

ROZDZIAŁ XIV

WŁASNOŚCI AFINICZNE KWADRYK

§ 63. Płaszczyzna biegunowa

1. Oznaczenia. W całym rozdziale zakładamy, że

$$(1) \quad \Delta \neq 0 \quad \text{lub} \quad \tilde{\Delta} \neq 0.$$

Kwadryki, o których mowa, są zatem stożkami lub kwadrykami rzędu 4 (p. str. 324) czyli elipsoidami, hiperboloidami i paraboloidami. Wyłączamy więc z naszych rozważań walce i kwadryki niewłaściwe.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(2) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum_{i,k=1}^4 a_{ik} x_i x_k,$$

$$(3) \quad \varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

$$(4) \quad g(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}.$$

Jeśli zatem powierzchnia ma równanie niejednorodne

$$(5) \quad g(x, y, z) = 0,$$

to jej równanie jednorodne ma postać

$$(6) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Podstawiając $x_4 = 0$ do wzoru (2), dostajemy

$$(7) \quad f(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Formę biegunową formy (2) (p. Przypis I, § 3) oznaczamy przez $f(x|y)$. Zatem

$$(8) \quad f(x|y) \equiv \sum_{i,k=1}^4 a_{ik} x_i y_k.$$

W szczególności

$$(9) \quad f(x|x) \equiv f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Niech $\frac{\partial f}{\partial x_k}(z)$ oznacza pochodną cząstkową formy (2) względem zmiennej x_k w punkcie (z_1, z_2, z_3, z_4) . Jest więc

$$(10) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_k}(z) \equiv a_{k1}z_1 + a_{k2}z_2 + a_{k3}z_3 + a_{k4}z_4.$$

Z (8) wynika, że

$$(11) \quad \begin{aligned} 2f(x|y) &\equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(y) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(y) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(y) + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(y) \equiv \\ &\equiv y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(x). \end{aligned}$$

W szczególności, dla samej formy (2) otrzymujemy *tożsamość Eulera*

$$(12) \quad 2f(x|x) \equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(x).$$

2. Płaszczyzna biegunowa. Niechaj będzie dana kwadryka (6) oraz punkt $M(m_1:m_2:m_3:m_4)$. Weźmy pod uwagę równanie

$$(13) \quad f(x|m) \equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m) + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(m) = 0.$$

Ponieważ jest to równanie co najwyżej pierwszego stopnia względem zmiennych x_k , więc może ono przedstawiać płaszczyznę.

Wówczas nazywamy ją *płaszczyzną biegunową punktu M*, sam zaś punkt M — *biegunem płaszczyzny* (13).

Zbadamy obecnie, jakie punkty mają płaszczyznę biegunową.

Równanie (13) nie przedstawia płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy znikają wszystkie współczynniki przy x_k , czyli gdy

$$(14) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_k}(m) = a_{k1}m_1 + a_{k2}m_2 + a_{k3}m_3 + a_{k4}m_4 = 0 \quad \text{dla } k=1, 2, 3, 4.$$

Układ równań (14) wyznacza więc punkty M , które nie mają płaszczyzny biegunowej. Wyróżnikiem tego układu jest wyznacznik $\Delta = |\mathfrak{A}|$. Jeśli więc $\Delta \neq 0$, to układ (14) jest spełniony tylko dla

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0;$$

taki jednak układ liczb m_k nie wyznacza punktu.

Wynika stąd, że gdy kwadryka jest elipsoidą, hiperboloidą lub paraboloidą, to względem niej każdy punkt ma płaszczyzną biegunową.

Jeśli zaś kwadryka jest stożkiem, to układ (14) ma rozwiązanie niezerowe $m_1:m_2:m_3:m_4$. Wtedy jednak $\Delta \neq 0$. Ponieważ Δ jest minorem utworzonym z trzech pierwszych wierszy układu (14), więc możemy odrzucić czwarte równanie (p. Przypis I, § 2) i dla wyznaczenia punktu M otrzymujemy układ złożony z trzech pierwszych równań. Stąd zaś wynika, że

$$(15) \quad m_1:m_2:m_3:m_4 = A_{41}:A_{42}:A_{43}:A_{44},$$

gdzie A_{4k} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{4k} w macierzy $\mathfrak{A}$.

Punkt (15) nazywa się *środkiem stożka*.

Ponieważ $A_{44} = \Delta \neq 0$, więc *środek stożka jest punktem właściwym*.

Widzimy zatem, że punkt M nie ma płaszczyzny biegunowej wtedy i tylko wtedy, gdy kwadryka jest stożkiem, a M jest jego środkiem.

Środek stożka leży na stożku.

Jak bowiem wynika z tożsamości (12), jeżeli spełniony jest układ równań (14), to

$$f(m|m) = m_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + m_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m) + m_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(m) = 0.$$

Pojęcie płaszczyzny biegunowej zostało określone z pomocą układu współrzędnych. Jak wiadomo jednak z algebry (p. Przypis I, § 4), jeśli przekształcenie liniowe przeprowadza formę $f(x|x)$ w formę $g(x'|y')$, to przeprowadza też ono formę biegunową $f(x|x)$ w formę biegunową $g(x'|y')$. Zatem po zmianie układu współrzędnych płaszczyzna (13) ma w nowym układzie współrzędnych równanie

$$g(x'|m') = 0,$$

a więc jest płaszczyzną biegunową punktu, który ma nowe współrzędne $m'_1:m'_2:m'_3:m'_4$, czyli tego samego punktu M . Wynika stąd, że *określenie płaszczyzny biegunowej nie zależy od układu współrzędnych*.

To samo rozumowanie algebraiczne dowodzi, że *płaszczyzna biegunowa jest pojęciem geometrii afinicznej*; innymi słowy, jeżeli Π jest płaszczyzną biegunową punktu M względem kwadryki Δ i przekształcenie afiniczne przeprowadza kwadrykę Δ w kwadrykę Δ' , a punkt M w punkt M' , to przeprowadza też ono płaszczyznę Π w płaszczyznę biegunową Π' punktu M' względem kwadryki Δ' .

W przypadku, gdy współczynniki w równaniu (6) są rzeczywiste, płaszczyzna biegunowa punktu rzeczywistego jest rzeczywista nawet wtedy, gdy sama powierzchnia nie jest rzeczywista.

Z tożsamości (11) wynika, że dla jakichkolwiek dwóch punktów $M(m_1:m_2:m_3:m_4)$ i $N(n_1:n_2:n_3:n_4)$ jest

$$f(m|n) = f(n|m).$$

Jeżeli więc współrzędne punktu N spełniają równanie

$$f(x|m) = 0,$$

to współrzędne punktu M spełniają równanie

$$f(x|n) = 0.$$

A zatem: *jeśli płaszczyzna biegunowa punktu M przechodzi przez punkt N , to płaszczyzna biegunowa punktu N przechodzi przez punkt M .*

Jeśli współrzędne punktu M spełniają równanie

$$f(x|m) = 0,$$

to

$$f(m|m) = 0.$$

A zatem: *na to, by płaszczyzna biegunowa punktu M względem kwadryki przechodziła przez ten punkt, potrzeba i wystarcza, żeby punkt M leżał na tej kwadryce.*

Zbadamy, które płaszczyzny mają biegun. W tym celu rozróżnimy dwa przypadki:

1° Kwadryka jest rzędu 4, czyli $\Delta \neq 0$. Na to, żeby płaszczyzna o równaniu

$$(16) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

była płaszczyzną biegunową punktu M , potrzeba i wystarcza, by

$$(17) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_k}(m) = a_{k1}m_1 + a_{k2}m_2 + a_{k3}m_3 + a_{k4}m_4 = \varrho a_k,$$

gdzie $k=1,2,3,4$ i $\varrho \neq 0$.

Wobec $\Delta \neq 0$ układ równań (17) ma dokładnie jedno rozwiązanie $m_1:m_2:m_3:m_4$. Wynika stąd, że *względem każdej elipsoidy, hiperboloidy i paraboloidy każda płaszczyzna ma jeden biegun*.

W tym więc przypadku przyporządkowanie punktom ich płaszczyzn biegunowych wyznacza wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru płaszczyzn na zbiór punktów.

2° Kwadryka jest stożkiem. W tym przypadku *każda płaszczyzna biegunowa przechodzi przez środek stożka*. Z tożsamości

$$f(x|m) \equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m) + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(m)$$

wynika bowiem, że $f(x|m)=0$, skoro $\frac{\partial f}{\partial x_k}(m)=0$ dla $k=1,2,3,4$.

Dzięki temu twierdzeniu środek stożka uzyskuje znaczenie geometryczne niezależne od układu współrzędnych i jest niezmiennikiem afinicznym.

Każda płaszczyzna przechodząca przez środek stożka ma nieskończenie wiele biegunów; wypełniają one prostą przechodzącą przez środek.

Dla dowodu dobierzemy możliwie dogodnie układ współrzędnych. Wolno nam to zrobić, ponieważ pojęcia występujące w twierdzeniu nie zależą od układu współrzędnych. Wybierzemy go tak, by równanie stożka we współrzędnych niejednorodnych było kształtu

$$(18) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

gdzie $\varepsilon = -1$ lub $+1$, zależnie od tego, czy stożek jest rzeczywisty, czy nie. We współrzędnych jednorodnych dostajemy równanie

$$(19) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \varepsilon \frac{x_3^2}{c^2} = 0.$$

Płaszczyzna biegunowa punktu $m_1:m_2:m_3:m_4$ ma więc równanie

$$(20) \quad \frac{x_1 m_1}{a^2} + \frac{x_2 m_2}{b^2} + \varepsilon \frac{x_3 m_3}{c^2} = 0.$$

Równanie (20) nie przedstawia płaszczyzny, gdy $m_1=m_2=m_3=0$. Środkiem stożka jest więc początek układu. Płaszczyzna przechodząca przez środek ma równanie

$$(21) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Na to, by płaszczyzna (21) była identyczna z płaszczyzną (20), potrzeba i wystarczy, żeby

$$\frac{m_1}{a^2} : \frac{m_2}{b^2} : \frac{m_3}{c^2} = a_1 : a_2 : a_3,$$

czyli by punkt o współrzędnych $m_1:m_2:m_3:m_4$ leżał na prostej

$$\frac{x_1}{a_1 a^2} = \frac{x_2}{a_2 b^2} = \frac{x_3}{a_3 c^2}.$$

Równanie to przedstawia prostą przechodzącą przez środek, c. b. d. o.

Jaki jest kształt równania płaszczyzny biegunowej we współrzędnych niejednorodnych? Ponieważ zachodzą tożsamości

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4 \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4 \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_4} \equiv x_4(a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}).$$

wiec płaszczyzna biegunowa ma równanie

$$(22) \quad x \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = 0.$$

3. Środek. Dla stożka środek został już poprzednio określony (str. 338). Dla powierzchni rzędu 4 *środek powierzchni* określamy jako *biegun płaszczyzny w ∞* .

Ponieważ płaszczyzna w ∞ ma równanie $x_4=0$, więc wobec (13) warunkiem koniecznym i dostatecznym, by punkt M był środkiem powierzchni, jest

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(m) \equiv a_{k1}m_1 + a_{k2}m_2 + a_{k3}m_3 + a_{k4}m_4 = 0 \quad \text{dla } k=1,2,3.$$

Otrzymujemy więc takie same równania jak równania (14), wyznaczające środek stożka (po odrzuceniu zbytecznego równania czwartego). W *każdym więc przypadku środek stożka ma współrzędne* (15).

Ponieważ dla paraboloid jest $A_{44}=A=0$, więc *środek paraboloidy jest punktem w ∞* . Leży on zatem na swej własnej płaszczyźnie biegunowej, a więc (p. str. 339) środek paraboloidy leży na tej paraboloidzie.

Środek każdej powierzchni o równaniu rzeczywistym jest punktem rzeczywistym.

Ponieważ dla elipsoid, hiperboloid i stożków jest $\Delta \neq 0$, więc środek każdej z tych kwadryk jest punktem właściwym.

Umieścimy w nim początek układu współrzędnych. Wówczas równania (23) są spełnione dla $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Wynika stąd, że

$$(24) \quad a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0.$$

Powierzchnia ma więc równanie

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) + a_{44}x_4^2 = 0,$$

bądź w postaci niejednorodnej

$$(25) \quad \varphi(x, y, z) + a_{44} = 0.$$

Jasne jest, że i na odwrót, gdy powierzchnia ma równanie postaci (25), to początek układu współrzędnych jest jej środkiem.

A zatem: warunkiem koniecznym i dostatecznym, by środek kwadryki był początkiem układu współrzędnych, jest brak w jej równaniu niejednorodnym wyrazów pierwszego stopnia.

Na mocy tożsamości

$$(26) \quad \varphi(x, y, z) = \varphi(-x, -y, -z),$$

wraz z punktem (x, y, z) leży na kwadryce (25) punkt $(-x, -y, -z)$. Dla powierzchni o równaniu (25) środek jest więc równocześnie środkiem symetrii.

Udowodnimy, że elipsoidy, hiperboloidy i stożki mają dokładnie jeden środek symetrii i że jest nim ich środek; natomiast paraboloidy nie mają środka symetrii.

Dla dowodu obierzmy środek symetrii za początek układu współrzędnych. Kwadryka ma zatem równanie

$$(27) \quad \varphi(x, y, z) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Ponieważ punkty (x, y, z) i $(-x, -y, -z)$ leżą na kwadryce równocześnie, więc wraz z równaniem (26) jest spełnione równanie

$$\varphi(x, y, z) - 2a_{14}x - 2a_{24}y - 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Odejmując je stronami od (26), otrzymujemy równanie

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0,$$

które jest spełnione dla każdego punktu kwadryki. Ponieważ nie wszystkie punkty rozpatrywanych kwadryk leżą na jednej płasz-

czyźnie, więc zachodzą równości (24), czyli początek układu współrzędnych jest środkiem. Udowodniliśmy, że środek symetrii jest identyczny ze środkiem, a ponieważ środek symetrii jest z mocy swego określenia punktem właściwym, więc twierdzenie zostało dowiedzione.

Gdy początek układu współrzędnych leży na kwadryce (25), to $a_{44} = 0$. Wówczas $\Delta = 0$ i kwadryka jest stożkiem. Środek elipsoidy ani hiperboloidy nie leży więc na żadnej z tych powierzchni.

Gdy środek kwadryki jest punktem właściwym, to dla wyznaczenia jego współrzędnych niejednorodnych otrzymujemy z (23) równania

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{aligned}$$

Zbadamy jeszcze znaczenie równań (28) dla pozostałych kwadryk, tj. dla walców i dla par płaszczyzn. W tym celu skorzystamy z następującego łatwego twierdzenia algebraicznego którego można dowieść przez bezpośrednie sprawdzenie:

Niech $g(x, y, z)$ będzie dowolnym wielomianem, a $h(x', y', z')$ — wielomianem powstałym z niego przez przekształcenie liniowe

$$\begin{aligned} x &= b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z' + c_1, \\ y &= b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z' + c_2, \\ z &= b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z' + c_3. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\frac{\partial h}{\partial x'} = b_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial g}{\partial y} + b_{31} \frac{\partial g}{\partial z}$$

i analogiczne równości zachodzą dla $\frac{\partial h}{\partial y'}$ i $\frac{\partial h}{\partial z'}$.

Z twierdzenia tego wynika, że gdy dana jest powierzchnia

$$(29) \quad g(x, y, z) = 0,$$

to punkty określone przez układ równań

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

są niezależne od układu współrzędnych i są niezmiennikami przekształceń afinicznych.

W przypadku, gdy równanie (29) przedstawia walec eliptyczny lub hiperboliczny, dobierzmy taki układ prostokątny współrzędnych, żeby

$$g(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Wówczas równania (28) przybierają kształt

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv \frac{2x}{a^2} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \equiv \frac{2\varepsilon y}{b^2} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0.$$

Otrzymujemy $x=0$ i $y=0$ czyli oś Oz , tj. oś walca. Jest to miejsce geometryczne jego środków symetrii.

Dla walca parabolicznego

$$g(x, y, z) \equiv y^2 - 2px = 0$$

jest

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv -2p, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \equiv 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0,$$

a więc otrzymujemy układ równań sprzeczny. Nie dostajemy zatem żadnego punktu właściwego. Jeśli jednak przejdziemy do współrzędnych jednorodnych, to

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_2^2 - 2px_1x_4 = 0,$$

a więc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv -2px_4, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv 2x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \equiv 0.$$

Układ (23) przedstawia więc prostą $x_2=0$, $x_4=0$. Jest to prosta w ∞ leżąca na walcu.

Dla przecinających się płaszczyzn o równaniu

$$g(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 0$$

jest

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \equiv \frac{2\varepsilon y}{b^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0.$$

Równania (28) wyznaczają więc tutaj oś Oz , czyli krawędź przecięcia obu płaszczyzn. Jest to miejsce geometryczne środków symetrii powierzchni złożonej z tych dwóch płaszczyzn.

Dla płaszczyzn równoległych i płaszczyzny podwójnej jest

$$g(x, y, z) \equiv x^2 + a = 0^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x} \equiv 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \equiv \frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0.$$

Równania (28) wyznaczają wówczas płaszczyznę Oxy , a więc znowu miejsce geometryczne środków symetrii powierzchni złożonej z obu płaszczyzn. Zatem:

Dla każdej kwadryki równania (28) wyznaczają miejsce geometryczne jej środków symetrii.

§ 64. Proste i płaszczyzny styczne

1. Płaszczyzna styczna. Jak wiemy (p. str. 205), prosta może mieć względem kwadryki jedno z trzech następujących położeń:

1° przebiegać kwadrykę w dwóch punktach rzeczywistych lub nierzeczywistych,

2° przebiegać kwadrykę w jednym punkcie,

3° leżeć w całości na kwadryce.

W ostatnich dwóch przypadkach prosta nazywa się *styczną* do kwadryki, z wyjątkiem gdy jest prostą przechodzącą przez środek stożka i nie leżącą na stożku.

Udowodnimy, że *przez każdy punkt M kwadryki (w przypadku stożka różny od jego środka) przechodzi nieskończenie wiele stycznych i że ich miejsce geometryczne jest płaszczyzną.*

Płaszczyzna ta nazywa się *płaszczyzną styczną*.

Dla dowodu weźmy pod uwagę prostą

$$(1) \quad ax_k = \mu m_k + \nu n_k, \quad \text{gdzie } k=1, 2, 3, 4,$$

i kwadrykę

$$(2) \quad f(x|x) \equiv \sum_{i,k=1}^4 a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Punkty przebiecia kwadryki (2) prostą (1) są wyznaczone przez równanie (p. (20), § 54, str. 267)

$$(3) \quad \mu^2 f(m|m) + 2\mu\nu f(m|n) + \nu^2 f(n|n) = 0.$$

Założmy teraz, że punkt M (różny w przypadku stożka od środka stożka) leży na kwadryce, czyli że

$$f(m|m) = 0,$$

oraz że prosta (1) jest styczna do kwadryki (2) w tym punkcie. Wówczas równanie (3) przybiera postać

$$(4) \quad v[2\mu f(m|n) + \nu f(n|n)] = 0.$$

Jako styczna, prosta (1) albo leży w całości na kwadryce i wtedy w równaniu (4) znikają wszystkie współczynniki, albo przebiega ona kwadrykę w jednym punkcie i wtedy równanie (4) ma jedno rozwiązanie. Ponieważ równanie (4) ma rozwiązania

$$(5) \quad \mu : \nu = 1 : 0, \quad \mu : \nu = -f(n|n) : 2f(m|n),$$

więc na to, by były one identyczne, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(6) \quad f(m|n) = 0.$$

Na odwrót, gdy zachodzi warunek (6), to albo prosta leży w całości na kwadryce, albo rozwiązania (5) są identyczne; w obu przypadkach prosta (1) jest wówczas styczna.

Udowodniliśmy zatem, że na to, by prosta łącząca punkt $P(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ z punktem $M(m_1 : m_2 : m_3 : m_4)$ leżącym na kwadryce była styczna, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(7) \quad f(m|x) = 0.$$

Równanie to przedstawia płaszczyznę biegunową punktu M (gdyż założyliśmy, że M nie jest środkiem stożka). Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Widzimy równocześnie, że *płaszczyzna biegunowa punktu M leżącego na kwadryce jest płaszczyzną styczną*.

Stąd zaś wynika, że *na to, by płaszczyzna przechodziła przez swój biegun M , każdy z następujących warunków jest konieczny i wystarczający:*

1° punkt M leży na kwadryce,

2° płaszczyzna jest styczna do kwadryki w punkcie M .

Znajdziemy jeszcze postać równania płaszczyzny stycznej, gdy kwadryka jest przedstawiona równaniem we współrzędnych niejednorodnych.

Płaszczyzna styczna ma wówczas równanie postaci (22) z § 63 (str. 341). Ponieważ z założenia punkt $M(x_0, y_0, z_0)$ kwadryki leży na tej płaszczyźnie, więc

$$\begin{aligned} x_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z_0 \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \\ + a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

Odejmując stronami ostatnie równanie od równania (22) z § 63, str. 341, dostajemy równanie płaszczyzny stycznej w postaci

$$(8) \quad (x-x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y-y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z-z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dla walców styczną określa się tak samo jak dla pozostałych kwadryk. Rozumowanie, które doprowadziło do równania (7) jako warunku koniecznego i dostatecznego, by prosta łącząca punkt $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ z punktem $(m_1 : m_2 : m_3 : m_4)$ na kwadryce była styczna, jest prawdziwe i dla walców, gdy M nie jest punktem w ∞ . Z równania (7) otrzymujemy równanie (8), to zaś równanie przedstawia dla każdego właściwego punktu walca płaszczyznę, która zatem jest płaszczyzną styczną.

Dla kwadryk rozpadających się na płaszczyzny równanie (8) przedstawia tę z płaszczyzn, która przechodzi przez punkt (x_0, y_0, z_0) .

2. Przekrój kwadryki płaszczyzną styczną. *Płaszczyzna styczna przecina kwadrykę wzdłuż prostej lub wzdłuż pary prostych (rzeczywistych lub nie), przecinających się w punkcie styczności.*

Istotnie, przekrój kwadryki A płaszczyzną styczną Π jest stożkową Γ przechodzącą przez punkt styczności M . Gdyby stożkowa Γ była właściwa, to zawierałaby trzy punkty P_1, P_2, P_3 nie leżące na jednej prostej. Wówczas proste MP_1, MP_2, MP_3 byłyby różne i każda z nich byłaby styczna w punkcie M do kwadryki, jako leżąca w płaszczyźnie stycznej Π i przechodząca przez M . Ponieważ każda z tych prostych miałaby dwa punkty wspólne z kwadryką, więc jako styczna leżałaby w całości na kwadryce. Stożkowa Γ zawierałaby zatem trzy różne proste, co niemożliwe. Stożkowa ta nie może być więc właściwa, a zatem jest parą prostych, c. b. d. o.

Jeśli płaszczyzna Π przecina kwadrykę A wzdłuż jednej prostej p , to jest styczna do kwadryki w każdym punkcie tej prostej p i kwadryka jest stożkiem.

Istotnie, przeprowadźmy przez dowolny punkt P leżący na prostej p dowolną prostą p_1 różną od p i leżącą na płaszczyźnie Π . Gdyby prosta p_1 nie była styczna do kwadryki A , to przebiegałaby ją w dwóch różnych punktach P i Q . Ponieważ Q nie leży na p , więc przekrój Π z A zawierałby punkt nie leżący na p , wbrew założeniu. Każda prosta leżąca w płaszczyźnie Π i przechodząca przez dowolny punkt P prostej p jest więc styczna do A . Płaszczyzna Π jest zatem styczna do kwadryki w każdym punkcie prostej p . Każdy punkt prostej p ma więc tę samą płaszczyznę biegunową Π i przeto kwa-

dryka A jest stożkiem, gdyż dla pozostałych kwadryk różnym punktom odpowiadają różne płaszczyzny biegunowe (p. str. 339), c. b. d. o.

Np. płaszczyzna styczna do stożka

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

w punkcie (x_0, y_0, z_0) ma równanie $axx_0 + byy_0 + czz_0 = 0$. Przecina ona stożek wzdłuż prostej

$$x = x_0 s, \quad y = y_0 s, \quad z = z_0 s,$$

łącej punkt styczności ze środkiem.

Płaszczyzna styczna do elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

w punkcie $(a, 0, 0)$ ma równanie $x = a$. Przecina ona elipsoidę wzdłuż pary prostych nierzeczywistych

$$cy \pm ibz = 0, \quad x = a.$$

Dla hiperboloidy jednopowłokowej

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

płaszczyzna styczna w punkcie $(a, 0, 0)$ ma równanie $x = a$ i przecina hiperboloidę wzdłuż pary prostych rzeczywistych

$$cy \pm bz = 0, \quad x = a.$$

Z udowodnionych twierdzeń wynika, że płaszczyzna styczna do elipsoidy, hiperboloidy lub paraboloidy przecina ją wzdłuż pary różnych prostych (rzeczywistych lub nie).

Płaszczyzna przechodząca przez jedną tworzącą stożka, jeśli nie jest styczna, przechodzi przez jeszcze jedną tworzącą stożka.

Jeśli płaszczyzna Π przecina kwadrykę A rzędu 4 wzdłuż stożkowej niewłaściwej Γ , to jest styczna do kwadryki.

Istotnie, gdyby stożkowa Γ była prostą, to kwadryka A byłaby stożkiem wbrew założeniu, że jest rzędu 4. A zatem Γ rozpada się na parę prostych, które przecinają się w pewnym punkcie M kwadryki, i obie proste są styczne do kwadryki w tym punkcie. Zatem płaszczyzna Π jest styczna do kwadryki A w punkcie M , c. b. d. o.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że jeśli płaszczyzna Π nie jest styczna do kwadryki (i w przypadku stożka nie przechodzi przez jego środek), to przecina tę kwadrykę wzdłuż stożkowej właściwej (rzeczywistej lub nie).

3. Stożek stycznych. Udowodnimy, że proste styczne do dowolnej kwadryki A , poprowadzone z punktu P nie leżącego na niej, tworzą znowu pewną kwadrykę Σ , która jest styczna do powierzchni wzdłuż stożkowej. Stożkowa ta jest przekrojem kwadryki A płaszczyzną biegunową punktu P .

W przypadku, gdy A jest stożkiem, powierzchnia Σ rozpada się na parę płaszczyzn, a w przypadku pozostałych kwadryk jest ona stożkiem.

Istotnie, niech l będzie styczną do kwadryki A w punkcie M , poprowadzoną z punktu P . Płaszczyzna biegunowa punktu M jest zatem styczna do A w tym punkcie (p. str. 346), wobec czego zawiera prostą l . Ponieważ punkt P leży na płaszczyźnie biegunowej punktu M , więc punkt M leży na płaszczyźnie biegunowej Π punktu P . Oznaczając przez Γ przekrój kwadryki A płaszczyzną Π , widzimy, że punkt styczności M leży na stożkowej Γ . Łatwo widzieć, że i na odwrót, każdy punkt stożkowej Γ jest punktem styczności jakiejś prostej przechodzącej przez P , ponieważ każda płaszczyzna styczna do kwadryki A w jakimś punkcie stożkowej Γ przechodzi przez P . Stożkowa Γ jest więc miejscem geometrycznym rozpatrywanych punktów styczności.

W przypadku, gdy kwadryka A jest stożkiem, płaszczyzna Π , jako płaszczyzna biegunowa, przechodzi przez jego środek. Przecina więc ona stożek A wzdłuż pary prostych. Tym samym powierzchnia A utworzona przez styczne z punktu P rozpada się na parę płaszczyzn.

W przypadku zaś, gdy kwadryka Σ nie jest stożkiem, płaszczyzna biegunowa punktu P nie leżącego na niej nie jest styczna do A , a więc przecina A wzdłuż stożkowej właściwej Γ . Proste łączące punkt P z punktami stożkowej Γ tworzą zatem stożek. Na tym dowód twierdzenia jest zakończony.

Niech punkt P ma współrzędne $p_1 : p_2 : p_3 : p_4$, a $N(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ niechaj będzie dowolnym punktem którejkolwiek ze stycznych wychodzących z P . Punkt wspólny tej stycznej z kwadryką A otrzymujemy z równania, powstającego z (3) przez zastąpienie m_i przez p_i , a n_i przez x_i . Dostajemy

$$\mu^2 f(p|p) + 2\mu\nu f(p|x) + \nu^2 f(x|x) = 0.$$

Równanie to ma jedno rozwiązanie, a więc

$$(9) \quad f^2(p|x) - f(p|p)f(x|x) = 0.$$

Jest to równanie powierzchni Σ , utworzonej przez styczne do kwadryki z punktu P .

Powierzchnię Σ , jako utworzoną z prostych stycznych do kwadryki A , nazywamy ogólnie jej *kwadryką stycznych*, a w przypadku, gdy Σ jest stożkiem, nazywamy go jej *stożkiem stycznych*.

4. Stożek asymptotyczny. Weźmy obecnie pod uwagę kwadryki rzędu 4 mające środek właściwy, a więc elipsoidy i hiperboloidy.

Stożkiem asymptotycznym takiej kwadryki nazywamy stożek stycznych, którego wierzchołkiem jest środek tej kwadryki.

Płaszczyzną biegunową środka jest płaszczyzna w ∞ . Styczne poprowadzone ze środka są zatem styczne do kwadryki w punktach jej przecięcia płaszczyzną w ∞ . Są to zatem proste łączące środek z punktami w ∞ kwadryki.

Nazywają się one *asymptotami kwadryki*.

Weźmy środek kwadryki za początek układu współrzędnych. Ma więc ona we współrzędnych niejednorodnych równanie

$$(10) \quad \varphi(x, y, z) + a_{44} = 0, \quad \text{gdzie} \quad a_{44} \neq 0,$$

we współrzędnych zaś jednorodnych — równanie

$$(11) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) + a_{44}x_4^2 = 0.$$

Zatem

$$f(p|x) = \varphi(p|x) + a_{44}p_4x_4,$$

w szczególności więc dla środka, jako punktu o współrzędnych

$$p_1:p_2:p_3:p_4 = 0:0:0:1,$$

jest

$$f(p|x) = a_{44}x_4, \quad f(p|p) = a_{44}.$$

Równanie (9) ma więc postać

$$a_{44}^2x_4^2 - a_{44}[\varphi(x|x) + a_{44}x_4^2] = 0,$$

a zatem stożek asymptotyczny powierzchni (11) ma równanie

$$(12) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

lub we współrzędnych niejednorodnych

$$(13) \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

5. Płaszczyzny asymptotyczne. Płaszczyzna właściwa, styczna do kwadryki w punkcie w ∞ , nazywa się *płaszczyzną asymptotyczną*.

Dla elipsoid i hiperboloid płaszczyzny asymptotyczne są identyczne z płaszczyznami stycznymi do stożka asymptotycznego.

Istotnie, płaszczyzna styczna do kwadryki (11) w punkcie $m_1:m_2:m_3:m_4$ ma równanie

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(m) + a_{44}x_4m_4 = 0.$$

Dla punktu w ∞ jest $m_4 = 0$ i otrzymujemy

$$(14) \quad x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(m) = 0.$$

Ponieważ równanie (14) przedstawia płaszczyznę styczną do stożka (12) (bo stożek ten ma te same punkty w ∞ co kwadryka), więc twierdzenie jest dowiedzione.

Macierz $\mathfrak{U}$ dla powierzchni (10) i (13) jest ta sama, a więc dla powierzchni (10) jest $|\mathfrak{U}| \neq 0$. Zatem równanie (10) istotnie przedstawia stożek, a nie kwadrykę rozpadającą się na dwie płaszczyzny. Wynika stąd, że przekrój kwadryki płaszczyzną w ∞ jest krzywą właściwą. A więc *płaszczyzna w ∞ nie jest styczna do elipsoid ani do hiperboloid*.

Zbadamy płaszczyzny asymptotyczne paraboloid. Zaczniemy od paraboloidy hiperbolicznej

$$(15) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3x_4.$$

Przekrój jej płaszczyzną w ∞ składa się z pary prostych:

$$(16) \quad \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0,$$

$$(17) \quad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0.$$

Prostą (16) można przedstawić parametrycznie równaniem

$$(18) \quad x_1:x_2:x_3:x_4 = a:b:u:0,$$

gdzie u jest parametrem zmiennym. Płaszczyzna styczna w punkcie o współrzędnych (18) ma więc równanie postaci

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} - ux_4 = 0,$$

lub we współrzędnych niejednorodnych

$$(19) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - u = 0.$$

Podobnie, płaszczyzny styczne w punktach prostej (17) mają równanie postaci

$$(20) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - u = 0.$$

Tak więc zbiór płaszczyzn asymptotycznych paraboloidy hiperbolicznej składa się ze zbioru płaszczyzn równoległych do jednej i ze zbioru płaszczyzn równoległych do drugiej z płaszczyzn

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Podobnie dowodzi się, że płaszczyzny asymptotyczne paraboloidy eliptycznej są nierzeczywiste i że jedne z nich są to płaszczyzny równoległe do jednej, a drugie — do drugiej z płaszczyzn

$$\frac{x}{a} - \frac{iy}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{iy}{b} = 0.$$

Kierunkami asymptotycznymi kwadryki nazywają się jej punkty w ∞ czyli kierunki jej asymptot.

§ 65. Prostokreślność kwadryk

Powierzchnię nazywamy prostokreślną, jeżeli przez każdy jej punkt przechodzi prosta, całkowicie leżąca na tej powierzchni.

Przykładami takich powierzchni są płaszczyzny, walce, stożki. Wszystkie kwadryki są powierzchniami prostokreślnymi.

Jest to oczywiste dla kwadryk rozpadających się na płaszczyzny oraz dla stożków i walców. Pozostają więc kwadryki rzędu 4. Dla nich zaś twierdzenie wynika stąd, że mają one w każdym punkcie płaszczyznę styczną, a ta przecina kwadrykę wzdłuż pary różnych prostych (p. str. 345).

Prostą leżącą na powierzchni prostokreślnej nazywamy jej tworzącą.

Tworzące elipsoid, hiperboloid dwupowłokowych i paraboloid eliptycznych nie są prostymi rzeczywistymi.

Dla elipsoid wynika to stąd, że ich część rzeczywista jest ograniczona, więc nie może zawierać prostej. Dla hiperboloidy dwupowłokowej

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

punkty rzeczywiste, dla których $|x| < a$, nie leżą na hiperboloidzie. Prosta rzeczywista leżąca na hiperboloidzie dwupowłokowej musiałaby więc być równoległa do płaszczyzny Oyz . Ale przekrój hiperboloidy (1), równoległy do płaszczyzny Oyz , jest elipsą, więc nie może zawierać prostej. Podobnie dowodzi się tego dla paraboloidy eliptycznej.

Weźmy teraz pod uwagę na kwadryce rzędu 4 dowolny punkt M . Przechodzą przez niego dwie różne tworzące s_1 i s_2 . Przez każdy punkt tworzącej s_1 przechodzi pewna tworząca σ_2 różna od s_1 . Oznaczmy przez Σ_2 zbiór wszystkich takich tworzących σ_2 , a przez Σ_1 — zbiór wszystkich tworzących σ_1 przecinających s_2 . Oczywiście s_1 należy do Σ_1 i s_2 do Σ_2 . Otrzymaliśmy w ten sposób dwa zbiory tworzących; Σ_1 i Σ_2 , z których każdy zawiera nieskończenie wiele prostych.

Udowodnimy, że:

1° każde dwie tworzące należące do jednego i tego samego ze zbiorów Σ_1 i Σ_2 są skośne,

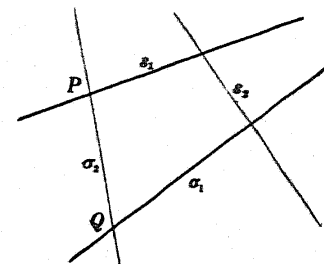
2° każde dwie tworzące należące do różnych z tych dwóch zbiorów przecinają się,

3° przez każdy punkt kwadryki przechodzi dokładnie po jednej prostej z każdego ze zbiorów Σ_1 i Σ_2 ,

4° każda tworząca kwadryki należy do jednego z tych dwóch zbiorów.

Niechaj tworzące σ_1 i σ'_1 należą do zbioru Σ_1 . W myśl definicji tego zbioru obie tworzące przecinają prostą s_2 . Gdyby proste σ_1 i σ'_1 nie były skośne, to leżałyby w jednej płaszczyźnie Π . W tej samej płaszczyźnie leżałaby prosta s_2 . Płaszczyzna Π przecinałaby więc kwadrykę wzdłuż trzech różnych prostych σ_1 , σ'_1 i s_2 , co niemożliwe. Udowodniona jest zatem teza 1°.

Niech teraz prosta σ_1 należy do zbioru Σ_1 , a prosta s_2 do zbioru Σ_2 . Prosta s_2 przecina s_1 w punkcie P (rys. 129).



Rys. 129

Niech Π będzie płaszczyzną styczną do kwadryki w tym punkcie. Prosta σ_1 przebija płaszczyznę Π w pewnym punkcie Q , który musi leżeć na jednej z prostych s_1 i s_2 , gdyż układ tych dwóch prostych jest przekrojem kwadryki płaszczyzną Π , a punkt Q , jako punkt prostej σ_1 , leży na kwadryce. Punkt Q nie może leżeć na prostej s_1 , gdyż proste σ_1 i s_1 są skośne, jako należące do jednego i tego samego zbioru Σ_1 . Zatem Q leży na s_2 , co dowodzi tezy 2^o.

Niech teraz P będzie dowolnym punktem kwadryki, a Π — płaszczyzną styczną do niej w tym punkcie. Niech prosta s_1 przebija płaszczyznę Π w punkcie Q . Prosta QP , jako leżąca na płaszczyźnie stycznej do kwadryki w punkcie P , jest styczna do tej kwadryki i ma z nią dwa punkty wspólne: Q i P ; leży więc ona w całości na kwadryce. Prosta QP jest zatem tworzącą, przecinającą prostą s_1 , a więc tworzącą ze zbioru Σ_2 . Tak samo się dowodzi, że przez punkt P przechodzi tworząca ze zbioru Σ_1 . W ten sposób uzyskujemy tezę 3^o.

Wynika z niej bezpośrednio teza 4^o. Niech bowiem σ będzie tworzącą kwadryki; przez jakikolwiek jej punkt przeprowadzamy płaszczyznę styczną Π oraz — na mocy 3^o — dwie różne tworzące σ_1 i σ_2 . Płaszczyzna Π przecina kwadrykę wzdłuż prostych σ , σ_1 i σ_2 , a ponieważ płaszczyzna nie może mieć z kwadryką trzech różnych prostych wspólnych, więc prosta σ jest identyczna z σ_1 lub z σ_2 .

Zachodzi zasadnicza różnica między zachowaniem się płaszczyzn stycznych wzdłuż tworzącej do stożka i walca oraz do kwadryk rzędu 4. Mianowicie, gdy punkt porusza się po tworzącej, to:

- 1^o dla stożków i walców, płaszczyzna styczna nie ulega zmianie,
- 2^o dla kwadryk rzędu 4, płaszczyzna ta obraca się dookoła tworzącej (gdyż przechodzi przez tę tworzącą i przez tworzącą drugiego zbioru).

Na odwrót, płaszczyzna przechodząca przez jedną tworzącą kwadryki rzędu 4 przechodzi jeszcze przez drugą tworzącą i jest styczna do tej kwadryki.

Istotnie, niech płaszczyzna Π przechodzi przez tworzącą σ . Weźmy pod uwagę na σ dowolny punkt P_1 ; punkt ten jest biegunem płaszczyzny Π_1 , stycznej do kwadryki w punkcie P_1 . Ponieważ P_1 leży na Π , więc biegun P płaszczyzny Π leży na Π_1 . Biegun P płaszczyzny Π leży zatem na każdej z płaszczyzn stycznych do kwadryki w punktach prostej σ , a więc leży na σ . Tym samym biegun ten leży na płaszczyźnie Π , która zatem jest styczna do kwadryki i przeto (p. str. 348) przecina ją jeszcze wzdłuż drugiej tworzącej, c. b. d. o.

(*Tworzące kuli są prostymi minimalnymi* (p. § 41, str. 206), gdyż przebijają one płaszczyznę w ∞ w punktach przecięcia kuli z płaszczyzną w ∞ , tj. w punktach koła sferycznego.)

Przekrój płaszczyzny w ∞ z elipsoidą lub hiperboloidą jest zawsze krzywą właściwą, więc nie zawiera prostej. Zatem *tworzące elipsoid i hiperboloid są prostymi właściwymi*.

Wynika stąd, że *płaszczyzny asymptotyczne przecinają elipsoidy i hiperboloidy zawsze wzdłuż pary prostych równoległych*.

Istotnie, przekrój kwadryki płaszczyzną asymptotyczną (jako płaszczyzną styczną w punkcie w ∞) składa się z pary tworzących. Jest to para prostych właściwych przecinających się w punkcie w ∞ (punkcie styczności) czyli para prostych równoległych.

Wynika stąd dalej, że dla obu rozważanych typów powierzchni do każdej tworzącej istnieje dokładnie jedna tworząca równoległa.

Udowodnimy, że *tworzące hiperboloidy jednopowłokowej i paraboloidy hiperbolicznej, przechodzące przez punkty rzeczywiste, są prostymi rzeczywistymi*.

Wyprowadzimy zarazem równania tych prostych.

Ponieważ tworzące tych kwadryk są prostymi właściwymi, więc możemy wprowadzić współrzędne niejednorodne. W przypadku hiperboloidy jednopowłokowej dobierzemy je tak, by miała ona równanie postaci

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1^*.$$

Możemy je napisać w postaci

$$(3) \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Weźmy pod uwagę równania

$$(4) \quad \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Równania te przedstawiają, dla λ i μ nieznikających równocześnie, dwie płaszczyzny. Płaszczyzny te nie są równoległe, bo współczyn-

* Udowodnimy w § 66, że prócz układów prostokątnych istnieją też ukośnokątne układy współrzędnych, w których hiperboloida jednopowłokowa ma równanie postaci (2).

niki przy x są w stosunku $\mu:\lambda$, współczynniki przy y — w stosunku $\lambda:-\mu$, a współczynniki przy z — w stosunku $\mu:-\lambda$; gdyby więc zachodziły równości

$$\mu:\lambda=\lambda:-\mu=\mu:-\lambda,$$

to wynikałoby stąd, że $\lambda=\mu=0$ wbrew założeniu.

Układ równań (4) przedstawia zatem prostą właściwą. Wobec $|\lambda|+|\mu|>0$ jest

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} & 1 - \frac{y}{b} \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} & 1 + \frac{y}{b} \end{vmatrix} = 0,$$

czyli (3). Prosta (4) leży więc w całości na kwadryce i przeto jest jej tworzącą.

Podobnie okazuje się, że dla każdej pary wartości μ_1, λ_1 , nie znikających jednocześnie, układ równań

$$(5) \quad \mu_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \lambda_1 \left(1 + \frac{y}{b} \right), \quad \lambda_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \mu_1 \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

przedstawia tworzącą hiperboloidy (2).

Każda tworząca ze zbioru (4) jest różna od każdej tworzącej ze zbioru (5). Weźmy bowiem pod uwagę równania (4) i pierwsze z równań (5). Z tych trzech równań można z łatwością obliczyć x, y i z jako funkcje zmiennych λ, μ, λ_1 i μ_1 . Innymi słowy, mając dane λ, μ, λ_1 i μ_1 , możemy wyznaczyć co najwyżej jeden punkt (x, y, z) spełniający równania (4) i (5). Proste (4) i (5) są więc różne.

Przez każdy punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ hiperboloidy jednopowłokowej przechodzi jedna prosta ze zbioru (4) i jedna prosta ze zbioru (5). Z dwóch bowiem liczb $1 - y_0/b$ i $1 + y_0/b$ co najmniej jedna jest różna od zera, np. druga. Biorąc λ i μ tak, by

$$(6) \quad \lambda:\mu = \left(1 + \frac{y_0}{b} \right) : \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right),$$

widzimy, że w punkcie P_0 jest spełnione drugie z równań (4), a stąd wynika na mocy (3), że jest spełnione i pierwsze z równań (4). Tworząca wyznaczona przez stosunek (6) przechodzi więc przez P_0 . To samo okazuje się dla zbioru (5). Gdy punkt P_0 jest rzeczywisty, stosunek $\lambda:\mu$ w (6) jest liczbą rzeczywistą, a więc i obie tworzące przechodzące przez P_0 są rzeczywiste, c. b. d. o.

Z tych twierdzeń wynika, że zbiór tworzących (4) wyczerpuje jeden ze zbiorów Σ_1 i Σ_2 , a zbiór (5) — drugi z tych zbiorów.

Na rys. 130 uwidocznione są tworzące z obu zbiorów.

By wyprowadzić równania tworzących paraboloidy hiperbolicznej, dobierzmy układ współrzędnych tak, żeby miała ona równanie jednorodne postaci

$$(7) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3x_4.$$

Analogicznie jak dla hiperboloidy, dowodzi się, że tworzące należące do jednego ze zbiorów Σ_1 i Σ_2 mają równania

$$(8) \quad \mu \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) = 2\lambda x_3, \quad \lambda \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right) = \mu x_4,$$

a tworzące należące do drugiego z tych zbiorów mają równania

$$(9) \quad \mu \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) = 2\lambda x_4, \quad \lambda \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right) = \mu x_3.$$

Oznaczając przez s_1 tworzącą w ∞

$$(10) \quad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0,$$

a przez s_2 drugą tworzącą w ∞

$$(11) \quad \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0,$$

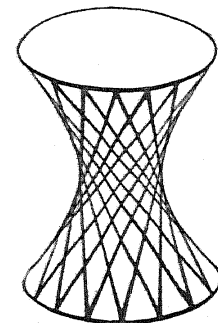
widzimy, że tworzące jednego ze zbiorów Σ_1 i Σ_2 przecinają prostą (10), a tworzące drugiego przecinają prostą (11). Zatem tworzące z jednego zbioru są równoległe do płaszczyzny

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0,$$

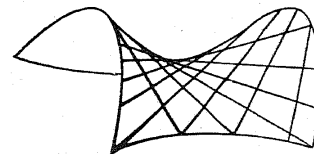
tworzące zaś z drugiego — do płaszczyzny

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0.$$

Tworzące paraboloidy hiperbolicznej są przedstawione na rys. 131.



Rys. 130



Rys. 131

(Udowodnimy, że przez dowolne trzy proste rzeczywiste, z których każde dwie są skośne, przechodzi dokładnie jedna kwadryka, a mianowicie: jeśli proste te są równoległe do jednej płaszczyzny, jest nią paraboloida hiperboliczna, w przeciwnym zaś razie jest nią hiperboloida jednopowłokowa.

Twierdzenie to z łatwością uogólnia się i na proste nierzeczywiste, co jednak pomijamy.

Dowód. Zaczniemy od przypadku, gdy dane trzy proste, parami skośne, nie są równoległe do jednej płaszczyzny. Możemy więc tak dobrać układ współrzędnych, by te proste miały równania:

$$(12) \quad x=s, \quad y=0, \quad z=0,$$

$$(13) \quad x=0, \quad y=u, \quad z=a, \quad \text{gdzie } a \neq 0,$$

$$(14) \quad x=b, \quad y=c, \quad z=t, \quad \text{gdzie } bc \neq 0.$$

Założmy, że istnieje kwadryka A , na której leżą te trzy proste. Muszą one wówczas należeć do jednego ze zbiorów Σ_1 i Σ_2 , gdyż są parami skośne. Kwadrykę A możemy więc otrzymać prowadząc przez każdy punkt prostej (14) prostą σ , przecinającą proste (12) i (13). Prosta σ ma zatem równanie kształtu

$$(15) \quad \frac{x}{s} = \frac{y-u}{-u} = \frac{z-a}{-a}.$$

Stąd dla dowolnego punktu (x, y, z) prostej σ jest

$$(16) \quad s = \frac{ax}{a-z}, \quad u = \frac{ay}{z};$$

wartości s i u są stałe dla ustalonej prostej σ . Ponieważ prosta (15) przecina prostą (14), więc

$$\frac{b}{s} = \frac{c-u}{-u}$$

czyli

$$cs - us + bu = 0.$$

Podstawiając tu wartości (16), otrzymujemy

$$\frac{acx}{a-z} - \frac{a^2xy}{z(a-z)} + \frac{aby}{z} = 0$$

czyli

$$(17) \quad acxz - a^2xy + a^2by - abyz = 0.$$

Równanie (17) przedstawia kwadrykę, na której — jak łatwo sprawdzić — leżą wszystkie trzy proste (12)-(14). Istnieje więc dokładnie jedna kwadryka przez nie przechodząca. Ponieważ z założenia nie są one równoległe do jednej płaszczyzny, więc (p. str. 357) kwadryka ta jest hiperboloidą jednopowłokową.

Przejdźmy z kolei do przypadku, gdy dane trzy proste, parami skośne, są równoległe do jednej płaszczyzny. Jak poprzednio, możemy dobrać układ współrzędnych, w którym miały by one równania

$$(18) \quad x=s, \quad y=0, \quad z=0,$$

$$(19) \quad x=0, \quad y=u, \quad z=a, \quad \text{gdzie } a \neq 0 \text{ i } a \neq b,$$

$$(20) \quad y=mx, \quad z=b, \quad \text{gdzie } m \neq 0 \text{ i } b \neq a.$$

Prosta σ , przecinająca proste (18) i (19), ma znowu równanie (15), skąd wynikają wzory (16). Prosta σ przecina prostą (20) w punkcie (x_0, mx_0, b) , a zatem

$$(21) \quad s = \frac{ax_0}{a-b}, \quad u = \frac{amx_0}{b}.$$

Ale z równania (15) wynika dla dowolnego punktu (x, y, z) prostej σ równość

$$\frac{y}{u} = \frac{z}{a},$$

skąd wobec (21)

$$(22) \quad by = mx_0z.$$

Ponieważ na mocy (21) i (15) jest

$$x_0 = \frac{a-b}{a} s = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{-ax}{z-a},$$

więc stosując (22) dostajemy ostatecznie

$$by(z-a) + m(a-b)xz = 0.$$

Jest to znowu równanie kwadryki. Ponieważ proste (18)-(20) są w rozpatrywanym przypadku równoległe z założenia do jednej płaszczyzny, więc kwadryka ta zawiera proste w ∞ , a zatem jest paraboloidą hiperboliczną.)

§ 66. Płaszczyzny średnicowe i średnice

1. Płaszczyzny średnicowe. Płaszczyznę biegunową punktu P_∞ nazywamy *płaszczyzną średnicową* kwadryki, *sprzężoną z kierunkiem* wyznaczającym punkt P_∞ .

Wszystkie płaszczyzny średnicowe przechodzą przez środek kwadryki.

Dla stożka jest to oczywiste, gdyż wszystkie płaszczyzny biegunowe przechodzą przez jego środek.

Dla pozostałych kwadryk jest $R(\mathfrak{M})=4$; dla nich środek jest biegunem płaszczyzny w ∞ , więc płaszczyzna biegunowa punktu w ∞ przechodzi przez biegun płaszczyzny w ∞ , czyli przez środek.

Każda płaszczyzna przechodząca przez środek jest płaszczyzną średnicową.

Dla stożka wynika to stąd, że bieguny płaszczyzny przechodzącej przez środek tworzą prostą. Płaszczyzna ta jest więc w szczególności biegunową punktu w ∞ tejże prostej.

Dla pozostałych zaś kwadryk wynika to stąd, że gdy płaszczyzna Π przechodzi przez środek czyli przez biegun płaszczyzny w ∞ , to biegun płaszczyzny Π leży na płaszczyźnie w ∞ .

Niech dany punkt w ∞ ma współrzędne $\alpha:\beta:\gamma:0$. Jest on więc wyznaczony przez kierunek $\alpha:\beta:\gamma$. Płaszczyzna średnicowa sprzężona z tym kierunkiem ma zatem równanie

$$(1) \quad \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \beta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 0$$

(p. wzór (13) z § 63, str. 337) lub we współrzędnych niejednorodnych

$$(2) \quad \alpha \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \beta \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \gamma \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Środek paraboloidy jest punktem w ∞ (§ 63, str. 341). Oznaczając przez k kierunek, wyznaczający ten punkt, widzimy, że *wszystkie płaszczyzny średnicowe paraboloid są równoległe do kierunku k* .

Na to, by kierunek k był równoległy do sprzężonej z nim płaszczyzny średnicowej Π , potrzeba i wystarcza, żeby był on kierunkiem asymptotycznym; płaszczyzna Π jest wówczas płaszczyzną asymptotyczną.

Istotnie, oznaczmy przez P_∞ punkt w ∞ , wyznaczający kierunek k . Równoległość kierunku k do płaszczyzny Π jest zatem równoważna leżeniu punktu P_∞ na tej płaszczyźnie.

Ponieważ Π jest z założenia płaszczyzną średnicową czyli płaszczyzną biegunową punktu P_∞ , więc na to, by punkt ten leżał na Π , potrzeba i wystarcza, żeby leżał na kwadryce i żeby płaszczyzna Π była w tym punkcie styczna do kwadryki. Jako płaszczyzna średnicowa, styczna w punkcie w ∞ , Π jest płaszczyzną asymptotyczną, c. b. d. o.

Jeśli k nie jest kierunkiem asymptotycznym, to proste o kierunku k przebijają powierzchnię tylko w punktach właściwych (rzeczywistych lub zespolonych sprzężonych). Wówczas *miejsce geometrycznym środków cięciw równoległych o kierunku k jest płaszczyzna średnicowa sprzężona z kierunkiem k* .

Istotnie, z założenia wynika, że kierunek k tych cięciw nie jest równoległy do płaszczyzny średnicowej Π , sprzężonej z tym kierunkiem. Możemy więc przyjąć Π za płaszczyznę Oxy układu współrzędnych, a prostą o kierunku k — za oś Oz tego układu. W tym układzie współrzędnych kierunek k jest więc wyznaczony przez stosunek $\alpha:\beta:\gamma=0:0:1$. Na podstawie równania (1) płaszczyzna Π , z nim sprzężona, ma równanie

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 = 0,$$

a zarazem, jako płaszczyzna Oxy , ma ona równanie $x_3=0$. Zatem $a_{13}=a_{23}=a_{34}=0$ i przeto równanie kwadryki jest kształtu

$$\varphi(x_1, x_2, x_4) + a_{33}x_3^2 = 0,$$

gdzie φ nie zależy od x_3 . Dzieląc przez x_4^2 , dostajemy we współrzędnych niejednorodnych równanie kwadryki w postaci

$$(3) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

Prosta o kierunku k , czyli równoległa do osi Oz , ma równanie

$$x=x_0, \quad y=y_0.$$

Punkty przebiecia powierzchni (3) tą prostą są wyznaczone przez równanie postaci

$$a_{33}z^2 + c = 0,$$

gdzie $a_{33} \neq 0$, gdyż równanie (3) nie przedstawia walca. Równanie to ma dwa rozwiązania rzeczywiste (różne lub jednakowe) albo zespolone sprzężone. Punkty przebiecia są więc postaci (x_0, y_0, z_0) i $(x_0, y_0, -z_0)$. Środek cięciwy łączącej te punkty ma wobec tego współrzędne $(x_0, y_0, 0)$, a zatem leży na Π . Oczywiście i na odwrót:

każdy punkt postaci $(x_0, y_0, 0)$ czyli każdy punkt płaszczyzny Π jest środkiem cięciwy równoległej do osi Oz .

Niech płaszczyzna rzeczywista właściwa Π przecina kwadrykę Δ wzdłuż stożkowej właściwej Γ ; niech P będzie jakimkolwiek punktem płaszczyzny Π . Wówczas prosta biegunowa punktu P względem Γ jest krawędzią przecięcia płaszczyzny Π z płaszczyzną biegunową punktu P względem kwadryki Δ .

Dla dowodu możemy przyjąć Π za płaszczyznę Oxy układu współrzędnych. Równanie przekroju Γ kwadryki Δ tą płaszczyzną otrzymamy, podstawiając $x_3=0$ do równania tej kwadryki. Dostajemy

$$(4) \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 = 0.$$

Prosta biegunowa punktu $P(y_1:y_2:0:y_4)$ płaszczyzny Π względem stożkowej (4) ma równania

$$(5) \quad \sum_{i,k=1,2,4} a_{ik}x_iy_k = 0, \quad x_3 = 0.$$

Płaszczyzna biegunowa tego samego punktu względem kwadryki Δ ma równanie

$$\sum_{i,k=1,2,3,4} a_{ik}x_iy_k = 0.$$

Ponieważ $y_3=0$, więc możemy je napisać w postaci

$$(6) \quad \sum_{\substack{i=1,2,3,4 \\ k=1,2,4}} a_{ik}x_iy_k = 0.$$

Równanie prostej przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną Oxy otrzymamy, podstawiając $x_3=0$ do równania (6). Dostajemy wówczas (5), c. b. d. o.

Z twierdzenia tego wynika, że gdy płaszczyzna Π przecina kwadrykę Δ wzdłuż stożkowej właściwej Γ , to krawędzie przecięcia płaszczyzny Π z płaszczyznami średnicowymi kwadryki Δ są średnicami stożkowej Γ .

2. Proste biegunowo sprzężone. Jeśli punkt P porusza się po prostej σ , to jego płaszczyzna biegunowa obraca się dookoła pewnej prostej σ' (w przypadku stożka zakładamy, że prosta σ nie przechodzi przez jego środek).

Istotnie, niech prosta σ będzie wyznaczona przez dwa swoje punkty $M(m_1:m_2:m_3:m_4)$ i $N(n_1:n_2:n_3:n_4)$. Daje się więc ona przedstawić parametrycznie układem równań

$$ey_k = \mu m_k + \nu n_k, \quad \text{gdzie} \quad k=1,2,3,4.$$

Płaszczyzna biegunowa dowolnego punktu tej prostej ma zatem równanie

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}(x) = 0$$

czyli

$$(7) \quad \mu \sum_{k=1}^4 m_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) + \nu \sum_{k=1}^4 n_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0.$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\Pi_1(x) = \sum_{k=1}^4 m_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x), \quad \Pi_2(x) = \sum_{k=1}^4 n_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x).$$

Płaszczyzny $\Pi_1(x)=0$ i $\Pi_2(x)=0$ są różne, gdyż są to płaszczyzny biegunowe punktów M i N , z założenia różnych (dla stożka zaś wynika to z założenia, że punkty M i N leżą na prostej σ , nie przechodzącej przez środek stożka). W przyjętych oznaczeniach równanie (7) przybiera więc postać

$$(8) \quad \mu \Pi_1(x) + \nu \Pi_2(x) = 0,$$

z której widzimy, że płaszczyzna ta należy do pęku wyznaczonego przez płaszczyzny Π_1 i Π_2 . Tym samym twierdzenie jest dowiedzione.

Prostą σ' nazywamy *biegunowo sprzężoną z prostą σ* .

Założmy teraz, że kwadryka nie jest stożkiem.

Jeśli prosta σ' jest biegunowo sprzężona z prostą σ , to prosta σ jest biegunowo sprzężona z prostą σ' .

Istotnie, niech M i N będą dwoma punktami prostej σ , a M' i N' — prostej σ' . Ponieważ płaszczyzny biegunowe punktów M i N zawierają prostą σ' , więc przechodzą one przez M' i N' . Wynika stąd, że płaszczyzny biegunowe punktów M' i N' przechodzą przez M i N , a więc zawierają prostą σ , c. b. d. o.

Dla stożka ostatnie twierdzenie nie jest prawdziwe, gdyż prosta biegunowo sprzężona z prostą l , nie przechodzącą przez środek stożka, jest prostą l' przechodzącą przez środek. Wszystkie punkty prostej l' mają więc tę samą płaszczyznę biegunową (która zawiera prostą l).

Jeśli prosta σ jest tworzącą kwadryki (p. § 65, str. 352) i punkt P leży na σ , to płaszczyzna biegunowa punktu P jest płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie, a zatem zawiera prostą σ . Wynika stąd, że tworzącą powierzchni jest sama ze sobą sprzężona biegunowo.

3. Średnice. Prosta biegunowo sprzężoną z prostą w ∞ nazywamy *średnicą*.

Niech Π będzie płaszczyzną właściwą. Przecina ona płaszczyznę w ∞ wzdłuż pewnej prostej. Średnicę sprzężoną z tą prostą nazywamy *średnicą sprzężoną z płaszczyzną Π* .

Aby wyznaczyć równanie średnicy sprzężonej z płaszczyzną o równaniu

$$(9) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$

zauważmy, że co najmniej jeden ze współczynników a_1, a_2, a_3 musi być różny od zera. Niech np. $a_1 \neq 0$. Płaszczyzna (9) zawiera wśród punktów w ∞ m. in. punkty $(a_2 : -a_1 : 0 : 0)$ i $(a_3 : 0 : -a_1 : 0)$. Punkty te mają płaszczyzny biegunowe

$$(10) \quad a_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad a_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Układ równań (10) wyznacza średnicę sprzężoną z płaszczyzną (9). Jeśli wszystkie trzy współczynniki a_1, a_2 i a_3 są różne od zera, to równania te można napisać w postaci symetrycznej

$$(11) \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{a_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{a_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{a_3}.$$

W każdym więc razie można je napisać w formie stosunku

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} = a_1 : a_2 : a_3.$$

Z definicji prostych biegunowo sprzężonych i średnicy sprzężonej z płaszczyzną wynika, że *płaszczyzny średnicowe, sprzężone z kierunkami równoległymi do płaszczyzny Π , przecinają się wzdłuż średnicy sprzężonej z płaszczyzną Π* .

Wszystkie średnice przechodzą przez środek powierzchni, gdyż płaszczyzny średnicowe mają tę własność.

Każda prosta właściwa przechodząca przez środek kwadryki jest *średnicą*.

Istotnie, niech prosta σ przechodzi przez środek. Przeciagniemy przez nią dwie płaszczyzny Π_1 i Π_2 . Są one płaszczyznami średnicowymi dwóch punktów w ∞ . Oznaczmy te punkty przez P_1 i P_2 . Niech σ' będzie prostą w ∞ łączącą punkty P_1 i P_2 . Wówczas σ jest prostą sprzężoną z σ' , a więc średnicą, c. b. d. o.

Niech Π będzie płaszczyzną właściwą, a k — kierunkiem średnicy sprzężonej z Π . Wówczas płaszczyzna średnicowa sprzężona z k jest równoległa do Π .

Istotnie, niech σ' będzie prostą w ∞ płaszczyzny Π . Płaszczyzny biegunowe punktów prostej σ' zawierają średnicę σ , której kierunkiem jest k . Zatem płaszczyzny biegunowe punktów prostej σ zawierają prostą σ' .

Tym samym płaszczyzna biegunowa punktu w ∞ prostej σ przechodzi przez prostą σ' , c. b. d. o.

Jeśli płaszczyzna Π przecina kwadrykę wzdłuż stożkowej właściwej Γ , to średnica σ sprzężona z płaszczyzną Π przechodzi przez środek S stożkowej Γ .

Istotnie, oznaczmy przez k_1 i k_2 kierunki dwóch cięciw stożkowej Γ . Średnice stożkowej Γ sprzężone z tymi kierunkami przechodzą przez jej środek S . Są one miejscem geometrycznym środków cięciw stożkowej Γ o kierunkach k_1 i k_2 . Ale płaszczyzny średnicowe sprzężone względem kwadryki z kierunkami k_1 i k_2 są miejscem geometrycznym środków jej cięciw o kierunkach k_1 i k_2 . Zatem obie średnice stożkowej Γ leżą na płaszczyznach średnicowych kwadryki. Obie te płaszczyzny średnicowe kwadryki przechodzą więc przez punkt S .

Wobec tego punkt S leży na krawędzi przecięcia tych płaszczyzn czyli na średnicy sprzężonej z płaszczyzną Π , c. b. d. o.

Jeśli Π jest płaszczyzną styczną do kwadryki w punkcie P , to średnica sprzężona z Π przechodzi przez P .

Niech bowiem σ będzie prostą w ∞ płaszczyzny Π . Prosta biegunowo sprzężona z σ , czyli średnica sprzężona z Π , przechodzi przez biegun płaszczyzny Π , czyli przez P , c. b. d. o.

Załóżmy teraz, że kwadryka ma środek właściwy S . Jeśli umieścimy w S początek układu współrzędnych, to równanie kwadryki przybierze postać

$$(13) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) + a_{44}x_4^2 = 0,$$

a równanie płaszczyzny średnicowej sprzężonej z kierunkiem $\alpha:\beta:\gamma$ będzie kształtu

$$(14) \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0.$$

Równanie (14) nie zależy od a_{44} . W szczególności, gdy $a_{44}=0$, otrzymujemy stożek asymptotyczny kwadryki (13). Wynika stąd, że płaszczyzny średnicowe sprzężone z kierunkiem $\alpha:\beta:\gamma$ nie zmieniają się, gdy kwadrykę zastąpimy przez jej stożek asymptotyczny; to samo dotyczy średnic.

Z tego, że każda płaszczyzna średnicowa jest miejscem geometrycznym środków cięciw, wynika, że środki cięciw kwadryki i stożka asymptotycznego są identyczne, stąd zaś wynika dalej, że odcinki cięciw kwadryki zawarte między kwadryką a stożkiem asymptotycznym są równe.

4. Równania kwadryk w specjalnych układach współrzędnych. Trzy średnice kwadryki, z których żadna nie jest asymptotą i z których każda jest sprzężona z płaszczyzną zawierającą dwie pozostałe, nazywamy *średnicami sprzężonymi*.

Oczywiście, nie mogą one leżeć na jednej płaszczyźnie.

W układzie trzech średnic sprzężonych kwadryka ma równanie niejednorodne kształtu

$$(15) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0.$$

Na str. 361 wykazaliśmy bowiem, że gdy płaszczyzna Oxy jest sprzężona z kierunkiem osi Oz (a w danym razie tak właśnie jest z założenia), to

$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0.$$

Podobnie

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0 \quad \text{i} \quad a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0,$$

skąd otrzymujemy (15).

Oczywiście, liczby a_{11} , a_{22} i a_{33} są pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $\mathfrak{A}$ kwadryki (15).

Dla elipsoidy mają one znaki zgodne; jeśli elipsoida jest rzeczywista, to ich znak jest przeciwny znakowi a_{44} . Dzieląc przez a_{44} i podstawiając

$$a'^2 = -\frac{a_{44}}{a_{11}}, \quad b'^2 = -\frac{a_{44}}{a_{22}}, \quad c'^2 = -\frac{a_{44}}{a_{33}},$$

dostajemy więc równanie

$$(16) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0 \quad \text{dla elipsoidy rzeczywistej.}$$

Podobne równania dostajemy dla pozostałych kwadryk o środku właściwym, gdy układem współrzędnych jest układ trzech średnic sprzężonych, mianowicie:

$$(17) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} + 1 = 0 \quad \text{dla elipsoidy nierzeczywistej,}$$

$$(18) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0 \quad \text{dla hiperboloidy jednowłokowej,}$$

$$(19) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0 \quad \text{dla hiperboloidy dwuwłokowej,}$$

$$(20) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 0 \quad \text{dla stożka rzeczywistego,}$$

$$(21) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 0 \quad \text{dla stożka nierzeczywistego.}$$

Równania (16)-(21) możemy napisać ogólnie w postaci

$$(22) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \varepsilon_1 \frac{y^2}{b'^2} + \varepsilon_2 \frac{z^2}{c'^2} + \eta = 0,$$

gdzie znaki $\varepsilon_1 = \pm 1$ i $\varepsilon_2 = \pm 1$ są odpowiednio dobrane do każdej kwadryki; ponadto $\eta = \pm 1$ dla powierzchni rzędu 4, a $\eta = 0$ dla stożków.

Stożek asymptotyczny kwadryki (22) otrzymujemy, podstawiając $\eta = 0$ do jej równania.

Z równania (18) widzimy, że dwie średnice hiperboloidy jednowłokowej (osie Ox i Oy układu współrzędnych) przebiegają tę hiperboloidę w punktach rzeczywistych, a trzecia (oś Oz) w nierzeczywistych. Podobnie, z równania (19) widzimy, że jedna średnica przebiega hiperboloidę dwuwłokową w punktach rzeczywistych, a dwie w nierzeczywistych. Natomiast — jak widać z równań (16) i (17) — elipsoida rzeczywista jest przez każdą średnicę przebita w punktach rzeczywistych, a elipsoida nierzeczywista — w nierzeczywistych.

Stożek asymptotyczny elipsoidy (16) ma równanie (21), jest więc on nierzeczywisty.

Wynika to, niezależnie od tych rozważań, również stąd, że przekrój elipsoidy płaszczyzną w ∞ jest krzywą nierzeczywistą.

W podobny sposób dowodzi się następującego twierdzenia:

Niech Λ będzie paraboloida, a Π — płaszczyzną styczną do Λ w punkcie P . Obierzmy P za początek układu współrzędnych $Oxyz$, Π — za płaszczyznę Oxy , średnicę przechodzącą przez P — za oś Oz , dowolną styczną w P różną od tworzącej — za oś Ox i wreszcie prostą sprzężoną z nią biegunowo — za oś Oy . W tym układzie współrzędnych paraboloida ma równanie

$$(23) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b'^2} = 2z,$$

gdzie

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla paraboloidy eliptycznej,} \\ -1 & \text{dla paraboloidy hiperbolicznej.} \end{cases}$$

ROZDZIAŁ XV

WŁASNOŚCI METRYCZNE KWADRYK

§ 67. Kierunki główne. Osie

Zachowajmy nadal założenie

$$(1) \quad R(\mathfrak{A})=3 \quad \text{lub} \quad R(\mathfrak{A})=4.$$

Kierunek nazywamy *głównym*, jeżeli jest prostopadły do płaszczyzny średnicowej z nim sprzężonej.

W przypadku paraboloidy zaliczamy do kierunków głównych również wspólny kierunek wszystkich średnic.

Podamy metodę wyznaczania kierunków głównych kwadryki w prostokątnym układzie współrzędnych $Oxyz$.

Niech kwadryka ma w tym układzie równanie we współrzędnych niejednorodnych

$$(2) \quad g(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Niech $\alpha:\beta:\gamma$ będzie dowolnym kierunkiem. Przyjmijmy oznaczenia:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_\alpha &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \varphi_\beta &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \varphi_\gamma &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{aligned}$$

W tych oznaczeniach płaszczyzna średnicowa sprzężona z kierunkiem $\alpha:\beta:\gamma$ ma równanie

$$(4) \quad x\varphi_\alpha + y\varphi_\beta + z\varphi_\gamma + 2(a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma) = 0.$$

Wektor o składowych $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma$ jest prostopadły do płaszczyzny (4). Na to więc, by kierunek $\alpha:\beta:\gamma$ był prostopadły do tej płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(5) \quad \varphi_\alpha = \lambda\alpha, \quad \varphi_\beta = \lambda\beta, \quad \varphi_\gamma = \lambda\gamma, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \neq 0.$$