

## ROZDZIAŁ IX

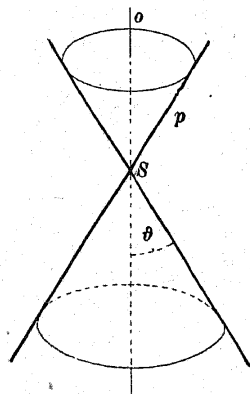
## STOŻKOWE

## § 48. Przekroje płaskie stożka

W rozdziale tym i dwóch następnych zajmiemy się badaniem najważniejszych własności krzywych drugiego stopnia. Jak widzieliśmy (§ 40, str. 201), pojęcie krzywej drugiego stopnia mieści w sobie pojęcie układu współrzędnych. Pomimo, że układy współrzędnych zostały wprowadzone dopiero w XVII wieku przez Descartes'a, teoria krzywych drugiego stopnia była szeroko rozwinięta już w starożytnej Grecji. Wybija się tu na pierwszy plan nazwisko Apoloniusza z Pergii (III w. przed n. e.). Starożytni natknęli się na te krzywe, badając przekroje płaskie najprostszych powierzchni: walca i stożka obrotowego.

W tym rozdziale zbadamy przekroje płaskie stożka, ograniczając się do punktów rzeczywistych.

**1. Własności stożka.** Niech prosta  $p$  przecina prostą  $o$  w punkcie  $S$  pod kątem  $\vartheta$ . Przez obrót prostej  $p$  dookoła  $o$  powstaje stożek obrotowy (rys. 85).



Rys. 85

Stożek ten składa się z dwóch powłók, złączonych we wspólnym wierzchołku  $S$ , zwanym *środkiem stożka*.

Prosta  $o$  nazywa się *osią stożka*, a prosta  $p$  — *tworzącą stożka*.

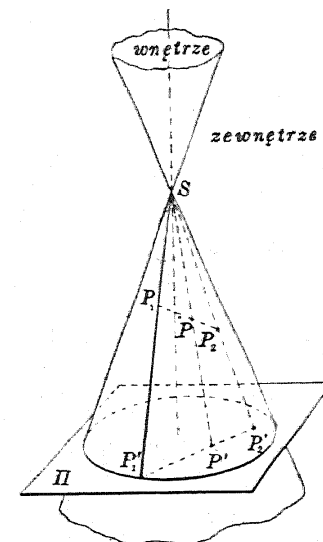
Do stożka zaliczamy również punkty w  $\infty$  jego tworzących.

*Wnętrzem stożka* nazywamy zbiór punktów  $P$  (właściwych lub nie) o tej własności, że prosta łącząca  $S$  z  $P$  tworzy z osią stożka kąt mniejszy od  $\vartheta$ . Punkty, które nie leżą na powierzchni ani we wnętrzu stożka, tworzą zbiór zwany *zewnątrzem stożka*.

Np. punkty osi  $o$  różne od  $S$  leżą wewnątrz stożka.

Udowodnimy, że jeśli dwa punkty właściwe  $P_1$  i  $P_2$  leżą wewnątrz lub na powierzchni jednej z dwu powłók stożka, lecz nie na jednej tworzącej, to każdy punkt  $P$  odcinka  $P_1P_2$ , różny od  $P_1$  i  $P_2$ , leży wewnątrz stożka.

Istotnie, przetnijmy stożek płaszczyzną  $\Pi$  nie przechodzącą przez środek  $S$  i prostopadłą do osi  $o$ . Przekrój jest kołem (rys. 86). Proste  $SP_1$ ,  $SP_2$  i  $SP$  przebijają płaszczyznę  $\Pi$  w punktach  $P'_1$ ,  $P'_2$  i  $P'$ . Punkt  $P'$  leży na odcinku  $P'_1P'_2$ . Ponieważ punkty  $P'_1$  i  $P'_2$  leżą wewnątrz lub na brzegu koła, więc  $P'$  leży wewnątrz koła. Ale wewnątrz tego koła jest miejscem geometrycznym takich punktów  $Q$  płaszczyzny  $\Pi$ , dla których prosta  $SQ$  tworzy z osią kąt mniejszy od  $\vartheta$ . Zatem kąt prostej  $SP'$ , tj. prostej  $SP$ , z osią stożka jest mniejszy od  $\vartheta$ , c. b. d. o.



Rys. 86

**2. Przekroje stożka.** Przetnijmy stożek płaszczyzną  $\Pi$  przechodzącą przez jego środek  $S$  i oznaczmy przez  $\varphi$  kąt, jaki ta płaszczyzna tworzy z osią  $o$  stożka.

Jeśli  $\varphi < \vartheta$ , to przekrój składa się z pary tworzących rzeczywistych.

Jeśli zaś  $\varphi = \vartheta$ , to przekrój jest jedną tworzącą.

Jeśli wreszcie  $\varphi > \vartheta$ , to przekrój zawiera tylko jeden punkt rzeczywisty, mianowicie środek  $S$ .

Powyższe przekroje stożka nazywamy *stożkowymi niewłaściwymi*.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy tylko przypadek, gdy płaszczyzna  $\Pi$  nie przechodzi przez środek  $S$ . Przekroje takie nazywamy *stożkowymi właściwymi*.

Rozróżniamy trzy przypadki:

1°  $\varphi > \vartheta$ . Wówczas stożkowa nazywa się *elipsą*\*. Elipsa przecina wszystkie tworzące stożka w punktach właściwych leżących na jednej powłoce, a więc *nie zawiera punktów rzeczywistych w  $\infty$* .

\* W § 50 dowiedzimy, że ta definicja elipsy jest równoważna definicji z § 13.

2°  $\varphi = \vartheta$ . Wówczas stożkowa nosi nazwę *paraboli*. W tym przypadku płaszczyzna  $\Pi$  jest równoległa do jednej i tylko jednej z tworzących stożka, przecina zatem dokładnie jedną tworzącą stożka w punkcie w  $\infty$ . Tak więc *parabola zawiera jeden punkt w  $\infty$* . Parabola, tak jak elipsa, leży całkowicie na jednej powłoce stożka.

3°  $0 < \varphi < \vartheta$ . Wówczas stożkowa nazywa się *hiperbolą*. W tym przypadku płaszczyzna  $\Pi$  przecina obie powłoki stożka. Hiperbola składa się wskutek tego z dwóch gałęzi, z których każda leży na jednej z powłók stożka. Płaszczyzna równoległa do  $\Pi$  i przechodząca przez  $S$  przecina stożek wzdłuż dwóch tworzących. Tworzące te są równoległe do płaszczyzny  $\Pi$ , a więc przecinają ją w dwóch punktach w  $\infty$ . Zatem *hiperbola zawiera dwa różne punkty w  $\infty$* .

Wnętrzem stożkowej właściwej nazywamy zbiór punktów płaszczyzny  $\Pi$ , które leżą wewnątrz stożka. Z dowiedzionego twierdzenia o wnętrzu stożka wynika, że jeśli dwa punkty wnętrza stożkowej (w przypadku hiperboli leżące ponadto wewnątrz jednej z gałęzi) połączymy odcinkiem, to odcinek ten leży wewnątrz stożkowej.

Ta własność wnętrza stożkowej (dla hiperboli własność każdej z jej gałęzi) nazywa się *wypukłością*.

Wnętrza elipsy i paraboli są obszarami, natomiast wnętrza hiperboli składa się z dwóch obszarów.

Oczywiście każde dwa punkty zewnątrz stożkowej dają się połączyć linią łamaną, nie przecinającą tej stożkowej.

**3. Ogniska i kierownice.** Wpisujemy w stożek kulę styczną do stożka i do płaszczyzny tnącej  $\Pi$  (rys. 87). Kula ta jest styczna do płaszczyzny  $\Pi$  w punkcie  $F$ , zwanym *ogniskiem stożkowej*, a do stożka — wzdłuż koła  $K$ , leżącego w płaszczyźnie  $\Pi_1$ , prostopadłej do osi stożka. Płaszczyzny  $\Pi$  i  $\Pi_1$  przecinają się wzdłuż prostej  $k$ , zwanej *kierownicą stożkowej*.

*Ognisko leży wewnątrz stożkowej, a kierownica zewnątrz niej.*

Niech  $\varphi$  będzie — jak poprzednio — kątem, który płaszczyzna  $\Pi$  tworzy z osią  $o$  stożka, a  $P$  — dowolnym punktem stożkowej. Prostopadła do  $k$  poprowadzona z  $P$  przecina  $k$  w punkcie  $R$ . Ponieważ  $Q$  i  $R$  leżą w płaszczyźnie  $\Pi_1$  prostopadłej do osi stożka, więc wektory  $PR$  i  $PQ$  mają jednakowe rzuty na oś  $o$ . Stąd

$$(1) \quad |PQ| \cos \vartheta = |PR| \cos \varphi.$$

Niech

$$|PF| = \rho \quad \text{i} \quad |PR| = d.$$

Ponieważ  $|PF| = |PQ|$ , (gdyż  $|PF|$  i  $|PQ|$  są długościami stycznych z punktu  $P$  do kuli) więc z (1) dostajemy

$$\rho \cos \vartheta = d \cos \varphi,$$

skąd

$$(2) \quad \frac{\rho}{d} = \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}.$$

Liczba

$$(3) \quad e = \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}$$

nazywa się *mimośrodem liczbowym stożkowej*.

Dla elipsy jest  $e < 1$  (gdyż  $\varphi > \vartheta$ ), dla paraboli  $e = 1$  (gdyż  $\varphi = \vartheta$ ), dla hiperboli  $e > 1$  (gdyż  $\varphi < \vartheta$ ).

Z (2) i (3) wynika, że

$$(4) \quad e = \frac{\rho}{d}.$$

Zatem stosunek odległości punktu na stożkowej od ogniska i kierownicy jest liczbą stałą.

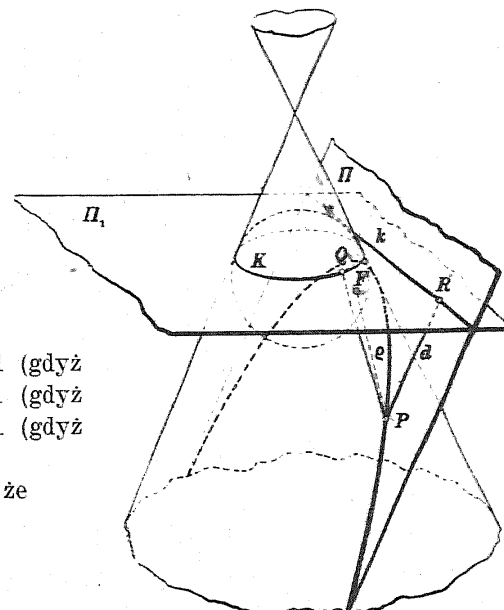
Na odwrót, gdy dla jakiegoś punktu  $P$  płaszczyzny  $\Pi$  zachodzi równość (4), to punkt leży na stożkowej.

Istotnie, połączmy  $P$  z  $F$  (rys. 88). W myśl założenia

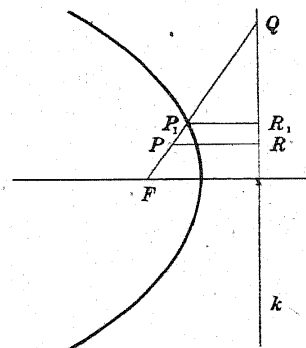
$$|PF| = |PR| \cdot e.$$

Przedłużmy  $FP$  do przecięcia się z kierownicą w punkcie  $Q$  (ewentualnie w punkcie w  $\infty$ , gdy wektor  $PF$  jest równoległy do kierownicy). Wówczas  $FQ$  musi przeciąć stożkową w punkcie  $P_1$ , gdyż ognisko leży wewnątrz stożkowej, a punkt  $Q$  kierownicy — zewnątrz niej. Zatem

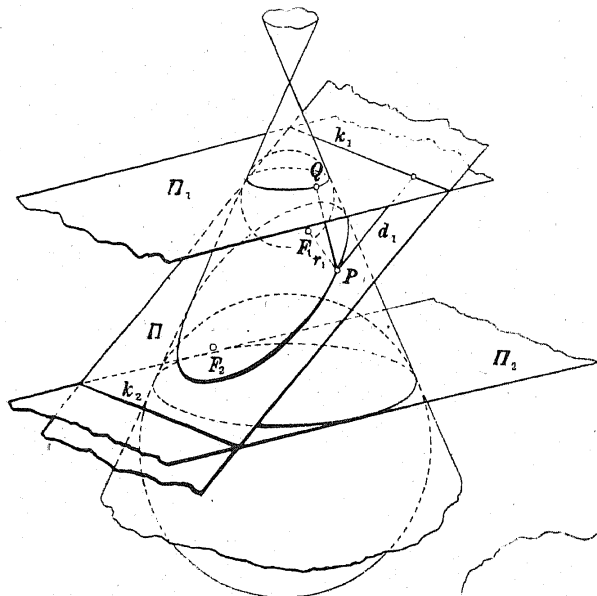
$$|P_1F| = |P_1R_1| \cdot e.$$



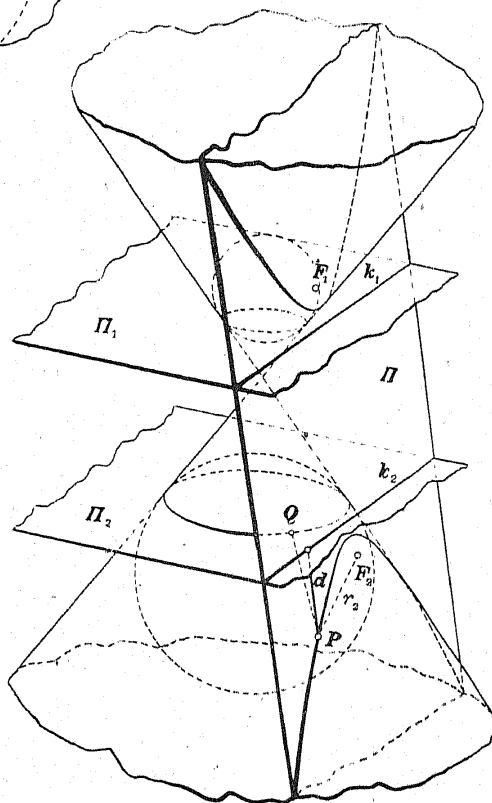
Rys. 87



Rys. 88



Rys. 89  
Przekrój eliptyczny  
stożka.



Rys. 90  
Przekrój hiperboliczny  
stożka.

Rozważmy przypadek, gdy  $Q$  jest punktem właściwym. Gdyby punkt  $P$  leżał wewnątrz stożkowej, to byłoby  $|P_1Q| < |PQ|$  i z podobieństwa trójkątów mielibyśmy

$$(5) \quad \frac{|QP_1|}{|P_1R_1|} = \frac{|QP_1| + |FP_1| - |FP|}{|PR|} = \frac{|QP_1|}{|PR|} + e \frac{|P_1R_1|}{|PR|} - e.$$

Zarazem

$$(6) \quad \frac{|P_1R_1|}{|PR|} = \frac{|P_1Q|}{|PQ|} < 1,$$

więc wobec (5)

$$\frac{|QP_1|}{|P_1R_1|} < \frac{|QP_1|}{|PR|},$$

stąd zaś  $|PR| > |P_1R_1|$  wbrew (6). Podobnie doszlibyśmy do sprzeczności, gdyby punkt  $P$  leżał zewnątrz stożkowej, jako też w przypadku, gdy prosta  $FP$  jest równoległa do kierownicy.

W przypadku elipsy i hiperboli można oczywiście wpisać w stożek dwie kule styczne do  $\Pi$  (p. rys. 89 i 90); zatem elipsa i hiperbola mają po dwa ogniska i dwie kierownice. Oba ogniska leżą wewnątrz tych krzywych, a obie kierownice — zewnątrz nich.

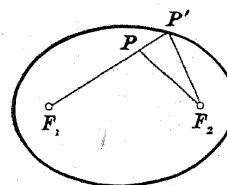
Z ognisk hiperboli jedno leży wewnątrz jednej gałęzi, a drugie wewnątrz drugiej gałęzi. Dla elipsy i hiperboli obie kule są styczne do stożka wzdłuż kół leżących w płaszczyznach równoległych, więc kierownice są przecięciami płaszczyzny  $\Pi$  z płaszczyznami równoległymi. Dlatego obie kierownice elipsy lub hiperboli są równoległe.

Niech  $P$  będzie dowolnym punktem elipsy (rys. 91),  $d_1$  i  $d_2$  jego odległościami od obu kierownic, a  $e_1$  i  $e_2$  jego odległościami od obu ognisk. Zatem

$$(7) \quad e_1 + e_2 = ed_1 + ed_2 = e(d_1 + d_2) = ed,$$

gdzie  $d$  jest odległością między kierownicami.

Własność (7) charakteryzuje punkty elipsy. Gdy bowiem punkt  $P$  leży wewnątrz elipsy, to (p. rys. 92)



Rys. 92

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &= |F_1P| + |F_2P| < \\ &< |F_1P| + |PP'| + |F_2P'| = \\ &= |F_1P'| + |F_2P'| = ed. \end{aligned}$$

Podobnie, dla punktów leżących zewnątrz elipsy jest

$$\rho_1 + \rho_2 > ed.$$

Zatem elipsa jest miejscem geometrycznym punktów, których suma odległości od ognisk jest równa stałej liczbie  $ed$ .

Podobnie dowodzi się, że hiperbola jest miejscem geometrycznym punktów, dla których  $|\rho_1 - \rho_2| = ed$ .

Dotyczy to oczywiście tylko punktów właściwych hiperboli, a nie jej punktów w  $\infty$ .

### § 49. Równania stożkowych właściwych we współrzędnych biegunowych

Każda kula styczna do stożka i płaszczyzny tnącej  $\Pi$  wyznacza — jak widzieliśmy — jedno ognisko  $F$  i jedną kierownicę  $k$  stożkowej. Będziemy je nazywali *odpowiadającymi sobie* wzajemnie (w przypadku paraboli jest tylko jedno ognisko i jedna kierownica).

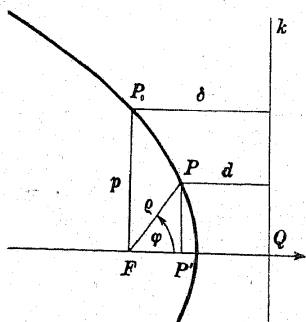
Wprowadźmy na płaszczyźnie  $\Pi$  układ współrzędnych biegunowy, którego biegunem jest  $F$ , a osią — prosta prostopadła do  $k$  i mająca zwrot od  $F$  do  $k$ . Obieg dodatni kątów możemy wybrać dowolnie.

Prosta równoległa do  $k$ , przechodząca przez  $F$ , przecina stożkową w dwóch punktach. Niech  $P_0$  będzie którymkolwiek z nich.

Odległość punktu  $P_0$  od ogniska  $F$  nazywamy *parametrem stożkowej* i oznaczamy przez  $p$ .

Niech  $\delta$  będzie odległością punktu  $P_0$  od kierownicy odpowiadającej ognisku  $F$ . Zatem

$$(1) \quad p = e\delta.$$



Rys. 93

Niech teraz  $P$  będzie dowolnym punktem stożkowej, leżącym po tej samej stronie kierownicy  $k$  co odpowiadające jej ognisko  $F$  i niech  $d$  będzie odległością punktu  $P$  od kierownicy  $k$ . Punkt  $P$  ma dokładnie jedną parę współrzędnych biegunowych  $\rho, \varphi$  spełniającą nierówności

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Rozróżniamy dwa przypadki:

1°  $d \leq \delta$ . Wówczas (rys. 93)

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad \text{lub} \quad 3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi,$$

a zatem

$$(2) \quad \delta = |QF| = |QP'| + |P'F| = d + \rho \cos \varphi.$$

2°  $d > \delta$ . Wówczas (rys. 94)

$$\pi/2 < \varphi < 3\pi/2,$$

a zatem

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta &= |QP'| - |P'F| = \\ &= d - \rho \cos(\pi - \varphi) = \\ &= d + \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Mnożąc przez  $e$ , dostajemy wobec  $e = de$  i (1) w obu przypadkach

$$p = \rho + \rho e \cos \varphi,$$

skąd

$$(4) \quad \rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Na odwrót, gdy zachodzi równość (4), to punkt  $P(\rho, \varphi)$  leży na stożkowej. Z (4) wynika bowiem, że

$$\frac{\rho}{e} + \rho \cos \varphi = \frac{p}{e},$$

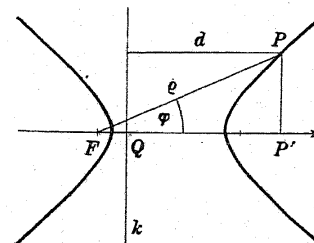
a więc przyjmując oznaczenie

$$(5) \quad \bar{d} = \rho/e,$$

otrzymujemy

$$\bar{d} = \delta - \rho \cos \varphi.$$

Z równości tej wynika, że  $\bar{d}$  jest odległością punktu  $P$  od kierownicy. Wobec (5) punkt ten leży na stożkowej. W przypadku elipsy i paraboli wszystkie punkty stożkowej leżą po tej samej stronie kierownicy co ognisko. Równanie (4) przedstawia zatem całą elipsę i parabolę (oczywiście bez jej punktu w  $\infty$ ).



Rys. 95

Przejdźmy teraz do hiperboli. Weźmy pod uwagę te jej punkty, które leżą po przeciwnej stronie kierownicy niż ognisko.

Wówczas (rys. 95)

$$\delta = |FQ| = |FP'| - |QP'| = \rho \cos \varphi - \bar{d};$$



skąd wobec (1)

$$\frac{p}{e} = \rho \cos \varphi - \frac{\rho}{e},$$

a więc

$$(5) \quad e = -\frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Podobnie jak poprzednio, okazuje się, że i na odwrót, każdy punkt, dla którego zachodzi równość (5), leży na hiperboli.

Udowodniliśmy więc twierdzenie następujące:

W układzie biegunowym współrzędnych o biegunie w ognisku i o osi prostopadłej do kierownicy

1° elipsa ma równanie

$$(6) \quad e = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad \text{gdzie} \quad 0 < e < 1,$$

2° parabola ma równanie

$$(7) \quad e = \frac{p}{1 + \cos \varphi},$$

3° hiperbola jest wyznaczona dwoma równaniami

$$(8) \quad e = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad e = -\frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad \text{gdzie} \quad e > 1,$$

z których każde wyznacza jedną z gałęzi hiperboli.

W równaniach (6)-(8) jest  $\rho > 0$  i  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Dla paraboli z (7) wynika, że  $1 + \cos \varphi \neq 0$  czyli  $\cos \varphi \neq -1$ , skąd  $\varphi \neq \pi$ .

Dla hiperboli z (8) wynika, że dla jednej gałęzi jest  $1 + e \cos \varphi > 0$ , a dla drugiej  $1 - e \cos \varphi < 0$ . Ponieważ  $e > 1$ , więc istnieje kąt  $\varphi_0$ , dla którego  $\cos \varphi_0 = -1/e$ . Zatem dla jednej z obu gałęzi zachodzi jedna z nierówności

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \quad \text{lub} \quad 2\pi - \varphi_0 < \varphi < 2\pi,$$

a dla drugiej — jedna z nierówności

$$0 \leq \varphi < \pi - \varphi_0 \quad \text{lub} \quad \pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi.$$

## § 50. Równania stożkowych we współrzędnych kartezjańskich

Niech teraz  $Oxy$  będzie prostokątnym układem współrzędnych, określonym, jak następuje:

Ośią  $Ox$  jest prostopadła z ogniska do kierownicy, ze zwrotem od kierownicy ku ognisku (rys. 96). Oś  $Ox$  przecina stożkową w punkcie  $O$  leżącym między ogniskiem a kierownicą. Oś  $Oy$ , prostopadła w tym punkcie do osi  $Ox$  ma zwrot dowolny.

Niech w tym układzie współrzędnych ognisko ma odciętą  $\xi$ , a kierownica niech ma równanie  $x = \eta$ . Ponieważ odległość ogniska od kierownicy wynosi  $p/e$  (p. wzór (1), str. 242), więc wobec  $\eta < 0$  jest

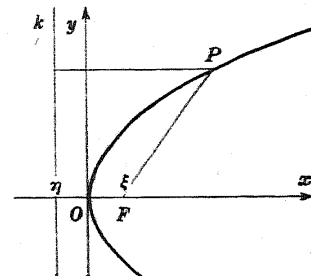
$$\xi - \eta = p/e.$$

Ponieważ punkt  $O$  leży na stożkowej, więc

$$\xi = e|\eta| = -e\eta.$$

Z tych dwóch równań obliczamy

$$\xi = \frac{p}{e+1}, \quad \eta = -\frac{p}{e(e+1)}.$$



Rys. 96

Niech  $P(x, y)$  będzie dowolnym punktem stożkowej. Wówczas

$$r = |FP| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{e+1}\right)^2 + y^2}, \quad d = \left|x + \frac{p}{e(e+1)}\right|.$$

Wobec  $r = ed$  otrzymujemy następujące równanie stożkowej:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{e+1}\right)^2 + y^2} = e \left|x + \frac{p}{e(e+1)}\right|.$$

Podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$(1) \quad y^2 - 2px = (e^2 - 1)x^2.$$

Równanie to przedstawia stożkową w powyższym układzie współrzędnych prostokątnych. W szczególności dla paraboli otrzymujemy wobec  $e = 1$

$$(2) \quad y^2 = 2px.$$

Rozważymy bliżej przypadek  $e \neq 1$ , tj. gdy stożkowa jest elipsą lub hiperbolą. Wówczas równanie (1) jest równoważne równaniu

$$(3) \quad (e^2 - 1) \left( x + \frac{p}{e^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{e^2 - 1}.$$

Przesuńmy układ współrzędnych wzdłuż osi  $Ox$ :

$$(4) \quad x' = x + \frac{p}{e^2 - 1}, \quad y' = y.$$

W nowym układzie współrzędnych równanie (3) przybiera postać

$$(5) \quad \frac{(1 - e^2)^2}{p^2} x'^2 + \frac{1 - e^2}{p^2} y'^2 = 1.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$a = \frac{p}{|1 - e^2|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon = \text{sign}(1 - e^2),$$

a więc

$$(6) \quad a = \varepsilon \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon(1 - e^2)}}.$$

W tym znakowaniu równanie (5) ma kształt

$$(7) \quad \frac{x'^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

gdzie  $\varepsilon = 1$  dla elipsy, a  $\varepsilon = -1$  dla hiperboli.

Ognisko  $F$  ma w pierwotnym układzie  $Oxy$  współrzędne  $\frac{p}{e+1}, 0$ , a więc w nowym układzie ma ono współrzędne  $\gamma, 0$ , gdzie

$$(8) \quad \gamma = \frac{p}{e+1} + \frac{p}{e^2-1} = \frac{pe}{e^2-1}.$$

Liczba  $c = |\gamma|$  nazywa się *mimośrodem liniowym stożkowej*.

Z równości (6) i (8) otrzymujemy

$$(9) \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}.$$

Kierownica ma równanie

$$(10) \quad x' = -\varepsilon \frac{a^2}{c^2}.$$

Dowiedliśmy więc, że w odpowiednim układzie współrzędnych kartezjańskich każdą parabolę można przedstawić równaniem kształtu (2), elipsę zaś i hiperbolę równaniem kształtu (7).

(Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne: każda krzywa, która ma równanie postaci (2), jest parabolą, każda zaś krzywa o równaniu postaci (7) jest dla  $\varepsilon < 1$  elipsą, a dla  $\varepsilon > 1$  hiperbolą.

Mamy więc dowieść, że każdą krzywą o powyższych równaniach można otrzymać przez przecięcie stożka płaszczyzną.

Dowód przeprowadzimy naprzód dla elips i parabol łącznie. Weźmy pod uwagę stożek powstający przez obrót prostej

$$x' = z', \quad y' = 0$$

dokoła osi  $Oz'$ . Stożek ten ma równanie (p. wzór (5) z § 16, str. 79)

$$(11) \quad x'^2 + y'^2 = z'^2$$

i kąt między tworzącą a osią  $\vartheta = \pi/4$ .

Weźmy teraz krzywą o równaniu kształtu (7) i niech  $a, b, e, p$  będą związane równościami (9). Przez przesunięcie odwrotne do (4) sprowadzamy równanie (4) do postaci (1) gdyż dla elips i parabol

$$(12) \quad 0 < e \leq 1.$$

Aby dowieść, że przez przecięcie stożka (11) płaszczyzną można otrzymać krzywą przystającą do krzywej (1), obróćmy układ współrzędnych  $Ox'y'z'$  o kąt  $\omega$  dokoła osi  $Oy'$ . Oznaczmy nowy układ współrzędnych przez  $O\xi\eta\zeta$ . Zatem

$$x' = \xi \cos \omega - \zeta \sin \omega, \quad y' = \eta, \quad z' = \xi \sin \omega + \zeta \cos \omega.$$

Podstawiając te wartości do równania (11), dostajemy równanie stożka w układzie  $O\xi\eta\zeta$ :

$$(13) \quad \eta^2 = 2\xi\zeta \sin 2\omega + (\zeta^2 - \xi^2) \cos 2\omega.$$

Wykonajmy następnie przesunięcie  $\xi = x + l$ ,  $\eta = y$ ,  $\zeta = z$ . Wówczas równanie (13) przybierze postać

$$y^2 = 2x(z \sin 2\omega - l \cos 2\omega) - x^2 \cos 2\omega + 2lz \sin 2\omega + (z^2 - l^2) \cos 2\omega.$$

Zatem przekrój płaszczyzną  $z = k$  ma równania

$$(14) \quad y^2 = 2x(k \sin 2\omega - l \cos 2\omega) - x^2 \cos 2\omega + 2lk \sin 2\omega + (k^2 - l^2) \cos 2\omega, \\ z = k.$$

Jeśli dobierzemy  $k, l$  i  $\omega$  tak, żeby

$$(15) \quad \cos 2\omega = 1 - e^2, \quad k \sin 2\omega - l \cos 2\omega = p, \\ 2lk \sin 2\omega + (k^2 - l^2) \cos 2\omega = 0,$$

to krzywa (14) pokryje się z krzywą (1).

Wobec (12) układ równań (15) ma rozwiązanie  $\omega, k, l$ .

Istotnie, z pierwszego z tych równań znajdujemy  $\omega$ , a następnie z trzeciego obliczamy

$$k : l = (-\sin 2\omega \pm 1) : \cos 2\omega.$$

Stąd i z drugiego z równań (15) znajdujemy  $k$  i  $l$ .

Gdy  $e=1$ , to z pierwszego z równań (15) wynika, że  $\omega = \pi/4 = \vartheta$ ; płaszczyzna tnąca tworzy z osią stożka kąt  $\varphi = \pi/4$ , a więc krzywa (14) jest parabolą.

Gdy zaś  $0 < e < 1$ , to  $0 < \omega < \pi/4$ , więc dla kąta  $\varphi$ , jaki płaszczyzna tnąca tworzy z osią stożka, mamy

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega > \frac{\pi}{4} = \vartheta;$$

zatem przekrój jest wówczas elipsą.

Aby udowodnić z kolei twierdzenie dla hiperboli

$$(16) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wźmy pod uwagę stożek, który powstaje przez obrót prostej

$$y' = \frac{bx'}{a}, \quad z' = 0$$

dokoła osi  $Ox$ . Stożek ten ma równanie (p. wzór (4) z § 16, str. 79)

$$-\frac{b^2}{a^2} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Przesuńmy znowu układ współrzędnych:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' - b.$$

W nowym układzie współrzędnych stożek ma równanie

$$-\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 + (z + b)^2 = 0$$

i płaszczyzna  $z=0$  przecina go wzdłuż krzywej (16). Ponieważ ta płaszczyzna jest równoległa do osi  $Ox'$ , tj. do osi stożka, więc przekrój jest hiperbolą, c. b. d. o. )

## ROZDZIAŁ X

### KLASYFIKACJA STOŻKOWYCH

#### § 51. Przekształcanie równań stożkowych

Rozszerzymy obecnie definicję *stożkowej*, nazywając tak wszelką krzywą płaską, dającą się przedstawić we współrzędnych kartezjańskich przez równanie drugiego stopnia

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Ta definicja stożkowej obejmuje jako szczególny przypadek definicję z § 48 (str. 237).

Jeśli stożkowa (1) nie zawiera prostej w  $\infty$ , to jest ona wyznaczona przez równanie niejednorodne

$$(2) \quad g(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

(p. § 40, str. 202).

Podajmy najogólniejszej zmianie układ współrzędnych, na ogół ukośnokątnych,

$$(3) \quad x = b_{11}x' + b_{12}y' + m, \quad y = b_{21}x' + b_{22}y' + n,$$

gdzie

$$(4) \quad |\mathfrak{B}| = |b_{ik}| \neq 0.$$

Zmianę tę możemy złożyć z dwóch:

$$(5) \quad x = x' + m, \quad y = y' + n,$$

oraz

$$(6) \quad x = b_{11}x' + b_{12}y', \quad y = b_{21}x' + b_{22}y'.$$

We współrzędnych jednorodnych przekształcenie (5) wyraża się wzorami

$$(7) \quad \varrho x_1 = x'_1 + m x'_3, \quad \varrho x_2 = x'_2 + n x'_3, \quad \varrho x_3 = x'_3, \quad \text{gdzie } \varrho \neq 0.$$