

Każde przekształcenie afiniczne rzeczywiste T przestrzeni, które przeprowadza koło sferyczne w siebie, jest podobieństwem.

Istotnie, niech φ będzie kątem między dwoma wektorami a i b , leżącymi w płaszczyźnie Π . Przekształcenie T przeprowadza płaszczyznę Π w płaszczyznę Π' , przy czym punkty przecięcia płaszczyzny Π z kołem sferycznym przechodzą w punkty przecięcia płaszczyzny Π' z kołem sferycznym (na mocy założonej niezmienniczości koła sferycznego względem przekształcenia T). Tym samym punkty cykliczne płaszczyzny Π przechodzą w punkty cykliczne płaszczyzny Π' , a zatem przekształcenie płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' jest podobieństwem (p. str. 209). Stąd zaś wynika, że kąty nie ulegają zmianie, a z niezmienniczości kątów wynika, że przekształcenie T przestrzeni jest podobieństwem, c. b. d. o.

Weźmy pod uwagę stożek minimalny (8). Równanie jego jest równoważne równaniu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = -(z-c)^2$$

czyli równaniu

$$(12) \quad [(x-a) + i(y-b)][(x-a) - i(y-b)] = [i(z-c)]^2.$$

Wynika stąd, że na stożku tym leżą całkowicie proste, które są krawędziami przecięcia płaszczyzn

$$(13) \quad \lambda(x-a + i(y-b)) = \mu i(z-c), \quad \mu(x-a - i(y-b)) = \lambda i(z-c),$$

gdzie λ i μ są dowolnymi liczbami nie znikającymi jednocześnie.

Proste te nazywamy *prostymi minimalnymi w przestrzeni*.

Oczywiście proste minimalne są to proste przechodzące przez punkty koła sferycznego. Każda płaszczyzna rzeczywista przechodząca przez wierzchołek stożka minimalnego przecina go wzdłuż pary prostych minimalnych, które są zarazem prostymi minimalnymi tej płaszczyzny.)

ROZDZIAŁ VIII

K O Ł O

§ 42. Równanie koła

Koło o środku (a, b) i promieniu r ma w układzie współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie równanie postaci

$$(1) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Uogólnimy obecnie pojęcie koła.

Kołem będziemy nazywali każdy twór, dający się przedstawić równaniem postaci (1), gdzie a , b i r są liczbami zespolonymi.

W szczególności koło może nie zawierać punktów rzeczywistych (np. gdy a i b są rzeczywiste, a $r^2 < 0$) lub zawierać jeden tylko punkt rzeczywisty (mianowicie gdy a i b są rzeczywiste, a $r=0$).

Z równania (1) otrzymujemy po wykonaniu działań i po redukcji równoważne równanie postaci

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0.$$

Każde koło daje się więc przedstawić w postaci (2). Na odwrót, uzupełniając równanie (2) do kwadratu, otrzymujemy równoważne mu równanie

$$(3) \quad (x+m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2 - p,$$

przedstawiające koło o środku $(-m, -n)$.

Jeśli w równaniu (3) współczynniki m , n i p są rzeczywiste, to możemy rozróżnić trzy przypadki:

1° $m^2 + n^2 - p > 0$. Wówczas równanie (3) przedstawia koło rzeczywiste o promieniu $\sqrt{m^2 + n^2 - p}$.

2° $m^2 + n^2 - p = 0$. Wówczas na płaszczyźnie rzeczywistej równanie (3) przedstawia jeden punkt rzeczywisty.

Natomiast na płaszczyźnie zespolonej równanie (3) przedstawia parę prostych minimalnych (p. str. 206); nazywamy ją *kołem zerowym o środku* $(-m, -n)$.

3° $m^2 + n^2 - p < 0$. Wówczas równanie (3) przedstawia koło nie zawierające punktów rzeczywistych.

Ponieważ środek koła (2) zależy wyłącznie od m i n , więc dwa równania kształtu (3) przedstawiają koła współśrodkowe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy x i y są w obu równaniach jednakowe.

Udowodnimy obecnie, że przez trzy punkty

$$(4) \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3)$$

nie leżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedno koło i że ma ono równanie

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwsza część twierdzenia, tj. istnienie koła przechodzącego przez trzy punkty niewspółliniowe, jest znana dla punktów rzeczywistych z geometrii elementarnej. Wymaga więc dowodu jeszcze tylko dla punktów zespolonych.

Otóż istotnie, gdy punkty (4) nie leżą na prostej, to

$$(6) \quad D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Rozwijając wyznacznik (5) według pierwszego wiersza, otrzymujemy równanie postaci

$$D(x^2 + y^2) + 2Mx + 2Ny + P = 0.$$

Dzieląc przez D , dostajemy równanie kształtu (2), a więc równanie koła. Koło to przechodzi przez punkty (4), gdyż podstawiając do (5) za x i y współrzędne dowolnego z tych punktów, dostajemy dwa wiersze identyczne. Udowodniliśmy zatem, że przez trzy punkty nie leżące na prostej przechodzi co najmniej jedno koło.

Obecnie wykazemy, że przechodzi przez nie co najwyżej jedno koło. Załóżmy więc, że przez punkty (4) przechodzi koło o równaniu kształtu (2). Równanie to jest więc spełnione dla $x = x_i$ i $y = y_i$, gdzie $i = 1, 2, 3$. Otrzymujemy

$$x_i^2 + y_i^2 + 2mx_i + 2ny_i + p = 0, \quad \text{gdzie } i = 1, 2, 3.$$

Jest to układ trzech równań liniowych o trzech niewiadomych m, n, p i o wyznaczniku (6). Wobec $D \neq 0$ układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, c. b. d. o.

Uwaga. Kula ma w przestrzeni w układzie współrzędnych prostokątnych równanie postaci

$$(7) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

czyli postaci

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0.$$

Jeżeli współczynniki m, n i p są rzeczywiste, to w przypadku, gdy wyrażenie

$$(9) \quad m^2 + n^2 + p^2 - q$$

jest dodatnie, równanie (8) przedstawia kulę rzeczywistą, w przypadku zaś, gdy wyrażenie (9) jest równe 0, dostajemy jeden punkt rzeczywisty (stożek minimalny).

§ 43. Wzajemne położenie prostych i kół na płaszczyźnie

1. Prosta i koło. Niech w układzie prostokątnym będą dane: koło nie rozpadające się na proste

$$(1) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad \text{gdzie } r \neq 0,$$

i prosta rzeczywista właściwa

$$(2) \quad Ax + By + C = 0.$$

Znalezienie punktów właściwych przecięcia prostej (2) z kołem (1) prowadzi do rozwiązania układu równań (1) i (2). Mogą tu zajść dwa przypadki:

1° prosta przecina koło w dwóch punktach (rzeczywistych lub nie);

2° prosta przecina koło w jednym punkcie.

Dla koła rzeczywistego i punktu rzeczywistego $P_0(x_0, y_0)$ tegoż koła styczna w P_0 jest prostopadła do promienia przechodzącego przez P_0 . Ponieważ promień ten ma składowe $x_0 - a$ i $y_0 - b$, więc styczna ma równanie

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

czyli

$$(x_0 - a)[(x - a) - (x_0 - a)] + (y_0 - b)[(y - b) - (y_0 - b)] = 0,$$

skąd

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2,$$

a więc

$$(3) \quad (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

Dla punktów zespolonych kół rzeczywistych i dla kół nierzeczywistych równanie (2) przyjmujemy za określenie stycznej* do koła w punkcie (x_0, y_0) .

2. Punkty przecięcia dwóch kół. Prosta potęgowa. Zbadamy obecnie wzajemne położenie dwóch różnych kół K_1 i K_2 o równaniach

$$(4) \quad \begin{aligned} K_1(x, y) &\equiv x^2 + y^2 + 2m_1x + 2n_1y + p_1 = 0, \\ K_2(x, y) &\equiv x^2 + y^2 + 2m_2x + 2n_2y + p_2 = 0. \end{aligned}$$

Ograniczymy się do zbadania przecięć w punktach właściwych, a więc do zbadania rozwiązań układu równań (4). Układ ten jest równoważny każdemu z następujących dwóch układów:

$$(4_1) \quad \begin{aligned} K_1(x, y) &= 0, & K_1(x, y) - K_2(x, y) &= 0, \\ (4_2) \quad K_2(x, y) &= 0, & K_1(x, y) - K_2(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że punkty przecięcia dwóch kół są punktami przecięcia któregośkolwiek z tych kół z tworem przedstawionym przez równanie

$$(5) \quad K_1(x, y) - K_2(x, y) \equiv 2(m_1 - m_2)x + 2(n_1 - n_2)y + (p_1 - p_2) = 0.$$

Jeśli koła są współśrodkowe, to $m_1 = m_2$ i $n_1 = n_2$; równanie (5) nie przedstawia wówczas żadnego punktu właściwego. Zatem koła współśrodkowe nie przecinają się w punktach właściwych.

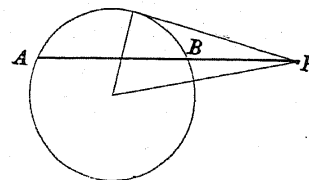
Gdy koła nie są współśrodkowe, to równanie (5) przedstawia prostą, zwaną *prostą potęgową* (lub *prostą pierwiastną*) kół K_1 i K_2 .

Aby zbadać znaczenie geometryczne tej prostej, wprowadzimy nowe pojęcie, mianowicie pojęcie *potęgi punktu* (właściwego) *względem koła*. Nazywamy tak liczbę $d^2 - r^2$, gdzie d jest odległością punktu od środka koła. Jeśli jest to punkt $P = P(x, y)$, a koło ma równanie (1), to liczba ta jest równa

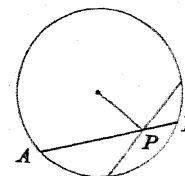
$$K(x, y) \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2.$$

* W § 54 określone są ogólnie styczne do krzywych drugiego stopnia.

Z geometrii elementarnej wiadomo, że gdy przez punkt P przeprowadzić sieczną przecinającą koło w punktach A i B , to iloczyn skalarowy $PA \cdot PB$ jest stały, tj. niezależny od wyboru siecznej. Dla punktu P leżącego zewnątrz koła jest on równy kwadratowi długości stycznej do koła, wychodzącej z P (rys. 73), a dla punktu P leżącego wewnątrz koła jest on równy kwadratowi połowy najkrótszej cięciwy przechodzącej przez P , wziętemu ze znakiem $-$ (rys. 74). Wreszcie dla punktu P na kole iloczyn ten jest równy 0. W każdym więc razie iloczyn ten jest równy $d^2 - r^2$ czyli potędze punktu P względem koła.



Rys. 73



Rys. 74

Z równania (5) wynika, że *prosta potęgowa jest miejscem geometrycznym punktów, które mają równe potęgi względem obu kół* (nie-współśrodkowych).

Prosta (5) jest prostopadła do wektora o składowych $m_1 - m_2$ i $n_1 - n_2$.

Zatem *prosta potęgowa jest prostopadła do prostej łączącej środki obu kół*.

Jeśli dwa koła się przecinają, to ich *prosta potęgowa przechodzi przez punkty przecięcia*, gdyż punkt przecięcia dwóch kół ma względem obu kół tę samą potęgę (równą 0), a więc leży na ich prostej potęgowej.

Jeśli dwa koła są styczne (od zewnątrz lub wewnątrz), to ich *prosta potęgowa jest ich wspólną styczną* (w punkcie ich styczności).

Niech teraz będą dane trzy koła

$$(6) \quad K_1(x, y) = 0, \quad K_2(x, y) = 0, \quad K_3(x, y) = 0,$$

z których żadne dwa nie są współśrodkowe. Istnieją trzy proste potęgowe, po jednej dla każdej pary kół.

Udowodnimy, że *wszystkie trzy proste potęgowe należą do jednego pęku*.

Istotnie, proste te mają równania

$$K_1(x, y) - K_2(x, y) = 0, \quad K_2(x, y) - K_3(x, y) = 0, \quad K_3(x, y) - K_1(x, y) = 0$$

i twierdzenie wynika z tożsamości

$$[K_1(x, y) - K_2(x, y)] + [K_2(x, y) - K_3(x, y)] + [K_3(x, y) - K_1(x, y)] \equiv 0$$

(p. wzór (9) z § 21, str. 100).

Jeśli środki trzech kół leżą na jednej prostej p , to wszystkie trzy proste potęgowe tych kół są równoległe, ponieważ są prostopadłe do p .

Jeśli natomiast środki trzech kół nie leżą na jednej prostej, to proste potęgowe nie są do siebie równoległe, lecz jako należące do jednego pęku przecinają się w jednym punkcie właściwym, zwanym *środkiem potęgowym trzech kół*.

Zatem *środek potęgowy ma równe potęgi względem wszystkich trzech kół*.

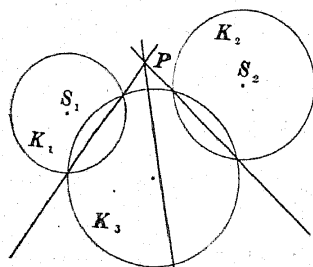
Konstrukcja prostej potęgowej dwóch kół K_1 i K_2 z pomocą cyrkla i linealu jest łatwa, gdy oba koła przecinają się w dwóch punktach rzeczywistych lub są styczne.

Jeśli natomiast koła K_1 i K_2 się nie przecinają, to kreślimy koło K_3 (rys. 75) przecinające każde z kół K_1 i K_2 w dwóch punktach i mające środek nie leżący na jednej prostej z ich środkami. Następnie kreślimy proste potęgowe kół K_1 i K_3 oraz K_2 i K_3 (po prostu łącząc prostą ich punkty przecięcia). Obie proste potęgowe przecinają się w środku potęgowym P wszystkich trzech kół, przez który przechodzi

prosta potęgowa kół K_1 i K_2 . Otrzymujemy ją, prowadząc z P prostopadłą do prostej łączącej środki kół K_1 i K_2 .

Uwagi. Zbadaliśmy jedynie punkty przecięcia właściwe dwóch kół. Ponadto każde dwa koła przecinają się w punktach cyklicznych (§ 41, str. 207). Koła, które przecinają się tylko w punktach cyklicznych, są współśrodkowe.

Tak samo jak dla kół, dowodzi się, że koło przecięcia dwóch kul jest wyznaczone przez którąkolwiek z nich i *płaszczyznę potęgową* obu kul. Płaszczyzna ta jest miejscem geometrycznym punktów mających równe potęgi względem obu kul.



Rys. 75

3. Kąt dwóch kół. Niech dwa koła o równaniach (4) przecinają się w dwóch punktach rzeczywistych (rys. 76) lub będą styczne. Ich środki S_1 i S_2 mają współrzędne $-m_1, -n_1$ i $-m_2, -n_2$. Niech P będzie punktem przecięcia tych kół.

Kątami między dwoma kołami nazywamy kąty utworzone przez ich styczne w punkcie P .

W przypadku kół stycznych kąty te wynoszą 0 i π . Oznaczmy przez φ kąt leżący zewnątrz obu kół. Wówczas wektory PS_1 i PS_2 , jako prostopadłe do stycznych, utworzą kąt $\pi - \varphi$. Ponieważ

$$S_1 S_2 = S_1 P + P S_2,$$

więc

$$S_1 S_2^2 = S_1 P^2 + P S_2^2 + 2 S_1 P \cdot P S_2$$

czyli

$$S_1 S_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\pi - \varphi).$$

Zarazem

$$S_1 S_2^2 = (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2,$$

$$r_1^2 = m_1^2 + n_1^2 - p_1, \quad r_2^2 = m_2^2 + n_2^2 - p_2,$$

a więc

$$(m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 = m_1^2 + n_1^2 - p_1 + m_2^2 + n_2^2 - p_2 + 2 r_1 r_2 \cos(\pi - \varphi).$$

Stąd dla kąta ϑ między dwoma kołami (gdzie $\vartheta = \varphi$ lub $\vartheta = \pi - \varphi$) jest

$$(7) \cos \vartheta = \pm \frac{2(m_1 m_2 + n_1 n_2) - (p_1 + p_2)}{2 r_1 r_2} = \pm \frac{2(m_1 m_2 + n_1 n_2) - (p_1 + p_2)}{2 \sqrt{m_1^2 + n_1^2 - p_1} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 - p_2}}.$$

W przypadku, gdy koła K_1 i K_2 są określone równaniami

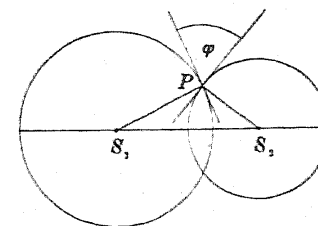
$$(8) \quad a_1(x^2 + y^2) + 2\beta_1 x + 2\gamma_1 y + \delta_1 = 0,$$

$$(9) \quad a_2(x^2 + y^2) + 2\beta_2 x + 2\gamma_2 y + \delta_2 = 0,$$

dostajemy z (7)

$$(10) \quad \cos \vartheta = \pm \frac{2(\beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) - (a_1 \delta_2 + a_2 \delta_1)}{2 \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2 - a_1 \delta_1} \sqrt{\beta_2^2 + \gamma_2^2 - a_2 \delta_2}}.$$

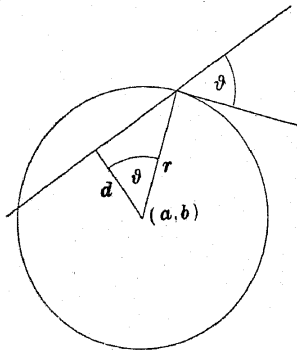
Jeśli $a_1 = a_2 = 0$, równania (8) i (9) przedstawiają proste. Wówczas wzór (10) sprowadza się do wzoru (6) z § 18, str. 91, dla kąta między prostymi.



Rys. 76

Jeśli zaś $\alpha_1=0$ i $\alpha_2 \neq 0$, to równanie (8) przedstawia prostą, a równanie (9) koło. Jak widać z rys. 77, mamy

$$(11) \quad \cos \vartheta = d/r.$$



Rys. 77

Sprowadzając równanie (9) do postaci (1), str. 215, i obliczając następnie odległość d środka koła od prostej (8), otrzymujemy znów (10).

Zatem wzór (10) daje zarówno kąt między prostymi, jak kąt między kołami i kąt między prostą a kołem.

W szczególności ze wzoru (10) wynika, że na to, by dwa koła (lub koło i prosta, lub dwie proste) były ortogonalne*, tj. by $\delta = \pi/2$, potrzeba i wystarczy, żeby

$$(12) \quad 2(\beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) - (\alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1) = 0.$$

Koła są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy styczna do jednego koła w punkcie przecięcia jest średnicą drugiego koła. Środek koła ortogonalnego do koła K zawsze leży zewnątrz koła K .

§44. Pęki kół

Niech dwa koła K_1 i K_2 mają równania o współczynnikach rzeczywistych

$$(1) \quad \begin{aligned} K_1(x, y) &\equiv x^2 + y^2 + 2m_1x + 2n_1y + p_1 = 0, \\ K_2(x, y) &\equiv x^2 + y^2 + 2m_2x + 2n_2y + p_2 = 0. \end{aligned}$$

Weźmy pod uwagę równanie

$$(2) \quad \lambda_1 K_1(x, y) + \lambda_2 K_2(x, y) = 0,$$

gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami rzeczywistymi i nie równymi jednocześnie zeru, tj. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$.

Jeśli $\lambda_1 = -\lambda_2$, to równanie (2) przedstawia prostą potęgową kół K_1 i K_2 . Jeśli zaś $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, to możemy równanie (2) przekształcić w postać

$$(3) \quad x^2 + y^2 + 2 \frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x + 2 \frac{\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2}{\lambda_1 + \lambda_2} y + \frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0.$$

* Międzynarodowa nazwa prostopadłości, pochodząca z greckiego.

Równanie (2) przedstawia zatem koło (rzeczywiste lub nie).

Zbiór tworów, przedstawionych przez równanie (2) dla wszelkich λ_1 i λ_2 rzeczywistych i nie równych 0 jednocześnie, nazywamy *pękiem kół* wyznaczonym przez koła K_1 i K_2 , samo zaś równanie (2) — *równaniem pędu kół*.

Do pędu kół doliczamy więc i prostą potęgową; dla jednolitości wysłowienia twierdzeń będziemy ją tu także nazywali kołem. Do pędu (2) należą koła K_1 (dla $\lambda_2=0$) i K_2 (dla $\lambda_1=0$).

Niech K będzie kołem należącym do pędu dla danej wartości stosunku $\lambda_1:\lambda_2$, gdzie $\lambda_1 \neq 0$, i niech

$$\lambda = \lambda_2/\lambda_1.$$

Na mocy (3) koło K ma środek o współrzędnych

$$(4) \quad x = -\frac{m_1 + \lambda m_2}{1 + \lambda}, \quad y = -\frac{n_1 + \lambda n_2}{1 + \lambda}.$$

Zatem środek koła K dzieli w stosunku λ odcinek łączący punkty $(-m_1, -n_1)$ i $(-m_2, -n_2)$, czyli środki kół K_1 i K_2 . Wynika stąd, że różnym stosunkom $\lambda_1:\lambda_2$ odpowiadają różne koła pędu: *środki kół pędu leżą na jednej prostej* o przedstawieniu parametrycznym (4).

Dowolne dwa koła pędu (2) wyznaczają ten sam pęd.

Istotnie, weźmy pod uwagę dwa różne koła pędu (2)

$$(5) \quad \begin{aligned} K_3(x, y) &\equiv \mu_1 K_1(x, y) + \mu_2 K_2(x, y) = 0, \\ K_4(x, y) &\equiv \nu_1 K_1(x, y) + \nu_2 K_2(x, y) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(6) \quad \mu_1:\mu_2 \neq \nu_1:\nu_2.$$

Utwórzmy pęd

$$(7) \quad \varrho_1 K_3(x, y) + \varrho_2 K_4(x, y) = 0$$

czyli

$$(8) \quad (\varrho_1 \mu_1 + \varrho_2 \nu_1) K_1(x, y) + (\varrho_1 \mu_2 + \varrho_2 \nu_2) K_2(x, y) = 0.$$

Z (8) wynika, że każde koło pędu (7) należy do pędu (2). Z (6) zaś wynika, że do każdej wartości stosunku $\lambda_1:\lambda_2$ możemy tak dobrać ϱ_1 i ϱ_2 , by $\varrho_1 \mu_1 + \varrho_2 \nu_1 = \lambda_1$ i $\varrho_1 \mu_2 + \varrho_2 \nu_2 = \lambda_2$. Zatem każde koło pędu (2) należy do pędu (7), c. b. d. o.

Ponieważ do pędu kół należy tylko jedna prosta, więc z ostatniego twierdzenia wynika, że *każde dwa koła pędu mają tę samą prostą potęgową*.

W szczególności pęk jest wyznaczony przez wspólną prostą potęgową pęku i dowolne koło pęku.

Jeśli koła K_1 i K_2 pęku (2) przecinają się w dwóch punktach właściwych P_1 i P_2 (rzeczywistych lub nie), to każde koło pęku przechodzi przez te dwa punkty; na odwrót, każde koło przechodzące przez P_1 i P_2 należy do pęku.

Pierwsza część tego twierdzenia wynika natychmiast z (2). Aby dowieść drugiej, założmy, że koło K przechodzi przez punkty P_1 i P_2 . Niech $P_3(x_3, y_3)$ będzie punktem koła K różnym od P_1 i P_2 . Przez punkty P_1, P_2 i P_3 przechodzi pewne koło pęku (2), o równaniu

$$(9) \quad K_2(x_3, y_3) K_1(x, y) - K_1(x_3, y_3) K_2(x, y) = 0.$$

Ponieważ trzy punkty wyznaczają koło jednoznacznie, więc koło K jest identyczne z kołem (9) pęku (2), c. b. d. o.

W szczególności przez każdy punkt właściwy płaszczyzny przechodzi co najmniej jedno koło pęku.

Gdy koła K_1 i K_2 są styczne, to wszystkie koła pęku są styczne w tym samym punkcie i na odwrót.

Prosta potęgowa pęku jest wspólną styczną wszystkich kół pęku. Wynika to natychmiast z poprzedniego twierdzenia.

Pojęcie pęku kół zostało określone za pomocą układu współrzędnych. Ma ono jednak znaczenie geometryczne, tj. niezależne od układu współrzędnych. Z równania (2) mamy bowiem

$$K_1(x, y) : K_2(x, y) = -\lambda_2 : \lambda_1,$$

a więc możemy określić w sposób równoważny koła pęku jako miejsca geometryczne punktów, których potęgi względem dwóch kół mają stały stosunek.

Pojęcie pęku kół należy do geometrii podobieństw. Wynika to natychmiast z ostatniej własności.

Jeśli koła K_1 i K_2 przecinają się w dwóch różnych punktach rzeczywistych P_1 i P_2 , to dla każdej wartości rzeczywistej stosunku $\lambda_1 : \lambda_2$ koła pęku są również rzeczywiste, gdyż przechodzą przez punkty rzeczywiste i równania ich mają współczynniki rzeczywiste.

Niech teraz będzie dane koło K o równaniu

$$(10) \quad K(x, y) = x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Jeśli koło to jest ortogonalne do kół K_1 i K_2 , to

$$(11) \quad 2(mm_1 + nn_1) - (p + p_1) = 0, \quad 2(mm_2 + nn_2) - (p + p_2) = 0$$

(p. warunek (12) z § 43, str. 220). Pomnożmy pierwszą z tych równości przez λ_1 , a drugą przez λ_2 i dodajmy. Dostajemy

$$(12) \quad 2[m(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2) + n(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)] - [(\lambda_1 + \lambda_2)p + (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)] = 0.$$

Ale równanie (2) ma postać

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x^2 + y^2) + 2(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2)x + 2(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)y + (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = 0.$$

Porównując (12) z warunkiem (12) z § 43, widzimy, że koło K jest ortogonalne do wszystkich kół pęku (2). Udowodniliśmy więc, że jeśli koło jest ortogonalne do dwóch kół pęku, to jest ono ortogonalne do wszystkich kół pęku.

Odejmując stronami równania (11), dostajemy

$$(13) \quad 2m(m_1 - m_2) + 2n(n_1 - n_2) - (p_1 + p_2) = 0.$$

Ponieważ środek koła K ma współrzędne $-m$ i $-n$, więc z (13) wynika, że środek koła K leży na prostej potęgowej kół K_1 i K_2 . Zarazem z (13) i z jednej z równości (11) wynika druga równość (11). Zatem koło, którego środek leży na prostej potęgowej dwóch kół i jest ortogonalne do jednego z nich, jest również ortogonalne do drugiego z nich.

Wynika stąd, że prosta potęgowa dwóch kół jest miejscem geometrycznym środków kół ortogonalnych do nich obu.

Niech teraz K'_1 i K'_2 będą dowolnymi dwoma kołami ortogonalnymi do kół pęku (2); w szczególności za K'_1 można wziąć linię środków kół tego pęku. Koła

$$(14) \quad \mu_1 K'_1 + \mu_2 K'_2 = 0$$

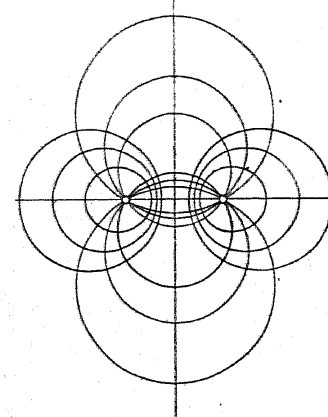
tworzą nowy pęk. Każde koło pęku (14) jest ortogonalne do każdego koła pęku (2).

Pęki takie nazywamy ortogonalnymi.

Linią środków pęku (14) jest prosta potęgowa pęku (2) i na odwrót.

Zatem w dwóch pękach ortogonalnych linie potęgowe są prostopadłe (rys. 78).

Każde koło ortogonalne do pęku (2) należy do pęku (14). Jeśli pęk (2) składa się z kół stycznych w punkcie P ,



Rys. 78

to pęk ortogonalny składa się oczywiście z kół stycznych w punkcie P do linii środków pęku (2).

Aby bliżej zbadać pęki kół, które nie są styczne, skorzystamy z tego, że pojęcie pęku kół ma znaczenie geometryczne, niezależne od układu współrzędnych. Możemy więc dobrać osie współrzędnych w sposób dowolny.

Weźmy za oś Ox linię środków pierwszego pęku, a za oś Oy linię środków drugiego pęku. Otrzymujemy prostokątny układ współrzędnych.

Do pierwszego pęku należy oś Oy czyli prosta $x=0$. Niech

$$x^2 + y^2 + 2m_1x + p_1 = 0$$

będzie dowolnym kołem pierwszego pęku. Wówczas do tegoż pęku należy koło

$$x^2 + y^2 + 2m_1x + p_1 + \lambda x = 0, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = -2m_1,$$

czyli koło

$$x^2 + y^2 + p_1 = 0.$$

Pierwszy pęk daje się więc przedstawić równaniem postaci

$$\lambda_1(x^2 + y^2 + p_1) + \lambda_2x = 0.$$

Ponieważ $\lambda_1=0$ wyznacza oś Oy , założmy, że $\lambda_1 \neq 0$, gdyż tylko te koła będą nas teraz interesowały, i przyjmijmy oznaczenie $\lambda_2/\lambda_1 = 2\lambda$. Widzimy, że pierwszy pęk można przedstawić równaniem

$$(15) \quad x^2 + y^2 + 2\lambda x + p_1 = 0,$$

gdzie p_1 jest stałe. Podobnie, drugi pęk można przedstawić równaniem

$$(16) \quad x^2 + y^2 + 2\mu y + p_2 = 0,$$

gdzie p_2 jest stałe. Warunek ortogonalności pęków przybiera więc postać

$$(17) \quad p_1 + p_2 = 0.$$

Weźmy pod uwagę przypadek, gdy drugi pęk składa się z kół przecinających się w dwóch punktach rzeczywistych P_1 i P_2 . Punkty te otrzymamy podstawiając $y=0$ do (16). Zatem $p_2 < 0$ czyli

$$p_2 = -a^2 \quad \text{i} \quad p_1 = a^2.$$

Pęki mają więc równania

$$(18) \quad x^2 + y^2 + 2\lambda x + a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + 2\mu x - a^2 = 0,$$

gdzie a jest stałe, a λ i μ — zmienne.

Wobec (18) dla pierwszego pęku jest

$$(x + \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - a^2.$$

Dla $|\lambda| < a$ koła tego pęku są nierzeczywiste, a dla $\lambda = \pm a$ są to dwa koła zerowe o środkach $(-a, 0)$ i $(a, 0)$.

Udowodniliśmy więc, że jeśli pęk składa się z kół przecinających się w punktach rzeczywistych P_1 i P_2 , to pęk do niego ortogonalny składa się z kół nie przecinających się w punktach rzeczywistych, a punkty P_1 i P_2 są środkami kół zerowych pęku ortogonalnego.

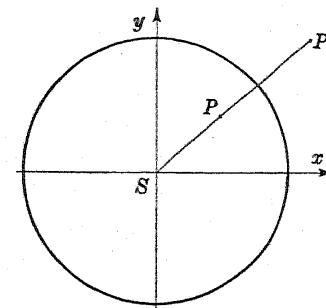
Analogicznie dowodzi się twierdzenia odwrotnego.

§ 45. Inwersja

1. Własności podstawowe inwersji. Niechaj będzie dane koło K o promieniu r i środku S , a P niech będzie dowolnym punktem płaszczyzny różnym od S (p. rys. 79). Punktowi P przyporządkujmy punkt P' leżący na półprostej SP , dla którego

$$(1) \quad SP \cdot SP' = r^2.$$

W płaszczyźnie euklidesowej bez środka S przyporządkowanie to określa przekształcenie wzajemnie jednoznaczne I zwane inwersją względem koła K (lub odbiciem w kole K). Punkt P' nazywa się inwersyjnie sprzężonym z punktem P względem koła K lub odbiciem punktu P w kole K .



Rys. 79

Z definicji inwersji wynika, że inwersja przekształca punkty leżące zewnątrz koła w punkty leżące wewnątrz niego i na odwrót. Każdy zaś punkt na kole przechodzi sam na siebie.

Jeśli P' jest odbiciem punktu P w kole K , to P jest odbiciem punktu P' w tymże kole.

Wynika stąd, że dokonując dwa razy inwersji względem koła K , otrzymamy przekształcenie przez identyczność E (p. str. 125):

$$(2) \quad I^2 = E, \quad I^{-1} = I.$$

Przekształcenie T o własności

$$T^2 = E \quad \text{czyli} \quad T = T^{-1},$$

nazywa się inwolucją.

Zatem *inwersja jest inwolucją*.

Innym przykładem inwolucji jest na płaszczyźnie odbicie w prostej, a w przestrzeni — odbicie w płaszczyźnie. Inwolucją jest również obrót płaszczyzny dookoła punktu o kąt π .

Weźmy punkt S za początek prostokątnego układu współrzędnych. Z układem tym związany jest w znany sposób układ biegunowy współrzędnych (§ 13, str. 66). Niech punkt P ma współrzędne biegunowe ϱ, φ , a kartezjańskie x, y , a punkt P' — współrzędne ϱ', φ' i x', y' . Współrzędne biegunowe dobieramy tak, żeby

$$\varrho > 0 \text{ i } 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{oraz} \quad \varrho' > 0 \text{ i } 0 \leq \varphi' < 2\pi.$$

Wówczas

$$(3) \quad \varrho \varrho' = r^2 \quad \text{i} \quad \varphi = \varphi'.$$

Ponieważ

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi \quad \text{i} \quad x' = \varrho' \cos \varphi', \quad y' = \varrho' \sin \varphi',$$

więc

$$x' = \frac{r^2}{\varrho} \cos \varphi = \frac{r^2}{\varrho^2} \varrho \cos \varphi = \frac{r^2 x}{\varrho^2}.$$

Obliczając podobnie y' , dostajemy wobec $\varrho^2 = x^2 + y^2$ wzory wyznaczające inwersję we współrzędnych kartezjańskich:

$$(4) \quad x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Na mocy (2) wynikają stąd wzory

$$(5) \quad x = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Udowodnimy, że inwersja przekształca proste i koła w proste i koła, a mianowicie:

Każda prosta przechodząca przez środek inwersji przechodzi sama w siebie.

Każda prosta nie przechodząca przez środek inwersji przechodzi w koło przechodzące przez środek inwersji.

Każde koło przechodzące przez środek inwersji przechodzi w prostą nie przechodzącą przez środek inwersji.

Każde koło nie przechodzące przez środek inwersji przechodzi w koło nie przechodzące przez środek inwersji.

Dla dowodu weźmy pod uwagę równanie

$$(6) \quad A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Podstawiając za x i y wartości (5), otrzymujemy

$$(7) \quad D(x'^2 + y'^2) + 2Br^2x' + 2Cr^2y' + Ar^4 = 0.$$

Twór (7) jest obrazem (odbiciem) tworu (6). Rozpatrzmy poszczególne przypadki:

1^0 $A = 0, D = 0, B^2 + C^2 > 0$. Wówczas równanie (6) przedstawia prostą przechodzącą przez początek S układu współrzędnych. Równanie (7) przedstawia tę samą prostą.

2^0 $A = 0, D \neq 0$. Wówczas równanie (6) przedstawia prostą nie przechodzącą przez S , a równanie (7) — koło przechodzące przez S .

3^0 $A \neq 0, D = 0$. Wówczas równanie (6) przedstawia koło przechodzące przez S , a równanie (7) — prostą nie przechodzącą przez S .

4^0 $A \neq 0, D \neq 0$. Wówczas równania (6) i (7) przedstawiają koła nie przechodzące przez S .

Niech inwersja I przekształca koło K w koło K' . Jeśli środek S inwersji leży zewnątrz koła K , to wewnątrz koła K przechodzi we wewnątrz koła K' . Jeśli zaś S leży wewnątrz koła K , to wewnątrz koła K przechodzi w zewnątrz koła K' .

Istotnie, połączmy dwa punkty P i Q , leżące wewnątrz koła K , odcinkiem PQ . Odbiciem $P'Q'$ tego odcinka jest odcinek lub łuk pewnego koła, nie przecinającego koła K' . Wynika stąd, że obraz wnętrza koła K jest albo wnętrzem koła K' , albo jego zewnętrzem, nie może się natomiast zdarzyć, by obraz wnętrza koła K leżał częściowo wewnątrz koła K' i częściowo zewnątrz niego. Zatem zewnątrz koła K przechodzi albo całkowicie we wewnątrz, albo całkowicie w zewnątrz koła K' .

Przeprowadźmy przez S koło K_1 nie przecinające koła K . Wówczas K_1 jest prostą nie przecinającą koła K' , a zatem leżącą całkowicie zewnątrz niego. Wynika stąd, że w każdym razie ten z dwu obszarów płaszczyzny, który zawiera punkt S , przechodzi w zewnątrz koła K' , c. b. d. o.

2. Wierność inwersji. Niech będą dane dwa koła (lub dwie proste, lub koło i prosta)

$$(8) \quad \alpha_l(x^2 + y^2) + 2\beta_l x + 2\gamma_l y + \delta_l = 0, \quad \text{gdzie} \quad l=1 \text{ i } 2.$$

Koła (8) przechodzą przez inwersję w koła

$$(9) \quad \delta_l(x^2 + y^2) + 2\beta_l r^2 x + 2\gamma_l r^2 y + \alpha_l r^4 = 0, \quad \text{gdzie} \quad l=1 \text{ i } 2.$$

Dla kąta ϑ między kołami (8) zachodzi wzór (10) z § 43 (str. 219), dla kąta zaś ϑ' między kołami (9) mamy

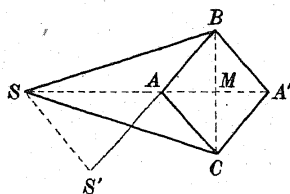
$$\cos \vartheta' = \pm \frac{2(\beta_1 r^2 \beta_2 r^2 + \gamma_1 r^2 \gamma_2 r^2) - (\delta_1 \alpha_2 r^4 + \delta_2 \alpha_1 r^4)}{2\sqrt{\beta_1^2 r^4 + \gamma_1^2 r^4 - \delta_1 \alpha_1 r^4} \sqrt{\beta_2^2 r^4 + \gamma_2^2 r^4 - \delta_2 \alpha_2 r^4}}.$$

Z obu tych wzorów dostajemy $\cos \vartheta = \pm \cos \vartheta'$, czyli

$$\vartheta = \vartheta' \quad \text{lub} \quad \vartheta = \pi - \vartheta'.$$

W każdym więc razie *inwersja przekształca koła, których styczne tworzą kąty ϑ i $\pi - \vartheta$, w koła, których styczne tworzą te same kąty*. Własność ta nazywa się *wiernokątnością inwersji*.

3. Inwersor. Istnieją przyrządy, z których pomocą do danej krzywej Γ można nakreślić krzywą Γ' , powstającą z Γ przez inwersję. Opiszemy tu jeden z takich przyrządów, mianowicie tzw. *inwersor Peaucelliera*, uwidoczniony na rys. 80. Składa się on z sześciu prętów, oznaczonych grubymi liniami ciągłymi i złączonych przegubowo (linie kreskowane nie wchodzą w skład przyrządu).



Rys. 80

Pręty SB i SC są równej długości:

$$SB = SC,$$

pręty zaś $ABA'C$ tworzą romb. Jest jasne, że punkty S , A i A' leżą na jednej prostej. Mamy

$$\begin{aligned} SA \cdot SA' &= (SM + MA')(SM - MA') = SM^2 - MA'^2 = \\ &= (SB^2 - MB^2) - (AB^2 - MB^2) = SB^2 - AB^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$SA \cdot SA' = SB^2 - AB^2.$$

Ponieważ prawa strona tej równości jest stałą zależną od przyrządu, a niezależną od położenia rombu $ABA'C$, więc punkty A i A' są inwersyjnie sprzężone względem koła o środku S i promieniu

$$r = \sqrt{SB^2 - AB^2}.$$

Zatem, gdy kołec umieszczony w punkcie A prowadzimy po krzywej Γ , to ołówek umieszczony w punkcie A' kreśli jej odbicie Γ' .

Do A jest zwykle przyczepiony siódmy pręt $S'A$ (cienka linia na rys. 80). Jeśli go umocujemy w punkcie S' tak, by $S'S = S'A$,

to A może się poruszać tylko po kole przechodzącym przez S . Wówczas punkt A' porusza się po prostej.

Definicje i dowiedzione tu twierdzenia, dotyczące inwersji, dają się bez trudności przenieść na przestrzeń.

(§ 46. Pokrewieństwa kołowe

Badanie inwersji w płaszczyźnie rzutowej ma tę niedogodność, że nie można jej określić tak, by była w tej płaszczyźnie przekształceniem wzajemnie jednoznacznym i ciągłym.

Dlatego inwersję bada się nie w płaszczyźnie rzutowej, lecz w tzw. płaszczyźnie Möbiusa. Płaszczyzna ta gra rolę zasadniczą w badaniach związanych z liczbami zespolonymi, zwłaszcza w teorii funkcji analitycznych.

Płaszczyzna Möbiusa powstaje z płaszczyzny euklidesowej przez dodanie jednego punktu P_∞ , zwanego *punktem w ∞* , który uważany jest za granicę każdego ciągu punktów oddalającego się nieograniczenie od dowolnego punktu właściwego.

Np. ciągi

$$(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \dots$$

$$(0,-1), (2,0), (0,-3), (4,0), \dots$$

zmierzają do punktu w ∞ .

Przyjmujemy, że *punkt w ∞ leży na każdej prostej*. Proste na płaszczyźnie Möbiusa nazywamy *kołami przechodzącymi przez punkt w ∞* .

Na płaszczyźnie Möbiusa każde dwie proste przecinają się więc albo w dwóch punktach (właściwym i w ∞), albo — gdy są równoległe — w jednym (w punkcie w ∞). Proste zachowują się więc na niej tak jak koła.

Na płaszczyźnie Möbiusa określa się obroty, przesunięcia, izometrie, przekształcenia afiniczne i podobieństwa tak samo jak na płaszczyźnie euklidesowej. Wszystkie te przekształcenia przeprowadzają punkt w ∞ w siebie. Możemy zatem korzystać ze wszystkich twierdzeń udowodnionych dla tych przekształceń, o ile tylko w twierdzeniach tych nie występują punkty w ∞ płaszczyzny rzutowej.

W płaszczyźnie Möbiusa możemy uzupełnić definicję inwersji tak, by stała się ona przekształceniem wzajemnie jednoznacznym

w całej płaszczyźnie. Mianowicie punktowi S przypisujemy punkt w ∞ i na odwrót. Po tym uzupełnieniu pozostaje w mocy twierdzenie, że inwersja przeprowadza proste w koła przechodzące przez S i na odwrót (§ 45, str. 226).

Inwersja jest przykładem *pokrewieństwa kołowego*. Tak nazywamy przekształcenia wzajemnie jednoznaczne płaszczyzny Möbiusa przeprowadzające koła w koła (prostą też uważamy za koło).

Iloczyn dwóch pokrewieństw kołowych jest oczywiście pokrewieństwem kołowym.

Udowodnimy następujące twierdzenie Möbiusa i Darboux:
Każde pokrewieństwo kołowe jest albo podobieństwem, albo inwersją, albo iloczynem inwersji i podobieństwa.

Niech T będzie pokrewieństwem kołowym.

Jeśli T przekształca punkt P_∞ w siebie, to koła przechodzące przez P_∞ przekształcają się w koła również przechodzące; innymi słowy proste przechodzą w proste. Na mocy twierdzenia Staudta i Darboux (§ 30, str. 152) T jest więc przekształceniem afinicznym, a ponieważ przekształca ono koła w koła, więc jest podobieństwem (§ 29, str. 148).

Jeśli zaś T nie przekształca punktu P_∞ w siebie, to niech $T(P_\infty) = S$ i niech I będzie inwersją o środku S . Wówczas IT przekształca punkt P_∞ w siebie, jest więc podobieństwem. Oznaczmy je przez T_1 . Z równości $T_1 = IT$ wynika, że $T = IT_1$.

Tym dowód twierdzenia Möbiusa i Darboux jest zakończony.

Pokrewieństwa kołowe tworzą grupę. Istotnie, iloczyn dwóch takich pokrewieństw przeprowadza koła w koła. Należy jeszcze udowodnić, że przekształcenie odwrotne T^{-1} też przeprowadza koła w koła. Wynika to z twierdzenia Möbiusa i Darboux, można to jednak udowodnić w sposób elementarny.

Niech mianowicie K' będzie kołem (lub prostą). Aby dowieść, że T^{-1} przekształca K' w koło, wystarczy dowieść, że K' jest obrazem pewnego koła K , otrzymanym przez przekształcenie T . W tym celu weźmy na K' dowolne trzy punkty Q'_1, Q'_2, Q'_3 . Są one obrazami pewnych punktów Q_1, Q_2, Q_3 , otrzymanymi przez przekształcenie T . Przez punkty Q_1, Q_2, Q_3 przechodzi pewne koło lub prosta K , które T przekształca w koło przechodzące przez punkty Q'_1, Q'_2, Q'_3 czyli w koło K' , c. b. d. o.

Z twierdzenia Möbiusa i Darboux wynika też, wobec wiernokątności inwersji i podobieństw, że *każde pokrewieństwo kołowe jest wiernokątne*.

W płaszczyźnie istnieją przekształcenia wiernokątne obszaru w obszar, które nie są pokrewieństwami kołowymi. Bada się je bliżej w teorii funkcji analitycznych. M. in. dowodzi się, że *każde przekształcenie wzajemnie jednoznaczne i wiernokątne pełnej płaszczyzny Möbiusa w siebie jest pokrewieństwem kołowym*. Zakłada się jednak ciągłą różniczkowalność funkcji określających to przekształcenie.

Podobnie można określić przekształcenia wiernokątne w przestrzeni. Zachodzi jednak pod tym względem zasadnicza różnica między płaszczyzną a przestrzenią. W przestrzeni można bowiem udowodnić za pomocą głębszych twierdzeń geometrii różniczkowej, że *każde przekształcenie wiernokątne obszaru w obszar da się złożyć z podobieństwa i inwersji*.

Ponieważ pokrewieństwa kołowe tworzą grupę, więc teoria niezmienników tej grupy stanowi geometrię.

Nazywa się ją *geometrią Möbiusa* *.)

(§ 47. Rzut stereograficzny

Weźmy pod uwagę kulę K o średnicy 1, styczną do płaszczyzny Möbiusa Π w punkcie O . Niech O' będzie drugim końcem średnicy kuli przechodzącej przez O .

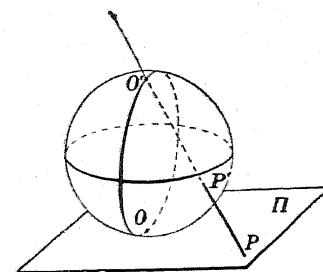
Punkt O' nazywać będziemy biegunem północnym kuli K , a punkt O — jej biegunem południowym (rys. 81).

Każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkujemy punkt P' , w którym prosta OP przebija kulę. Punktowi w ∞ przyporządkujemy biegun północny.

Otrzymujemy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne płaszczyzny Möbiusa w powierzchnię kuli; nazywa się ono *rzutem stereograficznym* (kuli na płaszczyznę lub płaszczyzny na kulę).

Niech $Oxyz$ będzie układem prostokątnym współrzędnych, w którym Π jest płaszczyzną Oxy , a oś Oz — osią OO' . Kula K ma w tym układzie współrzędnych równanie

$$x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4$$



Rys. 81

* Obszerny traktat geometrii Möbiusa znajduje się np. w dziele: W. Blaschke, *Differentialgeometrie*, 3, Berlin 1929.

czyli

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z(z-1) = 0,$$

a punkt O' ma współrzędne $0, 0, 1$. Niech $P(x, y, 0)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny Π . Wówczas prosta łącząca O i P ma równania

$$(2) \quad x' = xs, \quad y' = ys, \quad z' = 1 - s,$$

gdzie x', y', z' są współrzędnymi punktu bieżącego tej prostej. Podstawiając wartości (2) do (1), otrzymujemy współrzędne punktu P' , który jest rzutem stereograficznym punktu P na kulę:

$$(3) \quad \xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Na odwrót, aby otrzymać wzory dające odwzorowanie kuli na płaszczyznę, połączmy dowolny punkt $P'(\xi, \eta, \zeta)$ powierzchni kuli z punktem O' prostą

$$x = \xi s, \quad y = \eta s, \quad z = 1 + (\zeta - 1)s.$$

Przebijając tę prostą płaszczyznę $z=0$, otrzymujemy współrzędne punktu P , który jest rzutem stereograficznym punktu P' na płaszczyznę:

$$(4) \quad x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z = 0.$$

We wzorach (3) i (4) nie są uwzględnione biegun północny kuli i punkt w ∞ płaszczyzny Π .

Udowodnimy, że rzut stereograficzny przekształca koła płaszczyzny Π w koła na kuli K i na odwrót oraz że przy tym proste płaszczyzny Π przekształcają się na koła przechodzące przez biegun północny kuli K i na odwrót.

Weźmy naprzód pod uwagę na płaszczyźnie Π koło

$$(5) \quad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Dla $A=0$ równanie to przedstawia prostą. Wobec (4) otrzymujemy obraz koła (5) na kuli (1), podstawiając do (5) wartości (4). Dostajemy

$$(6) \quad A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi(1-\zeta) + C\eta(1-\zeta) + D(1-\zeta)^2 = 0.$$

Ponieważ punkt (ξ, η, ζ) leży na kuli (1), więc

$$(7) \quad \xi^2 + \eta^2 = (1-\zeta)\zeta.$$

Równanie (6) jest zatem równoważne równaniu

$$(8) \quad (1-\zeta)(A\xi + B\xi + C\eta + D(1-\zeta)) = 0.$$

Dla obrazu P' punktu właściwego P jest $\zeta \neq 1$, a więc

$$(9) \quad B\xi + C\eta + (A-D)\zeta + D = 0.$$

Nie może tu być $B=C=A-D=0$, gdyż wówczas równanie (5) przedstawiałoby koło urojone lub całą płaszczyznę. Zatem równanie (9) przedstawia płaszczyznę. Obraz koła (5) jest więc przekrojem płaszczyzny (9) z kulą (1). Na odwrót, z (9) i (7) wynika (5). Zatem obraz koła (5) na kuli (1) jest kołem. Gdy (5) jest prostą, to $A=0$ i wówczas równanie (9) jest spełnione przez współrzędne bieguna północnego. Jasne jest, że możemy tak dobrać liczby A, B, C i D w równaniu (9), by otrzymać każdą z góry daną płaszczyznę. Rzuty stereograficzne kół (5) wyczerpują więc wszystkie koła na kuli, c. b. d. o.

Niech będzie dane przekształcenie T płaszczyzny Π w siebie, przeprowadzające punkt P w punkt P_1 , i niech rzut stereograficzny przeprowadza P w P' i P_1 w P'_1 . Przyporządkowując punktowi P_1 punkt P'_1 , otrzymujemy pewne przekształcenie T' kuli w siebie. Każdemu przekształceniu T płaszczyzny w siebie odpowiada więc pewne przekształcenie T' kuli w siebie. Gdy S jest rzutem stereograficznym kuli na płaszczyznę, to S^{-1} jest rzutem stereograficznym płaszczyzny na kulę. Wówczas

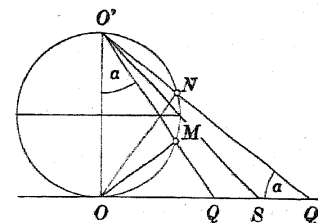
$$(10) \quad T' = S^{-1}TS.$$

Jeśli T jest pokrewieństwem kołowym płaszczyzny, to ponieważ S i S^{-1} przekształcają koła płaszczyzny w koła na kuli, więc T' jest przekształceniem kuli, które koła przeprowadza w koła, czyli pokrewieństwem kołowym na kuli.

Przetnijmy kulę K płaszczyzną $z=1/2$ i weźmy pod uwagę rzut stereograficzny tego koła na płaszczyznę Oxy . Jest on pewnym kołem o środku O .

Udowodnimy, że *inwersji na płaszczyźnie Oxy względem tego rzutu odpowiada na kuli K odbicie względem płaszczyzny $z=1/2$.*

Istotnie (p. rys. 82), z założenia mamy $|OQ| \cdot |OQ_1| = |OS|^2 = 1 = |OO'|^2$.



Rys. 82

Zatem

$$\frac{|OQ|}{|OO'|} = \frac{|OO'|}{|OQ_1|}.$$

Wynika stąd podobieństwo trójkątów $O'OQ$ i Q_1OO' , skąd równość kątów α w obu trójkątach przy wierzchołkach O' i Q_1 . Zatem trójkąty $O'ON$ i $OO'M$ też są podobne, a ponieważ trójkąty te mają wspólną przeciwprostokątną, więc są przystające. Stąd $|O'N| = |OM|$. Punkty M i N leżą zatem symetrycznie względem średnicy poziomej, c. b. d. o.

Udowodnimy obecnie, że rzut stereograficzny jest odwzorowaniem wiernokątnym.

Innymi słowy, jeśli styczne do kół na kuli tworzą kąt φ , to styczne do ich obrazów na płaszczyźnie tworzą również kąt φ .

W tym celu dowiedzimy naprzód, że gdy przez punkt M na kuli poprowadzimy płaszczyznę styczną, a następnie płaszczyznę dwusieczną kąta zawartego między tą płaszczyzną styczną a płaszczyzną Oxy , to przez odbicie symetryczne punktu M w płaszczyźnie dwusiecznej, punkt ten przejdzie w swój rzut stereograficzny.

Na rys. 83 uwidoczniony jest przekrój płaski. Mamy

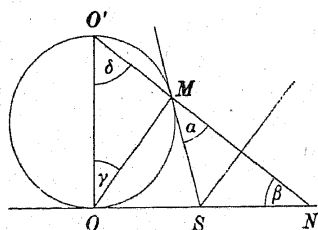
$$\alpha = \angle SMN = \gamma,$$

gdyż α jest kątem obwodowym leżącym po przeciwnej stronie cięciwy niż kąt γ . Zarazem

$$\gamma + \delta = \pi/2, \quad \beta + \delta = \pi/2,$$

więc

$$\beta = \gamma = \alpha.$$

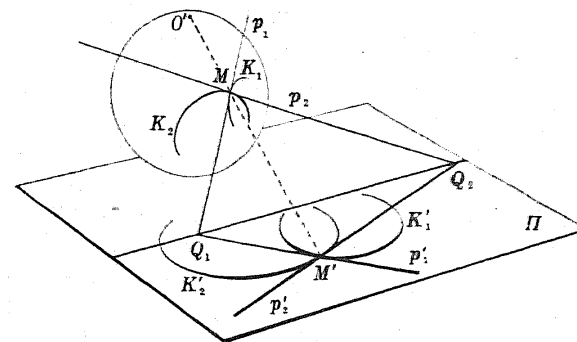


Rys. 83

Trójkąt SMN jest zatem równoramienny i punkty M , N leżą symetrycznie względem dwusiecznej kąta o wierzchołku S .

Niech teraz koła K_1 i K_2 na kuli przecinają się w punkcie M i niech p_1 będzie styczną do koła K_1 w tym punkcie (p. rys. 84). Rzut stereograficzny K'_1 koła K_1 jest przekrojem płaszczyzną Π powierzchni stożka o wierzchołku O' , na której leży koło K_1 . Płaszczyzna przechodząca przez punkt O' i prostą p_1 jest styczna do tego stożka. Jej krawędź przecięcia z płaszczyzną Π jest prostą p'_1 styczną do koła K'_1 w punkcie M' (jeśli koło K_1 przechodzi przez O' , to jego rzut stereograficzny jest właśnie prostą p'_1). Podobnie

styczna p'_2 do koła K'_2 jest krawędzią przecięcia płaszczyzny Π z płaszczyzną przechodzącą przez punkt O' i prostą p_2 . Przez odbicie symetryczne w płaszczyźnie dwusiecznej punkt M przechodzi w punkt M' .



Rys. 84

Ponieważ proste p_1 i p_2 przechodzące przez M przebijają Π w punktach Q_1 i Q_2 płaszczyzny dwusiecznej (na wspólnej krawędzi trzech płaszczyzn), więc przez odbicie symetryczne w płaszczyźnie dwusiecznej prosta Q_1M przechodzi w prostą Q_1M' , a prosta Q_2M w prostą Q_2M' , czyli proste p_1 i p_2 przechodzą w proste p'_1 i p'_2 . Tak więc styczne do rzutów stereograficznych powstają ze stycznych do kół K_1 i K_2 przez odbicie symetryczne w płaszczyźnie dwusiecznej. Zatem kąt φ między prostymi p_1 i p_2 nie ulega zmianie, c. b. d. o.

Z wiernokątności rzutu stereograficznego wynika wiernokątność inwersji. Jeżeli bowiem we wzorze (10) $T=I$ jest inwersją na płaszczyźnie, to T' jest odbiciem pewnej kuli w płaszczyźnie średnicowej i w myśl tego wzoru jest

$$I = ST'S^{-1}.$$

Po prawej stronie żaden z czynników nie zmienia kątów, więc i inwersja I ich nie zmienia. Otrzymaliśmy drugi, syntetyczny dowód wiernokątności inwersji, niezależny od metod analitycznych.)