

ROZDZIAŁ XIII

PRZYKŁADY I KLASYFIKACJA KWADRYK

§ 61. Przykłady kwadryk

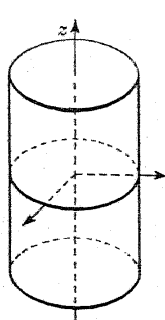
Kwadrykami nazywamy powierzchnie drugiego stopnia. Rozpatrzmy najważniejsze z nich.

1. Walce. Jak wiemy z § 16, str. 80, równanie

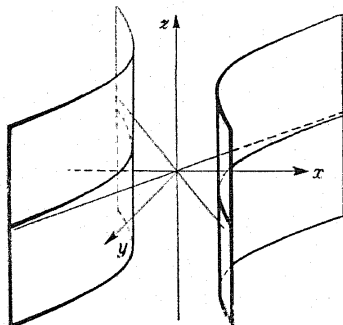
$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

przedstawia inny twór na płaszczyźnie, a inny w przestrzeni. Jeżeli na płaszczyźnie przedstawia ono krzywą Γ , to w przestrzeni przedstawia powierzchnię walcową, jaka powstaje przez ruch prostej, równoległej do osi Oz i przecinającej krzywą Γ . W szczególności, zależnie od tego, czy Γ jest elipsą, hiperbolą, czy parabolą, otrzymujemy w przestrzeni walec eliptyczny (rys. 119), hiperboliczny (rys. 120) i paraboliczny (rys. 121).

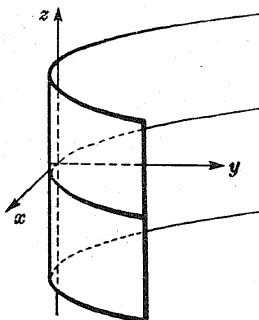
Wszystkie tworzące walców mają wspólny punkt w ∞ . Dołączając go do punktów walca, możemy walec w przestrzeni rzutowej



Rys. 119



Rys. 120



Rys. 121

określić jako powierzchnię, powstającą przez ruch prostej, przechodzącej przez stały punkt w ∞ i ślizgającej się po krzywej płaskiej.

Hiperbola przebija prostą w ∞ w dwóch punktach rzeczywistych. Walec hiperboliczny zatem przecina płaszczyznę w ∞ wzdłuż dwóch prostych rzeczywistych.

Analogiczne proste dostajemy dla elipsy, lecz są one zespolone sprzężone.

Walec paraboliczny ma z płaszczyzną w ∞ wspólną jedną prostą w ∞ .

Każdy przekrój walca eliptycznego, nie równoległy do tworzących, jest elipsą. Istotnie jeśli elipsa Γ o równaniu (1) leży w płaszczyźnie Π i jeśli płaszczyzna Π' , również nie równoległa do tworzących walca o równaniu (1) w przestrzeni, przecina ten walec wzdłuż krzywej Γ' , to krzywa Γ' jest rzutem elipsy Γ , równoległym do tworzących. Ponieważ rzut równoległy jest przekształceniem afinicznym, więc krzywa Γ też jest elipsą.

Podobnie dowodzi się, że przekrój walca hiperbolicznego, nie równoległy do tworzących, jest hiperbolą, a walca parabolicznego — parabolą.

Przyjmijmy w układzie współrzędnych $Oxyz$ płaszczyznę Oxy prostopadłą, a oś Oz równoległą do tworzących. Możemy założyć od razu, że osie współrzędnych Ox i Oy tego układu zostały w płaszczyźnie Oxy tak dobrane, by równania walców miały postacie:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{walec eliptyczny;}$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{walec hiperboliczny;}$$

$$(4) \quad y^2 = 2px \quad \text{walec paraboliczny.}$$

Niech wreszcie w każdym z przypadków (2)-(4) Γ będzie krzywą przecięcia walca płaszczyzną Oxy .

Każdy punkt osi Oz jest środkiem symetrii walca (2) oraz walca (3); jeśli bowiem punkty P_1 i P_2 leżą na walcu i odcinek P_1P_2 przecina oś Oz w punkcie O' , to przechodząc do ich rzutów na płaszczyznę Oxy , widzimy, że O przechodzi w środek krzywej Γ . Zatem $P_1O = OP_2$, skąd $P_1O' = O'P_2$.

Jak łatwo widzieć, wszystkie środki symetrii walca muszą leżeć na osi Oz , gdyż ich rzut na płaszczyznę Oxy jest środkiem krzywej Γ .

A więc: *walec eliptyczny i hiperboliczny mają nieskończenie wiele środków symetrii, wypełniających prostą.*

Ta właśnie prosta nazywa się *osią walca*.

Natomiast *walec paraboliczny nie ma żadnego środka symetrii*, gdyż parabola nie ma takiego środka.

Tak samo dowodzi się za pomocą rzutu na płaszczyznę Oxy , że walec eliptyczny nieobrotowy i walec hiperboliczny mają po dwie płaszczyzny symetrii równoległe do osi Oz , a mianowicie płaszczyzny przechodzące przez oś walca i osie krzywej Γ . Walec zaś paraboliczny ma jedną płaszczyznę symetrii, równoległą do tworzących i przechodzącą przez oś krzywej Γ . Dla walca obrotowego każda płaszczyzna przechodząca przez oś jest płaszczyzną symetrii.

Prócz tego płaszczyznami symetrii walca są płaszczyzny prostopadłe do jego tworzących. Innych płaszczyzn symetrii walce nie mają.

PRZYKŁADY. I. Prosta równoległa do prostej $x=y=z$ tworzy powierzchnię walcową przez ruch po krzywej Γ o równaniach

$$x^2 + y^2 - xy = 1, \quad z = 0.$$

Jakie jest równanie powstałego walca?

Niech punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ leży na walcu. Tworząca przechodząca przez P ma równania

$$x = x_0 + s, \quad y = y_0 + s, \quad z = z_0 + s.$$

Punkt przecięcia płaszczyzny Oxy tą tworzącą ma więc współrzędne $x_0 - z_0, y_0 - z_0$ i 0 , a ponieważ leży on na krzywej Γ , więc

$$(x_0 - z_0)^2 + (y_0 - z_0)^2 - (x_0 - z_0)(y_0 - z_0) = 1.$$

Dla każdego punktu walca jest zatem spełnione równanie

$$(*) \quad (x - z)^2 + (y - z)^2 - (x - z)(y - z) = 1.$$

Łatwo się dowodzi, że jest i na odwrót. Równanie $(*)$ przedstawia więc ten walec.

II. Znaleźć równanie walca stycznego do kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ o tworzących równoległych do prostej $x = 2y = 3z$.

Niech punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ leży na tym walcu. Prosta przechodząca przez ten punkt równoległa do prostej $x = 2y = 3z$ ma przedstawienie parametryczne $x = x_0 + t, y = y_0 + \frac{1}{2}t, z = z_0 + \frac{1}{3}t$, lub też, po zmianie parametru przez podstawienie $t = 6u$,

$$x = x_0 + 6u, \quad y = y_0 + 3u, \quad z = z_0 + 2u.$$

Na to, by ta prosta była tworzącą walca stycznego, potrzeba i wystarcza, żeby przebijała ona kulę tylko w jednym punkcie. Parametr u , wyznaczający punkt przecięcia, otrzymujemy z równania

$$(x_0 + 6u)^2 + (y_0 + 3u)^2 + (z_0 + 2u)^2 = 1$$

czyli

$$49u^2 + 2u(6x_0 + 3y_0 + 2z_0) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) = 0.$$

Aby równanie to miało jedno rozwiązanie, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(6x_0 + 3y_0 + 2z_0)^2 - 49(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) = 0.$$

Walec styczny ma zatem równanie

$$(6x + 3y + 2z)^2 - 49(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

2. Stożek. Niech układ współrzędnych $Oxyz$ będzie prostokątny. Jak wiemy (§ 16, str. 78), przez obrót prostej

$$cy = az, \quad z = 0$$

dokoła osi Oz powstaje stożek obrotowy

$$(5) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Uogólnimy teraz pojęcie stożka.

Stożkiem nazywa się twór określony przez równanie

$$(6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Stożek (6) można oczywiście otrzymać ze stożka obrotowego (5) przez przekształcenie afiniczne

$$x = x', \quad y = \frac{a}{b}y', \quad z = z'.$$

Z postaci równania (6) widoczne jest, że początek układu O jest środkiem symetrii stożka, a płaszczyzny Oxy, Oxz i Oyz są jego płaszczyznami symetrii.

Środkiem stożka nazywa się jego środek symetrii, a *osiami stożka* nazywamy krawędzie przecięcia jego płaszczyzn symetrii, czyli jego osie symetrii. Są nimi osie Ox, Oy i Oz .

W przypadku, gdy równanie (6) przedstawia stożek obrotowy, jest $a = b$. Wówczas każda płaszczyzna przechodząca przez oś Oz jest płaszczyzną symetrii stożka, a każda prosta płaszczyzny Oxy przechodząca przez początek O jest jego osią symetrii.

Jeśli punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ leży na stożku (6), to

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0.$$

Wówczas na stożku leży cała prosta łącząca P z początkiem O , gdyż dla każdego s jest

$$\frac{(x_0 s)^2}{a^2} + \frac{(y_0 s)^2}{b^2} - \frac{(z_0 s)^2}{c^2} = 0.$$

Proste OP nazywamy *tworzącymi* stożka.

Płaszczyzna Oxy przecina stożek (6) tylko w jednym punkcie rzeczywistym (wzdłuż dwóch prostych nierzeczywistych sprzężonych), a mianowicie w jego środku. Każda zaś płaszczyzna $z=k \neq 0$ przecina stożek wzdłuż elipsy

$$(7) \quad \frac{x^2}{\left(\frac{ak}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bk}{c}\right)^2} = 1, \quad z=k.$$

Płaszczyzny Oyz i Oxz przecinają stożek (6) wzdłuż dwóch prostych, a płaszczyzny do nich równoległe przecinają go wzdłuż hiperbol

$$(8) \quad \frac{z^2}{\left(\frac{ck}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{bk}{a}\right)^2} = 1, \quad x=k,$$

$$(9) \quad \frac{z^2}{\left(\frac{ck}{b}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{ak}{b}\right)^2} = 1, \quad y=k.$$

Stożek (6) powstaje zatem przez ruch prostej umocowanej w początku układu i ślizgającej się po elipsie (7), bądź po hiperboli (8) lub (9). Płaszczyzna nie przechodząca przez środek stożka przecina każdą tworzącą stożka dokładnie w jednym punkcie różnym od środka.

Płaszczyzna nie przechodząca przez środek stożka przecina go wzdłuż elipsy, hiperboli albo paraboli, zależnie od tego, czy nie jest ona równoległa do żadnej tworzącej rzeczywistej, czy też jest równoległa do dwóch, czy tylko do jednej.

Przecina ona bowiem stożek wzdłuż stożkowej. Stożkowa ta nie rozpada się na proste, gdyż byłyby one tworzącymi stożka, a więc płaszczyzna przeszłaby przez środek wbrew założeniu. Jeśli

płaszczyzna nie jest równoległa do żadnej tworzącej rzeczywistej, to przecina każdą z nich w punkcie rzeczywistym właściwym. Stożkowa przekroju nie ma punktów rzeczywistych w ∞ , jest więc elipsą. Podobnie rozumujemy w pozostałych dwóch przypadkach.

PRZYKŁAD. Znaleźć równanie stożka stycznego do kuli

$$(*) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

o wierzchołku $(1, 1, 1)$.

Niech $P(x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnym punktem stożka. Wówczas prosta

$$x=1+(x_0-1)s, \quad y=1+(y_0-1)s, \quad z=1+(z_0-1)s$$

jest styczna do kuli (*), a więc przebija ją w jednym punkcie. Dla punktu przebiccia spełnione jest równanie

$$s^2[(x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2] + 2s(x_0 + y_0 + z_0 - 3) + 2 = 0.$$

Na to więc, by punkt P leżał na stożku, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(x_0 + y_0 + z_0 - 3)^2 - 2[(x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2] = 0.$$

Opuszczając wskaźnik zero przy zmiennych, dostajemy równanie stożka.

3. Elipsoida. Niech układ współrzędnych $Oxyz$ będzie prostokątny. Przez obrót elipsy

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x=0$$

dokoła osi Oz powstaje powierzchnia zwana *elipsoidą obrotową*.

Równanie jej ma kształt

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Zależnie od tego, czy $b > c$, czy $b < c$, elipsoida nazywa się *spłaszczoną* lub *wydłużoną*.

Jeśli $b = c$, otrzymujemy kulę.

Ogólnie, *elipsoidą* nazywa się powierzchnia

$$(9) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Widać stąd od razu, że każdą elipsoidę można otrzymać, przekształcając afinicznie kulę.

Z równania (9) wynika, że dla punktów rzeczywistych elipsoidy jest

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

czyli

$$(10) \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$

A zatem: *elipsoida jest powierzchnią ograniczoną, mieszczącą się całkowicie w prostopadłości o krawędziach $2a$, $2b$ i $2c$.*

Przekroje elipsoidy płaszczyznami $z=k$, dla $k < c$, mają równania

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z=k.$$

Są to elipsy o półosiach $a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$ i $b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$ dążących do zera, gdy $|k|$ dąży do c . Dla $k = \pm c$ dostajemy jeden punkt.

Kształt elipsoidy jest uwidoczniiony na rys. 122.

Elipsoida nie przecina płaszczyzny w ∞ w punktach rzeczywistych. Gdy bowiem przejdziemy do równania jednorodnego, z równania (9) otrzymamy

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - x_4^2 = 0.$$

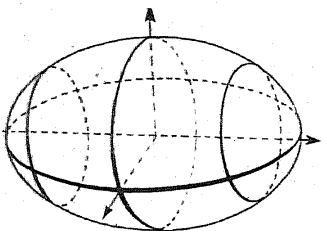
Podstawiając $x_4=0$, otrzymujemy

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0,$$

czyli równanie przedstawiające twór nierzeczywisty.

Punkt $O(0,0,0)$ jest środkiem elipsoidy. Płaszczyzny Oxy , Oxz , Oyz są jej płaszczyznami symetrii, a osie Ox , Oy , Oz — jej osiami symetrii; nazywa się je *osiąmi głównymi* elipsoidy (*wielką, średnią i małą*). Dla elipsoid obrotowych każda płaszczyzna przechodząca przez oś obrotu jest płaszczyzną symetrii, każda zaś prosta przechodząca przez środek prostopadle do osi obrotu jest osią symetrii.

Każdy przekrój rzeczywisty elipsoidy, nie redukujący się do punktu, jest elipsą, gdyż jest stożkową ograniczoną, nie zawierającą punktów w ∞ rzeczywistych.



Rys. 122

4. **Hiperboloida jednopowłokowa.** Niech układ współrzędnych $Oxyz$ będzie znowu prostokątny. Przez obrót hiperboli

$$(11) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x=0$$

dokoła jej osi nierzeczywistej, czyli osi Oz , powstaje powierzchnia zwana *hiperboloidą jednopowłokową obrotową*. Ma ona równanie

$$(12) \quad \frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hiperboloidę tę można również otrzymać przez obrót prostej

$$(13) \quad bz = cy, \quad x=b$$

dokoła osi Oz . Dla każdego bowiem punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ tej prostej jest na mocy (13)

$$(14) \quad bz_0 = cy_0, \quad x_0 = b.$$

Niech $P(x, y, z)$ będzie jakimkolwiek położeniem punktu P w czasie obrotu; wówczas

$$(15) \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad \text{ i } \quad z = z_0.$$

Eliminując zmienne x, y, z z (13), (14) i (15), otrzymujemy równanie (12). Zatem *hiperboloidę jednopowłokową obrotową możemy otrzymać przez obrót prostej dokoła prostej skośnej, gdyż prosta (13) jest skośna względem osi Oz .*

Ogólnie, *hiperboloidą jednopowłokową* nazywa się powierzchnia o równaniu

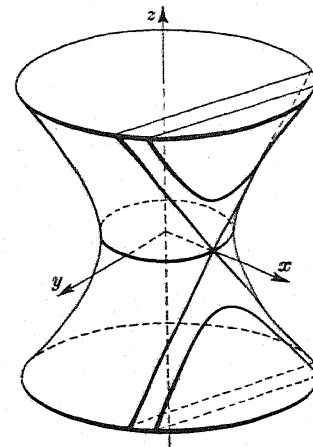
$$(16) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Początek układu współrzędnych jest jej środkiem, a płaszczyzny i osie tego układu są jej płaszczyznami i osiami symetrii (rys. 123).

Płaszczyzny $z=k$, równoległe do płaszczyzny Oxy , przecinają hiperboloidę wzdłuż elips

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z=k$$

o osiach wzrastających nieograniczenie wraz z k .



Rys. 123

Osie te są najkrótsze dla $k=0$.

Dlatego przekrój płaszczyzną Oxy nosi nazwę *elipsy szyjnej*.

Płaszczyzny $x=k$ (dla $|k| \neq a$), równoległe do płaszczyzny Oyz , przecinają hiperboloidę wzdłuż hiperbol

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)} = 1, \quad x=k.$$

Dla $|k| < a$ oś rzeczywista tych hiperbol jest równoległa do osi Oy , a dla $|k| > a$ — do osi Oz . Dla $|k| = a$ dostajemy w przekroju parę prostych

$$x=a, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{i} \quad x=-a, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

5. Hiperboloida dwupowłokowa. Przez obrót hiperboli (11) dokoła osi Oy powstaje powierzchnia zwana *hiperboloidą dwupowłokową obrotową* o równaniu

$$(16) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1.$$

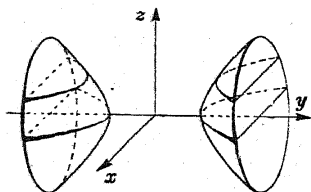
Ogólnie, *hiperboloidą dwupowłokową* nazywamy powierzchnię o równaniu

$$(17) \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Z równania (17) wynika, że dla każdego punktu tej hiperboloidy jest $|y| \geq b$ (rys. 124).

Płaszczyzny $y=k$ dla $k > b$ przecinają hiperboloidę (17) wzdłuż elips

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)} = 1, \quad y=k$$



Rys. 124

o osiach wzrastających nieograniczenie wraz z k . Płaszczyzny $x=k$, równoległe do płaszczyzny Oyz , przecinają hiperboloidę (17) wzdłuż hiperbol

$$\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)} = 1, \quad x=k.$$

Podobnie przedstawiają się przekroje równoległe do płaszczyzny Oxy . Między płaszczyznami $y=b$ i $y=-b$ nie ma żadnego punktu rzeczywistego hiperboloidy (17).

Oczywiście początek układu jest środkiem symetrii, osie układu są osiami symetrii i płaszczyzny układu są płaszczyznami symetrii hiperboloidy (17).

6. Paraboloidy. Przez obrót paraboli o równaniu

$$(18) \quad 2pz = y^2$$

dokoła osi Oz układu prostokątnego współrzędnych powstaje powierzchnia

$$2pz = x^2 + y^2,$$

zwana *paraboloidą eliptyczną obrotową* (przez obrót tej paraboli dokoła osi Oy powstaje powierzchnia 4-go stopnia).

Ogólnie, *paraboloidą eliptyczną* nazywamy powierzchnię

$$(19) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Płaszczyzny Oxz i Oyz są płaszczyznami symetrii tej paraboloidy, a oś Oz — jej osią symetrii. Płaszczyzna $y=k$, równoległa do płaszczyzny Oxz , przecina paraboloidę (19) wzdłuż paraboli

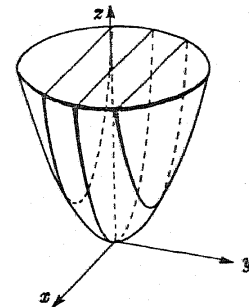
$$(20) \quad x^2 = 2a^2\left(z - \frac{k^2}{2b^2}\right), \quad y=k.$$

Wszystkie te parabole są przystające, gdyż powstają jedna z drugiej przez przesunięcie. Wierzchołki ich znajdują się na płaszczyźnie Oyz . Miejszem geometrycznym tych wierzchołków jest przekrój paraboloidy płaszczyzną Oyz , a więc parabola

$$y^2 = 2b^2z, \quad x=0.$$

Paraboloidę eliptyczną można zatem otrzymać w sposób następujący (rys. 126):

Dane są dwie parabole na płaszczyznach prostopadłych; osie tych parabol są równoległe i wierzchołek drugiej paraboli znajduje się na pierwszej. Część osi drugiej paraboli, leżąca w jej wnętrzu, leży też wewnątrz pierwszej paraboli. Przez ruch drugiej paraboli, podczas którego opisane położenie zostaje zachowane, powstaje paraboloida eliptyczna.



Rys. 126

Z powyższej konstrukcji paraboloidy wynika, że nie ma ona środka symetrii, w przeciwnym bowiem razie przekrój paraboloidy przez środek symetrii, równoległy do płaszczyzny Oyz , miałby również środek symetrii, a więc nie byłby parabolą.

Niech teraz dwie parabole będą położone tak jak poprzednio, z tą jednak różnicą, żeby część osi drugiej paraboli, leżąca w jej wnętrzu, leżała zewnątrz pierwszej paraboli (rys. 127). Układ prostokątny współrzędnych niech będzie ten sam, co poprzednio. Wówczas parabola zwisająca ma równanie

$$(21) \quad y^2 = -2p(z-k), \quad x=l.$$

Wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $l, 0, k$. Leży on na pierwszej paraboli o równaniu

$$x^2 = 2qz.$$

Zatem $l^2 = 2qk$. Eliminując liczby l i k stąd i z (21), dostajemy równanie powstałej powierzchni w postaci

$$\frac{x^2}{2q} - \frac{y^2}{2p} = z.$$

W oznaczeniach $a^2 = q$ i $b^2 = p$ równanie to przybiera postać

$$(22) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Powierzchnia ta nazywa się *paraboloidą hiperboliczną*.

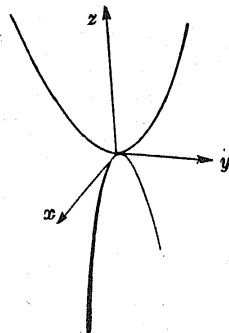
Jest ona uwidoczniiona na rys. 128. Podobnie jak paraboloida eliptyczna, nie ma ona środka symetrii. Płaszczyzny Oxy i Oxz są jej płaszczyznami symetrii.

Płaszczyzny $z=k$ dla $k \neq 0$ przecinają paraboloidę hiperboliczną wzdłuż hiperbol. Osie rzeczywiste tych hiperbol są równoległe do osi Ox lub Oy , zależnie od tego, czy $k > 0$, czy $k < 0$.

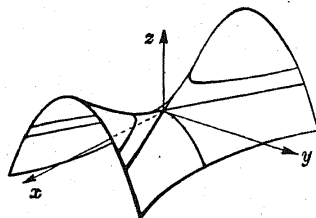
Dla $k=0$ otrzymujemy parę prostych w płaszczyźnie Oxy :

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Są to wspólne asymptoty rzutów wszystkich poprzednich hiperbol na płaszczyznę Oxy .



Rys. 127



Rys. 128

Zbadamy jeszcze położenie paraboloidy eliptycznej i paraboloidy hiperbolicznej względem płaszczyzny w ∞ .

Paraboloida eliptyczna ma równanie jednorodne

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 2x_3x_4 = 0.$$

Podstawiając tu $x_4=0$, otrzymujemy jeden punkt rzeczywisty o współrzędnych $0:0:1:0$. W przestrzeni zespolonej dostajemy wobec

$$\left(\frac{x_1}{a} + i\frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} - i\frac{x_2}{b}\right) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$$

parę prostych sprzężonych

$$\frac{x_1}{a} + i\frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x_1}{a} - i\frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0.$$

Paraboloida hiperboliczna przecina płaszczyznę w ∞ wzdłuż dwu prostych rzeczywistych

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0, \quad x_4 = 0.$$

§ 62. Klasyfikacja kwadryk

1. Uwagi wstępne. Przyjmijmy oznaczenia analogiczne do użytych w § 51, a mianowicie:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4,$$

$$(2) \quad \varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

$$(3) \quad g(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44},$$

$$(4) \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$(5) \quad \Delta = |\mathfrak{A}|, \quad \tilde{\Delta} = |\tilde{\mathfrak{A}}|.$$

Jeśli kwadryka o równaniu

$$(6) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

nie zawiera płaszczyzny w ∞ , to można ją też przedstawić równaniem postaci

$$(7) \quad g(x, y, z) = 0.$$

Tak samo jak w § 51, dowodzi się, że przy przejściu od jednego kartezjańskiego układu współrzędnych do innego (prosto- lub ukośno-kątnego), jako też przy przekształceniu afinicznym, nie ulegają zmianie:

1° rzędy macierzy $\mathfrak{A}$ i $\tilde{\mathfrak{A}}$,

2° znaki wyróżników Δ i $\tilde{\Delta}$,

3° znaki pierwiastków charakterystycznych macierzy $\mathfrak{A}$ i $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Rząd macierzy $\tilde{\mathfrak{A}}$ nazywamy rzędem kwadryki.

Oznaczmy jeszcze współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy $\mathfrak{A}$ przez $(-1)^{k-1}A_k$, gdzie $k=1, 2, 3$. Zatem

$$(8) \quad w(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + A_1\lambda^2 - A_2\lambda + A_3,$$

$$(9) \quad A_3 = \Delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Przy przejściu od prostokątnego układu współrzędnych do prostokątnego, jako też przy izometriach (gdy układ współrzędnych jest prostokątny) nie ulegają zmianie:

1° rzędy macierzy $\mathfrak{A}$ i $\tilde{\mathfrak{A}}$,

2° wartości wyróżników Δ i $\tilde{\Delta}$,

3° wielomian charakterystyczny (8).

W szczególności zatem niezmiennikami są pierwiastki charakterystyczne macierzy $\mathfrak{A}$.

Ponieważ znaki tych pierwiastków grają dużą rolę, przypominamy tu kryteria, które pozwalają ze znaków współczynników A_k wielomianu (8) wnosić o znakach pierwiastków (p. Przypis I, § 5):

$$(10) \quad \text{jeżeli } A_2 > 0 \text{ i } A_1 A_3 > 0, \text{ to } \text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3,$$

$$(11) \quad \text{jeżeli } A_2 \leq 0 \text{ lub } A_1 A_3 \leq 0, \text{ to } \text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = -\text{sign } \lambda_3,$$

$$(12) \quad \text{jeżeli } A_3 = 0 \text{ i } A_2 > 0, \text{ to } \text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 \text{ i } \lambda_3 = 0,$$

$$(13) \quad \text{jeżeli } A_3 = 0 \text{ i } A_2 < 0, \text{ to } \text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2 \text{ i } \lambda_3 = 0.$$

Wreszcie, jeżeli dwa pierwiastki są zerami, to $\lambda_1 = A_1$.

Najbliższym naszym celem jest dowód następującego twierdzenia klasyfikacyjnego:

Do kwadryki o równaniu rzeczywistym (7) — czyli nie zawierającej płaszczyzny w ∞ — można dobrać układ prostokątny współrzędnych, w którym ta kwadryka ma jedno z następujących równań:

$$(14) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{elipsoida rzeczywista,}$$

$$(15) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{elipsoida nierzeczywista,}$$

$$(16) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{hiperboloida jednopowłokowa,}$$

$$(17) \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{hiperboloida dwupowłokowa,}$$

$$(18) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \quad \text{stożek rzeczywisty,}$$

$$(19) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0 \quad \text{stożek nierzeczywisty,}$$

$$(20) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 2Z = 0 \quad \text{paraboloida eliptyczna,}$$

$$(21) \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 2Z = 0 \quad \text{paraboloida hiperboliczna,}$$

$$(22) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{walec eliptyczny rzeczywisty,}$$

$$(23) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{walec eliptyczny nierzeczywisty,}$$

$$(24) \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{walec hiperboliczny,}$$

$$(25) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 \quad \text{para płaszczyzn nierzeczywistych} \\ \text{nierównoległych,}$$

$$(26) \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \quad \text{para płaszczyzn rzeczywistych} \\ \text{nierównoległych,}$$

$$(27) \quad Y^2 - 2pX = 0, \quad p \neq 0 \quad \text{walec paraboliczny,}$$

$$(28) \quad Y^2 - a^2 = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{para płaszczyzn rzeczywistych} \\ \text{równoległych,}$$

$$(29) \quad Y^2 + a^2 = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{para płaszczyzn równoległych} \\ \text{nierzeczywistych,}$$

$$(30) \quad Y^2 = 0 \quad \text{płaszczyzna podwójna.}$$

Udowodnimy również, że jeśli powierzchnia w jakimś układzie współrzędnych kartezjańskich ma równanie jednej z postaci (14)–(30), to w żadnym innym układzie współrzędnych kartezjańskich nie może ona mieć równania którejkolwiek z pozostałych postaci.

Wreszcie, wyprowadzimy kryteria pozwalające rozstrzygnąć, który z tych przypadków zachodzi. Podobnie jak w § 52, będą to kryteria zależące jedynie od rzędów macierzy $\mathfrak{A}$ i $\tilde{\mathfrak{A}}$ oraz od znaków pierwiastków charakterystycznych, a więc jedynie od niezmienników względem zmiany układu kartezjańskiego współrzędnych na inny kartezjański. W dowodzie tych kryteriów założymy więc od razu, że układ współrzędnych jest prostokątny.

Wśród powierzchni o równaniach (14)–(30) figurują trzy do tej pory przez nas niespotykane, mianowicie: *elipsoida nierzeczywista*, *walec nierzeczywisty* i *stożek nierzeczywisty*. Pierwsza i druga z tych powierzchni nie mają żadnego punktu rzeczywistego, trzecia zaś ma tylko jeden taki punkt, mianowicie punkt $(0, 0, 0)$.

2. Klasyfikacja metryczna kwadryk. Zakładamy, że kwadryka w układzie prostokątnym współrzędnych ma równanie (7). Istnieje przekształcenie ortogonalne, które formę $\varphi(x, y, z)$ przeprowadza w formę

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2$$

(p. Przypis I, § 5). Przekształcenie to wprowadza nowy układ prostokątny współrzędnych, w którym kwadryka (7) ma równanie

$$(31) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + 2p_1 \xi + 2p_2 \eta + 2p_3 \zeta + q = 0.$$

Rozpatrzmy poszczególne przypadki:

1. $\Delta \neq 0$ czyli $R(\mathfrak{A}) = 3$. Wówczas na mocy wzoru (9) jest

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0$$

i tak jak w § 52 możemy przez przesunięcie układu współrzędnych sprowadzić równanie kwadryki do postaci

$$(32) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} = 0$$

czyli

$$(33) \quad \Delta \lambda_1 X^2 + \Delta \lambda_2 Y^2 + \Delta \lambda_3 Z^2 + \tilde{\Delta} = 0.$$

Rozróżnimy trzy podprzypadki:

1a. $\tilde{\Delta} \neq 0$ i $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3$. Przypadek ten zachodzi równocześnie z nierównościami (10). Ponieważ

$$\text{sign } \lambda_k = \text{sign } (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \text{sign } \Delta,$$

więc współczynniki przy zmiennych w równaniu (33) są dodatnie.

Przyjmijmy oznaczenia

$$a^2 = \frac{|\tilde{\Delta}|}{\Delta \lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\tilde{\Delta}|}{\Delta \lambda_2}, \quad c^2 = \frac{|\tilde{\Delta}|}{\Delta \lambda_3},$$

i podzielmy równanie (33) przez $\tilde{\Delta}$. Jeśli $\tilde{\Delta} < 0$, otrzymujemy równanie (14), jeśli zaś $\tilde{\Delta} > 0$, dostajemy równanie (15).

1b. $\tilde{\Delta} \neq 0$ i $\text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2 = -\text{sign } \lambda_3$. W tym przypadku zachodzą nierówności (11) i wobec (9) jest

$$\text{sign } \Delta \lambda_1 = -\text{sign } \Delta \lambda_2 = -\text{sign } \Delta \lambda_3 = 1.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$a^2 = \frac{|\tilde{\Delta}|}{\Delta \lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{|\tilde{\Delta}|}{\Delta \lambda_2}, \quad c^2 = -\frac{|\tilde{\Delta}|}{\Delta \lambda_3}.$$

Równanie (33) przybiera wówczas postać

$$\text{sign } \tilde{\Delta} \left[\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} \right] - 1 = 0.$$

Gdy $\tilde{\Delta} > 0$, otrzymujemy równanie (17), a gdy $\tilde{\Delta} < 0$, dostajemy (po przemianowaniu osi) równanie (16).

1c. $\tilde{\Delta} = 0$. Wówczas równanie (32) przybiera postać

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 0.$$

Jeśli zachodzą nierówności (10), to przez podstawienie

$$|\lambda_1| = \frac{1}{a^2}, \quad |\lambda_2| = \frac{1}{b^2}, \quad |\lambda_3| = \frac{1}{c^2}$$

otrzymujemy równanie (19), jeśli zaś zachodzą nierówności (11), to powyższe podstawienie prowadzi do postaci (18).

2. $\Delta = 0$ i $R(\mathfrak{A}) = 2$. Wobec drugiej z tych równości jest

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0$$

i przez przesunięcie układu współrzędnych można równanie (31) sprowadzić do postaci

$$(34) \quad \lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 + 2p_3 \zeta' + q = 0.$$

Stąd

$$(35) \quad \tilde{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & p_3 & q \end{vmatrix} = -p_3^2 \lambda_1 \lambda_2.$$

Rozróżnimy trzy podprzypadki:

2a. $R(\mathfrak{A})=0$ i $R(\mathfrak{A})=4$ czyli $\tilde{A} \neq 0$. Z równości (35) wynika, że $p_3 \neq 0$, i przez przesunięcie

$$\xi' = X, \quad \eta' = Y, \quad \zeta' + \frac{q}{2p_3} = Z$$

dostajemy

$$(36) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2p_3 Z = 0.$$

Jeśli $A_2 > 0$, a więc — wobec (12) — jeśli $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$, przyjmujemy oznaczenia

$$(37) \quad a^2 = \left| \frac{p_3}{\lambda_1} \right|, \quad b^2 = \left| \frac{p_3}{\lambda_2} \right|.$$

Gdy λ_1, λ_2 i p_3 mają znaki przeciwne, to z równania (36) dostajemy równanie (20). Gdy zaś λ_1 i p_3 mają ten sam znak, to przez odbicie

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = -Z'$$

dostajemy z równania (36) znowu równanie (20).

Jeśli $A_2 < 0$, a więc — wobec (13) — jeśli $\text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2$, podstawienie (37) prowadzi w każdym razie do postaci (21).

2b. $R(\mathfrak{A})=2$ i $R(\mathfrak{A})=3$. Wobec tych równości jest

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad \text{i} \quad \tilde{A} = A = 0;$$

równanie (32) przybiera więc znowu kształt (34). Na mocy (35) jest $p_3 = 0$ i otrzymujemy

$$(38) \quad \lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 + q = 0.$$

Tutaj $q \neq 0$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $R(\mathfrak{A})=2$ wbrew założeniu.

Jeżeli $A_2 > 0$, czyli $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$, to przez podstawienie

$$a^2 = \frac{|\lambda_1|}{|q|}, \quad b^2 = \frac{|\lambda_2|}{|q|}$$

dostajemy postać (22) lub (23) — a więc walec eliptyczny rzeczywisty lub nierzeczywisty — zależnie od tego, czy λ_1 i q mają znaki jednakowe, czy przeciwne. W pierwszym przypadku co najmniej jedna z płaszczyzn współrzędnych musi przeciąć walec wzdłuż stożkowej rzeczywistej, a w drugim przypadku przekroje walca wszystkimi trzema płaszczyznami współrzędnych są krzywymi nierzeczywistymi. Rozstrzygnięcie zatem, który z tych przypadków zachodzi, sprowadza się do zbadania przekrojów kwadryki płaszczyznami układu współrzędnych. Podstawiamy więc po kolei $x=0$, $y=0$, $z=0$ i stosujemy kryteria dla stożkowych (p. § 51, str. 259).

Jeżeli zaś $A_2 < 0$, czyli $\text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2$, to przez podstawienie

$$a^2 = \left| \frac{q}{\lambda_1} \right|, \quad b^2 = -\left| \frac{q}{\lambda_2} \right|$$

dochodzimy do równania (24).

2c. $R(\mathfrak{A})=2$ i $R(\mathfrak{A})=2$. Wobec pierwszej z tych równości jest

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0$$

i, podobnie jak w poprzednim przypadku, dochodzimy do równania (38). Wobec drugiej z tychże równości jest $q=0$ i dostajemy

$$\lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 = 0.$$

Jeżeli $A_2 > 0$, czyli $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$, to przez podstawienie

$$a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$$

dostajemy równanie (25).

Jeżeli zaś $A_2 < 0$, czyli $\text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2$, to przez to samo podstawienie dostajemy równanie (26).

3. $R(\mathfrak{A})=1$. Wówczas nie może być równocześnie $R(\mathfrak{A})=4$, bo wobec $R(\mathfrak{A})=1$ każdy z minorów drugiego stopnia macierzy $\mathfrak{A}$ jest równy 0; zatem każdy wyznacznik trzeciego stopnia utworzony z trzech pierwszych kolumn macierzy $\mathfrak{A}$ też jest równy 0 i rozwijając $|\mathfrak{A}|$ według czwartej kolumny otrzymalibyśmy 0, wbrew założeniu, że $R(\mathfrak{A})=4$.

Pozostają zatem do rozpatrzenia następujące trzy podprzypadki:

3a. $R(\mathfrak{U})=1$ i $R(\tilde{\mathfrak{U}})=3$, skąd $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2=\lambda_3=0$. Równanie kwadryki (31) można wówczas sprowadzić do postaci

$$(39) \quad \lambda_1 \xi^2 + 2p_2 \eta + 2p_3 \zeta + q = 0.$$

Liczby p_2 i p_3 nie mogą zniknąć równocześnie, gdyż $R(\tilde{\mathfrak{U}})=3$. Obróćmy układ współrzędnych dookoła osi ξ o kąt φ określony przez równość

$$\cos \varphi = \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + p_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{p_3}{\sqrt{p_2^2 + p_3^2}}.$$

Miedzy współrzędnymi punktu w obu układach zachodzą zależności

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta \cos \varphi + \zeta \sin \varphi, \quad \zeta' = -\eta \sin \varphi + \zeta \cos \varphi.$$

Powierzchnia (39) ma więc w nowym układzie równanie

$$\lambda_1 \xi'^2 + 2\sqrt{p_2^2 + p_3^2} \eta' + q = 0.$$

Przesunięcie

$$X = \xi' \quad Y = \eta' + \frac{q}{2\sqrt{p_2^2 + p_3^2}}$$

sprowadza równanie (39) do kształtu

$$\lambda_1 X^2 + 2\sqrt{p_2^2 + p_3^2} Y = 0,$$

tj. do kształtu (27).

3b. $R(\mathfrak{U})=1$ i $R(\tilde{\mathfrak{U}})=2$. Wówczas otrzymujemy znowu równanie (39). Ponieważ $R(\tilde{\mathfrak{U}})=2$, więc $p_2=p_3=0$ i $q \neq 0$, wobec czego dostajemy

$$(40) \quad \lambda_1 \xi^2 + q = 0.$$

Podstawienie

$$a^2 = \left| \frac{q}{\lambda_1} \right|$$

prorowadzi do postaci (28) lub (29) zależnie od tego, czy λ_1 i q mają znaki przeciwne, czy zgodne. W pierwszym przypadku równanie (40) przedstawia parę płaszczyzn równoległych rzeczywistych, a w drugim — parę płaszczyzn równoległych nierzeczywistych, nie zawierających ani jednego punktu rzeczywistego. W pierwszym przypadku

co najmniej jedna z osi współrzędnych przebija powierzchnię w punktach rzeczywistych (1), a w drugim żadna. Podstawiając do (1) po kolei $y=z=0$, $x=z=0$ i $x=y=0$, otrzymujemy równania

$$a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0, \quad a_{22}y^2 + 2a_{24}y + a_{44} = 0, \quad a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Oznaczając ich wyróżniki przez

$$(41) \quad \Delta_{11} = a_{11}a_{44} - a_{14}^2, \quad \Delta_{22} = a_{22}a_{44} - a_{24}^2, \quad \Delta_{33} = a_{33}a_{44} - a_{34}^2,$$

widzimy, że równanie (7) przedstawia parę płaszczyzn rzeczywistych, gdy co najmniej jedna z liczb (41) jest ujemna. W przeciwnym razie obie płaszczyzny są nierzeczywiste.

3c. $R(\mathfrak{U})=1$ i $R(\tilde{\mathfrak{U}})=1$. Wówczas otrzymujemy też równanie (40). Wobec $R(\tilde{\mathfrak{U}})=1$ jest $q=0$ i równanie ma kształt $\eta^2=0$ czyli postać (30).

Rozpatrzyliśmy dotychczas przypadki, gdy kwadryka daje się przedstawić w postaci (7). Jeśli tak nie jest, to w wielomianie (1) znikają wszystkie współczynniki formy $\varphi(x, y, z)$, a więc $R(\mathfrak{U})=0$ i kwadryka ma wówczas równanie

$$(42) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4(2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}).$$

Dostajemy

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

a więc $R(\tilde{\mathfrak{U}}) \leq 2$.

Jeśli $R(\mathfrak{U})=2$, to jedna z liczb a_{14} , a_{24} , a_{34} nie znika i równanie (42) przedstawia płaszczyznę w ∞ i płaszczyznę właściwą. Biorąc płaszczyznę

$$2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0$$

za płaszczyznę $X_1=0$ nowego układu współrzędnych, otrzymujemy równanie tej pary płaszczyzn w postaci $X_1X_4=0$.

Jeśli zaś $R(\mathfrak{U})=1$, to $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$ i równanie (42) przedstawia płaszczyznę podwójną w ∞ .

Powyższa klasyfikacja metryczna kwadryk przedstawiona jest w tablicy III.

TABLICA III

$R(\mathfrak{U})$	$R(\mathfrak{U})$	Podprzypadek	Postać kanoniczna	Typ kwadryki
3	4	$\tilde{A} < 0$ i $A_2 > 0$ i $A_1 A_3 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	elipsoida rzeczywista
3	4	$\tilde{A} > 0$ i $A_2 > 0$ i $A_1 A_3 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	elipsoida nierzeczywista
3	4	$\tilde{A} > 0$ i $A_2 \leq 0$ lub $A_1 A_3 \leq 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	hiperboloida jednopowłokowa
3	4	$\tilde{A} < 0$ i $A_2 \leq 0$ lub $A_1 A_3 \leq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	hiperboloida dwupowłokowa
3	3	$A_2 \leq 0$ lub $A_1 A_3 \leq 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	stożek rzeczywisty
3	3	$A_2 > 0$ i $A_1 A_3 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	stożek nierzeczywisty
2	4	$A_2 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	paraboloida eliptyczna
2	4	$A_2 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	paraboloida hiperboliczna
2	3	$A_2 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	walec eliptyczny *
2	3		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	walec nierzeczywisty *
2	3	$A_2 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	walec hiperboliczny
2	2	$A_2 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	para płaszczyzn rzeczywistych nierównoległych
2	2	$A_2 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	para płaszczyzn nierzeczywistych nierównoległych
1	3		$y^2 - 2px = 0$	walec paraboliczny
1	2	$A_{11} < 0$ lub $A_{22} < 0$ lub $A_{33} < 0$	$y^2 - a^2 = 0$	para płaszczyzn rzeczywistych równoległych
1	2	$A_{11} > 0$ i $A_{22} > 0$ i $A_{33} > 0$	$y^2 + a^2 = 0$	para płaszczyzn nierzeczywistych równoległych
1	1		$y^2 = 0$	płaszczyzna właściwa podwójna
0	2		$X_1 X_4 = 0$	płaszczyzna właściwa i płaszczyzna w ∞
0	1		$x_4^2 = 0$	płaszczyzna podwójna w ∞

* zależnie od tego, czy przekroje płaszczyznami współrzędnych są rzeczywiste czy nie.

3. Klasyfikacja afiniczna kwadryk. Podobnie jak w § 53, dowodzi się, że każde dwie kwadryki, które występują w jednym wierszu tablicy III, są afinicznie przystające. W szczególności, każdą elipsoidę, hiperboloidę i paraboloidę eliptyczną można otrzymać przez przekształcenie afiniczne z obrotowej.

Przy przekształceniach afinicznych zespolonych otrzymujemy mniejszą ilość typów. Są one zebrane w tablicy IV. Klasyfikację tę przeprowadza się analogicznie jak klasyfikację stożkowych w § 53.

TABLICA IV

$R(\mathfrak{U})$	$R(\mathfrak{U})$	Postać kanoniczna	Typ kwadryki
3	4	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	kwadryka środkowa rzędu 4
2	4	$x^2 + y^2 - 2z = 0$	paraboloida
3	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	stożek
2	3	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	walec o dwóch prostych w ∞
1	3	$y^2 - 2px = 0$	walec paraboliczny
2	2	$x^2 + y^2 = 0$	para płaszczyzn właściwych nierównoległych
1	2	$y^2 + 1 = 0$	para płaszczyzn równoległych
1	1	$y^2 = 0$	płaszczyzna właściwa podwójna
0	2	$x_1 x_4 = 0$	płaszczyzna właściwa i płaszczyzna w ∞
0	1	$x_4^2 = 0$	płaszczyzna podwójna w ∞

Kwadryki występujące w tablicy IV w wierszach 1-5 nazywają się *właściwymi*, a pozostałe — *niewłaściwymi*.

Kwadryki niewłaściwe rozpadają się na płaszczyznę.

Udowodnimy, że kwadryki właściwe nie zawierają płaszczyzn.

W tym celu wykażemy wpierw, że na to, by równanie (6) przedstawiało kwadrykę niewłaściwą, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(43) f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4).$$

Ponieważ dostateczność warunku (43) jest oczywista, udowodnimy jedynie jego konieczność. Załóżmy więc, że powierzchnia o równaniu (6) zawiera płaszczyznę

$$(44) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0.$$

Niech np. $a_1 \neq 0$. Przekształcenie liniowe

$$(45) \quad X_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4, \quad X_k = x_k, \quad \text{gdzie } k=2, 3, 4,$$

przeprowadza formę $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ w formę $g(X_1, X_2, X_3, X_4)$:

$$(46) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv g(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Ponieważ w myśl założenia płaszczyzna (44) leży na powierzchni (6), więc z (44) wynika (6). Wobec (45) i (46) wynika stąd, że równość $X_1 = 0$ pociąga za sobą równość

$$g(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

czyli że

$$a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + a_{44}X_4^2 + 2a_{23}X_2X_3 + 2a_{24}X_2X_4 + 2a_{34}X_3X_4 = 0$$

dla wszelkich wartości X_2, X_3, X_4 . Zatem

$$a_{kl} = 0 \quad \text{dla } k, l = 2, 3, 4,$$

wobec czego

$$(47) \quad g(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv X_1(a_{11}X_1 + 2a_{12}X_2 + 2a_{13}X_3 + 2a_{14}X_4).$$

Na mocy (45) otrzymujemy stąd (43), c. b. d. o.

Teraz wykażemy z kolei, że *na to, by kwadryka zawierała płaszczyznę, potrzeba i wystarcza, żeby równocześnie*

$$(48) \quad R(\mathfrak{A}) \leq 2 \quad \text{i} \quad R(\tilde{\mathfrak{A}}) \leq 2.$$

Wystarczalność tego warunku widoczna jest z tablicy IV. Dla dowodu jego konieczności zauważmy, że — jak dowiedliśmy — gdy kwadryka zawiera płaszczyznę, to zachodzi warunek (43). Przez przekształcenie (45) sprowadzamy go do postaci (47). Przy tym przekształceniu nie ulegają zmianie rzędy macierzy $\mathfrak{A}$ i $\tilde{\mathfrak{A}}$. Dla formy (47) jest

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a więc zachodzi warunek (48), c. b. d. o.

Wreszcie, według ostatniego twierdzenia wynika już wprost z tablicy IV, że żadna z kwadryk właściwych nie zawiera płaszczyzny.

Wynika stąd w szczególności, że przekrój kwadryki rzędu 4 (p. str. 324) lub stożka dowolną płaszczyzną właściwą jest stożkową.

Jeżeli kwadryka i płaszczyzna są rzeczywiste, a przekrój nie zawiera prostej, to jest on stożkową właściwą (rzeczywistą lub nierzeczywistą).