

Istotnie, gdy

$$x = b_{11}x' + b_{12}y' + c_1, \quad y = b_{21}x' + b_{22}y' + c_2,$$

to między wielomianem $g(x, y)$ a wielomianem przekształconym $h(x, y)$ zachodzi związek

$$h(x', y') = g(b_{11}x' + b_{12}y' + c_1, b_{21}x' + b_{22}y' + c_2) = g(x, y).$$

Zatem

$$\frac{\partial h}{\partial x'} = b_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y'} = b_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Plekroć zachodzą równości (25), muszą więc zajść równości

$$h(x', y') = \frac{\partial h}{\partial x'}(x', y') = \frac{\partial h}{\partial y'}(x', y') = 0, \quad \text{c. b. d. o. })$$

ROZDZIAŁ XII

WŁASNOŚCI METRYCZNE STOŻKOWYCH

§ 56. Osie

Będziemy rozpatrywali obecnie stożkowe rzeczywiste.

Jeśli kierunek k jest prostopadły do kierunku sprzężonego k' , to oba kierunki nazywamy *głównymi*.

Średnicę, której kierunek jest główny, nazywamy *osią stożkowej*.

Oś stożkowej jest jej osią symetrii i na odwrót.

Każda bowiem średnica połowi cięciwy mające kierunek z nią sprzężony (p. § 55, str. 276). Zatem oś połowi cięciwy do niej prostopadłe, czyli jest osią symetrii.

Na odwrót, gdy prosta jest osią symetrii stożkowej, to połowi cięciwy do niej prostopadłe, a więc jest średnicą sprzężoną z kierunkiem do niej prostopadłym.

Ze względu na znaczenie osi symetrii w geometrii krzywych podamy tu metodę wyznaczania kierunków głównych. Ograniczymy się do układu prostokątnego współrzędnych; metodą, którą podamy, daje się jednak uogólnić z łatwością na dowolne układy ukośno-kątne.

Załóżmy, że kierunek $\alpha:\beta$ jest główny; wobec tego jest on prostopadły do sprzężonego z nim kierunku $\alpha':\beta'$. Zachodzą zatem równości

$$(1) \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0, \\ (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\alpha' + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\beta' = 0$$

(p. wzór (9) z § 55, str. 275). Ponieważ liczby α' i β' nie znikają równocześnie, więc

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta & a_{21}\alpha + a_{22}\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Na odwrót, gdy zachodzi równość (2), to istnieją liczby α' i β' nie znikające równocześnie i spełniające równość (1); wówczas $\alpha:\beta$ jest kierunkiem głównym.

Z równości (2) otrzymujemy równanie wyznaczające wszystkie kierunki główne:

$$(3) \quad a_{12}a^2 + (a_{22} - a_{11})\alpha\beta - a_{12}\beta^2 = 0.$$

Wyróżnikiem tego równania jest liczba D , dla której

$$(4) \quad 4D = -4(a_{22} - a_{11})^2 - 4a_{12}^2.$$

Ponieważ $D \leq 0$, więc równanie (3) ma zawsze rozwiązania rzeczywiste.

Gdy $D=0$, to na mocy (4) jest $a_{11}=a_{22}$ i $a_{12}=0$; krzywa jest wówczas kołem. W tym przypadku w równaniu (3) znikają wszystkie współczynniki, a więc jest ono spełnione dla każdego kierunku $\alpha:\beta$ płaszczyzny. Jest to geometrycznie oczywiste, gdyż każda średnica koła jest jego osią symetrii.

Dla pozostałych stożkowych jest $D < 0$, mają więc one po dwa kierunki główne. Niech φ będzie kątem, jaki kierunek główny tworzy z osią Ox . Wówczas

$$\alpha:\beta = \cos \varphi : \sin \varphi,$$

skąd przez podstawienie do równania (3) dostajemy

$$a_{12} \cos^2 \varphi + (a_{22} - a_{11}) \cos \varphi \sin \varphi - a_{12} \sin^2 \varphi = 0$$

czyli

$$2a_{12} \cos 2\varphi = (a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi.$$

W przypadku, gdy $a_{11} \neq a_{22}$, jest więc

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Równanie to wyznacza oba kierunki główne: istotnie, rozwiązania φ_1 i φ_2 równania (5) o wartościach od 0 do π związane są zależnością

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2.$$

W przypadku zaś, gdy $a_{11} = a_{22}$, jest $\varphi = \pi/4$ i $3\pi/4$.

Dla paraboli jeden tylko z dwóch kierunków głównych jest kierunkiem średnicy. Parabola ma zatem tylko jedną oś symetrii.

Punkty przecięcia stożkowej z jej osią nazywamy *wierzchołkami stożkowej*.

W układzie współrzędnych, w którym osią Ox jest oś paraboli, a osią Oy — styczna w wierzchołku, parabola ma równanie

$$(6) \quad y^2 - 2px = 0$$

(wzór (15) z § 55, str. 278). Na odwrót, gdy parabola ma w układzie współrzędnych prostokątnych równanie postaci (6), to oś Ox tego układu jest osią symetrii paraboli, a oś Oy jest styczną do tej stożkowej w wierzchołku. Wynika stąd, że *istnieje dokładnie jeden układ współrzędnych prostokątnych, w którym parabola ma równanie kształtu (6)*.

Podobnie, elipsa i hiperbola mają w układzie swych osi równania

$$(7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{ey^2}{b^2} = \pm 1, \quad \text{gdzie } e = \begin{cases} +1 & \text{dla elipsy,} \\ -1 & \text{dla hiperboli} \end{cases}$$

(wzory (12)-(14) z § 55, str. 277), i z wyjątkiem przypadku koła *istnieje dokładnie jeden układ prostokątny współrzędnych, w którym krzywe te mają równania postaci (7)* (poza ewentualną zamianą osi Ox i Oy).

Wyznaczanie kierunku osi paraboli z równania (3) lub (5) nie jest wygodne, gdyż równanie to prócz kierunku osi daje jeszcze kierunek do niej prostopadły. Wygodniej wyznaczać ten kierunek z równania

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

(p. § 55, str. 276).

§ 57. Własności metryczne elipsy rzeczywistej

1. Ogniska i kierownice. Niech osie elipsy rzeczywistej będą osiami układu współrzędnych; ma więc ona w tym układzie równanie

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

W § 50 udowodniliśmy (p. str. 245), że w układzie współrzędnych, którego oś Ox przechodzi przez którekolwiek z ognisk prostopadle do kierownicy, a oś Oy jest odpowiednio dobrana, elipsa ma równanie postaci (1). Wynika stąd na mocy ostatniego twierdzenia z § 56, że oba ogniska leżą na jednej osi, prostopadłej do obu kierownic. W oznaczeniach z § 50 jest

$$(2) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

i ogniska mają współrzędne $-c, 0$ i $c, 0$. Zatem

$$(3) \quad 0 < b < a.$$

Na mocy równania (1) jest $|x| \leq a$ i $|y| \leq b$. Elipsa jest więc wpisana w prostokąt o bokach $2a$ i $2b$.

Liczby $2a$ i $2b$ nazywają się *długościami osi* elipsy. Liczba a nazywa się *półosią wielką*, a liczba b — *półosią małą*.

Kierownice elipsy mają równania

$$(4) \quad x = \pm \frac{a^2}{c}.$$

Jak wiemy z § 48 (p. str. 242), elipsa jest miejscem geometrycznym punktów, których suma odległości od obu ognisk jest stała i wynosi $2de$, gdzie d jest odległością kierownic.

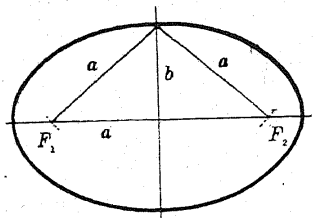
Wobec (4) jest

$$d = \frac{2a^2}{c},$$

stad zaś i z równości (2) wynika, że

$$2de = \frac{2a^2}{c} \cdot \frac{c}{a} = 2a.$$

Zatem *elipsa jest miejscem geometrycznym punktów, których suma odległości od ognisk jest równa $2a$.*



Rys. 98

Twierdzenie to pozwala w dogodny sposób kreślić elipsę o danych osiach a i b . Jak wskazuje pierwsza z równości (2), ogniska możemy skonstruować, zakreślając z końca średnicy o długości $2b$ dwa łuki kół o promieniach a (rys. 98). Punkty ich przecięcia z osią $2a$ wyznaczają ogniska.

Wbijając w ogniska szpilki, na których rozwiązana jest nitka o długości $2a$, i napinając nitkę końcem ołówka, którym wodzimy po papierze, dostajemy elipsę.

Odcinki łączące punkt na elipsie z ogniskami, nazywają się *promieniami wodzącymi* tego punktu.

Niech d_1 i d_2 będą odległościami punktu (x, y) elipsy od jej kierownic. Na mocy (4) jest

$$(5) \quad r_1 = ed_1 = e\left(\frac{a^2}{c} + x\right) = a + ex, \quad r_2 = ed_2 = e\left(\frac{a^2}{c} - x\right) = a - ex.$$

2. Twierdzenia Apoloniusza. W § 15 udowodniliśmy, że elipsa o półosiach a i b , gdzie $a < b$, jest rzutem prostokątnym koła o promieniu a , leżącego na płaszczyźnie, która tworzy z płaszczyzną elipsy kąt θ spełniający równanie

$$\cos \theta = b/a.$$

Wyprowadziliśmy stąd przedstawienie parametryczne elipsy (p. str. 76)

$$(6) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Niech P będzie punktem elipsy o współrzędnych (6), a P' — punktem koła, którego rzutem jest punkt P . Wówczas kąt φ ze wzorów (6) jest to kąt, jaki tworzy promień OP' z tą średnicą koła, która jest równoległa do płaszczyzny elipsy. Ponieważ średnice sprzężone są niezmiennikami rzutów równoległych (jako przekształceń afinicznych), więc średnice sprzężone elipsy są rzutami średnic sprzężonych koła. W kole średnice sprzężone są prostopadłe, bo miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych jest średnica prostopadła do tych cięciw. Zatem:

Średnice sprzężone elipsy są rzutami prostopadłych średnic koła.

Oznaczmy teraz przez $2a'$ długość średnicy przechodzącej przez punkt P , a przez $2b'$ — długość średnicy z nią sprzężonej. Niech ta średnica sprzężona przecina elipsę w punkcie P_1 (rys. 99).

Jeśli w przedstawieniu (6) punkt P odpowiada parametrowi φ , to punkt P_1 odpowiada — jak dowiedliśmy przed chwilą — parametrowi $\varphi + \pi/2$ lub $\varphi - \pi/2$.

Rozpatrzmy np. pierwszy przypadek (drugi jest analogiczny). Wówczas dla punktu P_1 jest

$$x_1 = a \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin \varphi, \quad y_1 = b \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = b \cos \varphi.$$

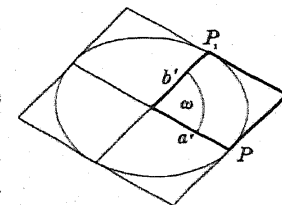
Stąd i z równań (6) dostajemy

$$a'^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi, \quad b'^2 = x_1^2 + y_1^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi.$$

Zatem

$$(7) \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Jest to tzw. *pierwsze twierdzenie Apoloniusza dla elipsy*, w myśl którego *suma kwadratów długości średnic sprzężonych elipsy jest stała*.



Rys. 99

Weźmy pod uwagę równoległobok opisany na elipsie, o bokach równoległych do dwóch średnic sprzężonych (jest on przedstawiony również na rys. 99). Równoległobok ten jest rzutem analogicznego równoległoboku dla koła, a więc kwadratu opisanego na kole. Pole takiego kwadratu wynosi $4a^2$, zatem jego rzut ma pole $4a^2 \cos \vartheta = 4a^2 b/a = 4ab$. Pole tego rzutu jest więc stałe.

Niech ω będzie kątem między średnicami sprzężonymi elipsy. Wówczas

$$(8) \quad a'b' \sin \omega = ab.$$

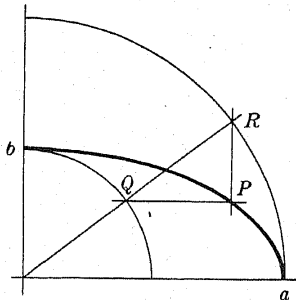
Udowodniliśmy tzw. *drugie twierdzenie Apoloniusza dla elipsy*, w myśl którego *pole równoległoboku opisanego na elipsie o bokach równoległych do średnic sprzężonych jest stałe*.

3. Konstrukcje. Z równań (6) wynika następująca prosta konstrukcja punktów elipsy za pomocą cyrkla i liniału.

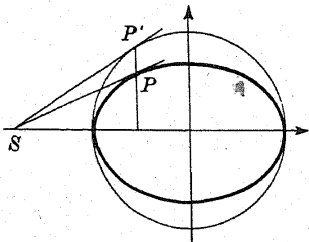
Ze środka elipsy kreślimy dwa koła o promieniach a i b . Jeżeli Q i R są ich końcami, to równoległe do osi elipsy przez punkty Q i R przecinają się w punkcie P elipsy (rys. 100).

Rys. 101 przedstawia konstrukcję stycznej do elipsy za pomocą cyrkla i liniału, gdy dany jest punkt P elipsy i jej osie. Oto uzasadnienie tej konstrukcji:

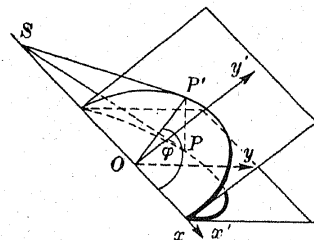
Niech punkt P elipsy będzie rzutem punktu P' koła o tym samym środku O i o promieniu a (rys. 102). Rzutem stycznej do koła w punkcie P' jest styczna do elipsy w punkcie P . Obie styczne przecinają się w punkcie S wspólnej krawędzi płaszczyzny zawierającej koło i płaszczyzny zawierającej elipsę. Gdy obrócimy płaszczyznę koła



Rys. 100



Rys. 101



Rys. 102

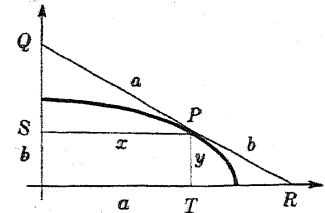
dokoła tej krawędzi tak, aby pokryła się z płaszczyzną elipsy, to prosta PP' będzie prostopadła do krawędzi.

Mając zatem dany punkt P elipsy, kreślimy koło współśrodkowe z elipsą o promieniu a . Przez P prowadzimy równoległą do małej osi elipsy i znajdujemy punkt P' przecięcia się tej równoległej z kołem. Konstruujemy styczną do koła w P' i punkt S jej przecięcia się z wielką osią elipsy. Prosta PS jest styczna do elipsy w punkcie P .

W kreśleniach praktycznych często używany jest jeszcze jeden sposób wyznaczania punktów elipsy, gdy dane są długości $2a$ i $2b$ jej osi głównych.

Weźmy pod uwagę odcinek o długości $a+b$. Umieścimy go tak, by końce spoczywały na osiach elipsy (rys. 103). Wówczas punkt P , dla którego $|PQ|=a$ i $|PR|=b$, leży na elipsie, bo z trójkątów podobnych TRP i SPQ mamy

$$\frac{y}{b} = \frac{|SQ|}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \text{ skąd } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

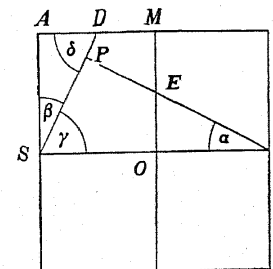


Rys. 103

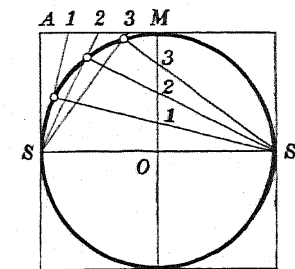
W praktyce na pasku papieru znaczy się odcinki $|PQ|=a$ i $|PR|=b$, a następnie porusza się tym paskiem tak, by punkty Q i R zawsze były na osiach. W każdym położeniu zaznacza się punkt P .

Nietrudno też zbudować punkty elipsy, gdy dane są jej średnice sprzężone. Konstrukcja ta opiera się na następującym rozumowaniu.

Weźmy pod uwagę kwadrat podzielony na cztery równe kwadraty (rys. 104) i wyznaczmy tak punkty D i E , by $|AD|=|OE|$.



Rys. 104

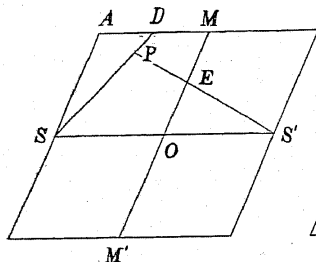


Rys. 105

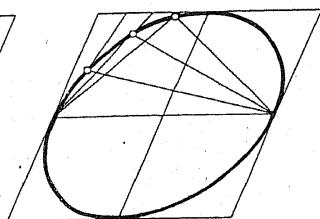
Wówczas punkt przecięcia P prostych SD i $S'E$ leży na kole wpisanym w kwadrat. Dla dowodu zauważmy, że trójkąty $OS'E$ i SAD są przystające. Zatem $\alpha = \beta$, skąd $\gamma = \delta = \pi/2 - \beta = \pi/2 - \alpha$. Kąt przy P jest zatem prosty, a więc P leży na kole o średnicy SS' .

Wynika stąd następująca konstrukcja punktów koła wpisanego w kwadrat: dzielimy odcinek OM średnicy na p równych części i numerujemy je w kierunku od O do M (rys. 105). To samo robimy z odcinkiem boku AM , numerując punkty podziału od A do M . Proste łączące S z punktami boku i proste łączące S' z punktami średnicy o tym samym numerze przecinają się na kole.

Utwórzmy teraz rzut równoległy figur z rysunków 104 i 105. Średnice koła przejdą w średnice sprzężone, kwadrat — w równoległobok opisany na elipsie, o bokach równoległych do tych średnic. Otrzymujemy figury przedstawione na rys. 106 i 107, z których jest już bezpośrednio widoczna konstrukcja punktów elipsy, gdy dane są średnice sprzężone.



Rys. 106



Rys. 107

Ponieważ figury przedstawione na rys. 106 i 107 zostały otrzymane przez rzut figur z rys. 104 i 105, więc wynika stąd twierdzenie:

Jeśli na średnicach sprzężonych elipsy zbudujemy równoległobok oraz wyznaczymy punkty E i D tak, by $(AM, D) = (OM, E)$, to proste SD i $S'E$ przetną się w punkcie leżącym na elipsie, której średnicami sprzężonymi są odcinki SS' i MM' .

4. Biegunowe. Elipsa (1) ma we współrzędnych jednorodnych równanie

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0.$$

Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{b^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_3.$$

Biegunowa punktu $P(y_1, y_2, y_3)$ ma więc równanie (p. str. 268)

$$\frac{y_1 x_1}{a^2} + \frac{y_2 x_2}{b^2} - y_3 x_3 = 0.$$

Jeśli zatem punkt P jest punktem właściwym o współrzędnych niejednorodnych (x_0, y_0) , to jego biegunowa ma w tych współrzędnych równanie

$$(9) \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

W przypadku, gdy punkt $P(x_0, y_0)$ leży na elipsie, równanie to przedstawia styczną w tym punkcie.

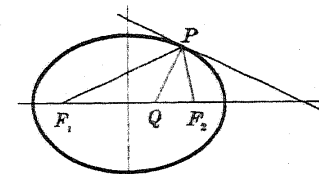
5. Normalna. Normalną do krzywej nazywamy prostą do stycznej, przechodzącą przez punkt styczności.

Udowodnimy, że normalna do elipsy w punkcie P jest dwusieczną kąta między promieniami wodzącymi r_1 i r_2 tego punktu.

Z twierdzenia tego wynika na podstawie prawa optyki o równości kąta padania i kąta odbicia, że promienie świetlne z ogniska F_1 po odbiciu się od zwierciadła eliptycznego skupiają się w drugim ognisku F_2 .

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia normalnej w punkcie $P(x_0, y_0)$ z wielką osią elipsy (rys. 108). Ponieważ równanie (9) przedstawia styczną, więc normalna ma równanie

$$\frac{x - x_0}{a^2} = \frac{y - y_0}{b^2}.$$



Rys. 108

Podstawiając tu $y=0$, otrzymujemy odcietą punktu Q , a mianowicie $x_1 = x_0(1 - b^2/a^2) = x_0 c^2/a^2$, skąd

$$|F_1 Q| = c + \frac{x_0 c^2}{a^2} = \frac{c}{a}(a + ex_0), \quad |F_2 Q| = \left| \frac{x_0 c^2}{a^2} - c \right| = \frac{c}{a}(a - ex_0).$$

Na mocy równań (5) mamy więc

$$|F_1 Q| : |F_2 Q| = r_1 : r_2,$$

a stąd wynika równość kątów $F_1 P Q$ i $F_2 P Q$, c. b. d. o.

6. Wnętrze i zewnątrz. W § 48 zostało określone wnętrze i zewnątrz stożkowej. Dowiedliśmy tam, że odcinek łączący dwa punkty wnętrza stożkowej leży całkowicie wewnątrz niej i że każde dwa punkty zewnątrz stożkowej dają się połączyć łamaną, leżącą całkowicie zewnątrz niej. Ognisko leży wewnątrz, a kierownica zewnątrz elipsy.

Udowodnimy teraz, że

$$(10) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \begin{cases} < 0 & \text{dla punktów wnętrza,} \\ > 0 & \text{dla punktów zewnątrz.} \end{cases}$$

W tym celu przyjmijmy oznaczenie

$$f(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

W ognisku $F(c, 0)$ jest

$$f(c, 0) = \frac{c^2}{a^2} - 1 = -\frac{b^2}{a^2} < 0.$$

Niech teraz $P(x_1, y_1)$ będzie dowolnym punktem wnętrza. Ponieważ punkt ten nie leży na elipsie, więc $f(x_1, y_1) \neq 0$. Przypuśćmy, że $f(x_1, y_1) > 0$. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła na odcinku łączącym P z ogniskiem F . Jeżeli więc na krańcach tego odcinka wartości jej mają znaki przeciwne, to w pewnym punkcie wewnętrznym odcinka FP musiałoby być $f(x, y) = 0$, chociaż żaden punkt wewnętrzny tego odcinka nie leży na elipsie.

Podobnie dowodzi się drugiej z nierówności (10), biorąc pod uwagę, że w punkcie przecięcia kierownicy z osią x jest

$$f\left(\frac{a^2}{c}, 0\right) = \frac{a^2}{c^2} - 1 = \frac{b^2}{c^2} > 0$$

i że każdy punkt zewnątrz można z tym punktem połączyć łamaną nie przecinającą elipsy.

Udowodnimy, że z każdego punktu leżącego zewnątrz elipsy można poprowadzić do niej dwie styczne rzeczywiste, z punktu zaś leżącego wewnątrz — dwie styczne nierzeczywiste.

W tym celu należy zbadać punkty przecięcia biegunowej (9) punktu $P_0(x_0, y_0)$ z elipsą (1). Eliminując y z obu równań, otrzymujemy

$$(11) \quad \frac{1}{a^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) x^2 - \frac{2x_0}{a^2} x + \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0.$$

Niech D będzie wyróżnikiem tego równania; wówczas

$$a^2 D = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2} \right) - \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right).$$

Jeśli zatem punkt P leży wewnątrz elipsy, to $D > 0$ i równanie (11) ma oba rozwiązania nierzeczywiste. Jeśli zaś punkt leży zewnątrz elipsy, to $D < 0$ i mamy dwa punkty rzeczywiste stycznych.

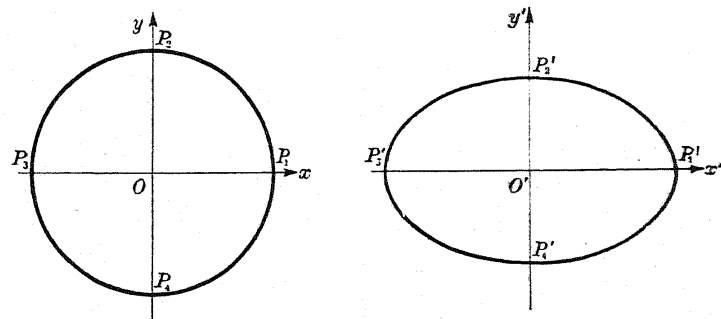
Wnętrze i zewnątrz stożkowej było określone w § 48 tylko dla punktów właściwych (str. 236). Przyjmując ostatnio udowodnioną własność za definicję dla punktów w ∞ , otrzymujemy określenie wnętrza i zewnątrz stożkowej w pełnej płaszczyźnie rzutowej.

Pojęcia wnętrza i zewnątrz stożkowej są niezmiennikami przekształceń afinicznych rzeczywistych. Przekształcenie takie przeprowadza bowiem punkt, z którego można poprowadzić dwie styczne rzeczywiste do stożkowej w punkt, z którego można poprowadzić dwie styczne rzeczywiste do jej obrazu.

(7. Pewna własność przekształceń afinicznych. Niech T będzie przekształceniem afinicznym płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' . Udowodnimy, że w płaszczyznach tych można tak dobrać układy współrzędnych prostokątnych Oxy i $O'x'y'$, by przekształcenie T wyrażało się przez równości

$$(12) \quad x' = \sigma x, \quad y' = \tau y, \quad \text{gdzie } \sigma > 0 \text{ i } \tau > 0.$$

W tym celu weźmy pod uwagę na płaszczyźnie Π dowolne koło K o środku O i promieniu r . Obrazem jego jest pewna elipsa K' o środku O' (rys. 109).



Rys. 109

Obierzmy za układ współrzędnych $O'x'y'$ układ osi tej elipsy. Osie te są obrazami dwóch średnic sprzężonych koła czyli dwóch średnic prostopadłych; obierzmy je za osie układu Oxy .

Oznaczmy punkty przecięcia osi Ox z kołem K przez P_1 i P_2 , a ich obrazy przez P'_1 i P'_2 . Nadajmy osiom Ox i $O'x'$ takie zwroty, by punkt P_1 miał współrzędne $(r, 0)$, punkt P'_1 współrzędne $(a, 0)$ itd. Wówczas przekształcenie afiniczne

$$(13) \quad x' = \frac{a}{r}x, \quad y' = \frac{b}{r}y$$

przeprowadza P_k w P'_k dla $k=1, 2, 3, 4$. Ponieważ przekształcenie (13) przeprowadza cztery punkty w tę samą czwórkę punktów, co przekształcenie T , więc na mocy twierdzenia dowiedzonego w § 29, str. 143, jest ono identyczne z T , c. b. d. o.

Punkt O był w tym dowodzie dowolnym punktem płaszczyzny. Wynika stąd, że jeśli przekształcenie T nie jest podobieństwem, to w każdym pęku o wierzchołku właściwym O istnieje dokładnie jedna para prostych prostopadłych, przechodząca w parę prostych prostopadłych. Zatem:

Jeśli przekształcenie afiniczne przeprowadza dwie pary prostych prostopadłych o wspólnym punkcie przecięcia w parę prostych prostopadłych, to jest podobieństwem.

Jest to uogólnienie twierdzenia z § 29, str. 148, w myśl którego jeśli przekształcenie afiniczne przeprowadza choćby jedno koło w koło, to jest podobieństwem. Założenie bowiem, że jedno koło o środku O przechodzi w koło, jest równoważne założeniu, że proste prostopadłe przecinające się w O przechodzą w proste prostopadłe (średnice sprzężone koła są prostopadłe).

Przekształcenie

$$x' = \sigma x, \quad y' = y$$

płaszczyzny w samą siebie nazywa się *dylatacją* czyli *rozszerzeniem* w kierunku osi Ox o współczynniku rozszerzenia σ .

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że każde przekształcenie afiniczne płaszczyzny w samą siebie daje się złożyć z izometrii (przeprowadzającej układ osi Oxy w układ osi $O'x'y'$) i dwóch dylatacji.

Jeśli obie dylatacje mają ten sam współczynnik rozszerzenia, to przekształcenie jest podobieństwem.)

§ 58. Własności metryczne hiperboli

1. Ogniska i kierownice. Hiperbola w układzie swych osi jako układzie współrzędnych ma równanie

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Oś Ox przecina hiperbolę w dwóch punktach rzeczywistych $(a, 0)$ i $(-a, 0)$, a oś Oy — w dwóch punktach nierzeczywistych. Dlatego Ox nazywa się *osią rzeczywistą*, a Oy — *nierzeczywistą*.

Oba ogniska hiperboli leżą na osi rzeczywistej; mają one współrzędne $-c, 0$ i $c, 0$. Zachodzą tutaj równości

$$(2) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Kierownice hiperboli mają równania

$$(3) \quad x = -\frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

Hiperbola jest miejscem geometrycznym punktów, których różnica odległości od ognisk wynosi $\pm 2a$. Promienie wodzące hiperboli mają długości

$$(4) \quad r_1 = ed_1 = e\left(x + \frac{a^2}{c}\right) = ex + a, \quad r_2 = ed_2 = e\left(x - \frac{a^2}{c}\right) = ex - a.$$

2. Hiperbola w układzie asymptot. Przyjmijmy asymptoty hiperboli za osie układu współrzędnych. Wówczas środek hiperboli jest początkiem tego układu, a zatem w jej równaniu nie występują wyrazy pierwszego stopnia (p. wzór (5) z § 55, str. 274). Para asymptot jest więc przedstawiona przez równanie

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Ale para ta (jako para osi Ox i Oy) ma równanie $xy = 0$. Zatem $a_{11} = a_{22} = 0$. Dostajemy równanie hiperboli w postaci

$$xy = -\frac{a_{33}}{2a_{12}}.$$

Zmieniając ewentualnie zwrot jednej z osi, widzimy, że w tym układzie współrzędnych możemy przedstawić hiperbolę równaniem

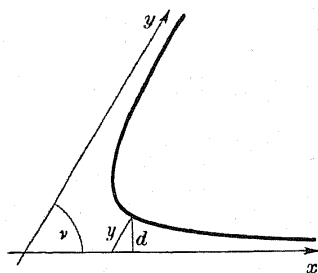
$$(5) \quad xy = k^2,$$

gdzie k jest stałą zależną od hiperboli.

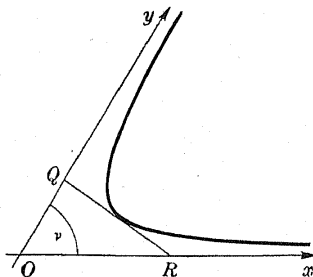
Z przedstawienia tego wynika, że odległość punktu na hiperboli od asymptoty maleje do zera, gdy punkt oddala się nieograniczenie. Mamy bowiem (p. rys. 110)

$$d = y \sin \nu = \frac{k^2 \sin \nu}{x},$$

a więc $d \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow \infty$.



Rys. 110



Rys. 111

Udowodnimy, że pole trójkąta utworzonego przez asymptoty i dowolną styczną jest stałe (p. rys. 111).

Istotnie, styczna ma równanie

$$(6) \quad y_1 x + x_1 y = 2k^2,$$

gdzie (x_1, y_1) jest punktem styczności. Stąd znajdujemy współrzędne punktów R i Q , w których ta styczna przecina osie Ox i Oy . Dostajemy $R\left(\frac{2k^2}{y}, 0\right)$ i $Q\left(0, \frac{2k^2}{x_1}\right)$. Pole trójkąta wyraża się więc wzorem

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k^2}{y_1} \cdot \frac{2k^2}{x_1} \sin \nu = \frac{k^4}{x_1 y_1} \sin \nu = \frac{k^4}{k^2} \sin \nu = k^2 \sin \nu,$$

c. b. d. o.

3. Hiperbola w układzie średnic sprzężonych. Przyjmijmy teraz za osie układu współrzędnych dwie średnice sprzężone. Wówczas hiperbola ma równanie (p. wzór (13) z § 55, str. 277)

$$(7) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Wynika stąd, że z dwóch średnic sprzężonych jedna przecina hiperbolę w punktach rzeczywistych (oś Ox), a druga w punktach nierzeczywistych (oś Oy).

Para asymptot hiperboli (7) ma w przyjętym układzie współrzędnych równanie

$$(8) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0,$$

poszczególne zaś asymptoty mają równania

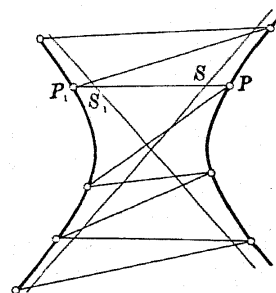
$$(9) \quad \frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0.$$

Asymptoty dzielą płaszczyznę na dwie pary kątów wierzchołkowych. Średnice przecinające hiperbolę w punktach rzeczywistych przebiegają w jednej parze tych kątów, średnice zaś przecinające hiperbolę w punktach nierzeczywistych — w drugiej parze tych kątów (rys. 112).

W równaniach (7) i (8) występują jedynie kwadraty. Wnosimy stąd, że zarówno hiperbola jak para asymptot wycinają na dowolnej prostej równoległej do osi Oy odcinki, które mają wspólny środek, leżący na osi Ox . Stąd wynika w szczególności, że (rys. 112)

$$AB = CD, \quad A'P' = P'B'.$$

A więc: odcinki dowolnej prostej zawarte między hiperbolą a asymptotami są równe. Odcinek stycznej zawarty między asymptotami jest przepołowiony przez punkt styczności.



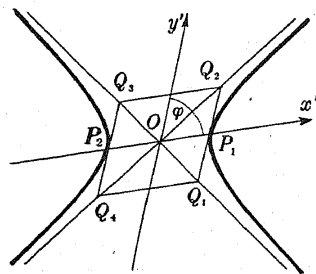
Rys. 112

Wynika stąd następująca prosta konstrukcja punktów hiperboli, gdy dana jest jej para asymptot i jeden punkt P . Przez punkt P prowadzimy dowolną prostą przecinającą parę asymptot w punktach S i S_1 . Wyznaczamy na niej punkt P_1 tak, by $P_1 S_1 = SP$. Wówczas P_1 jest punktem hiperboli. Z otrzymanym punktem postępujemy w ten sam sposób dalej (rys. 113).

Nie podaliśmy dotychczas znaczenia geometrycznego stałych a' i b' w równaniu (7). Stała $2a'$ jest równa odległości punktów przecięcia osi Ox' z hiperbolą. Oś Ox' jest tą ze średnic, która przecina hiperbolę w punktach rzeczywistych.

Stąd liczbę $2a'$ nazywamy długością średnicy rzeczywistej.

Natomiast liczba $2b'$ jest równa długości odcinka stycznej w punkcie P_1 lub P_2 , zawartego między asymptotami (rys. 114).



Rys. 114

Podstawiając bowiem $x=a'$ do (8), dostajemy $y=\pm b'$, skąd wynika, że $|Q_1Q_2|=2b'$.

Niech φ będzie kątem między średnicami sprzężonymi, które przyjęliśmy za osie współrzędnych. Wówczas pole równoległoboku $Q_1Q_2Q_3Q_4$ wynosi $4a'b'\sin\varphi$. Z drugiej strony pole to jest równe poczwórnemu polu trójkąta OQ_1Q_2 , które — jak widzieliśmy (p. str. 296) — jest stałe dla jednej i tej samej hiperboli. Zatem $a'b'\sin\varphi$ jest liczbą

stałą. W szczególności, dla układu osi głównych hiperboli, liczba ta równa jest ab , a tym samym

$$(10) \quad a'b'\sin\varphi=ab.$$

Jest to twierdzenie analogiczne do drugiego twierdzenia Apoloniusza dla elipsy.

Zachodzi również twierdzenie analogiczne do pierwszego twierdzenia Apoloniusza dla elipsy, a mianowicie

$$(11) \quad a'^2-b'^2=a^2-b^2.$$

Istotnie, niech ν będzie kątem między asymptotami. Wówczas

$$OP_1+P_1Q_2=OQ_2, \quad OP_1-P_1Q_2=OQ_1$$

(suma wektorowa), skąd dla iloczynu skalarowego

$$(OP_1+P_1Q_2)(OP_1-P_1Q_2)=OQ_2 \cdot OQ_1,$$

$$|OP_1|^2-|P_1Q_2|^2=|OQ_2| \cdot |OQ_1| \cdot \cos \nu.$$

Zatem

$$(12) \quad a'^2-b'^2=|OQ_2| \cdot |OQ_1| \cdot \sin \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu.$$

Liczba $\frac{1}{2}|OQ_2| \cdot |OQ_1| \cdot \sin \nu$ jest równa polu trójkąta OQ_1Q_2 , a więc jest stała dla danej hiperboli. Zatem ze wzoru (12) wynika równość (11).

Zupełnie podobnie jak dla normalnej do elipsy, dowodzi się, że styczna w punkcie P do hiperboli połowi kąt między promieniami wodzącymi tego punktu.

W § 57 podaliśmy konstrukcję punktów elipsy za pomocą dwóch pęków przecinających się prostych, gdy dane są dwie średnice sprzężone tej elipsy.

Podobną konstrukcję można wykonać dla hiperboli. Pomijamy ją tu jednak jako nie nadającą się do praktycznego użytku, ponieważ wymaga wyznaczania punktów przecięcia się prostych tworzących bardzo ostre kąty. Teoretycznie zbadamy takie konstrukcje szczegółowo w § 90.

4. Wnętrze i zewnątrz. Podobnie jak dla elipsy, dowodzi się dla hiperboli, że z każdego punktu zewnętrznego można poprowadzić do hiperboli dwie styczne rzeczywiste, a z każdego punktu wewnętrznego — dwie styczne zespolone sprzężone.

Dla punktów właściwych wnętrza hiperboli o równaniu (1) jest zbiorem punktów (x,y) określonych przez nierówność

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1<0,$$

a zewnątrz — przez nierówność przeciwną.

Środek hiperboli leży zewnątrz niej.

§ 59. Własności metryczne paraboli

Weźmy pod uwagę w układzie prostokątnym współrzędnych Oxy parabolę o równaniu

$$(1) \quad y^2-2px=0.$$

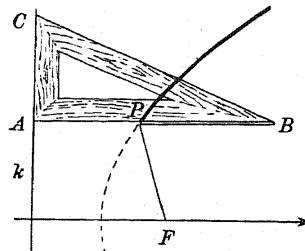
Ośią tej paraboli jest oś Ox . Tak jak poprzednio, wynika stąd, że ognisko paraboli leży na jej osi i że kierownica jest prostopadła do osi. Ognisko paraboli o równaniu (1) ma współrzędne $\frac{p}{e+1}$ i 0, a kierownica ma równanie

$$x=-\frac{p}{e(e+1)}$$

(p. § 50, str. 246). Ponieważ dla paraboli jest $e=1$ (p. § 48, str. 239), więc ognisko paraboli ma współrzędne $p/2$ i 0, a kierownica ma równanie

$$(2) \quad x=-\frac{p}{2}.$$

Izydor z Miletu* wynalazł następujący sposób kreślenia paraboli za pomocą trójkąta i nitki. Trójkąt prostokątny przesuwamy przypostrógą AC wzdłuż kierownicy (rys. 115). Do wierzchołka B przymocowana jest nitka o długości AB ; drugi koniec nitki jest umocowany w ognisku F . Podczas ruchu trójkąta napinamy ołówkiem nitkę tak, by jego koniec P znajdował się na przypostrógą AB . Wówczas P zakreśla łuk paraboli, gdyż



Rys. 115

$$|AP| + |PB| = |AB|$$

oraz

$$|FP| + |PB| = |AB|,$$

więc

$$|AP| = |FP|.$$

Podobnie jak dla lewych stron równań kanonicznych elipsy i hiperboli, dowodzi się dla paraboli, że

$$y^2 - 2px \begin{cases} < 0 \text{ dla punktów wewnętrznych,} \\ > 0 \text{ dla punktów zewnętrznych.} \end{cases}$$

Wszystkie punkty w ∞ leżą zewnątrz paraboli, z wyjątkiem jej punktu styczności z prostą w ∞ .

Biegunowa punktu właściwego $P(x_0, y_0)$ ma równanie

$$(3) \quad yy_0 - p(x + x_0) = 0$$

i gdy punkt P leży na paraboli, równanie to przedstawia styczną.

Z każdego punktu leżącego zewnątrz paraboli można poprowadzić do niej dwie styczne rzeczywiste, a z każdego punktu wewnętrznego — dwie styczne zespolone sprzężone.

Rozwiązując bowiem układ równań (1) i (3) przez eliminację zmiennej x , otrzymujemy równanie

$$y^2 - 2y_0y + 2px_0 = 0 \quad \text{o wyróżniku} \quad D = 2px_0 - y_0^2.$$

Jeśli więc punkt P leży zewnątrz paraboli, to $D < 0$ i równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste. Biegunowa (3) punktu P przecina wówczas parabolę w dwóch punktach rzeczywistych, więc z punktu P można poprowadzić do paraboli dwie styczne rzeczywiste.

* Izydor z Miletu (VI w. n.e.), matematyk i architekt grecki.

Równie łatwy jest dowód w przypadku, gdy P leży wewnątrz paraboli.

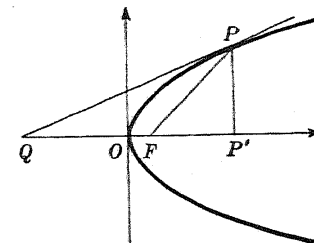
Z równania (3) wynika, że punkt przecięcia stycznej z osią Ox ma odcięta $x = -x_0$. Na tym opiera się prosta konstrukcja stycznej do paraboli w jej punkcie P , gdy znana jest oś paraboli (rys. 116). Znajdujemy rzut P' punktu P na oś, a następnie od wierzchołka O odcinamy wektor $OQ = -OP'$. Prosta QP jest styczną.

Rys. 116 ilustruje zarazem inną jeszcze własność paraboli. Ponieważ odległość punktu $P(x_0, y_0)$ paraboli od kierownicy (2) wynosi $x_0 + p/2$, więc dla promienia wodzącego FP zachodzi równość

$$(4) \quad |FP| = r = \frac{p}{2} + x_0.$$

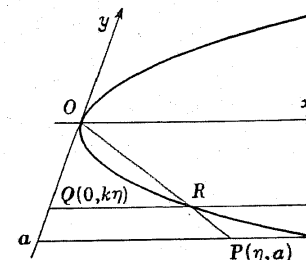
Ponieważ zaś $|OQ| = x_0$, więc

$$|FQ| = p/2 + x_0 = |FP|.$$



Rys. 116

Trójkąt FQP jest zatem równoramienny. Stąd wynika, że kąt między styczną a promieniem wodzącym jest równy kątowi między styczną a osią, który z kolei jest równy kątowi między styczną a średnicą w punkcie P . Zatem pęk promieni świetlnych wysłanych z ogniska F przechodzi po odbiciu się od paraboli w pęk równoległych do osi. Na tym polega zastosowanie zwierciadeł parabolicznych w reflektorach. Mają one kształt paraboloidy obrotowej, tj. powierzchni, która powstaje przez obrót paraboli dookoła osi (p. § 61, str. 321). Źródło światła umieszcza się w ognisku.



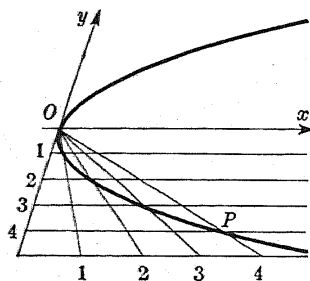
Rys. 117

Następująca konstrukcja pozwala w praktyce kreślić punkty paraboli, gdy dana jest średnica i styczna, której kierunek jest sprzężony z tą średnicą.

Obierzmy za osie Ox i Oy parę prostych skośnych (rys. 117). Ustalmy prostą $y = a$ równoległą do osi Ox i na niej obierzmy punkt $P(\eta, a)$, gdzie η jest zmienne. Następnie na osi Oy wyznaczmy punkt $Q(0, k\eta)$, gdzie k jest stałe. Prosta OP ma równanie $\eta y = ax$. Prosta równoległa do osi Ox i przechodząca przez punkt Q ma

równanie $y=k\eta$. Z tego wynika dla punktów $R(x,y)$ przecięcia obu prostych równanie $y^2=kax$. Miejscem geometrycznym punktów R jest więc parabola, której średnicą jest oś Ox i styczną oś Oy .

A zatem, gdy dane są średnica Ox , styczna Oy i dowolny punkt paraboli P , prowadzimy przez ten punkt równoległą PS do średnicy Ox aż do punktu jej przecięcia S z styczną Oy . Odcinek SP dzielimy na n równych części (n dowolna liczba naturalna) i tak samo dzie-



Rys. 118

limy odcinek OS . Przez punkty podziału odcinka OS kreślimy równoległe do osi Ox ; punkty zaś podziału odcinka SP łączymy z O . Proste obu pęków przechodzące przez punkty o tych samych numerach przecinają się na paraboli.

Możemy oczywiście przedłużyć tę konstrukcję poza punkt P , odcinając na prostej SP odcinki o długościach $|SP|/n$ i nadając im numery $n+1$, $n+2, \dots$. Możemy ją też przedłużyć

poza punkt S , nadając punktom numery $-1, -2, \dots$. Podobnie postępujemy na osi Oy .

Udowodnimy jeszcze, że krzywa dająca się przedstawić parametrycznie w postaci

(5) $x=a_0+a_1t+a_2t^2$, $y=b_0+b_1t+b_2t^2$, gdzie $a_1b_2-b_1a_2 \neq 0$, jest parabola i na odwrót, każda parabola daje się w ten sposób przedstawić parametrycznie.

Dotyczy to tylko punktów właściwych.

Istotnie, parabola Γ o równaniu $y^2=x$ ma przedstawienie kształtu (5):

$$(6) \quad x=t, \quad y=t^2.$$

Parabolę tę można przez przekształcenie afiniczne postaci

(7) $x'=a_0+a_1x+a_2y$, $y'=b_0+b_1x+b_2y$, gdzie $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$, przekształcić w każdą z góry daną parabolę Γ' . Przedstawienie jej otrzymamy, podstawiając wartości (6) do równań (7). Otrzymujemy wówczas (5).

Na odwrót, gdy dana jest krzywa Γ' o przedstawieniu (5), bierzemy pod uwagę przekształcenie afiniczne (7) i widzimy, że Γ' jest obrazem afinicznym paraboli Γ . Zatem i Γ' jest parabola.

§ 60. Niezmienniki I_1, I_2 i I_3

1. Twierdzenie pomocnicze. Jeśli równania

$$f(x, y)=0, \quad g(x, y)=0$$

przedstawiają jedną i tę samą stożkową, to

$$(1) \quad f(x, y) \equiv \varrho g(x, y),$$

gdzie ϱ jest stałą różną od 0.

Dowód. Ograniczymy się do przypadku, gdy równania przedstawiają elipsę; w pozostałych przypadkach dowód jest analogiczny.

Niech $Ox'y'$ będzie układem osi tej elipsy. Przechodząc do układu współrzędnych $Ox'y'$ przez przekształcenie współrzędnych

$$(2) \quad x=a+b_{11}x'+b_{12}y', \quad y=b+b_{21}x'+b_{22}y',$$

dostajemy równania tej elipsy w postaci

$$f(x, y) \equiv f_1(x', y')=0, \quad g(x, y) \equiv g_1(x', y')=0.$$

Z drugiej strony, ponieważ za osie układu współrzędnych $Ox'y'$ przyjęliśmy osie elipsy, więc te równania są w nim postaci

$$(3) \quad f_1(x', y') \equiv ax'^2 + \beta y'^2 + \gamma = 0, \quad g_1(x', y') \equiv a_1x'^2 + \beta_1y'^2 + \gamma_1 = 0.$$

Z równań (3) dostajemy odcięte punktów przecięcia z osią Ox' :

$$\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{a}}, \quad \pm \sqrt{-\frac{\gamma_1}{a_1}}.$$

Ponieważ są to odcięte tych samych punktów, więc

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{\gamma_1}{a_1}.$$

Podobnie dostajemy dla rzędnych punktów przecięcia z osią Oy' :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\beta_1}.$$

Zatem $a:\beta:\gamma = a_1:\beta_1:\gamma_1$, skąd na mocy (3)

$$f_1(x', y') \equiv \varrho g_1(x', y'),$$

a stąd przez podstawienie odwrotne do (2) otrzymujemy tożsamość (1), c. b. d. o.

2. Pełny układ niezmienników stożkowej. Przyjmijmy za Oxy dowolny układ współrzędnych kartezjańskich (prosto- lub ukośnokątnych), którego wektory podstawowe na obu osiach mają długość 1.

Rozpatrywać będziemy stożkowe, dla których jest spełniony przynajmniej jeden z warunków

$$(4) \quad \Delta \neq 0, \quad \tilde{\Delta} \neq 0,$$

a więc stożkowe właściwe i pary przecinających się prostych.

Niech lewą stroną równania stożkowej w przyjętym układzie współrzędnych będzie wielomian

$$(5) \quad f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Jeśli przyjęty układ współrzędnych jest prostokątny, to niezmiennikami wielomianu (5) przy przejściu do innego układu prostokątnego są (p. § 51, str. 251) współczynniki równania charakterystycznego oraz Δ czyli liczby

$$(6) \quad I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \Delta, \quad I_3 = \tilde{\Delta}.$$

Każda z liczb (6) jest wielomianem jednorodnym względem współczynników wielomianu (5); wskaźnik $k=1, 2, 3$ jest zarazem stopniem wielomianu I_k .

W układach współrzędnych prostokątnych liczby (6) są również niezmiennikami wielomianu (5) względem izometrii.

Zbadamy obecnie, jaki kształt przybierają niezmienniki (6) przy przejściu do ukośnokątnego układu współrzędnych. Jeśli zależności między współrzędnymi obu układów mają wyznacznik D i wielomian (5) przechodzi w wielomian

$$(7) \quad g(x', y') = b_{11}x'^2 + 2b_{12}x'y' + b_{22}y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + b_{33}$$

o wyróżnikach Δ' i $\tilde{\Delta}'$, to (p. wzór (16) z § 51, str. 251)

$$\Delta = D^2 \Delta', \quad \tilde{\Delta} = D^2 \tilde{\Delta}',$$

skąd wobec (6)

$$(8) \quad I_2 = D^2 \Delta', \quad I_3 = D^2 \tilde{\Delta}'.$$

Gdy układ $Ox'y'$ jest ukośnokątny o kącie ν między osiami, weźmy pod uwagę układ prostokątny Oxy o tej samej osi odciętych i tym samym początku. Wówczas

$$(9) \quad x' = x - y \operatorname{ctg} \nu, \quad y' = \frac{y}{\sin \nu}, \quad D = \frac{1}{\sin \nu}.$$

Ponieważ $g(x', y') = f(x, y)$, więc podstawiając (9) do (7), otrzymujemy (5). Stąd

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{22} = b_{11} \operatorname{ctg}^2 \nu - 2b_{12} \frac{\cos \nu}{\sin^2 \nu} + \frac{b_{22}}{\sin^2 \nu},$$

a zatem

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \frac{b_{11} + b_{22} - 2b_{12} \cos \nu}{\sin^2 \nu}.$$

Stąd i z (8) dostajemy twierdzenie:

W ukośnokątnych układach współrzędnych niezmienniki:

$$(10) \quad I_1 = \frac{b_{11} + b_{22} - 2b_{12} \cos \nu}{\sin^2 \nu}, \quad I_2 = \frac{1}{\sin^2 \nu} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \frac{1}{\sin^2 \nu} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

wielomianu (5) względem izometrii są też niezmiennikami wielomianu (5) względem dowolnej zmiany układu współrzędnych kartezjańskich, zachowujących długość 1 wektorów podstawowych.

Liczby (10) nie są jednak niezmiennikami stożkowej. Gdy bowiem obie strony jej równania pomnożymy przez ϱ , to wszystkie współczynniki pomnożą się przez ϱ , a więc niezmiennikami wielomianu, stojącego po lewej stronie nowego równania, będą liczby

$$(11) \quad I'_1 = \varrho I_1, \quad I'_2 = \varrho^2 I_2, \quad I'_3 = \varrho^3 I_3, \quad \text{gdzie } \varrho \neq 0.$$

Udowodnimy, że dwie stożkowe Γ i Γ' o niezmiennikach I_k i I'_k , gdzie $k=1, 2, 3$, są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (11).

Założmy wpraw, że stożkowe Γ i Γ' są przystające. Niech I_k będą niezmiennikami wielomianu z równania pierwszej z nich, a I'_k niezmiennikami wielomianu z równania drugiej ($k=1, 2, 3$). Niech izometria T przekształca Γ w Γ' . Wówczas równanie krzywej Γ przechodzi w równanie krzywej Γ' i niezmiennikami nowego równania są nadal liczby I_k . Na podstawie twierdzenia pomocniczego każde inne równanie krzywej Γ' dostaniemy, mnożąc to nowe równanie przez stałą $\varrho \neq 0$. Ale wówczas zachodzą warunki (11). Tym samym jest dowiedziona ich konieczność.

Na odwrót, założmy, że dla stożkowych Γ i Γ' spełnione są warunki (11). Mnożąc równanie stożkowej Γ przez ϱ , otrzymujemy dla obu stożkowych równania o jednakowych niezmiennikach. Te same niezmienniki dla obu stożkowych otrzymamy też, przechodząc do nowego układu współrzędnych. Wystarczy zatem dowieść,

że współczynniki równania kanonicznego stożkowej zależą jedynie od niezmienników.

W tym celu rozróżnimy dwa przypadki:

1° $I_2 \neq 0$. Równanie kanoniczne przybiera wówczas postać (p. wzór (14) z § 52, str. 255)

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} = 0.$$

Ponieważ

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = I_1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \Delta = I_2, \quad \tilde{\Delta} = I_3,$$

więc — jak widzimy — współczynniki λ_1, λ_2 i $\tilde{\Delta}/\Delta$ są tu wyznaczone przez niezmienniki I_1, I_2 i I_3 .

2° $I_2 = 0$. Wówczas stożkowa jest parabolą i jej równaniu kanonicznemu można nadać postać (p. wzór (22) z § 52, str. 257)

$$\lambda_2 y^2 + 2p_1 x = 0.$$

Tu więc

$$I_1 = \Delta = a_{11} + a_{22} = \lambda_2, \quad I_3 = \tilde{\Delta} = -\lambda_2 p_1^2,$$

a zatem $\lambda_2 = I_1$ i $p_1 = \sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}$, skąd

$$p = \left| \frac{p_1}{\lambda_2} \right| = - \left| \frac{p_1}{I_1} \right| = \sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}$$

i znowu równanie kanoniczne jest wyznaczone przez niezmienniki. Warunki (11) są więc dostateczne, c. b. d. o.

Tak więc niezmienniki I_1, I_2, I_3 wyznaczają kształt stożkowej. Dlatego układ tych trzech niezmienników nazywamy *pełnym układem niezmienników stożkowej*.

Z (11) wynika, że

$$(12) \quad I_1^6 : I_2^3 : I_3^2 = I_1^6 : I_2^3 : I_3^2.$$

Jest to warunek konieczny, lecz nie dostateczny przystawiania dwóch stożkowych. Np. dla kół o równaniach

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0$$

zachodzi równość (12), chociaż krzywe te nie są przystające; nie zachodzą natomiast warunki (11). Tak samo jest dla hiperbol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Rozważmy obecnie kilka przykładów zastosowań niezmienników I_k . Weźmy pod uwagę koło o równaniu

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

w układzie prostokątnym współrzędnych. Tu

$$I_1 = 2, \quad I_2 = 1, \quad I_3 = -r^2.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, by równanie postaci

$$(13) \quad f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

przedstawiało w kartezjańskim układzie współrzędnych koło o promieniu r , jest więc, żeby dla pewnego $\varrho \neq 0$ zachodziły równości

$$I_1 = 2\varrho, \quad I_2 = \varrho^2, \quad I_3 = -\varrho^2 r^2.$$

Pierwsze dwie z nich stanowią warunek, by równanie (13) przedstawiało koło, a gdy wyznaczymy z nich ϱ , to trzecia wyznacza promień r .

Z pierwszych dwóch wynika, że

$$I_1^2 - 4I_2 = 0,$$

czyli

$$(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \nu)^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \nu = 0,$$

skąd

$$(a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 \nu + [2a_{12} - (a_{11} + a_{22}) \cos \nu]^2 = 0.$$

Otrzymujemy więc następujący warunek konieczny i wystarczający, żeby równanie (13) przedstawiało koło:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = a_{11} \cos \nu.$$

Jako inny przykład rozważmy parę przecinających się prostych. Wobec $I_3 = 0$ z równości (9) dostajemy jako warunek konieczny i dostateczny przystawiania dwóch par prostych rzeczywistych równość

$$(14) \quad \frac{I_1^2}{I_2} = \frac{I_1^2}{I_2}.$$

Z drugiej strony, warunkiem na to, by dwie pary prostych rzeczywistych były przystające, jest równość kątów przez nie utworzonych. Wzór (14) pociąga więc za sobą równość kątów.

Można to również udowodnić geometrycznie. Jeśli bowiem jedną prostą przyjmiemy za oś Ox , a drugą za oś Oy , to para tych prostych będzie miała równanie

$$(15) \quad xy = 0.$$

Dla tego równania jest więc

$$(16) \quad I_1 = -\frac{\cos \nu}{\sin^2 \nu}, \quad I_2 = -\frac{1}{4 \sin^2 \nu}.$$

Równości (16) nie wyznaczają kąta ν w każdym układzie współrzędnych. Wyrażają one bowiem kąt ν przez współczynniki równania (15), a gdy pomnożymy równanie (15) przez $\varrho \neq 0$, to para prostych się nie zmienia, lecz równości (16) przestaną być prawdziwe.

Natomiast stosunek I_1^2/I_2 nie zależy od ϱ . Wobec (14) jest on niezmiennikiem stożkowej niezależnym od współczynnika ϱ i nazywa się *niezmiennikiem absolutnym*.

Z (16) otrzymujemy

$$(17) \quad \operatorname{tg}^2 \nu = -\frac{4I_2}{I_1},$$

czyli

$$(18) \quad \operatorname{tg} \nu = \pm \frac{2\sqrt{-I_2}}{I_1}.$$

Równość (17) wyjaśnia znaczenie geometryczne warunku (14). W szczególności dla pary prostych w układzie współrzędnych prostokątnych jest

$$(19) \quad \operatorname{tg} \nu = \pm \frac{2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11} + a_{22}}$$

(p. wzór (19) z § 55, str. 278). A więc dla prostokątności pary prostych potrzeba i wystarcza, by

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

Jako trzeci przykład zastosowania niezmienników podamy jednolity dowód twierdzeń Apoloniusza dla elipsy i hiperboli. W tym celu weźmy ich osie za osie układu współrzędnych. Równania obu stożkowych przybiorą więc postać

$$(20) \quad \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{dla elipsy,} \\ -1 & \text{dla hiperboli.} \end{cases}$$

Po przejściu do układu średnic sprzężonych jako osi współrzędnych dostajemy równania

$$(21) \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \varepsilon \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Ale wzory przejścia od jednego układu współrzędnych do drugiego przekształcają lewą stronę równania (20) w lewą stronę równania (21). Niezmienniki obu równań są zatem jednakowe:

$$I_1 = I'_1, \quad I_2 = I'_2,$$

czyli pisząc je szczegółowo:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\varepsilon}{b^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{1}{a'^2} + \frac{\varepsilon}{b'^2} \right), \quad \frac{1}{\varepsilon a^2 b^2} = \frac{1}{\varepsilon a'^2 b'^2 \sin^2 \varphi}.$$

Z tych równości wynikają natychmiast twierdzenia Apoloniusza zarówno dla hiperboli jak dla elipsy.

5. Kryterium podobieństwa stożkowych. *Na to, by dwie stożkowe właściwie były podobne, potrzeba i wystarcza, żeby miały ten sam mimośród liczbowy e .*

Istotnie, niech F będzie ogniskiem stożkowej Γ , a k — kierownicą odpowiadającą temu ognisku. Niech r będzie odległością punktu P od ogniska F , a d — odległością punktu P od kierownicy k . Stożkowa Γ jest miejscem geometrycznym punktów, dla których $r/d = e$ (p. § 48, str. 239). Niech wreszcie litery F' , k' , P' , r' i d' mają analogiczne znaczenie dla obrazu Γ' stożkowej Γ , przekształconej przez podobieństwo. Ponieważ przy podobieństwie stosunki odległości nie ulegają zmianie, więc $r'/d' = e$. Zatem Γ' jest stożkową o ognisku F' , kierownicy k' i o tym samym mimośrodku liczbowym e . Warunek jest więc konieczny.

Na odwrót, niech będą dane na płaszczyźnie dwie stożkowe Γ i Γ' o tym samym mimośrodku liczbowym e i niech ogniskiem stożkowej Γ będzie punkt F , a stożkowej Γ' — punkt F' , kierownicą zaś stożkowej Γ prosta k , a stożkowej Γ' — prosta k' . Niech dalej δ i δ' będą odległościami F od k i F' od k' . Przekształćmy stożkową Γ przez homotetię względem dowolnego punktu O , zmieniając odległości od O w stosunku δ'/δ . Wówczas Γ przejdzie w stożkową Γ'' , której ognisko od kierownicy jest oddalone o δ' i która ma ten sam mimośród liczbowy e . Ponieważ stożkowe Γ' i Γ'' mają ten sam mimośród liczbowy i tę samą odległość ogniska od kierownicy, więc są przystające. Zatem wobec podobieństwa między Γ i Γ'' zachodzi również podobieństwo między Γ i Γ' . Warunek jest więc dostateczny, c. b. d. o.

Ponieważ dla parabol $e=1$, więc *wszystkie parabole są podobne*.

Podamy jeszcze kryterium podobieństwa za pomocą niezmienników.

Jeśli stożkowe Γ i $\bar{\Gamma}$ są podobne, to istnieje homotetia

$$x = \sigma x', \quad y = \sigma y',$$

która stożkową Γ przekształca w stożkową Γ'' przystającą do $\bar{\Gamma}$. Równanie $g(x', y') = 0$ (p. (7), str. 304) przechodzi wówczas w równanie

$$\sigma^2(b_{11}x'^2 + 2b_{12}x'y' + b_{22}y'^2) + 2\sigma(b_{13}x' + b_{23}y') + b_{33} = 0,$$

a więc

$$I'_1 = \sigma^2 I_1, \quad I'_2 = \sigma^4 I_2, \quad I'_3 = \sigma^4 I_3.$$

Ponieważ stożkowe Γ'' i $\bar{\Gamma}$ są przystające, więc

$$\bar{I}_1 = \varrho I'_1, \quad \bar{I}_2 = \varrho^2 I'_2, \quad \bar{I}_3 = \varrho^3 I'_3$$

czyli

$$(22) \quad \bar{I}_1 = \varrho \sigma^2 I_1, \quad \bar{I}_2 = \varrho^2 \sigma^4 I_2, \quad \bar{I}_3 = \varrho^3 \sigma^4 I_3.$$

Równości (22) stanowią więc warunek konieczny podobieństwa stożkowych. Łatwy dowód jego dostateczności pomijamy.

W przypadku pary prostych jest $I_3 = 0$ i równości (22) są równoważne równościom (14).

W przypadku paraboli jest $I_2 = 0$, a więc dla każdych wartości $I_1 \neq 0$ i $I_3 \neq 0$ można tak dobrać ϱ i σ , by zachodziły równości (22).

Jest to inny dowód podobieństwa wszystkich parabol.

Jeśli $I_3 \neq 0$, to przyjmując w (22)

$$(23) \quad \varrho \sigma^2 = \lambda, \quad \varrho^3 \sigma^4 = k,$$

otrzymujemy równości kształtu

$$(24) \quad \bar{I}_1 = \lambda I_1, \quad \bar{I}_2 = \lambda^2 I_2, \quad \bar{I}_3 = k I_3,$$

które są równoważne proporcji

$$(25) \quad \bar{I}_1^2 : \bar{I}_2 = I_1^2 : I_2.$$

Proporcja ta nie jest równoważna równościom (22). Z proporcji tej wynikają bowiem równości (24), na to zaś, by z nich wynikały równości (22), potrzeba i wystarcza, żeby równania (23) miały rozwiązania ϱ i σ rzeczywiste. Ponieważ $\varrho^3 \sigma^6 = \lambda^3$ i $\varrho^3 \sigma^4 = k$, więc $\sigma^2 = \lambda^3/k$, a zatem k i λ muszą mieć jednakowe znaki. Wobec (24) i (25) otrzymujemy jako *warunek konieczny i dostateczny podobieństwa dla elips i hiperbol* — *jednoczesne spełnienie równości*

$$(26) \quad \frac{\bar{I}_1^2}{\bar{I}_2} = \frac{I_1^2}{I_2}, \quad \text{sign} \left(\frac{\bar{I}_1}{I_1} \right) = \text{sign} \left(\frac{\bar{I}_3}{I_3} \right).$$

Jeśli dla dwu elips spełniona jest pierwsza z tych równości, a druga nie, to jedna z elips jest rzeczywista, a druga nierzeczywista.

Hiperbole o równaniach

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

nazywają się *sprzężonymi*.

Z łatwością się dowodzi, że dla dwóch hiperbol spełnienie pierwszej z równości (25) i niespełnienie drugiej pociąga za sobą podobieństwo pierwszej hiperboli do hiperboli sprzężonej z drugą.

W pierwszej z równości (26) występują tylko współczynniki a_{11} , a_{12} i a_{13} . Wynika stąd w szczególności, że *gdy dwa równania przedstawiają elipsy rzeczywiste i mają te same części jednorodne, to obie elipsy są podobne*.