

ROZDZIAŁ XI

WŁASNOŚCI AFINICZNE STOŻKOWYCH

§ 54. Położenie prostej względem stożkowej.
Styczna i biegunowa

1. Oznaczenia. W całym rozdziale zakładamy, że

$$(1) \quad \tilde{\Delta} \neq 0,$$

a więc że stożkowa nie rozpada się na proste.

Używać będziemy następujących oznaczeń:

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \equiv$$

$$(2) \quad \equiv \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_ix_k,$$

$$(3) \quad g(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

$$(4) \quad \varphi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

2. Stożkowa a prosta. Niechaj będzie dana stożkowa o równaniu rzeczywistym

$$(5) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Dla punktów w ∞ tej stożkowej jest

$$f(x_1, x_2, 0) = 0.$$

Wobec (2) otrzymujemy je zatem z równania

$$(6) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

czyli

$$(7) \quad \varphi(x_1, x_2) = 0.$$

Wyróżnikiem równania (6) jest

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Dla paraboli jest $\Delta = 0$, a więc parabola przecina prostą w ∞ w jednym punkcie.

Dla elipsy jest $\Delta > 0$, a więc elipsa (zarówno rzeczywista jak zespolona) przecina prostą w ∞ w dwóch punktach nierzeczywistych sprzężonych.

Dla hiperboli jest $\Delta < 0$, więc hiperbola przecina prostą w ∞ w dwóch punktach rzeczywistych.

Zbadaliśmy w ten sposób położenie stożkowych (o równaniach rzeczywistych) względem prostej w ∞ . Przez przekształcenia afiniczne rzeczywiste prosta ta przechodzi w siebie i punkty rzeczywiste przechodzą w rzeczywiste. Dlatego stożkowa przecinająca prostą w ∞ w dwóch punktach rzeczywistych przechodzi w taką samą stożkową, czyli hiperbola w hiperbole; podobnie jest dla elips i parabol. Otrzymujemy więc inny dowód twierdzeń z § 53.

Zbadamy obecnie położenie prostej właściwej p względem stożkowej. Użyjemy w tym celu współrzędnych niejednorodnych.

Część właściwą prostej p przedstawimy parametrycznie:

$$(8) \quad x = x_0 + as, \quad y = y_0 + \beta s.$$

Prosta ma kierunek $a:\beta$, a więc prócz punktów (8) zawiera punkt w ∞ o współrzędnych

$$(9) \quad x_1:x_2:0 = a:\beta:0.$$

Niech równaniem danej stożkowej we współrzędnych niejednorodnych będzie

$$(10) \quad g(x, y) = 0.$$

Podstawiając wartości z (8) do równania (10), dostajemy

$$(11) \quad (a_{11}a^2 + 2a_{12}a\beta + a_{22}\beta^2)s^2 + 2s[a(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + \beta(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})] + (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) = 0.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \equiv 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \equiv 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}).$$

Wielomiany $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial g}{\partial y}$ są pochodnymi cząstkowymi wielomianu g . Równanie (11) możemy teraz napisać w postaci skróconej

$$(12) \quad \varphi(\alpha, \beta)s^2 + s\left[\alpha \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right] + g(x_0, y_0) = 0.$$

Jeśli

$$(13) \quad \varphi(\alpha, \beta) \neq 0,$$

to równanie (12) ma bądź dwa rozwiązania (rzeczywiste lub nierzeczywiste), bądź jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Jeśli natomiast

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

to wobec (9) i (7) punkt w ∞ prostej p leży na stożkowej; pozostałe punkty przecięcia otrzymujemy z (12).

3. Styczna w punkcie właściwym. Prosta przecinająca stożkową w jednym punkcie P nazywa się *styczną* do tej stożkowej w punkcie P .

Zajmiemy się na razie stycznymi w punktach właściwych. Udowodnimy, że *przez punkt właściwy $P_0(x_0, y_0)$ stożkowej przechodzi dokładnie jedna styczna i że ma ona równanie*

$$(14) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Ponieważ punkt $P_0(x_0, y_0)$ leży na stożkowej, więc

$$(15) \quad g(x_0, y_0) = 0.$$

Założmy, że prosta (8) jest styczna do stożkowej. Wówczas zachodzi nierówność (13), gdyż w przeciwnym razie ta prosta przechodziłaby przez punkt w ∞ , a jako przechodząca również przez punkt właściwy $P(x_0, y_0)$ stożkowej (razem przez dwa punkty), nie byłaby styczną. Równanie (12) ma więc tu postać

$$(16) \quad \varphi(\alpha, \beta)s^2 + s\left[\alpha \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right] = 0.$$

Równanie to ma pierwiastek $s_1 = 0$. Ponieważ ma ono jedno rozwiązanie, więc musi być także $s_2 = 0$, a zatem zachodzi równość

$$(17) \quad \alpha \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Na odwrót, założmy teraz, że zachodzi równość (17). Wówczas musi zachodzić nierówność (13), gdyż w przeciwnym razie z (16)

i (17) wynikałoby, że prosta (8) leży w całości na stożkowej, wbrew założeniu przyjętemu na początku rozdziału. Prosta (8) nie przecina zatem stożkowej w punkcie w ∞ , a z (17) wynika, że równanie (16) ma dokładnie jedno rozwiązanie $s = 0$. Prosta (8) przecina więc stożkową dokładnie w jednym punkcie, jest zatem styczna.

Dowiedzieliśmy, że równość (17) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by prosta (8) była styczną.

Wobec

$$as = x - x_0, \quad \beta s = y - y_0,$$

z równości (17) wynika, że na to, by prosta łącząca punkt $P(x, y)$ z punktem $P(x_0, y_0)$ była styczną, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziło równanie (14). Równanie to przedstawia prostą. Nie może bowiem być

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

gdyż wówczas prosta łącząca dowolny punkt płaszczyzny P z punktem P_0 byłaby styczną, co w oczywisty sposób prowadzi do sprzeczności (gdy wziąć punkt $P \neq P_0$ na stożkowej).

4. Styczna we współrzędnych jednorodnych. Biegunowa. Zajmiemy się teraz styczną w dowolnym punkcie stożkowej (właściwym lub w ∞).

Niech prosta p ma przedstawienie parametryczne

$$(18) \quad \rho x_k = \mu m_k + \nu n_k, \quad \text{gdzie} \quad k = 1, 2, 3,$$

a stożkowa Γ niech ma równanie

$$(19) \quad f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} x_l x_k = 0.$$

Podstawiając (18) do równania (19) i upraszczając przez ρ^2 , otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} (\mu m_l + \nu n_l)(\mu m_k + \nu n_k) = \\ &= \mu^2 \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} m_l m_k + \mu \nu \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} m_l n_k + \nu \mu \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} n_l m_k + \nu^2 \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} n_l n_k. \end{aligned}$$

Zamieniając w trzeciej sumie wskaźniki bieżące l i k , stwierdzamy wobec $a_{lk} = a_{kl}$, że druga i trzecia suma po prawej stronie są równe. Zatem

$$(20) \quad \mu^2 \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} m_l m_k + 2\mu \nu \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} m_l n_k + \nu^2 \sum_{l,k=1}^3 a_{lk} n_l n_k = 0.$$

Równanie (20) wyznacza stosunki $\mu:\nu$ dla punktów przecięcia prostej (18) ze stożkową Γ .

Założmy, że prosta (18) jest styczną. Wówczas równanie (20) ma jedno rozwiązanie $\mu:\nu$, a więc

$$(21) \quad (\sum a_{lk} m_l n_k)^2 - (\sum a_{lk} m_l m_k)(\sum a_{lk} n_l n_k) = 0.$$

Punkt $P(n_1:n_2:n_3)$ jest tu dowolnym punktem prostej przechodzącej przez punkt $M(m_1:m_2:m_3)$. Możemy go więc dalej oznaczać przez $P(x_1:x_2:x_3)$.

Udowodniliśmy, że na to, by prosta łącząca punkt $P(x_1:x_2:x_3)$ z punktem $M(m_1:m_2:m_3)$ była styczną, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła równość

$$(22) \quad (\sum a_{lk} m_l x_k)^2 - (\sum a_{lk} m_l m_k)(\sum a_{lk} x_l x_k) = 0.$$

Założmy teraz, że punkt M leży na stożkowej Γ , czyli że

$$(23) \quad \sum a_{lk} m_l m_k = 0.$$

Przy założeniu (23) warunek konieczny i dostateczny (22) możemy zastąpić przez

$$(24) \quad \sum a_{lk} m_l x_k = 0.$$

Porządkując to równanie względem x_1, x_2 i x_3 , dostajemy

$$\begin{aligned} & x_1(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3) + \\ & + x_2(a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3) + \\ & + x_3(a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3) = 0. \end{aligned}$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3) \quad \text{dla} \quad k=1,2,3.$$

Wielomiany $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ są to pochodne cząstkowe formy f względem zmiennej x_k . Zachodzi oczywiście tożsamość

$$(25) \quad \sum a_{lk} m_l x_k = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m).$$

Równanie (24) możemy zatem napisać też w postaci

$$(26) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m) = 0.$$

Udowodnimy teraz, że dla każdego punktu M płaszczyzny równanie (26) przedstawia prostą.

Istotnie, gdyby w tym równaniu zniknęły wszystkie współczynniki, to mielibyśmy

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_k}(m) = a_{k1}m_1 + a_{k2}m_2 + a_{k3}m_3 = 0 \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,$$

a ponieważ $|\mathfrak{A}| = |a_{kl}| \neq 0$, więc otrzymalibyśmy

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0,$$

co niemożliwe, bo liczby m_k , jako współrzędne jednorodne, nie mogą zniknąć równocześnie.

Prosta (26) nazywa się *biegunową punktu M względem stożkowej Γ* , a punkt M nazywa się *biegunem prostej (26) względem tej stożkowej*.

Z tożsamości (25) wynika, że na to, by punkt leżał na swej biegunowej, potrzeba i wystarcza, żeby leżał na stożkowej Γ . Na to bowiem, by punkt M spełniał warunek (24), potrzeba i wystarcza, żeby jego współrzędne spełniały równanie (23).

Warunek (24) możemy obecnie wypowiedzieć, jak następuje:

Na to, by prosta łącząca punkt P z punktem M stożkowej Γ była styczna do tej stożkowej, potrzeba i wystarcza, żeby punkt P leżał na biegunowej punktu M względem Γ .

Ponieważ ta biegunowa jest prostą przechodzącą przez M , więc wynika stąd, że sama ona jest styczną do Γ , w punkcie M i to jedyną styczną w tym punkcie.

Dowiedliśmy więc twierdzeń:

Przez każdy punkt M stożkowej Γ przechodzi jedyna styczna do niej i jest nią biegunowa punktu M .

Jeśli biegunowa punktu M względem stożkowej Γ przechodzi przez M , to punkt ten leży na Γ , a biegunowa jego jest styczną do Γ w tym punkcie.

Styczna do Γ w punkcie M ma równanie (24) lub (26).

Biegunową punktu określiliśmy przez równanie (26). Jest to określenie czysto algebraiczne, nie uwidaczniające jego niezależności od układu współrzędnych. Dla punktu M leżącego na stożkowej Γ znaczenie geometryczne pojęcia biegunowej wynika z dowiedzionego twierdzenia. Zbadamy teraz znaczenie geometryczne tego pojęcia dla punktów nie leżących na stożkowej Γ .

W tym celu udowodnimy wpierw, że *każda prosta ma dokładnie jeden biegun*.

Istotnie, na to by punkt M był biegunem prostej

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0,$$

potrzeba i wystarcza, żeby

$$(27) \quad a_{k1}m_1 + a_{k2}m_2 + a_{k3}m_3 = \varrho A_k, \quad \text{gdzie } \varrho \neq 0 \text{ i } k=1,2,3.$$

Równości (27) możemy uważać za równania o niewiadomych m_1, m_2, m_3 . Ponieważ założyliśmy, że $\Delta \neq 0$, więc układ tych równań ma dokładnie jedno rozwiązanie $m_1:m_2:m_3$ (czynnik proporcjonalności ϱ odpada), c. b. d. o.

W równaniu (22) nie wszystkie współczynniki są równocześnie zerami, bo w przeciwnym razie byłoby ono spełnione dla wszelkich x_1, x_2, x_3 i wówczas prosta łącząca dowolny punkt $P(x_1:x_2:x_3)$ płaszczyzny z punktem M byłaby styczna do Γ w punkcie M , co nie możliwe, ponieważ przez M przechodzi tylko jedna styczna. Równanie (22) przedstawia zatem stożkową (rzeczywistą lub nie), która jest miejscem geometrycznym punktów P o tej własności, że prosta PM jest styczną do Γ . Jeśli P jest jednym z takich punktów, to dla każdego punktu P_1 prostej PM prosta P_1M jest styczna do Γ (jako identyczna z PM), a więc cała prosta PM leży na stożkowej (22). Stożkowa ta rozpada się zatem na proste, z których każda jest styczna do Γ . Na razie wiemy więc, że z punktu M znajdującego się poza stożkową Γ można do niej przeprowadzić jedną lub dwie styczne (rzeczywiste lub nie).

Biegunowa punktu M nie leżącego na stożkowej Γ przecina tę stożkową w dwóch punktach (rzeczywistych lub nie).

W przeciwnym bowiem razie przecinałaby stożkową Γ w jednym punkcie P , a więc byłaby do niej styczna w P ; byłaby zatem biegunową punktu P , wbrew założeniu, że jest biegunową punktu nie leżącego na Γ .

Weźmy teraz pod uwagę punkty P_1 i P_2 , w których biegunowa (24) punktu M przecina stożkową Γ o równaniu (19). Dla punktów tych jest spełnione równanie (22). Proste P_1M i P_2M są więc styczne do Γ . Proste te są różne, gdyż biegunowa punktu M (czyli prosta P_1P_2) nie przechodzi przez M . A zatem:

Z punktu M leżącego poza stożkową można do niej przeprowadzić dwie różne styczne. Biegunowa punktu M łączy ich punkty styczności. Równaniem tej pary stycznych jest równanie (22).

W ten sposób znaleźliśmy znaczenie geometryczne biegunowej punktu leżącego poza stożkową, niezależne od układu współrzędnych.

Oczywiście *pojęcie stycznej* (tj. prostej przecinającej stożkową w jednym punkcie) *jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych*. A zatem, na mocy dowiedzionych twierdzeń o znaczeniu geometrycznym pojęcia biegunowej, *biegunowa jest również niezmiennikiem przekształceń afinicznych*.

Zauważmy, że dla wszelkich liczb m_1, m_2, m_3 i x_1, x_2, x_3 zachodzi tożsamość

$$(28) \quad \begin{aligned} m_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + m_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) &= \\ &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m). \end{aligned}$$

Tożsamość ta wynika stąd, że lewa jej strona powstaje przez uporządkowanie wyrażenia $\sum a_{ik}m_ix_k$ względem m_1, m_2, m_3 , a prawa jej strona — przez uporządkowanie tegoż wyrażenia względem x_1, x_2, x_3 . Równanie biegunowej punktu M może więc być napisane w każdej z dwóch postaci:

$$(29) \quad m_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + m_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 0,$$

$$(30) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(m) = 0.$$

Gdy punkt $N(n_1:n_2:n_3)$ leży na biegunowej

$$\sum a_{ik}m_ix_k = 0$$

punktu M , to

$$\sum a_{ik}m_in_k = 0,$$

a więc punkt M leży na biegunowej

$$\sum a_{ik}x_in_k = 0$$

punktu N .

Wynika stąd, że *gdy punkt M porusza się po prostej p , to jego biegunowa obraca się dookoła bieguna tej prostej i na odwrót*.

Zauważmy jeszcze, że — jak to wynika z równania (30) — *biegunowa punktu rzeczywistego względem stożkowej (rzeczywistej lub nie), mającej równanie o współczynnikach rzeczywistych, jest prostą rzeczywistą*.

Jeśli biegunowa ta przecina stożkową w punktach nierzeczywistych, to styczne poprowadzone z bieguna do stożkowej są zespolone sprzężone.

5. Asymptoty. *Asymptotami* stożkowej nazywamy styczne do niej w punktach w ∞ .

Prosta w ∞ jest styczna do paraboli, gdyż przecina ją w jednym punkcie; jest więc ona jej jedyną asymptotą.

W dalszym ciągu, mówiąc o asymptotach, będziemy rozważali jedynie elipsy i hiperbole. Punkty w ∞ tych krzywych znajdujemy, rozwiązując równanie

$$(31) \quad \varphi(a, \beta) = 0.$$

Ma ono dla elips dwa rozwiązania nierzeczywiste sprzężone, a dla hiperbol — oba rzeczywiste. Zatem *asymptoty hiperboli są rzeczywiste, a elipsy — nierzeczywiste*.

Ponieważ punkty w ∞ mają współrzędne $a:\beta:0$, więc wobec (29) asymptoty mają równanie

$$(32) \quad a \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \beta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0,$$

gdzie a i β spełniają równanie (31).

Napiszmy równanie (32) w postaci rozwiniętej:

$$2a(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + 2\beta(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

i następnie przejdźmy do współrzędnych niejednorodnych. Dostajemy

$$2a(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + 2\beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

We współrzędnych niejednorodnych asymptoty mają więc równanie

$$(33) \quad a \frac{\partial g}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

gdzie a i β spełniają równanie (31).

Np. hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ma punkty w ∞ o współrzędnych $a:\beta:0$, wyznaczone przez równanie

$$\frac{a^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0$$

czyli

$$a:\beta = \pm a:b.$$

Ponieważ w tym przypadku

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2},$$

więc równania asymptot mają postać

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

§ 55. Środek. Średnice

1. Środek. *Środkiem* stożkowej nazywamy biegun prostej w ∞ .

Ponieważ prosta w ∞ jest styczna do paraboli, więc *środkiem paraboli jest jej punkt w ∞* .

Środek elipsy i środek hiperboli są punktami właściwymi.

Istotnie, środek elipsy ani hiperboli nie może leżeć na prostej w ∞ , gdyż wówczas prosta ta przesłaby przez swój biegun i przeto (p. § 54, str. 269) byłaby styczna do tej stożkowej, wbrew temu, że elipsa i hiperbola przecinają prostą w ∞ w dwóch punktach (p. § 54, str. 265). Ponieważ biegunowa punktu M ma równanie (26) z § 54 (p. str. 268), a biegunowa środka ma równanie $x_3=0$, więc warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby punkt M był środkiem, jest

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(m) = 0$$

czyli

$$(2) \quad a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 = 0 \quad \text{i} \quad a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 = 0.$$

Środek krzywej o równaniu rzeczywistym (która może być elipsą nierzeczywistą) jest zawsze *punktem rzeczywistym*, gdyż wobec (2) ma on współrzędne

$$m_1:m_2:m_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Jako punkt właściwy, środek elipsy i hiperboli może być badany we współrzędnych niejednorodnych. Dzieliąc (2) przez m_3 , dostajemy dla wyznaczenia środka układ równań

$$(3) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

czyli

$$(4) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Na to, by początek układu był środkiem stożkowej, potrzeba i wystarcza, żeby równania (3) były spełnione dla $x=0$ i $y=0$. Wówczas $a_{13}=a_{23}=0$ i równanie stożkowej ma kształt

$$(5) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

a więc nie zawiera wyrazów pierwszego stopnia. Nie może być tu $a_{33}=0$, gdyż dostalibyśmy $\Delta=0$. Zatem — w przeciwieństwie do paraboli — *środek elipsy ani hiperboli nie leży na żadnej z tych krzywych*.

Z (5) wynika, że gdy punkt (x, y) leży na krzywej, to leży na niej również punkt $(-x, -y)$. Zatem *środek elipsy i hiperboli połowi każdą cięciwę przezeń przechodzącą, czyli jest środkiem symetrii*.

Udowodnimy, że *jedynym środkiem symetrii elipsy i hiperboli jest jej środek, i że parabola nie ma środka symetrii*.

W tym celu umieścimy w środku symetrii początek układu współrzędnych. Jeśli zatem jest spełnione równanie $g(x, y)=0$, to jest też spełnione równanie $g(-x, -y)=0$. Ponieważ

$$g(-x, -y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22}y^2 - 2a_{13}x - 2a_{23}y + a_{33},$$

wieć dla każdego punktu (x, y) tej stożkowej jest

$$(6) \quad g(x, y) - g(-x, -y) = 4a_{13}x + 4a_{23}y = 0.$$

Gdyby jedna z liczb a_{13} i a_{23} była różna od 0, to równanie (6) przedstawiałoby prostą, na której leżą wszystkie punkty stożkowej, co jest niemożliwe. Ponieważ $a_{13}=a_{23}=0$, więc dostajemy równanie (5), z którego wynika, że początek układu współrzędnych jest środkiem krzywej, c. b. d. o.

Ponieważ środek paraboli nie jest punktem właściwym, więc nie ma ona środka symetrii.

2. Średnice. Średnicą stożkowej nazywamy biegunową punktu w ∞ .

Niech P_∞ będzie dowolnym punktem w ∞ . Ponieważ leży on na prostej w ∞ czyli na biegunowej środka, więc na podstawie twierdzenia udowodnionego w § 54 (p. str. 271) biegunowa punktu P_∞ przechodzi przez środek. Z tego samego twierdzenia wynika, że każda prosta przechodząca przez środek jest średnicą. A zatem:

Średnice są to proste pęku, którego wierzchołkiem jest środek.

Średnicą paraboli jest również prosta w ∞ . W dalszym ciągu, mówiąc o średnicach paraboli, będziemy wyłączały ten przypadek. Ponieważ średnice paraboli przechodzą przez jej środek, a ten jest punktem w ∞ , więc *wszystkie średnice paraboli są równoległe*.

Środek jest wyznaczony przez równania (1). Zatem średnice — jako proste pęku, którego wierzchołkiem jest środek — są wyznaczone przez równanie

$$(7) \quad a \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

lub — we współrzędnych niejednorodnych — przez równanie

$$(8) \quad a \frac{\partial g}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Prosta (8) jest biegunową punktu $(\alpha:\beta:0)$. Należy zatem w przypadku paraboli wyłączyć z przedstawienia (8) punkt $(\alpha:\beta:0)$, który jest jej punktem w ∞ , gdyż inaczej biegunowa byłaby prostą w ∞ i równanie (8) byłoby więc w tym przypadku sprzeczne.

Niechaj będzie dany kierunek k . Wyznacza on pewien punkt P_∞ . Średnica, która jest biegunową tego punktu, nazywa się *średnicą sprzężoną z kierunkiem k* , a kierunek k_1 tej średnicy (o ile jest ona prostą właściwą) — *kierunkiem sprzężonym z kierunkiem k* .

Przez każdy punkt M stożkowej przechodzi średnica; jej kierunek jest sprzężony z kierunkiem stycznej do tej stożkowej w punkcie M .

Ogólniej: *przez każdy punkt M płaszczyzny przechodzi średnica; jej kierunek jest sprzężony z kierunkiem biegunowej punktu M .*

Ponieważ pierwsze z tych twierdzeń wynika z drugiego, więc wystarczy udowodnić drugie. Przez M przechodzi średnica p , gdyż proste pęku (7) przechodzą przez każdy punkt płaszczyzny. Niech średnica p będzie biegunową punktu P_∞ . Ponieważ biegunowa p punktu P_∞ przechodzi przez M , więc biegunowa m punktu M przechodzi przez P_∞ , czyli średnica p jest sprzężona z kierunkiem biegunowej m , c. b. d. o.

Niech teraz $\alpha:\beta$ będzie dowolnym kierunkiem. Średnica z nim sprzężona ma równanie (8) czyli równanie

$$(aa_{11} + \beta a_{12})x + (aa_{21} + \beta a_{22})y + (aa_{13} + \beta a_{23}) = 0,$$

a więc ma ona kierunek

$$\alpha':\beta' = -(aa_{21} + \beta a_{22}) : (aa_{11} + \beta a_{12}).$$

Stąd

$$(9) \quad a_{11}aa' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0.$$

Równanie to wyznacza kierunek $\alpha':\beta'$ sprzężony z kierunkiem $\alpha:\beta$.

Kierunek, który jest sprzężony sam ze sobą, nazywa się *asymptotyczny*.

Wobec (9), na to, by kierunek był asymptotyczny, potrzeba i wystarczy, żeby

$$(10) \quad \varphi(\alpha, \beta) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Kierunki asymptotyczne są więc kierunkami punktów w ∞ stożkowej; w szczególności dla elips i hiperbol są one kierunkami asymptot. Dla paraboli kierunek asymptotyczny jest wspólnym kierunkiem wszystkich jej średnic. Kierunek ten jest dla paraboli sprzężony z każdym kierunkiem na płaszczyźnie.

Udowodnimy, że w każdej stożkowej średnica sprzężona z kierunkiem nieasymptotycznym k jest miejscem geometrycznym środków cięciw mających kierunek k .

W tym celu obierzmy średnicę za oś Ox i nadajmy osi Oy kierunek k . Wówczas kierunek k jest wyznaczony przez stosunek $\alpha:\beta=0:1$; średnica z nim sprzężona ma więc na mocy (8) równanie

$$\frac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

Ponieważ równanie to przedstawia oś Ox , więc $a_{21}=a_{23}=0$. Równaniem stożkowej jest zatem

$$(11) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0.$$

Niech $P(\xi, 0)$ będzie dowolnym punktem średnicy, czyli osi Ox . Prosta $x=\xi$ przecina stożkową w dwóch punktach, $P_1(\xi, \eta_1)$ i $P_2(\xi, \eta_2)$, które mogą być identyczne, gdy prosta jest styczną; mogą też być nierzeczywiste, sprzężone. Ponieważ z równania (11) wynika, że wraz z punktem (ξ, η_1) leży na stożkowej punkt $(\xi, -\eta_1)$, więc $\eta_1 = -\eta_2$. Stąd dla środka odcinka P_1P_2 otrzymujemy współrzędne

$$x = \xi, \quad y = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Jeżeli kierunek jest asymptotyczny, to ostatnie twierdzenie nie może zachodzić, wówczas bowiem prosta o tym kierunku przecina stożkową w punkcie w ∞ , a więc ma z nią co najwyżej jeden punkt właściwy wspólny.

Weźmy teraz pod uwagę *elipsę* lub *hiperbolę*. Niech k będzie dowolnym kierunkiem, a k_1 — kierunkiem z nim sprzężonym. Wów-

czas, na odwrót, kierunkiem sprzężonym z k_1 jest k . Gdy bowiem $\Delta \neq 0$, to liczby

$$aa_{21} + \beta a_{22}, \quad aa_{11} + \beta a_{12}$$

nie mogą jednocześnie zniknąć, a więc (9) wyznacza dla każdego kierunku $\alpha:\beta$ jeden kierunek z nim sprzężony $\alpha':\beta'$. Zamieniając $\alpha:\beta$ i $\alpha':\beta'$ w równaniu (9), dostajemy to samo równanie, a więc kierunkiem sprzężonym do $\alpha':\beta'$ jest kierunek $\alpha:\beta$. Wynika stąd, że *kierunki można podzielić na pary kierunków sprzężonych*.

Dla każdego kierunku różnego od asymptotycznego kierunek z nim sprzężony jest od niego różny.

Średnice mające kierunki sprzężone nazywają się *średnicami sprzężonymi*.

Udowodnimy, że w układzie współrzędnych, którego osiami są średnice sprzężone, każda elipsa rzeczywista ma równanie

$$(12) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

każda hiperbola ma równanie

$$(13) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

a elipsa nierzeczywista ma równanie

$$(14) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = -1.$$

Istotnie, ponieważ oś Ox jest z założenia sprzężona z kierunkiem osi Oy , więc stożkowa ma równanie kształtu (11), w którym $a_{12}=0$ i $a_{23}=0$. Z tej samej przyczyny musi być $a_{13}=0$, ponieważ kierunek osi Oy jest sprzężony z kierunkiem osi Ox ; dostajemy zatem

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Dla elipsy rzeczywistej jest $\Delta > 0$ i $a_{11}\tilde{\Delta} < 0$, czyli

$$\text{sign } a_{11} = \text{sign } a_{22} = -\text{sign } a_{33}.$$

Dzieląc przez a_{33} i przyjmując oznaczenia

$$-\frac{a_{33}}{a_{11}} = a'^2, \quad -\frac{a_{33}}{a_{22}} = b'^2,$$

dostajemy równanie (12). Podobnie otrzymuje się równania (13) i (14), c. b. d. o.

Niech początek O układu współrzędnych leży na paraboli, oś Oy niech będzie styczną do paraboli w punkcie O , a oś Ox — średnicą paraboli przechodzącą przez O . W tym układzie współrzędnych parabola ma równanie

$$(15) \quad y^2 - 2p'x = 0.$$

Istotnie, ponieważ styczna ma kierunek sprzężony ze średnicą przechodzącą przez punkt styczności, więc parabola ma równanie kształtu (11). Ponieważ punkt O leży na paraboli, więc $a_{33} = 0$. Wobec $\Delta = 0$ co najmniej jedna z liczb a_{11} i a_{22} znika. Nie może być $a_{22} = 0$, gdyż równanie przedstawiałoby parę prostych. Jest więc $a_{11} = 0$ i otrzymujemy

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

czyli postać (15), c. b. d. o.

3. Równanie pary asymptot. Niech początkiem układu współrzędnych będzie środek elipsy lub hiperboli. Stożkowa ta ma więc równanie (p. str. 274)

$$(16) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Dla punktów $(\alpha:\beta:0)$ leżących na niej jest

$$(17) \quad a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Weźmy pod uwagę którąkolwiek z asymptot. Ma ona równanie

$$\beta x - \alpha y = 0$$

jako prostą przechodzącą przez początek układu i przez punkt $(\alpha:\beta:0)$. Tak więc

$$x:y = \alpha:\beta,$$

skąd wobec (17)

$$(18) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Zatem równanie (18) przedstawia parę asymptot stożkowej (16).

W przypadku, gdy stożkowa jest hiperbolą i równanie (16) przedstawia ją w układzie współrzędnych prostokątnych, kąt między asymptotami wyznaczony jest przez wzór

$$(19) \quad \operatorname{tg} \nu = \pm \frac{2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11} + a_{22}}.$$

Istotnie, niech asymptota ma równanie $y = mx$. Podstawiając mx zamiast y do (18), otrzymujemy

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0.$$

Równanie to wyznacza współczynniki kierunkowe obu asymptot. Jest więc

$$m_1 m_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad m_2 - m_1 = \pm \frac{2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Ze wzoru

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

dostajemy (19), c. b. d. o.

Ponieważ przy przesunięciu układu współrzędnych część jednorodna równania nie ulega zmianie, więc wzór (19) wyznacza kąt między asymptotami każdej hiperboli w układzie prostokątnym współrzędnych.

Hiperbola nazywa się *równoboczną*, gdy jej asymptoty są prostopadłe. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby tak było, jest równość

$$(20) \quad a_{11} + a_{22} = 0.$$

4. Środki symetrii stożkowych niewłaściwych. Nasuwa się obecnie pytanie, co przedstawiają równania (4) w przypadku, gdy stożkowa jest niewłaściwa. Stożkowa taka rozpada się na proste i równanie jej można przekształcić w równanie

$$(21) \quad g(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

(p. wzór (6) z § 53, str. 262); stożkowa składa się więc z prostych

$$(22) \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

i w tym przypadku jest

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= a_1(a_2x + b_2y + c_2) + a_2(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= b_1(a_2x + b_2y + c_2) + b_2(a_1x + b_1y + c_1) = 0. \end{aligned}$$

Jeśli równania (22) przedstawiają parę prostych przecinających się, to

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0;$$

wówczas układy równań (22) i (23) są równoważne. Rozwiązanie układu (22) przedstawia punkt przecięcia obu prostych, który jest środkiem symetrii (jedynym) stożkowej złożonej z tych prostych.

Jeżeli zaś równania (22) przedstawiają proste równoległe, to

$$a_2 = \varrho a_1, \quad b_2 = \varrho b_1, \quad \varrho \neq 0,$$

a więc równania (23) mają postać

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv 2a_1 \varrho(a_1 x + b_1 y) + a_1(c_2 + \varrho c_1) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \equiv 2b_1 \varrho(a_1 x + b_1 y) + b_1(c_2 + \varrho c_1) = 0.$$

Ponieważ a_1 i b_1 nie znikają równocześnie, więc układ tych dwóch równań jest równoważny jednemu równaniu

$$(24) \quad a_1 x + b_1 y + \frac{c_2 + \varrho c_1}{2\varrho} = 0.$$

Niech punkt $P_1(x_1, y_1)$ leży na pierwszej z prostych (22), a punkt $P_2(x_2, y_2)$ na drugiej. Zatem

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \quad \varrho a_1 x_2 + \varrho b_1 y_2 + c_2 = 0.$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez ϱ i dodając je do drugiego, otrzymujemy

$$a_1 \frac{x_1 + x_2}{2} + b_1 \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{c_2 + \varrho c_1}{2\varrho} = 0.$$

Wynika stąd, że prosta (24) jest miejscem geometrycznym środków odcinków, łączących punkty prostych (22). Tym samym równanie (24) przedstawia prostą równoległą do prostych (22), leżącą między nimi i połowiącą ich odległość. Ta prosta jest zarazem miejscem geometrycznym środków symetrii stożkowej złożonej z pary prostych równoległych.

Jeżeli wreszcie obie proste równoległe się zlewają, a więc gdy stożkowa jest prostą podwójną, równania (22) przedstawiają tę samą prostą.

Udowodniliśmy, że dla stożkowych mających środki symetrii równania (22) przedstawiają twór złożony z tych środków.

(Uwaga. Na stożkowej złożonej z pary prostych przecinających się leży jej środek symetrii; zatem jest w tym punkcie spełniony układ równań (21) i (23) czyli

$$(25) \quad g(x, y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

który wyróżnia ten punkt spośród wszystkich pozostałych punktów stożkowej.

Niech teraz równanie

$$g(x, y) = 0$$

przedstawia krzywą algebraiczną co najmniej drugiego stopnia.

Punktem osobliwym tej krzywej nazywamy każdy punkt, którego współrzędne spełniają układ równań (25). Dla pary przecinających się prostych punktem osobliwym jest więc ich punkt przecięcia.

Np. dla kisoidy Dioklesa (p. § 15, str. 73) jest

$$g(x, y) \equiv x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0;$$

zatem

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \equiv 2y(x - a).$$

Wynika stąd, że punktem osobliwym kisoidy jest punkt $(0, 0)$. Punkty osobliwe, w których otoczeniu krzywa ma kształt taki jak kisoida w otoczeniu punktu $(0, 0)$, nazywają się *ostrzami* (p. rys. 48, str. 73).

Również dla lemniskaty (p. § 15, str. 74)

$$g(x, y) \equiv (x^2 + y^2) - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

początek układu jest punktem osobliwym. Punkt tego typu nazywa się punktem *podwójnym* (p. rys. 49, str. 74)

Na krzywej

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2$$

leży początek układu O . Łatwo udowodnić, że istnieje otoczenie punktu O , które nie zawiera żadnego punktu tej krzywej prócz punktu O . Taki punkt osobliwy nazywa się *punktem izolowanym* krzywej.

W geometrii algebraicznej dowodzi się, że punkty osobliwe krzywych algebraicznych mogą być jedynie punktami wielokrotnymi, ostrzami lub punktami izolowanymi. Krzywe algebraiczne nie mogą mieć punktów osobliwych w rodzaju uwidocznionych na rys. 97, tj. w których krzywa ma dzioby z różnymi stycznymi.

Określenie punktu osobliwego ma charakter geometryczny, niezależny od układu współrzędnych.

Punkt osobliwy jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych.



Rys. 97

Istotnie, gdy

$$x = b_{11}x' + b_{12}y' + c_1, \quad y = b_{21}x' + b_{22}y' + c_2,$$

to między wielomianem $g(x, y)$ a wielomianem przekształconym $h(x, y)$ zachodzi związek

$$h(x', y') = g(b_{11}x' + b_{12}y' + c_1, b_{21}x' + b_{22}y' + c_2) = g(x, y).$$

Zatem

$$\frac{\partial h}{\partial x'} = b_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y'} = b_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Plekroć zachodzą równości (25), muszą więc zajść równości

$$h(x', y') = \frac{\partial h}{\partial x'}(x', y') = \frac{\partial h}{\partial y'}(x', y') = 0, \quad \text{c. b. d. o. })$$

ROZDZIAŁ XII

WŁASNOŚCI METRYCZNE STOŻKOWYCH

§ 56. Osie

Będziemy rozpatrywali obecnie stożkowe rzeczywiste.

Jeśli kierunek k jest prostopadły do kierunku sprzężonego k' , to oba kierunki nazywamy *głównymi*.

Średnicę, której kierunek jest główny, nazywamy *osią stożkowej*.

Oś stożkowej jest jej osią symetrii i na odwrót.

Każda bowiem średnica połowi cięciwy mające kierunek z nią sprzężony (p. § 55, str. 276). Zatem oś połowi cięciwy do niej prostopadłe, czyli jest osią symetrii.

Na odwrót, gdy prosta jest osią symetrii stożkowej, to połowi cięciwy do niej prostopadłe, a więc jest średnicą sprzężoną z kierunkiem do niej prostopadłym.

Ze względu na znaczenie osi symetrii w geometrii krzywych podamy tu metodę wyznaczania kierunków głównych. Ograniczymy się do układu prostokątnego współrzędnych; metodą, którą podamy, daje się jednak uogólnić z łatwością na dowolne układy ukośno-kątne.

Załóżmy, że kierunek $\alpha:\beta$ jest główny; wobec tego jest on prostopadły do sprzężonego z nim kierunku $\alpha':\beta'$. Zachodzą zatem równości

$$(1) \quad \begin{aligned} & \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0, \\ & (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\alpha' + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\beta' = 0 \end{aligned}$$

(p. wzór (9) z § 55, str. 275). Ponieważ liczby α' i β' nie znikają równocześnie, więc

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta & a_{21}\alpha + a_{22}\beta \end{vmatrix} = 0.$$