycznego, przecinających zatem ten stożek wzdłuż koła zerowego).

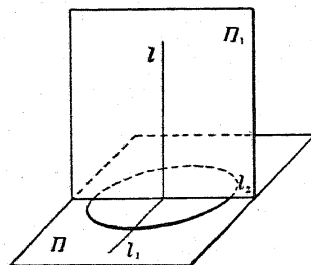
Rozpatrzmy teraz przypadek paraboloid. Ponieważ paraboloida hiperboliczna nie ma przekrojów eliptycznych rzeczywistych, więc nie ma ona również przekrojów kołowych rzeczywistych. Weźmy więc pod uwagę paraboloidę eliptyczną

$$(16) \quad f(x, y, z) \equiv Ax^2 + By^2 - 2z = 0.$$

Niech

$$(17) \quad 0 < A \leq B.$$

Udowodnimy, że płaszczyzna  $\Pi$  dowolnego przekroju kołowego paraboloidy (16) jest prostopadła do jednej z płaszczyzn głównych.



Rys. 132

Oznaczmy przez  $l$  (p. rys. 132) średnicę sprzężoną z płaszczyzną  $\Pi$  (prosta  $l$  jest więc równoległa do osi  $Oz$ ).

Jeśli prosta  $l$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\Pi$ , to płaszczyzna  $\Pi$  jest równoległa do płaszczyzny  $Oxy$ , a więc jest prostopadła do płaszczyzn głównych.

Jeśli zaś prosta  $l$  nie jest prostopadła do płaszczyzny  $\Pi$ , to oznaczmy przez  $l_1$  prostą prostopadłą do  $l$ , przechodzącą przez środek koła i leżącą na  $\Pi$ ,

przez  $\Pi_1$  — płaszczyznę średnicową sprzężoną z  $l_1$  i przez  $l_2$  — krawędź przecięcia płaszczyzn  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$ . Płaszczyzna  $\Pi_1$  zawiera prostą  $l$ . Płaszczyzna  $\Pi$  połówi cięciwy paraboloidy, a więc i cięciwy koła, równoległe do  $l_1$ . Zatem prosta  $l_1$  jest prostopadła do prostej  $l_2$ . Stąd i z prostopadłości obu prostych do  $l$  wynika, że  $l_1$ , a więc i  $\Pi$ , jest prostopadła do  $\Pi_1$ . Tak więc  $\Pi_1$  jest płaszczyzną główną, c. b. d. o.

Ponieważ płaszczyzna przekroju kołowego jest prostopadła do jednej z płaszczyzn głównych paraboloidy (16), np. do płaszczyzny

$Oxz$ , więc prosta prostopadła do  $\Pi$  i przechodząca przez środek koła leży w płaszczyźnie  $Oxz$ . Wynika stąd, że istnieje kula przechodząca przez koło przekroju i mająca środek na osi  $Oz$ . Jeśli płaszczyzna  $\Pi$  jest prostopadła do osi  $Oz$ , to kulę o środku na osi  $Oz$  możemy dobrać tak, by przeszła przez początek układu. W przeciwnym razie istnieje przekrój kołowy równoległy, przechodzący przez początek układu współrzędnych. W obu więc przypadkach dla wyznaczenia płaszczyzn przekrojów kołowych wystarczy badać kule o środku na osi  $Oz$ , przechodzące przez punkt  $O$ . Kula taka ma równanie

$$(18) \quad g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0.$$

Dobierzmy takie  $\lambda$ , by równanie

$$(19) \quad f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \equiv (A - \lambda)x^2 + (B - \lambda)y^2 - \lambda z^2 - 2(1 - a\lambda)z = 0$$

przedstawiało parę płaszczyzn. Nie może to być  $\lambda = 0$ . Można więc przekształcić równanie (19) w równanie postaci

$$(20) \quad (A - \lambda)x^2 + (B - \lambda)y^2 - \lambda(z - b)^2 = 0.$$

Na to, by równanie (20), w którym  $\lambda \neq 0$ , przedstawiało parę płaszczyzn, musi zachodzić co najmniej jedna z równości

$$(21) \quad \lambda = A, \quad \lambda = B,$$

w przeciwnym bowiem razie równanie (20) przedstawiałoby stożek.

Rozróżnimy dwa przypadki:

1°  $A < B$ . Wówczas, wobec  $A > 0$ , na to, by równanie (20) przedstawiało parę płaszczyzn rzeczywistych, potrzeba i wystarcza, by  $\lambda = A$ . Otrzymujemy dwie serie przekrojów kołowych, równoległych do płaszczyzn

$$(22) \quad \sqrt{B - A}y \pm \sqrt{A}z = 0.$$

2°  $A = B$ . Wówczas kwadryka jest powierzchnią obrotową. Z równania (20) dostajemy  $z = b$ ; wszystkie przekroje kołowe są prostopadłe do osi obrotu  $Oz$ .

Prócz zbadanych kwadryk przekroje kołowe ma jeszcze tylko walec eliptyczny

$$(23) \quad f(x, y, z) \equiv Ax^2 + By^2 - 1 = 0,$$

gdzie

$$(24) \quad 0 < A \leq B.$$

Łatwo dowieść, że płaszczyzna przekroju kołowego jest prostopadła do jednej z płaszczyzn symetrii walca. Można więc tak dobrać kulę przechodzącą przez środek przekroju kołowego, by jej środek leżał na osi walca. Ponieważ przekroje równoległe walca są przystające, więc wystarczy brać kule o równaniu

$$g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Stąd

$$f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \equiv (A - \lambda)x^2 + (B - \lambda)y^2 - \lambda z^2 - (1 - \lambda r^2) = 0.$$

Podobnie jak dla paraboloidy, dostajemy tu dla  $\lambda = A$  przekroje kołowe równoległe do płaszczyzn (22).

Dla  $A = B$  są one prostopadłe do osi obrotu.

We wszystkich rozpatrzonych przypadkach liczba  $\lambda$  jest równa jednemu z różnych od zera pierwiastków charakterystycznych  $A, B, C$  macierzy  $\mathfrak{A}$ . W przypadku  $\Delta \neq 0$  jest ona równa temu z pierwiastków, który jest zawarty między pozostałymi. Ponieważ pierwiastki te nie ulegają zmianie przy przejściu do nowego układu współrzędnych prostokątnych, więc gdy kwadryka jest przedstawiona równaniem najogólniejszej postaci, należy w celu wyznaczenia przekrojów kołowych tej kwadryki tak dobrać  $a, b, c$  i  $r$ , żeby równanie

$$f(x, y, z) - \lambda[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2] = 0$$

przedstawiało parę płaszczyzn rzeczywistych;  $\lambda$  jest tutaj różnym od zera pierwiastkiem charakterystycznym macierzy  $\mathfrak{A}$ . )

## ( § 70. Niezmienniki $I_1, I_2, I_3, I_4$ .

### Uogólnienia twierdzeń Apoloniusza

1. Niezmienniki  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Podobnie jak w § 60 dla stożkowych, dowodzi się dla kwadryk, że gdy dwa równania

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad g(x, y, z) = 0$$

przedstawiają tę samą kwadrykę, to

$$f(x, y, z) \equiv \varrho g(x, y, z).$$

Również podobnie jak w § 60 dla stożkowych, wprowadza się dla kwadryk niezmienniki przekształceń ortogonalnych, które są w układzie prostokątnym współrzędnych współczynnikami równa-

nia charakterystycznego macierzy  $\mathfrak{A}$ , oraz niezmiennik równy wyznacznikowi  $\Delta$  tej macierzy:

$$(1) \quad I_1 = A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$(2) \quad I_2 = A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad I_3 = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(4) \quad I_4 = \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Niezmiennik  $I_k$ , gdzie  $k=1, 2, 3, 4$ , jest wielomianem jednorodnym  $k$ -tego stopnia względem współczynników formy  $f$ .

Z powodu skomplikowanego kształtu tych niezmienników w układach współrzędnych ukośnokątnych nie podajemy ich w tych układach, lecz zakładamy, że układ współrzędnych jest prostokątny, i ograniczamy się do przypadku, gdy

$$(5) \quad \Delta = I_3 \neq 0 \quad \text{lub} \quad \tilde{\Delta} = I_4 \neq 0.$$

Wylęcza to z naszych rozważań walce i kwadryki rozpadające się na płaszczyzny.

Jeśli dla dwóch kwadryk niezmienniki  $I_k$ , gdzie  $k=1, 2, 3, 4$ , są równe, to (wobec równości współczynników równania charakterystycznego) pierwiastki charakterystyczne  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  są te same.

W przypadku  $I_3 \neq 0$  możemy zatem (p. wzór (32) z § 62, str. 326) tak dobrać układ prostokątny współrzędnych, by obie kwadryki dały się przedstawić równaniem

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

Kwadryki te są zatem przystające.

W przypadku zaś  $I_3 = 0$  równanie sprowadza się do postaci (p. wzór (36) z § 62, str. 328)

$$(6) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2p_3 \zeta = 0,$$



a ponieważ tu  $I_4 = -\lambda_1 \lambda_2 p_3^2$ , więc  $p_3^2$  jest to samo dla obu powierzchni. Gdyby  $p_3$  różniły się znakiem, to przez zmianę zwrotu osi  $Oz$  (odbicie) uzyskalibyśmy to samo równanie (6), skąd wynika, że znowu obie kwadryki są przystające.

Udowodniliśmy zatem, że równość niezmienników  $I_1, I_2, I_3$  i  $I_4$  jest warunkiem dostatecznym przystawiania dwóch kwadryk przy założeniu, że  $I_3 \neq 0$  lub  $I_4 \neq 0$  w myśl (5).

Tak samo jak dla stożkowych na płaszczyźnie (p. § 60, str. 310), wynika stąd, że na to, by dwie kwadryki spełniające warunek (5) były przystające, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(7) \quad \bar{I}_1 = \varrho I_1, \quad \bar{I}_2 = \varrho^2 I_2, \quad \bar{I}_3 = \varrho^3 I_3, \quad \bar{I}_4 = \varrho^4 I_4, \quad \text{gdzie } \varrho \neq 0.$$

Na podstawie tego dowodzi się, że zespół następujących równości jest warunkiem koniecznym i dostatecznym podobieństwa dwóch kwadryk spełniających warunek (5):

$$(8) \quad \bar{I}_1 : \bar{I}_2 : \bar{I}_3 = I_1^6 : I_2^3 : I_3^2, \\ \text{sign} \left( \frac{\bar{I}_1}{I_1} \right) = \text{sign} \left( \frac{\bar{I}_3}{I_3} \right).$$

**2. Uogólnienia twierdzeń Apoloniusza.** Niechaj kwadryka będzie przedstawiona w układzie prostokątnym współrzędnych  $Oxyz$  równaniem postaci

$$(9) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \eta,$$

gdzie  $\eta = 0$  lub  $\pm 1$ . Kwadryka ta może więc być stożkiem, elipsoidą lub hiperboloidą o środku  $O$ . Niechaj ta sama kwadryka, odniesiona do układu trzech średnic sprzężonych  $Ox'y'z'$ , ma równanie

$$(10) \quad A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 = \eta.$$

Od układu  $Oxyz$  do  $Ox'y'z'$  przechodzi się za pomocą podstawień liniowych, które przeprowadzają formę  $Ax^2 + By^2 + Cz^2$  w formę  $A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2$ . Zarazem podstawienia te przeprowadzają formę

$$x^2 + y^2 + z^2$$

w formę

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos \nu + 2y'z' \cos \lambda + 2x'z' \cos \mu,$$

gdyż obie formy przedstawiają kwadrat odległości punktu od początku  $O$ , wspólnego obu układom współrzędnych (§ 7, str. 33).

Dla każdej liczby  $s$  zachodzi zatem tożsamość

$$(11) \quad s(Ax^2 + By^2 + Cz^2) + (x^2 + y^2 + z^2) = \\ = s(A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2) + \\ + (x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos \nu + 2y'z' \cos \lambda + 2x'z' \cos \mu).$$

Wyróżnik prawej strony tożsamości (11) jest równy iloczynowi wyróżnika lewej strony tożsamości (12) przez kwadrat wyznacznika podstawienia. Jeśli więc znika jeden z tych dwóch wyróżników, to znika i drugi. Wyróżnik obu stron zależy od  $s$ . Wynika stąd, że równania, które otrzymujemy przez przyrównanie wyróżników obu stron do zera, mają te same pierwiastki.

Wyróżnik prawej strony wynosi

$$(12) \quad \begin{vmatrix} sA' + 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & sB' + 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & sC' + 1 \end{vmatrix} = s^3 A'B'C' + s^2(A'B' + A'C' + B'C') + \\ + s(B' \sin^2 \mu + C' \sin^2 \nu + A' \sin^2 \lambda) + g,$$

gdzie

$$(13) \quad g = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Liczba  $s$  jest więc pierwiastkiem równania

$$s^3 + s^2 \left( \frac{1}{A'} + \frac{1}{B'} + \frac{1}{C'} \right) + s \left( \frac{\sin^2 \mu}{A'C'} + \frac{\sin^2 \nu}{A'B'} + \frac{\sin^2 \lambda}{B'C'} \right) + \frac{g}{A'B'C'} = 0$$

(p. wzór (1) z § 10, str. 45). Ta sama liczba  $s$  jest pierwiastkiem analogicznego równania, które otrzymujemy przez przyrównanie do zera wyróżnika lewej strony tożsamości (11), tj. równania

$$s^3 + s^2 \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) + s \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} \right) + \frac{1}{ABC} = 0.$$

Wynika stąd, że oba równania mają te same współczynniki:

$$(14) \quad \frac{1}{A'} + \frac{1}{B'} + \frac{1}{C'} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}, \\ \frac{\sin^2 \nu}{A'B'} + \frac{\sin^2 \mu}{A'C'} + \frac{\sin^2 \lambda}{B'C'} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}, \\ \frac{g}{A'B'C'} = \frac{1}{ABC}.$$

Prawe strony równości (14) są niezmiennikami  $I_1, I_2, I_3$  równania (9) podzielonego przez  $ABC$ ; równości (14) dają kształt tych niezmienników w specjalnych układach współrzędnych ukośno-kątnych, w których kwadryka ma równanie kształtu (10).

Wyrazimy teraz równości (14) za pomocą osi głównych  $a, b, c$  i średnic sprzężonych  $a', b', c'$  kwadryki. W układach współrzędnych, złożonych z tych osi i tych średnic, równania kwadryki mają postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c^2} = \eta, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b'^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c'^2} = \eta.$$

Zatem

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{\varepsilon_1}{b^2}, \quad C = \frac{\varepsilon_2}{c^2}, \quad A' = \frac{1}{a'^2}, \quad B' = \frac{\varepsilon_1}{b'^2}, \quad C' = \frac{\varepsilon_2}{c'^2}.$$

Podstawiając te wartości do (14), dostajemy następujące uogólnienia twierdzenia Apoloniusza, do których po raz pierwszy doszli Livet i Bonnet:

$$(15) \quad a'^2 + \varepsilon_1 b'^2 + \varepsilon_2 c'^2 = a^2 + \varepsilon_1 b^2 + \varepsilon_2 c^2, \\ a'^2 b'^2 \sin^2 \nu + \varepsilon_1 a'^2 c'^2 \sin^2 \mu + \varepsilon_2 b'^2 c'^2 \sin^2 \lambda = a^2 b^2 + \varepsilon_1 a^2 c^2 + \varepsilon_2 b^2 c^2, \\ a'b'c'\sqrt{g} = abc.$$

W szczególności, gdy  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , tj. dla elipsoidy, równości (15) mają następujące znaczenie geometryczne:

*W równoległościanach utworzonych przez płaszczyzny styczne do elipsoidy w końcach trzech średnic sprzężonych*

- 1° suma kwadratów krawędzi jest stała;
- 2° suma kwadratów pól ścian jest stała;
- 3° objętość jest stała. )

## ( ROZDZIAŁ XVI

### PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWE, WSPÓLRZĘDNE RZUTOWE, STOSUNEK ANHARMONICZNY

#### § 71. Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej

Niechaj w przestrzeni rzutowej będzie dany dowolny układ współrzędnych jednorodnych; punkt niech będzie wyznaczony przez stosunek  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ . Weźmy pod uwagę równania

$$(1) \quad \varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3, 4$$

i gdzie macierz  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  jest nieosobliwa, czyli

$$(2) \quad |\mathfrak{A}| \neq 0.$$

Jeśli liczby  $x_i$  nie znikają równocześnie, to wobec (2) również liczby  $y_i$  mają tę samą własność. Dwom układom liczb  $x_i$ , mających równe stosunki  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ , odpowiadają dwa układy liczb  $y_i$ , także mających równe stosunki  $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ .

Gdy bowiem w równaniach (1) zastąpimy  $x_i$  przez  $\sigma x_i$ , to stosunek liczb po lewej stronie nie ulegnie zmianie; oznaczając przez  $b_{ik}$  elementy macierzy odwrotnej  $\mathfrak{A}^{-1}$ , otrzymujemy

$$(3) \quad \varrho^{-1} x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + b_{i3}y_3 + b_{i4}y_4,$$

gdzie

$$(4) \quad |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|^{-1} \neq 0;$$

z (3) i (4) wynika, że stosunek  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$  jest jednoznacznie wyznaczony przez stosunek  $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ .

Udowodniliśmy więc, że równania postaci (1), przy założeniu (2), wyznaczają odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne między stosunkami  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$  i  $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ . Każdy z tych stosunków wyznacza w przyjętym układzie współrzędnych jednorodnych pewien