Wobec (12) układ równań (15) ma rozwiązanie ω, k, l.

Istotnie, z pierwszego z tych równań znajdujemy ω, a następnie z trzeciego obliczamy

$$k:l=(-\sin 2\omega \pm 1):\cos 2\omega.$$

Stąd i z drugiego z równań (15) znajdujemy k i l.

Gdy $e=1$, to z pierwszego z równań (15) wynika, że $\omega=\pi/4=\vartheta$; płaszczyzna tnąca tworzy z osią stożka kąt $\varphi=\pi/4$, a więc krzywa (14) jest parabolą.

Gdy zaś $0<e<1$, to $0<\omega<\pi/4$, więc dla kąta φ, jaki płaszczyzna tnąca tworzy z osią stożka, mamy

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\omega>\frac{\pi}{4}=\vartheta;$$

zatem przekrój jest wówczas elipsą.

Aby udowodnić z kolei twierdzenie dla hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{16}$$

weźmy pod uwagę stożek, który powstaje przez obrót prostej

$$y'=\frac{bx'}{a}, \qquad z'=0$$

dokoła osi Ox. Stożek ten ma równanie (p. wzór (4) z § 16, str. 79)

$$-\frac{b^2}{a^2}x'^2+y'^2+z'^2=0.$$

Przesuńmy znowu układ współrzędnych:

$$x=x', \qquad y=y', \qquad z=z'-b.$$

W nowym układzie współrzędnych stożek ma równanie

$$-\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2+(z+b)^2=0$$

i płaszczyzna $z=0$ przecina go wzdłuż krzywej (16). Ponieważ ta płaszczyzna jest równoległa do osi Ox', tj. do osi stożka, więc przekrój jest hiperbolą, c. b. d. o.)

ROZDZIAŁ X

KLASYFIKACJA STOŻKOWYCH

§ 51. Przekształcanie równań stożkowych

Rozszerzymy obecnie definicję *stożkowej*, nazywając tak wszelką krzywą płaską, dającą się przedstawić we współrzędnych kartezjańskich przez równanie drugiego stopnia

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)\equiv a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+ \\ +2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta definicja stożkowej obejmuje jako szczególny przypadek definicję z § 48 (str. 237).

Jeśli stożkowa (1) nie zawiera prostej w ∞, to jest ona wyznaczona przez równanie niejednorodne

$$g(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{2}$$

(p. § 40, str. 202).

Poddajmy najogólniejszej zmianie układ współrzędnych, na ogół ukośnokątnych,

$$x=b_{11}x'+b_{12}y'+m, \qquad y=b_{21}x'+b_{22}y'+n, \tag{3}$$

gdzie

$$|\mathfrak{B}|=|b_{ik}|\neq 0. \tag{4}$$

Zmianę tę możemy złożyć z dwóch:

$$x=x'+m, \qquad y=y'+n, \tag{5}$$

oraz

$$x=b_{11}x'+b_{12}y', \qquad y=b_{21}x'+b_{22}y'. \tag{6}$$

We współrzędnych jednorodnych przekształcenie (5) wyraża się wzorami

$$\varrho x_1=x_1'+mx_3', \qquad \varrho x_2=x_2'+nx_3', \qquad \varrho x_3=x_3', \qquad \text{gdzie } \varrho\neq 0. \tag{7}$$

Podstawiając wzory (7) do równania (1), dostajemy po skróceniu przez czynnik ϱ^2 równanie tejże stożkowej w postaci

$$f_1(x_1', x_2', x_3') \equiv$$
$$(8) \qquad \equiv a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + 2c_{13}x_1'x_3' + 2c_{23}x_2'x_3' + c_{33}x_3'^2 = 0.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$(9) \qquad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \breve{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$(10) \qquad \Delta = |\mathfrak{A}|, \qquad \breve{\Delta} = |\breve{\mathfrak{A}}|.$$

Macierze $\mathfrak{A}$ i $\breve{\mathfrak{A}}$ będziemy nazywali *małą* i *wielką macierzą formy kwadratowej* (1).

Z równania (8) wynika, że mała macierz formy (1) nie ulega zmianie przy przesunięciu układu współrzędnych.

Oznaczmy przez $\breve{\mathfrak{C}}$ wielką macierz formy (8). Przekształcenie określone wzorami (7) ma macierz

$$(11) \qquad \breve{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

skąd $|\breve{\mathfrak{B}}| = 1$. Ponieważ równanie (8) powstaje z równania (1) przez przekształcenie (7), więc

$$(12) \qquad \breve{\mathfrak{C}} = \breve{\mathfrak{B}}^+ \mathfrak{A} \breve{\mathfrak{B}}$$

(p. Przypis I, § 4). Stąd wynika wobec (11), że macierze $\breve{\mathfrak{A}}$ i $\breve{\mathfrak{C}}$ mają ten sam rząd oraz że $|\breve{\mathfrak{C}}| = |\breve{\mathfrak{A}}|$.

Zbadamy obecnie wpływ przekształcenia (6), czyli przekształcenia, wyrażającego się we współrzędnych jednorodnych wzorami

$$(13) \qquad \varrho x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2', \qquad \varrho x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2', \qquad \varrho x_3 = x_3'.$$

Przekształcenie (13) ma macierz

$$(14) \qquad \breve{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie

$$|\breve{\mathfrak{B}}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |\mathfrak{B}|.$$

Podstawiając wzory (13) do równania (1), dostajemy równanie przekształcone

$$f_1(x_1', x_2', x_3') \equiv c_{11}x_1'^2 + 2c_{12}x_1'x_2' + c_{22}x_2'^2 +$$
$$+ 2c_{13}x_1'x_3' + 2c_{23}x_2'x_3' + c_{33}x_3'^2 = 0.$$

Widać natychmiast, że forma

$$c_{11}x_1'^2 + 2c_{12}x_1'x_2' + c_{22}x_2'^2$$

powstaje z formy

$$(15) \qquad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

przez przekształcenie, które otrzymuje się ze wzorów (13) opuszczając trzeci z nich. A zatem

$$(16) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}^+ \mathfrak{A} \mathfrak{B}, \qquad \breve{\mathfrak{C}} = \breve{\mathfrak{B}}^+ \breve{\mathfrak{A}} \breve{\mathfrak{B}}.$$

Wynika stąd, że przekształcenie (6) czyli (13) nie zmienia rzędów macierzy $\mathfrak{A}$ i $\breve{\mathfrak{A}}$; nie ulegają też zmianie znaki wyznaczników $|\mathfrak{A}|$ i $|\breve{\mathfrak{A}}|$, ani pierwiastków charakterystycznych macierzy $\mathfrak{A}$.

Łącząc wyniki otrzymane dla przesunięć i przekształcenia (6), dostajemy twierdzenie:

Przy najogólniejszej zmianie układu współrzędnych nie ulegają zmianie rzędy macierzy $\mathfrak{A}$ i $\breve{\mathfrak{A}}$, ani znaki pierwiastków charakterystycznych macierzy $\mathfrak{A}$; ponadto

$$(17) \qquad \operatorname{sign}|\mathfrak{A}| = \operatorname{sign}|\mathfrak{C}|, \qquad \operatorname{sign}|\breve{\mathfrak{A}}| = \operatorname{sign}|\breve{\mathfrak{C}}|.$$

Rozważmy szczegółowiej przejście od układu współrzędnych prostokątnych do innych prostokątnych w przypadku, gdy forma (1) jest rzeczywista. Wówczas macierz (4) jest ortogonalna, co pociąga za sobą ortogonalność macierzy (14). Wobec równości (16) dostajemy więc twierdzenie:

Przy zmianie prostokątnego układu współrzędnych na prostokątny, prócz poprzednich niezmienników, niezmiennikiem jest też wielomian charakterystyczny macierzy $\mathfrak{A}$ (a więc i jego pierwiastki); ponadto

$$(18) \qquad |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{C}|, \qquad |\breve{\mathfrak{A}}| = |\breve{\mathfrak{C}}|$$

(p. Przypis I, § 5).

Wyznacznikiem charakterystycznym macierzy $\mathfrak{A}$ jest

(19) $$w(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\Delta.$$

Dla pierwiastków charakterystycznych macierzy $\mathfrak{A}$ wynikają stąd równości:

(20) $$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}, \qquad \lambda_1\lambda_2=\Delta.$$

W szczególności, gdy

(21) $$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,$$

to

(22) $$\operatorname{sign}\lambda_1=\operatorname{sign}\lambda_2=\operatorname{sign}(a_{11}+a_{22}).$$

Z drugiej strony z nierówności (21) wynika, że forma (15) nie jest rozkładalna na czynniki liniowe rzeczywiste, a więc że

$$\operatorname{sign}a_{11}=\operatorname{sign}a_{22}.$$

Wobec (22) wynika stąd, że

(23) $$\operatorname{sign}\lambda_1=\operatorname{sign}\lambda_2=\operatorname{sign}a_{11}=\operatorname{sign}a_{22}.$$

Dowiedliśmy więc, że nierówność (21) pociąga za sobą równości (23).

Udowodnione twierdzenia o niezmiennikach zmiany układu współrzędnych są podstawą, na której opiera się klasyfikacja metryczna stożkowych.

§ 52. Klasyfikacja metryczna stożkowych

Dowiedziemy teraz następującego twierdzenia klasyfikacyjnego: *Jeśli krzywa o równaniu rzeczywistym* *

(1) $$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$$

nie zawiera prostej w ∞, tj. jeżeli jest wyznaczona przez równanie we współrzędnych niejednorodnych

(2) $$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

to istnieje układ współrzędnych prostokątnych, w którym ta krzywa ma równanie jednego z następujących kształtów:

* tzn. mającym wszystkie współczynniki a_{ik} rzeczywiste.

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

(4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0,$$

(5) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

(6) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$$

(7) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

(8) $$y^2-2px=0, \quad \textit{gdzie } p\neq 0,$$

(9) $$y^2+a^2=0, \quad \textit{gdzie } a\neq 0,$$

(10) $$y^2-a^2=0, \quad \textit{gdzie } a\neq 0,$$

(11) $$y^2=0.$$

Jeżeli krzywa w pewnym układzie współrzędnych prostokątnych ma równanie jednej z postaci (3)-(11), *to w żadnym układzie współrzędnych prostokątnych równanie tej krzywej nie może mieć żadnej z pozostałych postaci.*

Dlatego równania (3)-(11) nazywamy *równaniami kanonicznymi* krzywych drugiego stopnia.

Równanie (3) przedstawia elipsę, (5) — hiperbolę, (8) — parabolę, (6) — parę prostych zespolonych sprzężonych

$$\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0, \qquad \frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0,$$

przecinających się w punkcie rzeczywistym właściwym, (7) — parę nierównoległych prostych rzeczywistych

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0, \qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,$$

(9) — parę prostych równoległych nierzeczywistych sprzężonych

$$y=ia, \qquad y=-ia,$$

i wreszcie (10) — parę prostych równoległych rzeczywistych

$$y=a, \qquad y=-a.$$

Krzywa przedstawiona przez równanie (4) nie zawiera żadnego punktu rzeczywistego. Nosi ona nazwę *elipsy nierzeczywistej.*

Krzywa przedstawiona przez równanie (11) jest prostą; nie jest więc drugiego stopnia. Ze względu na to, że równanie (11) jest drugiego stopnia, nazywa się je równaniem *prostej podwójnej.*

Podamy teraz kryteria pozwalające rozstrzygnąć na podstawie równania (1), do której z postaci (3)-(11) można sprowadzić równanie krzywej. W kryteriach tych występują jedynie rzędy macierzy $\mathfrak{A}$ i $\breve{\mathfrak{A}}$, znaki ich wyznaczników i pierwiastków charakterystycznych, a więc *jedynie niezmienniki zmiany układu współrzędnych kartezjańskich.* Dlatego możemy od razu przejść od ewentualnego układu ukośnokątnego do prostokątnego i założyć, że krzywa jest przedstawiona w układzie współrzędnych prostokątnych.

Załóżmy naprzód, że krzywa o równaniu rzeczywistym (1) w układzie współrzędnych prostokątnych Oxy nie zawiera prostej w ∞. Możemy ją więc badać za pomocą równania (2).

Istnieje przekształcenie ortogonalne, które formę

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

przekształca w formę

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2$$

(p. Przypis I, § 5). Temu przekształceniu ortogonalnemu T odpowiada obrót układu współrzędnych Oxy dokoła punktu O (lub obrót i odbicie). W nowym układzie współrzędnych $O\xi\eta$ krzywa ma równanie

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+2p_1\xi+2p_2\eta+q=0. \tag{12}$$

Rozpatrzymy poszczególne przypadki:

1. $\Delta\neq 0$ czyli $R(\mathfrak{A})=2$. Na mocy wzoru (20) z § 51 jest

$$\lambda_1\neq 0 \quad \text{i} \quad \lambda_2\neq 0.$$

Możemy więc równanie (12) przekształcić w sposób następujący:

$$\lambda_1\left(\xi^2+\frac{2p_1}{\lambda_1}\xi\right)+\lambda_2\left(\eta^2+\frac{2p_2}{\lambda_2}\eta\right)+q=0,$$

$$\lambda_1\left(\xi+\frac{p_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(\eta+\frac{p_2}{\lambda_2}\right)^2+q_1=0.$$

Przez przesunięcie

$$X=\xi+\frac{p_1}{\lambda_1}, \qquad Y=\eta+\frac{p_2}{\lambda_2}$$

dostajemy stąd

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+q_1=0. \tag{13}$$

Równanie (13) ma wielką macierz

$$\breve{\mathfrak{A}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & q_1\end{pmatrix},$$

a zatem

$$|\breve{\mathfrak{A}}|=\lambda_1\lambda_2q_1=\Delta q_1.$$

Ponieważ wyróżnik $\breve{\Delta}=|\breve{\mathfrak{A}}|$ jest niezmiennikiem przekształceń ortogonalnych, więc

$$q_1=\frac{\breve{\Delta}}{\Delta},$$

skąd wobec (13)

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{\breve{\Delta}}{\Delta}=0. \tag{14}$$

Rozróżnimy tu następujące dwa podprzypadki:

1a. $\breve{\Delta}\neq 0$ czyli $R(\breve{\mathfrak{A}})=3$. Wówczas z równania (14) wynika, że

$$\frac{X^2}{-\breve{\Delta}/\lambda_1\Delta}+\frac{Y^2}{-\breve{\Delta}/\lambda_2\Delta}-1=0. \tag{15}$$

Jeśli teraz $\Delta>0$, to na mocy wzoru (23) z § 51, str. 252, jest $\operatorname{sign}\lambda_1=\operatorname{sign}\lambda_2$.

Gdy $\operatorname{sign}\lambda_1=\operatorname{sign}\lambda_2=-\operatorname{sign}\breve{\Delta}$, to podstawiając

$$a^2=\left|\frac{\breve{\Delta}}{\lambda_1\Delta}\right|, \qquad b^2=\left|\frac{\breve{\Delta}}{\lambda_2\Delta}\right|, \tag{16}$$

dostajemy postać (3), a ponieważ jest spełniona nierówność (21) z § 51, str. 252, więc jest też spełniona (p. tamże) równość (23) i przeto przypadek ten zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{11}\breve{\Delta}<0.$$

Gdy natomiast $\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2 = \operatorname{sign}\breve{\Delta}$, to z podstawienia (16) dostajemy równanie (4); przypadek ten zachodzi, gdy

$$a_{11}\breve{\Delta} > 0.$$

Gdy wreszcie $\operatorname{sign}\lambda_1 = -\operatorname{sign}\lambda_2$ i np. $\lambda_1\breve{\Delta} < 0$, to podstawienie (16) prowadzi do równania (5) (a w razie, gdy $\lambda_1\breve{\Delta} > 0$, zamiana osi X i Y znowu prowadzi do tegoż równania). Przypadek ten zachodzi, gdy $\Delta < 0$.

1b. $\breve{\Delta} = 0$. Wówczas z równania (14) otrzymujemy

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0. \tag{17}$$

Jeśli teraz $\Delta > 0$, to $\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2$ i podstawienie

$$\frac{1}{a^2} = |\lambda_1|, \qquad \frac{1}{b^2} = |\lambda_2| \tag{18}$$

daje równanie (6).

Jeśli natomiast $\Delta < 0$, to podstawienie (18) prowadzi do równania (7).

2. $\Delta = 0$. Wówczas jeden z pierwiastków charakterystycznych jest zerem, np. $\lambda_1 = 0$, i równanie (12) przybiera postać

$$\lambda_2\eta^2 + 2p_1\xi + 2p_2\eta + q = 0. \tag{19}$$

Nie może tu być $\lambda_2 = 0$, gdyż mielibyśmy wtedy $R(\mathfrak{A}) = 0$, a więc w równaniu pierwotnym (1) byłoby

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0;$$

krzywa zawierałaby zatem prostą w ∞, wbrew założeniu. Przez przesunięcie

$$X = \xi, \qquad Y = \eta + \frac{p_2}{\lambda_2}$$

sprowadzamy równanie (19) do postaci

$$\lambda_2 Y^2 + 2p_1 X + q_1 = 0. \tag{20}$$

Stąd

$$\breve{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ p_1 & 0 & q_1 \end{pmatrix} = -\lambda_2 p_1^2. \tag{21}$$

Rozróżnimy tu znowu następujące dwa podprzypadki:

2a. $\breve{\Delta} \neq 0$. Wówczas ze wzoru (21) wynika, że $p_1 \neq 0$. Przez przesunięcie

$$X_1 = X + \frac{q_1}{2p_1}, \qquad Y_1 = Y,$$

otrzymujemy

$$\lambda_2 Y_1^2 + 2p_1 X_1 = 0, \tag{22}$$

stąd zaś przez podstawienie

$$\frac{2p_1}{\lambda_2} = -2p \tag{23}$$

otrzymujemy równanie (8).

2b. $\breve{\Delta} = 0$. Wówczas na mocy wzoru (21) jest $p_1 = 0$ i równanie (20) przechodzi w równanie

$$\lambda_2 Y^2 + q_1 = 0. \tag{24}$$

Tu więc

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli $R(\breve{\mathfrak{A}}) = 1$, to musi być $q_1 = 0$ (gdyż znika każdy minor drugiego stopnia, a $\lambda_2 \neq 0$). Wtedy równanie (24) przybiera postać (11).

Jeśli zaś $R(\breve{\mathfrak{A}}) = 2$, to $q_1 \neq 0$ i zachodzi bądź równanie (9), bądź równanie (10). Aby mieć kryterium pozwalające rozróżnić, kiedy zachodzi pierwsze, a kiedy drugie z tych równań, zauważmy, że w pierwszym przypadku krzywa nie zawiera ani jednego punktu rzeczywistego, a w drugim składa się z pary prostych rzeczywistych równoległych. W pierwszym więc przypadku krzywa nie przecina osi współrzędnych w punktach rzeczywistych, a w drugim przecina co najmniej jedną z nich. Punkty przecięcia krzywej (2) z osiami współrzędnych otrzymujemy, podstawiając kolejno $x=0$ i $y=0$. W ten sposób dostajemy dwa równania:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0, \qquad a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Rozwiązalność co najmniej jednego z tych równań w liczbach rzeczywistych jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, by zachodziło równanie (10). A więc równanie to zachodzi, gdy

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0 \qquad \text{lub} \qquad a_{22}a_{33} - a_{23}^2 < 0.$$

Równanie zaś (9) zachodzi, gdy

$$a_{11}a_{33}-a_{13}^2>0 \qquad \text{i} \qquad a_{22}a_{33}-a_{23}^2>0.$$

Uwaga. Lewe strony ostatnich czterech nierówności są równe dopełnieniom algebraicznym A_{22} i A_{11} wyrazów a_{22} i a_{11} macierzy $\breve{\mathfrak{A}}$.

Dotychczas rozważaliśmy przypadek, gdy krzywa nie zawiera prostej w ∞. Jeśli prosta w ∞ leży w całości na krzywej o równaniu (1), to podstawiając w tym równaniu $x_3=0$, dostajemy równanie

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0,$$

które jest spełnione dla wszelkich liczb x_1 i x_2, a więc w którym

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$$

czyli $R(\breve{\mathfrak{A}})=0$. Równanie krzywej ma więc postać

$$x_3(2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+a_{33}x_3)=0 \tag{25}$$

i krzywa rozpada się na dwie proste:

$$x_3=0, \qquad 2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+a_{33}x_3=0.$$

Na mocy (25) jest

$$\breve{\mathfrak{A}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Jeśli $a_{13}\neq 0$ lub $a_{23}\neq 0$, to $R(\breve{\mathfrak{A}})=2$. Wówczas krzywa o równaniu (25) składa się z prostej w ∞ i prostej właściwej.

Obierzmy tę prostą za oś OY kartezjańskiego układu współrzędnych OXY. Wówczas

$$\varrho X_1=2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+a_{33}x_3, \qquad \text{gdzie} \qquad \varrho\neq 0;$$

w tym układzie współrzędnych otrzymujemy więc równanie krzywej (25) w postaci

$$X_1X_3=0.$$

Jeśli zaś $a_{13}=0$ i $a_{23}=0$, to $R(\breve{\mathfrak{A}})=1$. Wówczas równanie (25) ma postać

$$a_{33}x_3^2=0,$$

czyli przedstawia prostą w ∞ podwójną.

Otrzymane wyniki są zebrane w tablicy I.

TABLICA I

$R(\mathfrak{A})$	$R(\breve{\mathfrak{A}})$	Podprzypadki	Postać kanoniczna	Typ krzywej
2	3	$\Delta>0$ i $a_{11}\breve{\Delta}<0$	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$	elipsa rzeczywista
2	3	$\Delta>0$ i $a_{11}\breve{\Delta}>0$	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+1=0$	elipsa zespolona
2	3	$\Delta<0$	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-1=0$	hiperbola
2	2	$\Delta<0$	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$	para prostych rzeczywistych nierównoległych
2	2	$\Delta>0$	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$	para prostych nierzeczywistych nierównoległych
1	3		$Y^2-2pX=0$	parabola
1	2	$A_{11}<0$ lub $A_{22}<0$	$Y^2-a^2=0$	para prostych rzeczywistych równoległych
1	2	$A_{11}>0$ i $A_{22}>0$	$Y^2+a^2=0$	para prostych nierzeczywistych równoległych
1	1		$Y^2=0$	prosta właściwa podwójna
0	2		$X_1X_3=0$	prosta w ∞ i prosta właściwa
0	1		$X_3^2=0$	prosta w ∞ podwójna

§ 53. Klasyfikacja afiniczna stożkowych

Dwa twory A i B nazywamy *przystającymi afinicznie,* jeśli istnieje przekształcenie afiniczne tworu A w twór B. Np. wszystkie prostokąty są przystające afinicznie, tak samo dowolne dwa kąty.

Weźmy naprzód pod uwagę przekształcenia rzeczywiste i krzywe o równaniach rzeczywistych (tj. mających wszystkie współczynniki rzeczywiste).

Udowodnimy, że *w geometrii rzeczywistej wszystkie elipsy są przystające afinicznie.*

W poprzednim paragrafie udowodniliśmy, że każda elipsa ma w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych prostokątnych równanie postaci

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ale dwie elipsy: (1) i

(2) $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

są przystające afinicznie, gdyż przekształcenie

$$x=\frac{a}{\alpha}x', \qquad y=\frac{b}{\beta}y'$$

przeprowadza (1) w (2). Tym samym twierdzenie jest udowodnione.

Podobnie dowodzi się *przystawania afinicznego dowolnych dwóch hiperbol i,* ogólnie, *każdej pary tworów należących w klasyfikacji metrycznej do jednego wiersza tablicy* I (str. 259).

Istnieje więc dokładnie 11 typów stożkowych nie przystających afinicznie.

Tablica I została podzielona właśnie podług tych typów. Jest to klasyfikacja stożkowych w geometrii afinicznej rzeczywistej.

Weźmy teraz pod uwagę dowolne przekształcenia zespolone. Wówczas ilość typów stożkowych (o równaniach rzeczywistych lub nie) będzie mniejsza. Niech bowiem przez przekształcenie afiniczne stożkowa przechodzi w krzywą

(3) $$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+2p_1 x+2p_2 y+q=0$$

(p. Przypis I, § 4). Samo przekształcenie i równanie (3) mogą mieć współczynniki zespolone, a λ_1 i λ_2 nie muszą być pierwiastkami charakterystycznymi.

Jeśli $\Delta\neq 0$ i $\breve{\Delta}\neq 0$, to przez przesunięcie sprowadzamy równanie krzywej (3) do postaci

(4) $$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+q=0,$$

a następnie przez przekształcenie

$$x=\sqrt{\frac{q}{\lambda_1}}X, \qquad y=\sqrt{\frac{q}{\lambda_2}}Y$$

do postaci

(5) $$X^2+Y^2+1=0.$$

Jeśli $\Delta\neq 0$ i $\breve{\Delta}=0$, to w (4) jest $q=0$ i przekształcenie

$$X=\sqrt{\lambda_1}x, \qquad Y=\sqrt{\lambda_2}y$$

przeprowadza krzywą (4) w krzywą

$$X^2+Y^2=0.$$

Jeśli $\Delta=0$ i $\breve{\Delta}\neq 0$, to otrzymujemy tak samo jak w § 52 równanie

$$y^2-2px=0,$$

czyli po przekształceniu

$$X=px, \qquad Y=y,$$

parabolę

$$Y^2-X=0.$$

Jeśli $R(\mathfrak{A})=1$ i $R(\breve{\mathfrak{A}})=2$, to równanie (3) ma kształt

$$\lambda_2 y^2+q=0;$$

podstawienie

$$x=X, \qquad y=\sqrt{\frac{q}{\lambda_2}}Y$$

daje równanie

$$y^2+1=0,$$

przedstawiające parę prostych równoległych.

Jeśli $R(\mathfrak{A})=R(\breve{\mathfrak{A}})=1$, to podobnie otrzymujemy równanie

$$y^2=0,$$

przedstawiające prostą podwójną.

Jeśli $R(\mathfrak{A})=0$ i $R(\breve{\mathfrak{A}})=2$, to mamy równanie

$$x_3(2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+a_{33})=0,$$

które przez przekształcenie

$$\varrho X_1 = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}, \qquad \varrho X_2 = x_2, \qquad \varrho X_3 = x_3$$

przechodzi w równanie

$$X_1 X_3 = 0,$$

przedstawiające prostą właściwą i prostą w ∞.

Jeśli wreszcie $R(\mathfrak{A})=0$ i $R(\breve{\mathfrak{A}})=1$, to dostajemy równanie

$$X_3^2 = 0,$$

przedstawiające prostą podwójną w ∞.

Typy stożkowych geometrii afinicznej zespolonej są zebrane w tablicy II.

TABLICA II

$R(\mathfrak{A})$	$R(\breve{\mathfrak{A}})$	Postać kanoniczna	Typ krzywej
2	3	$x^2+y^2+1=0$	stożkowa właściwa środkowa
1	3	$y^2-2px=0$	parabola
2	2	$x^2+y^2=0$	para prostych właściwych nierównoległych
1	2	$y^2+1=0$	para prostych właściwych równoległych
1	1	$y^2=0$	prosta właściwa podwójna
0	2	$x_1x_3=0$	prosta właściwa i prosta w ∞
0	1	$x_3^2=0$	prosta podwójna w ∞

Jak widzimy, *jeśli* $\breve{\Delta}=0$, *to krzywa rozpada się na proste*. Albowiem, *jeśli* $\breve{\Delta}=0$, *wielomian* f *rozkłada się na dwa czynniki liniowe:*

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3). \tag{6}$$

Istotnie, dla trzeciej i czwartej postaci kanonicznej z tablicy II jest

$$x^2+y^2=(x+iy)(x-iy), \qquad y^2+1=(y+i)(y-i),$$

pozostałe zaś postacie kanoniczne, dla których $\breve{\Delta}=0$, są przedstawione w tej tablicy jako iloczyny dwóch czynników liniowych. Przez przekształcenie liniowe forma kwadratowa rozpadająca się na czynniki liniowe przechodzi oczywiście w formę o tej samej własności, co dowodzi twierdzenia.

Wykażemy teraz, że *jeśli* $\breve{\Delta}\neq 0$, *to każda prosta przecina stożkową w jednym lub dwóch punktach.*

Ograniczymy się dla przykładu do typu pierwszego z tablicy II. We współrzędnych jednorodnych stożkowa ta ma równanie

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \tag{7}$$

a więc prosta w ∞ przecina ją w punktach, w których

$$x_1^2+x_2^2=0, \qquad x_1:x_2=1:\pm i,$$

czyli w dwóch punktach. Jeśli zaś prosta jest właściwa, to można jej równanie napisać w postaci

$$x_1 = ax_2 + bx_3 \tag{8}$$

(lub $x_2=ax_1+bx_3$). Podstawiając wartość x_1 z (8) do równania (7), otrzymujemy

$$(a^2+1)x_2^2+2abx_2x_3+(b^2+1)x_3^2=0. \tag{9}$$

W równaniu tym wszystkie współczynniki nie mogą być równe 0, ponieważ wówczas byłoby $ab=0$, skąd $a=0$ lub $b=0$, a więc $a^2+1\neq 0$ lub $b^2+1\neq 0$, co od razu prowadzi do sprzeczności. Równanie (9) ma więc nie więcej niż dwa rozwiązania $x_1:x_2$, a tym samym prosta (8) przecina stożkową (7) nie więcej niż w dwóch punktach, c. b. d. o.

Udowodniliśmy, że *na to, by stożkowa zawierała prostą, potrzeba i wystarcza, żeby* $\breve{\Delta}=0$.

Wówczas składa się ona z jednej lub dwóch prostych, zależnie od tego, czy $R(\breve{\mathfrak{A}})=1$, czy $R(\breve{\mathfrak{A}})=2$.