

Przekształcenia takie nazywają się przekształceniami *topologicznymi* lub *homeomorfizmami*.

Tworzą one grupę, a ich geometria nazywa się *topologią płaszczyzny*.

Pojęcie prostej nie jest oczywiście pojęciem topologicznym. Jeśli jednak zdefiniujemy krzywą ciągłą jako twór dający się określić przez równania

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t),$$

dla $0 \leq t \leq 1$, gdzie funkcje f i φ są ciągłe, to takie pojęcie krzywej ciągłej jest pojęciem topologicznym.

Każde twierdzenie topologii płaszczyzny jest prawdziwe w geometrii afinicznej, gdyż przekształcenia afiniczne są wzajemnie jednoznaczne i ciągłe.

Widzimy zatem, że otrzymujemy rozmaite działy geometrii zależnie od tego, jaką grupę przekształceń bierzemy za podstawę. Pojęcie grupy przekształceń pozwala w ten sposób zbudować jednolitą i konsekwentną klasyfikację rozmaitych działów geometrii. Po raz pierwszy podniósł to Klein, czym w wysokim stopniu przyczynił się do uporządkowania i planowego rozwoju geometrii współczesnej.

W rozdziałach VII i VIII zajmować się będziemy geometrią afiniczną oraz geometrią podobieństw płaszczyzny i przestrzeni.

ROZDZIAŁ VII

ELEMENTY NIEWŁAŚCIWE, WSPÓLRZĘDNE JEDNORODNE

§ 32. Elementy w nieskończoności

W geometrii okazuje się wielce pożyteczną przestrzeń wzbogaconą o tzw. *punkty niewłaściwe*, zwane też *punktami w nieskończoności*.

Podstawą intuicyjną tego wzbogacenia przestrzeni jest następujące rozumowanie:

Wyobraźmy sobie w przestrzeni linie proste przechodzące przez punkty $P_1, P_2, \dots$ i przecinające się w pewnym punkcie P . Jeśli punkt P oddala się nieograniczenie, a punkty $P_1, P_2, \dots$ pozostają nieruchome, to proste te dążą do położenia równoległego.

Geometry sprzed XIX wieku wyrażali to mówiąc, że wszystkie proste równoległe przecinają się w jednym i tym samym „punkcie w nieskończoności”, a tym samym, że każdemu kierunkowi odpowiada jednoznacznie pewien punkt w nieskończoności. Nie definiowali jednak samego punktu w nieskończoności. Współczesna geometria wprowadza dwie takie definicje: *syntetyczną*, tj. nie opartą na pojęciach liczbowych, i *analityczną*, tj. posługującą się tymi pojęciami. Użyjemy tu metody syntetycznej.

Przestrzeń w dotychczasowym znaczeniu nazywamy *euklidesową*, a kierunki w tej przestrzeni — *punktami w nieskończoności* lub krócej *punktami w ∞* .

Zbiór złożony ze wszystkich punktów przestrzeni euklidesowej i wszystkich punktów w ∞ nazywamy *przestrzenią rzutową*.

W sensie tej definicji przestrzeń euklidesowa jest więc częścią przestrzeni rzutowej.

Punkty przestrzeni euklidesowej nazywamy *właściwymi*.

Proste zaś i płaszczyzny przestrzeni euklidesowej nazywamy *prostymi euklidesowymi* i *plaszczyznami euklidesowymi*.

Z każdej płaszczyzny euklidesowej możemy utworzyć nowy zbiór, dodając do niej pewien zbiór punktów w ∞ , a mianowicie zbiór kierunków równoległych do tej płaszczyzny. Powstały w ten sposób zbiór nazywamy *plaszczyzną właściwą*.

Zbiór zaś wszystkich punktów w ∞ przestrzeni rzutowej nazywamy *plaszczyzną niewłaściwą* lub *plaszczyzną w ∞* .

Zarówno płaszczyzny właściwe jak płaszczyznę w ∞ nazywamy *plaszczyznami rzutowymi*.

Zbiór punktów prostej euklidesowej, powiększony o kierunek tej prostej jako o jej punkt w ∞ , nazywamy *prostą właściwą*.

Zbiór zaś punktów w ∞ płaszczyzny właściwej nazywamy *prostą niewłaściwą* lub *prostą w ∞* .

Proste właściwe i proste w ∞ nazywamy *prostymi rzutowymi*.

Punkty, proste i płaszczyznę w ∞ oznaczać będziemy często znakami P_∞ , Q_∞ , p_∞ , q_∞ , Π_∞ itp. Jak wynika z tych określeń, zdanie: „Punkt P_∞ leży na prostej właściwej p ” znaczy: „Prosta p ma kierunek P_∞ ”. Analogiczne znaczenie ma zdanie: „Punkt P_∞ leży na płaszczyźnie właściwej Π ”.

Udowodnimy teraz o prostych rzutowych i płaszczyznach rzutowych kilka podstawowych twierdzeń, które pozwolą nam operować nowo wprowadzonymi pojęciami.

Twierdzenie 1. *Jeśli punkt P leży na prostej p , to punkt P leży na płaszczyźnie Π , to punkt P leży na płaszczyźnie Π .*

Dowód. Gdy P jest punktem właściwym, lub gdy $P = P_\infty$ i $\Pi = \Pi_\infty$, twierdzenie jest oczywiste. Jeśli zaś $P = P_\infty$, a p i Π są właściwe, to P jest kierunkiem prostej p leżącej na płaszczyźnie Π , czyli kierunkiem równoległym do Π , a więc leży na płaszczyźnie Π . Jeśli wreszcie $P = P_\infty$ i $p = p_\infty$, a Π jest płaszczyzną właściwą, to zbiór punktów w ∞ płaszczyzny Π jest prostą p , a więc płaszczyzna Π zawiera punkt P .

Twierdzenie 2. *Każde dwie płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, a wszystkie płaszczyzny równoległe przecinają się wzdłuż tej samej prostej, mianowicie wzdłuż swej prostej w ∞ .*

Dowód. Jeśli płaszczyzny Π_1 i Π_2 są właściwe i nierównoległe, to ich części euklidesowe przecinają się wzdłuż pewnej prostej euklidesowej p . Kierunek tej prostej jest równoległy do obu płaszczyzn,

jest on więc punktem P_∞ leżącym na Π_1 i Π_2 . Prosta p , uzupełniona przez punkt P_∞ , jest prostą rzutową właściwą, która jest krawędzią przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2 .

Jeśli zaś płaszczyzny Π_1 i Π_2 są właściwe i równoległe, to druga teza twierdzenia wynika wprost z określenia prostej w ∞ .

Jeśli wreszcie płaszczyzna Π_1 jest właściwa, a $\Pi_2 = \Pi_\infty$, to w myśl przyjętych określeń zbiór punktów w ∞ płaszczyzny Π_1 jest prostą p_∞ , stanowiącą wspólną krawędź płaszczyzn Π_1 i Π_∞ .

Twierdzenie 3. *Przez dwa dowolne punkty P i Q przechodzi dokładnie jedna prosta.*

Dowód. Wystarczy to udowodnić, gdy co najmniej jeden z punktów P i Q jest punktem w ∞ .

Jeśli P jest punktem właściwym, a $Q = Q_\infty$, to istnieje dokładnie jedna prosta o kierunku Q_∞ przechodząca przez punkt P .

Jeśli zaś P i Q są punktami w ∞ , tj. dwoma różnymi kierunkami, to istnieją płaszczyzny równoległe do obu tych kierunków i każde dwie takie płaszczyzny są równoległe. Mają one na podstawie twierdzenia 2 jedną wspólną krawędź p_∞ , która przechodzi przez punkty P i Q .

Twierdzenie 4. *Jeśli prosta p ma z płaszczyzną Π dwa różne punkty wspólne P i Q , to całkowicie leży na tej płaszczyźnie.*

Dowód. Wystarczy to udowodnić, gdy co najmniej jeden z obu punktów jest punktem w ∞ .

Jeśli P jest punktem właściwym, a $Q = Q_\infty$, to założenie, że Q_∞ leży w płaszczyźnie Π , znaczy, że kierunek Q_∞ prostej p jest równoległy do płaszczyzny Π . Zatem prosta p , mająca z płaszczyzną Π punkt wspólny właściwy P , jest równoległa do Π , a więc leży na Π .

Jeżeli zaś prosta p ma z płaszczyzną Π punkty wspólne P_∞ i Q_∞ , to p jest prostą w ∞ . Jest ona zatem zbiorem kierunków równoległych do pewnej płaszczyzny Π' . Ponieważ wszystkie płaszczyzny równoległe do kierunków P_∞ i Q_∞ są między sobą równoległe, więc i płaszczyzna Π jest równoległa do tych kierunków, a tym samym zawiera prostą p .

Twierdzenie 5. *Jeśli dwie płaszczyzny przechodzą przez punkt P , to ich krawędź przecięcia również przechodzi przez ten punkt.*

Dowód. Jeśli obie płaszczyzny są właściwe i nierównoległe, a $P = P_\infty$, to P_∞ jest kierunkiem równoległym do obu płaszczyzn; jest więc on kierunkiem ich krawędzi przecięcia i wobec tego na niej leży.

Jeśli zaś obie płaszczyzny są właściwe i równoległe, to P musi być punktem w ∞ , a więc leży na wspólnej obu płaszczyznom prostej w ∞ .

Jeśli wreszcie jedna z płaszczyzn jest płaszczyzną w ∞ , to teza twierdzenia wynika z określenia prostej w ∞ .

Twierdzenie 6. Dwie różne proste leżące w jednej płaszczyźnie przecinają się dokładnie w jednym punkcie.

Dowód. Wystarczy to udowodnić tylko dla przypadku, gdy $p=p_\infty$ i $q=q_\infty$, gdyż w pozostałych przypadkach twierdzenie wynika natychmiast z określeń.

Niech Π_1 i Π_2 będą płaszczyznami właściwymi, z których pierwsza zawiera prostą p_∞ , a druga prostą q_∞ . Ponieważ te proste są różne, więc płaszczyzny Π_1 i Π_2 nie są równoległe. Istnieje zatem dokładnie jeden kierunek P_∞ , równoległy do Π_1 i Π_2 , mianowicie kierunek ich krawędzi przecięcia. P_∞ jest więc jedynym punktem przecięcia prostych p_∞ i q_∞ .

Twierdzenie 7. Przez dwie różne proste przecinające się (w punkcie właściwym lub punkcie w ∞) przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Dowód sprowadza się, podobnie jak poprzednie, do rozważenia różnych przypadków.

Prostymi skośnymi (lub *wichrowatymi*) nazywamy proste nie leżące w jednej płaszczyźnie.

W przestrzeni euklidesowej proste skośne są to więc takie, które się nie przecinają ani nie są równoległe. Natomiast w przestrzeni rzutowej na to, by proste były skośne, potrzeba i wystarcza, żeby się nie przecinały.

Twierdzenie 8. Przez trzy punkty nie leżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Dowód. Punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dwie różne proste, P_1P_2 i P_1P_3 (twierdzenie 3), które mają punkt wspólny P_1 , a więc leżą dokładnie na jednej płaszczyźnie Π (twierdzenie 7).

Twierdzenie 9. Trzy płaszczyzny nie przechodzące przez jedną prostą przecinają się dokładnie w jednym punkcie.

Twierdzenie 10. Każda prosta ma z każdą płaszczyzną dokładnie jeden punkt wspólny lub leży na niej całkowicie.

Twierdzenie 11. Przez prostą i punkt nie leżący na niej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Twierdzenia 9-11 wynikają w prosty sposób z poprzednich.

§ 33. Współrzędne jednorodne

1. Współrzędne jednorodne na prostej. Niech na prostej właściwej p będzie dany układ współrzędnych o początku O . Wtedy każdy punkt właściwy P prostej p ma za swą współrzędną kartezjańską jedną liczbę rzeczywistą x ; na odwrót, każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada jednoznacznie pewien punkt właściwy na prostej.

Niech x_1 i x_2 będą dwiema liczbami rzeczywistymi, dla których

$$(1) \quad x_1/x_2 = x$$

czyli

$$(2) \quad x_1 = \varrho x, \quad x_2 = \varrho, \quad \varrho \neq 0.$$

Liczby x_1 i x_2 nazywamy *współrzędnymi jednorodzinnymi* punktu P w przyjętym układzie współrzędnych Ox na prostej p .

W ten sposób każdemu punktowi właściwemu przyporządkowujemy nieskończenie wiele stosunków $x_1:x_2$ współrzędnych jednorodnych, które otrzymujemy, podstawiając do (2) zamiast ϱ dowolną liczbę rzeczywistą, różną od zera. Dwa stosunki $x_1:x_2$ i $x'_1:x'_2$ przyporządkowane temu samemu punktowi właściwemu są równe:

$$(3) \quad x_1:x_2 = x'_1:x'_2,$$

gdyż oba są równe stosunkowi $x:1$.

Na odwrót, każdemu stosunkowi $x_1:x_2$, gdzie $x_2 \neq 0$, odpowiada na prostej p jeden i tylko jeden punkt właściwy P , którego współrzędnymi jednorodzinnymi są liczby x_1 i x_2 , a mianowicie punkt P o zwykłej współrzędnej $x = x_1/x_2$. Widzimy więc, że stosunki $x_1:x_2$, gdzie $x_2 \neq 0$, wyznaczają punkty właściwe na prostej jednoznacznie. Uzasadnia to nadanie liczbom x_1 i x_2 nazwy współrzędnych oraz oznaczanie punktu o współrzędnych jednorodnych x_1, x_2 przez $(x_1 : x_2)$.

Np. współrzędnym jednorodzinnym o stosunku 3:4 odpowiada na prostej p punkt o współrzędnej kartezjańskiej $x = 3/4$. Współrzędne jednorodne 1:2 i $-2:-4$ wyznaczają na prostej p jeden i ten sam punkt, mianowicie punkt o współrzędnej kartezjańskiej $x = 1/2$.

Zauważmy teraz, że każde dwa stosunki postaci $x_1:0$ i $x'_1:0$, gdzie $x_1 \neq 0$ i $x'_1 \neq 0$, są równe, gdyż

$$x'_1 = \varrho x_1, \quad 0 = \varrho 0, \quad \text{gdzie} \quad \varrho = x'_1/x_1 \neq 0.$$

Stosunki takie przyporządkowujemy punktowi w ∞ prostej p i nazywamy współzrędnymi jednorodnymi tego punktu.

W ten sposób na prostej właściwej, tj. prostej euklidesowej uzupełnionej punktem w ∞ , każdemu stosunkowi $x_1:x_2$, gdzie $x_1^2+x_2^2>0$, odpowiada jeden punkt tej prostej; każdemu zaś punktowi P tej prostej odpowiada nieskończenie wiele równych stosunków.

Gdy $x_2 \neq 0$, punkt P jest właściwy, jeśli zaś $x_2=0$, to $P=P_\infty$.

Na to, by dwa stosunki współzrędných jednorodnych wyznaczały ten sam punkt, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła równość (3), czyli żeby

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Współrzędne jednorodne na płaszczyźnie i w przestrzeni.

W podobny sposób wprowadzamy współrzędne jednorodne punktu na płaszczyźnie w układzie współzrędných Oxy , na ogół ukośnokątnym (i w którym wektory podstawowe na obu osiach mogą być różne).

Współzrędnymi jednorodnymi punktu (x,y) nazywamy mianowicie trójki liczb x_1, x_2, x_3 , dla których

$$(5) \quad x_1:x_2:x_3=x:y:1$$

czyli

$$(6) \quad x_1=\varrho x, \quad x_2=\varrho y, \quad x_3=\varrho \neq 0.$$

W ten sposób każdemu punktowi właściwemu płaszczyzny odpowiada nieskończenie wiele równych stosunków $x_1:x_2:x_3$, gdzie $x_3 \neq 0$. Na odwrót, każdemu takiemu stosunkowi odpowiada punkt właściwy o współzrędných kartezjańskich

$$(7) \quad x=x_1/x_3, \quad y=x_2/x_3.$$

Nieuwzględnione zaś stosunki postaci $x_1:x_2:0$ przyporządkowujemy punktom w ∞ , jak następuje: jeśli punkt P_∞ jest kierunkiem wyznaczonym przez stosunek $p:q$, to przyporządkowujemy mu współzrędnę jednorodną

$$x_1:x_2:x_3=p:q:0.$$

Np. stosunki $1:2:0$ i $2:4:0$ wyznaczają ten sam punkt w ∞ , a stosunki $1:2:0$ i $1:3:0$ wyznaczają różne punkty w ∞ .

Na płaszczyźnie rzutowej każdemu punktowi odpowiada nieskończenie wiele równych stosunków $x_1:x_2:x_3$ liczb nieznikających równocześnie (co wyrażamy krótko nierównością $x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$).

Każdemu takiemu stosunkowi odpowiada jeden punkt P płaszczyzny.

Gdy $x_3 \neq 0$, punkt P jest właściwy, jeśli zaś $x_3=0$, to $P=P_\infty$.

Dwa stosunki współzrędných jednorodnych $x_1:x_2:x_3$ i $x'_1:x'_2:x'_3$ wyznaczają ten sam punkt wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(8) \quad x_1:x_2:x_3=x'_1:x'_2:x'_3,$$

czyli gdy wszystkie minory drugiego stopnia macierzy

$$(9) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix}$$

są równe zeru.

Zupełnie podobnie wprowadza się współrzędne jednorodne punktu P w układzie przestrzennym współzrędných $Oxyz$, mianowicie jako stosunki czterech liczb $x_1:x_2:x_3:x_4$. Gdy $x_4 \neq 0$, punkt P jest właściwy i ma współzrędnę kartezjańskie

$$(10) \quad x=x_1/x_4, \quad y=x_2/x_4, \quad z=x_3/x_4;$$

jeśli zaś $x_4=0$, to $P=P_\infty$, czyli P jest kierunkiem $p:q:r$, i

$$x_1:x_2:x_3:x_4=p:q:r:0.$$

Dwa stosunki $x'_1:x'_2:x'_3:x'_4$ i $x_1:x_2:x_3:x_4$ wyznaczają ten sam punkt wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(11) \quad x_1:x_2:x_3:x_4=x'_1:x'_2:x'_3:x'_4,$$

czyli gdy rząd macierzy

$$(12) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{pmatrix}$$

jest równy 1.

§ 34. Prosta na płaszczyźnie we współzrędných jednorodnych

Każda prosta rzutowa płaszczyzny właściwej daje się we współzrędných jednorodnych przedstawić równaniem liniowym jednorodnym

$$(1) \quad a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0, \quad \text{gdzie} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2>0,$$

i na odwrót, każde równanie postaci (1) przedstawia prostą.

Istotnie, na to, by punkt leżał na prostej w ∞ , potrzeba i wystarcza, żeby $x_3=0$. Zatem prosta w ∞ ma równanie $x_3=0$, które jest kształtu (1).

Jeśli zaś prosta p jest właściwa, to jej część euklidesowa ma równanie

$$(2) \quad Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A^2 + B^2 > 0.$$

Podstawiając w nie wartości ze wzorów (7) § 33, str. 170, dostajemy po pomnożeniu przez $x_3 \neq 0$ równanie postaci (1), gdzie

$$(3) \quad a_1 = A, \quad a_2 = B, \quad a_3 = C.$$

Punkt niewłaściwy prostej (2) jest jej kierunkiem; jest on więc wyznaczony przez stosunek $-B:A$ (p. str. 90). Punktem w ∞ prostej (2) jest więc punkt

$$(4) \quad x_1 : x_2 : x_3 = -B : A : 0,$$

który wobec (3) spełnia (1).

Na odwrót, równanie (1) jest spełnione tylko przez jeden punkt w ∞ , bo dla $x_3 = 0$ dostajemy $x_1 : x_2 = -a_2 : a_1 = -B : A$.

Udowodniliśmy więc, że zarówno każda prosta właściwa jak każda prosta w ∞ ma we współrzędnych jednorodnych równanie postaci (1).

Na odwrót, gdy $a_1 = a_2 = 0$ i $a_3 \neq 0$, równanie (1) przedstawia prostą w ∞ . Gdy zaś $a_1^2 + a_2^2 > 0$, równanie (1) przedstawia prostą właściwą. Dla wszystkich bowiem punktów właściwych, których współrzędne jednorodne spełniają równanie (1), dostajemy przez podstawienie do tego równania wartości ze wzoru (7), str. 170

$$(5) \quad a_1 x + a_2 y + a_3 = 0,$$

a to równanie przedstawia na płaszczyźnie euklidesowej linię prostą. Na płaszczyźnie rzutowej ta prosta została uzupełniona punktem w ∞ , który jest jej kierunkiem, a więc punktem $-a_2 : a_1 : 0$. Punkt ten jednak również spełnia równanie (1), c. b. d. o.

Jak widzieliśmy w trakcie dowodu, gdy dane jest równanie (5), przedstawiające część euklidesową prostej rzutowej, to równanie tej prostej, uzupełnionej punktem w ∞ , otrzymujemy przez podstawienie współrzędnych jednorodnych i dochodzimy do (1). Równanie (1) prostej właściwej możemy zatem zawsze otrzymać, gdy tylko znamy równanie (2) jej części euklidesowej we współrzędnych kartezjańskich. Dlatego do wyznaczenia prostej właściwej będziemy często używali równania kształtu (5), mimo że proste euklidesowe nie będą występowały.

Na to, by dwie proste właściwe

$$(6) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad \text{i} \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

były równoległe, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(7) \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Jest to rozciągnięcie znanego warunku z płaszczyzny euklidesowej na rzutową.

Proste (6) są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(8) \quad a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3,$$

czyli gdy rząd macierzy

$$(9) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

jest równy 1.

Istotnie, gdy proste są właściwe, warunek ten jest nam znany z § 28 (p. str. 91). Gdy zaś są one identyczne z prostą w ∞ , to $a_1 = a_2 = 0$ i $b_1 = b_2 = 0$, a więc warunek jest też spełniony. Podobnie dowodzi się wynikania odwrotnego.

Jeśli równania (6) przedstawiają różne proste, to nie wszystkie minory drugiego stopnia macierzy (9) są równe zeru. Proste takie — jak wiemy z § 32, str. 168 — zawsze się przecinają. Ich punkt przecięcia $x_1 : x_2 : x_3$ jest przedstawiony przez układ równań (6), a więc

$$(10) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Udowodnimy teraz, że *na to, by trzy punkty $y_1 : y_2 : y_3$, $z_1 : z_2 : z_3$ i $w_1 : w_2 : w_3$ leżały na jednej prostej, potrzeba i wystarcza, żeby*

$$(11) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, gdy punkty te leżą na prostej (1), to

$$(12) \quad \begin{aligned} a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 &= 0, \\ a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 &= 0, \\ a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Uważając (12) za układ równań o niewiadomych a_1, a_2, a_3 , widzimy, że układ ten ma rozwiązanie, dla którego

$$(13) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0.$$

Zachodzi zatem równość (11). Na odwrót, gdy zachodzi równość (11), układ równań (12) ma rozwiązanie spełniające nierówność (13) i wówczas równanie (1) przedstawia prostą, zawierającą wszystkie trzy punkty na mocy (12), c. b. d. o.

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że równaniem prostej przechodzącej przez dwa różne punkty $z_1:z_2:z_3$ i $w_1:w_2:w_3$ jest

$$(14) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu bowiem według pierwszego wiersza dostajemy równanie postaci (1), gdzie

$$(15) \quad a_1:a_2:a_3 = \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

W § 21 wprowadziliśmy dwa rodzaje pęków prostych na płaszczyźnie: pęk prostych przecinających się w jednym punkcie i pęk prostych równoległych (p. str. 98). W płaszczyźnie rzutowej możemy oba te rodzaje pęków zdefiniować jednolicie:

Pękiem prostych nazywamy zbiór prostych przecinających się w jednym punkcie.

W szczególności, gdy punktem tym jest punkt w ∞ , otrzymujemy pęk prostych równoległych, do którego jednak obecnie należy jeszcze prosta w ∞ .

Niech

$$(16) \quad \begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{aligned}$$

będą równaniami dwóch różnych prostych, przecinających się w punkcie P .

Dla skrócenia zamiast $u(x_1, x_2, x_3)$ będziemy pisali u .

Zupełnie podobnie jak w § 21, dowodzi się, że na to, by prosta u_3 należała do pęku wyznaczonego przez proste u_1 i u_2 , potrzeba i wystarczy, żeby

$$(17) \quad u_3 \equiv \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \quad \text{gdzie} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0.$$

Jednakże w § 21, jeżeli proste u_1 i u_2 były równoległe, musieliśmy wykluczyć układ liczb λ_1, λ_2 , gdy $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Teraz zaś dla takiego układu liczb mamy

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \equiv (\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3) x_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \neq 0,$$

i równanie to przedstawia prostą w ∞ , która należy do pęku.

Okazuje się dalej, tak samo jak w § 21, że na to by proste $u_1=0$, $u_2=0$ i $u_3=0$ należały do jednego pęku, potrzeba i wystarczy, żeby istniały nie znikające równocześnie liczby μ_1, μ_2 i μ_3 , dla których

$$(18) \quad \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 = 0.$$

Na to, by proste (16) oraz prosta

$$u_3 \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

należały do jednego pęku, potrzeba i wystarczy, żeby

$$(19) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 35. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni we współrzędnych jednorodnych

Udowodnimy, że każda płaszczyzna przestrzeni rzutowej daje się we współrzędnych jednorodnych przedstawić równaniem liniowym jednorodnym

$$(1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \quad \text{gdzie} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 0,$$

i że na odwrót, każde równanie postaci (1) przedstawia płaszczyznę.

Istotnie, na to, by punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) leżał na płaszczyźnie Π_∞ , potrzeba i wystarczy, żeby $x_4=0$. Zatem płaszczyzna w ∞ ma równanie $x_4=0$, które jest postaci (1). Na odwrót, gdy $a_1=a_2=a_3=0$, równanie (1) przedstawia płaszczyznę w ∞ .

Jeśli zaś płaszczyzna Π jest właściwa, to jej część euklidesowa daje się przedstawić równaniem

$$(2) \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{gdzie} \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Przechodząc do współrzędnych jednorodnych, dostajemy równanie postaci (1), gdzie

$$(3) \quad a_1=A, \quad a_2=B, \quad a_3=C, \quad a_4=D.$$

Punkty niewłaściwe płaszczyzny Π są kierunkami $p:q:r$ prostych do niej równoległych, dla których więc (p. str. 112)

$$(4) \quad Ap + Bq + Cr = 0.$$

Każdy taki punkt ma zatem współrzędne jednorodne

$$x_1:x_2:x_3:x_4 = p:q:r:0,$$

które wobec (3) i (4) spełniają (1).

Podobnie dowodzi się twierdzenia odwrotnego.

Na to, by płaszczyzny właściwe o równaniach

$$(5) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

były równoległe, potrzeba i wystarcza, żeby

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3.$$

Dowód wynika z analogicznego twierdzenia dla płaszczyzn euklidesowych.

Na to, by płaszczyzny (5) były identyczne, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(6) \quad a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4,$$

czyli żeby rząd macierzy

$$(7) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

był równy 1.

Dowód przebiega podobnie jak dla dwóch prostych na płaszczyźnie. To samo dotyczy dowodu następującego twierdzenia:

Na to, by cztery punkty o współrzędnych jednorodnych y_i, z_i, w_i, t_i , gdzie $i=1,2,3,4$, leżały na jednej płaszczyźnie, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(8) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Udowodnimy, że *na to, by trzy punkty o współrzędnych jednorodnych z_i, w_i, t_i , gdzie $i=1,2,3,4$, leżały na jednej prostej, potrzeba i wystarcza, żeby rząd macierzy*

$$(9) \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

był równy 2, tj. by znikaly wszystkie wyznaczniki 3-go stopnia, utworzone z tej macierzy.

Istotnie, gdy powyższe trzy punkty leżą na jednej prostej, to każdy punkt przestrzeni leży z nimi na jednej płaszczyźnie. Rów-

ność (8) jest wówczas spełniona dla wszelkich liczb y_1, y_2, y_3, y_4 . Rozwińmy wyznacznik ze wzoru (8) według pierwszego wiersza. Otrzymujemy

$$(10) \quad A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 - A_4 y_4 = 0,$$

gdzie A_i jest minorem macierzy (9), który powstaje przez opuszczenie i -tej kolumny. Ponieważ równanie (10) jest spełnione dla wszelkich liczb y_i , więc musi być $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, czyli rząd macierzy (9) jest równy 2.

Na odwrót, jeżeli rząd macierzy (9) jest równy 2, to znikają wszystkie jej minory A_i trzeciego stopnia. Wówczas (9), a więc i (8) jest tożsamością o zmiennych y_i . Innymi słowy, każdy punkt przestrzeni leży na jednej płaszczyźnie z punktami (z_i, w_i, t_i) , gdzie $i=1,2,3,4$. Tym samym punkty te leżą na jednej prostej.

Z ostatniego twierdzenia i jego dowodu wynika, że *gdy trzy punkty o współrzędnych jednorodnych z_i, w_i, t_i gdzie $i=1,2,3,4$, nie leżą na jednej prostej, to równanie (8) o zmiennych y_i przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez te trzy punkty.*

Na to, by cztery płaszczyzny, których równania mają współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i , gdzie $i=1,2,3,4$, przecinały się w jednym punkcie, potrzeba i wystarcza, żeby wyznacznik

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

był równy 0.

Warunek (11) jest bowiem konieczny i dostateczny, żeby układ równań tych płaszczyzn miał wspólne rozwiązanie niezerowe.

Pojęcie pęku płaszczyzn przestrzeni euklidesowej uogólnia się w naturalny sposób na pęki płaszczyzn przestrzeni rzutowej: *pękiem płaszczyzn* nazywamy zbiór płaszczyzn przechodzących przez jedną prostą.

Podobnie jak dla prostych płaszczyzny, dowodzimy twierdzeń:

Na to, by płaszczyzna $\Pi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ należała do pęku wyznaczonego przez płaszczyzny $\Pi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ i $\Pi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(12) \quad \Pi_3 = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2, \quad \text{gdzie} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0.$$

Na to, by trzy płaszczyzny $\Pi_1=0$, $\Pi_2=0$ i $\Pi_3=0$ należały do jednego pęku, potrzeba i wystarcza, żeby istniały liczby μ_1 , μ_2 i μ_3 nie znikające równocześnie, dla których

$$(13) \quad \mu_1 \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2 + \mu_3 \Pi_3 = 0.$$

Gdy oznaczyć współczynniki tych prostych kolejno przez a_i , b_i , c_i , gdzie $i=1,2,3,4$, to warunek (13) staje się równoważny warunkowi, by rząd macierzy

$$(14) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

nie przekraczał 2.

Ponieważ w przestrzeni rzutowej każde dwie płaszczyzny się przecinają, więc prostą w przestrzeni możemy przedstawić przez układ dwóch równań liniowych

$$(15) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0,$$

gdzie

$$(16) \quad a_1 : a_2 : a_3 : a_4 \neq b_1 : b_2 : b_3 : b_4.$$

Jeśli więc dane są dwie proste, pierwsza o równaniach (15), a druga o równaniach analogicznych, lecz ze współczynnikami c_i i d_i , to aby te dwie proste się przecinały, potrzeba i wystarcza, żeby wyznacznik (11) był równy 0. Innymi słowy: na to, by dwie proste określone układami równań postaci (15) były skośne, potrzeba i wystarcza, żeby wyznacznik (11) był różny od zera.

Oczywiście, ten warunek skośności jest konieczny i dostateczny również w przestrzeni euklidesowej. Jednakże bezpośredni dowód tego twierdzenia dla przestrzeni euklidesowej, bez korzystania z pojęcia punktów w ∞ , wymaga dłuższych wywodów.

§ 36. Zmiana układu współrzędnych jednorodnych.

Przekształcenia afiniczne przestrzeni rzutowej

1. Zmiana układu współrzędnych. W § 28 udowodniliśmy, że gdy dane są na prostej dwa układy współrzędnych o początkach O i O' oraz w każdym z tych układów wektor podstawowy, to między współrzędnymi kartezjańskimi x i x' tego samego punktu w obu układach zachodzi zależność kształtu

$$(1) \quad x' = a_{11}x + a_{12}, \quad \text{gdzie} \quad a_{11} \neq 0.$$

Udowodnimy, że między współrzędnymi jednorodnymi $x_1 : x_2$, i $x'_1 : x'_2$ tego samego punktu w obu układach zachodzi zależność kształtu

$$(2) \quad \varrho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \text{gdzie} \quad \varrho \neq 0 \quad \text{i} \quad a_{11} \neq 0.$$

W istocie, dla punktów właściwych prostej mamy $x' = x'_1/x'_2$ i $x = x_1/x_2$. Podstawiając te wartości do (1), otrzymujemy

$$\frac{x'_1}{x'_2} = a_{11} \frac{x_1}{x_2} + a_{12} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{x_2}$$

czyli

$$x'_1 : x'_2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) : x_2.$$

Ta proporcja jest równoważna zależnościom (2).

Dla punktu zaś w ∞ mamy $x_2 = 0$. Podstawiając tę wartość do (2), dostajemy dla x'_1 i x'_2

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad x'_2 = 0$$

czyli

$$x'_1 : x'_2 = x_1 : 0 = 1 : 0,$$

a więc wartości x'_1 i x'_2 wyznaczone z (2) są także współrzędnymi punktu w ∞ .

Podobnie jest na płaszczyźnie. Tu zamiana współrzędnych przy przejściu od jednego układu kartezjańskiego do dowolnego innego wyraża się — jak widzieliśmy w § 28 — wzorami kształtu

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned} \quad \text{gdzie} \quad |\mathfrak{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wówczas dla składowych p, q i p', q' tego samego wektora w obu układach mamy

$$(4) \quad p' : q' = a_{11}p + a_{11}q : a_{21}p + a_{22}q.$$

Udowodnimy, że między współrzędnymi jednorodnymi $x_1 : x_2 : x_3$ i $x'_1 : x'_2 : x'_3$ tego samego punktu w obu układach zachodzi zależność postaci

$$(5) \quad \begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho x'_3 &= a_{33}x_3, \end{aligned} \quad \text{gdzie} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{i} \quad \varrho \neq 0.$$

Istotnie dla punktów właściwych, podstawiając do (3) wartości

$$x' = x'_1/x'_2, \quad y' = x'_2/x'_3, \quad x = x_1/x_3, \quad y = x_2/x_3,$$

dostajemy

$$\frac{x'_1}{x'_3} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{x_3}, \quad \frac{x'_2}{x'_3} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{x_3}$$

czyli (5). Dla punktów zaś niewłaściwych mamy $x_3=0$ i $x'_3=0$, więc

$$x_1:x_2:0 = p:q:0, \quad x'_1:x'_2:0 = p':q':0,$$

skąd

$$p = \varrho_1 x_1, \quad q = \varrho_1 x_2,$$

więc na mocy (4)

$$x'_1:x'_2:0 = p':q':0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 : 0.$$

Wobec $x_3=x'_3=0$ ostatnia równość jest równoważna wzorom (5).

Tak samo dowodzi się, że w przestrzeni przy zamianie układów współrzędnych kartezjańskich zachodzą między współrzędnymi jednorodnymi punktu zależności kształtu

$$(6) \quad \begin{aligned} \varrho x'_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad \text{dla } i=1,2,3, \\ \varrho x'_4 &= x_4, \end{aligned}$$

gdzie $\varrho \neq 0$ i $|a_{ik}| \neq 0$ dla $i,k=1,2,3$.

2. Przekształcenia afiniczne. Zajmiemy się obecnie inną interpretacją wzorów (2), (5) i (6). Mianowicie będziemy je teraz uważali za przyporządkowanie współrzędnym jednorodnym punktu współrzędnych jednorodnych innego punktu, liczonych w jednym i tym samym lub w różnych układach współrzędnych.

Udowodnimy, że jest ono przekształceniem wzajemnie jednoznacznym prostej w prostą, płaszczyzny w płaszczyznę i przestrzeni w przestrzeń.

Weźmy pod uwagę np. wzory (5). Gdy $x_3=0$, to $x'_3=0$ i na odwrót, a więc punkty w ∞ przechodzą w punkty w ∞ . Wynika stąd, że punkty właściwe przechodzą w punkty właściwe. Dla nich zaś wzory (5) są równoważne wzorom (3), te zaś — jak wiemy z § 29 (p. str. 142) — określają przekształcenie afiniczne płaszczyzny w płaszczyznę, a więc przekształcenie wzajemnie jednoznaczne. Na odwrót, wzajemna jednoznaczność przyporządkowania wyrażonego wzorami (3) zachowuje się i dla punktów w ∞ , dla nich bowiem $x_3=0$ i $x'_3=0$, więc wzory (5) przybierają tu kształt

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad \text{gdzie } \varrho \neq 0;$$

a ponieważ w myśl założenia $|\mathfrak{A}| = |a_{ik}| \neq 0$, więc istnieje macierz odwrotna $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} = (b_{ik})$ i otrzymujemy

$$\varrho^{-1}x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2, \quad \varrho^{-1}x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2,$$

co świadczy o tym, że i punkty w ∞ są przyporządkowane wzajemnie jednoznacznie punktom w ∞ .

Przekształcenia wyrażające się wzorami (2), (5) i (6) nazywamy *przekształceniami afinicznymi prostej rzutowej, płaszczyzny rzutowej i przestrzeni rzutowej*.

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny rzutowej (prostej rzutowej, przestrzeni rzutowej) przeprowadza prostą w ∞ w prostą w ∞ (punkt w ∞ w punkt w ∞ , płaszczyznę w ∞ w płaszczyznę w ∞).

Gdy bowiem $x_3=0$, to $x'_3=0$, a zatem przekształcenie to określa również przekształcenie wzajemnie jednoznaczne euklidesowej części płaszczyzny w euklidesową część jej obrazu. Jak poprzednio, przekształcenie afiniczne (5) płaszczyzny rzutowej w jej części euklidesowej jest przekształceniem afinicznym (3) według definicji z § 29 (p. str. 142). To samo dotyczy prostej i przestrzeni.

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny rzutowej przeprowadza proste rzutowe w proste rzutowe.

Twierdzenie to można udowodnić, wychodząc z analogicznego twierdzenia dla prostych euklidesowych. Możemy go jednak również dowieść niezależnie: z równości (5) dostajemy

$$x_i = \varrho(b_{i1}x'_1 + b_{i2}x'_2 + b_{i3}x'_3) \quad \text{dla } i=1,2, \quad x_3 = \varrho x'_3,$$

gdzie

$$(7) \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prosta

$$(8) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad \text{gdzie } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0,$$

przechodzi zatem w twór

$$(9) \quad (a_1b_{11} + a_2b_{21})x'_1 + (a_1b_{12} + a_2b_{22})x'_2 + (a_1b_{13} + a_2b_{23} + a_3)x'_3 = 0.$$

Jeśli $a_1 \neq 0$ lub $a_2 \neq 0$, to z (7) wynika, że współczynniki przy x'_1 i x'_2 w równaniu (9) nie znikają równocześnie, a więc że równanie to przedstawia prostą właściwą. Jeśli zaś $a_1 = a_2 = 0$, to $a_3 \neq 0$ i (9) przedstawia prostą w ∞ , c. b. d. o.

Podobnie, w przestrzeni rzutowej przekształcenia afiniczne przeprowadzają płaszczyzny rzutowe w płaszczyzny rzutowe; przy tym proste rzutowe przechodzą w proste rzutowe, jako krawędzie przecięcia płaszczyzn rzutowych.

Przekształcenia afiniczne przestrzeni rzutowej tworzą grupę, podobnie jak przekształcenia afiniczne przestrzeni euklidesowej (p. § 29, str. 143 i 149).

Każde przekształcenie T płaszczyzny rzutowej, które przeprowadza proste w proste, a prostą w ∞ w prostą w ∞ , jest afiniczne.

Jest to twierdzenie Staudta i Darboux dla płaszczyzny rzutowej.

Dowód jego jest następujący. Z tego, że prosta w ∞ przechodzi w prostą w ∞ , wynika, że część euklidesowa płaszczyzny przechodzi w część euklidesową płaszczyzny z zachowaniem prostych. Zatem w części tej przekształcenie T daje się wyrazić wzorami (3) na podstawie twierdzenia Staudta i Darboux dla płaszczyzny euklidesowej (§ 30, str. 152). Wobec tego dla punktów właściwych przekształcenie T można przedstawić w postaci (5), która jest równoważna postaci (3), gdy $x_3 \neq 0$.

Niech teraz będzie dany dowolny punkt P_∞ i prosta właściwa p przechodząca przez P_∞ . Wówczas P_∞ jest przecięciem prostej p z prostą p_∞ . Przekształcenie T przeprowadza punkt P_∞ w punkt P' , prostą p w prostą p' , a prostą p_∞ w siebie. Punkt P' jest punktem przecięcia prostych p' i p_∞ . Ponieważ przekształcenie (5) przeprowadza również p w p' (gdyż dla punktów właściwych przekształcenia (5) i T są identyczne), więc (5) przeprowadza punkt przecięcia p z p_∞ w punkt przecięcia p' z p_∞ , czyli punkt P_∞ w punkt P' . Innymi słowy, przekształcenie (5) jest identyczne z przekształceniem T zarówno dla punktów właściwych jak i dla punktów w ∞ , c. b. d. o.

§ 37. Stosunek pojedynczego podziału

1. Określenie stosunku pojedynczego podziału. Wprowadzimy obecnie nowe pojęcie geometrii afinicznej (p. str. 162), tj. nowy niezmiennik przekształceń afinicznych.

Niech A, B będzie parą uporządkowaną punktów właściwych na prostej p i niech P będzie dowolnym punktem właściwym różnym od B .

Wówczas, wobec równoległości wektorów AP i PB (rys. 70), istnieje taka stała λ , że

$$(1) \quad AP = \lambda \cdot PB.$$

Liczbę λ nazywamy *stosunkiem pojedynczego podziału odcinka AB punktem P* .

Stosunek ten będziemy oznaczali przez (AB, P) .

Z określenia wynika, że na to, by punkt P leżał między punktami A i B , potrzeba i wystarcza, żeby $(AB, P) > 0$. Jeśli punkt P leży zewnątrz odcinka AB po stronie punktu B , to $|AP| > |BP|$, więc $(AB, P) < -1$; jeśli natomiast punkt P leży zewnątrz tegoż odcinka po stronie punktu A , to $|AP| < |BP|$, więc $-1 < (AB, P) < 0$. Dla środka odcinka AB jest $(AB, P) = 1$, a dla punktu A jest $(AB, A) = 0$.

Gdy punkt P oddala się nieograniczenie poza punkt B , to

$$(2) \quad \lambda = -\frac{|AB|}{|PB|} = -\frac{|AB| + |PB|}{|PB|} = -\frac{|AB|}{|PB|} - 1$$

i liczba λ wzrasta, zmierzając do -1 ; gdy zaś punkt P oddala się nieograniczenie poza punkt A , to

$$(3) \quad \lambda = -\frac{|AP|}{|PB|} = -\frac{|PB| - |PA|}{|PB|} = -1 + \frac{|PA|}{|PB|}$$

i liczba λ maleje, zmierzając również do -1 .

Dlatego *stosunkiem pojedynczego podziału odcinka AB punktem P_∞* nazywamy liczbę -1 , pisząc

$$(4) \quad (AB, P_\infty) = -1.$$

Stosunek pojedynczego podziału nie jest określony dla punktu $P = B$. Gdy P zmierza do B , wartość $\lambda = |AP|/|PB|$ rośnie nieograniczenie: gdy P zmierza do B od zewnątrz, to $(AB, P) \rightarrow -\infty$, gdy zaś P zmierza do B od wewnątrz, to $(AB, P) \rightarrow +\infty$.

Wprowadźmy na prostej dowolny układ kartezjański współrzędnych Ox i oznaczmy współrzędne zwyczajne punktów A, B i P przez x_1, x_2 i x . Z (1) wynika, że

$$(5) \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$

czyli

$$(6) \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Wynika stąd, że każdej wartości λ stosunku pojedynczego podziału odpowiada dokładnie jeden punkt na prostej.

Gdy bowiem $\lambda = -1$, dostajemy punkt w ∞ , a gdy $\lambda \neq -1$, to z (6) otrzymujemy dokładnie jedną odciętą x pewnego punktu właściwego.

Stosunek pojedynczego podziału jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych prostej; na odwrót, każde przekształcenie prostej, którego niezmiennikiem jest stosunek pojedynczego podziału, jest afiniczne.

Istotnie, niech T będzie przekształceniem afinicznym

$$(7) \quad x' = ax + b$$

(wystarczy je określić wzorem (7), gdyż punkt w ∞ przechodzi w punkt w ∞). Niech punkty A i B mają współrzędne x_1 i x_2 , a ich obrazy $A' = T(A)$ i $B' = T(B)$ niech mają współrzędne x'_1 i x'_2 .

Jeśli P jest punktem w ∞ , to P' też jest punktem w ∞ , a więc

$$(AB, P) = -1 = (A'B', P').$$

Jeśli zaś P jest punktem właściwym o współrzędnej x , to zachodzi wzór (5), a ponieważ

$$x' - x'_1 = a(x - x_1), \quad x'_2 - x' = a(x_2 - x),$$

więc

$$x' - x'_1 = a\lambda(x_2 - x) = \lambda(x'_2 - x')$$

czyli

$$(AB, P) = \lambda = (A'B', P'),$$

co dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Niech, na odwrót, przekształcenie T prostej p w prostą q zachowuje stosunek pojedynczego podziału i niech punkt P_∞ przechodzi w punkt Q . Weźmy pod uwagę jakiegokolwiek punkty A' i B' , różne od Q (i od punktu w ∞). Są one obrazami punktów właściwych A i B oraz

$$(AB, P_\infty) = -1,$$

a zatem

$$(A'B', Q) = -1.$$

Punkt Q jest więc punktem Q_∞ . Możemy zatem ograniczyć dalsze badanie przekształcenia T tylko do punktów właściwych. Weźmy punkt A za początek układu współrzędnych na prostej p (czyli $x_1 = 0$) oraz wektor AB za wektor podstawowy (czyli $x_2 = 1$). Gdy $(AB, P) = \lambda$, to z (6) wynika, że

$$x = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Jeśli teraz dla obrazów weźmiemy za początek układu współrzędnych na prostej q punkt A' (czyli $x'_1 = 0$), a za wektor jednostkowy — wektor $A'B'$ (czyli $x'_2 = 1$), to z $(A'B', P') = (AB, P) = \lambda$ wynika, że

$$x' = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Tym samym

$$(8) \quad x' = x.$$

W wybranych układach współrzędnych przekształcenie T wyraża się więc wzorem (8). Zatem jest ono afiniczne, c. b. d. o.

Szczególnym przypadkiem przekształceń afinicznych prostej jest rzut równoległy.

Zatem przy rzutach równoległych stosunek pojedynczego podziału nie ulega zmianie.

Niech teraz będą dane na płaszczyźnie dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem właściwym prostej p zawierającej punkty A i B oraz niech $(AB, P) = \lambda$. Wówczas rzutując punkty A, B i C na osie współrzędnych, dostajemy na każdej osi trzy punkty o tym samym stosunku λ . Ponieważ współrzędne tych punktów na osiach wynoszą x_1, x_2, x i y_1, y_2, y , więc współrzędnymi punktu P na płaszczyźnie są

$$(9) \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Nadając liczbie λ wszystkie wartości różne od -1 , otrzymujemy zatem wszystkie punkty prostej p z wyjątkiem punktu B . Możemy więc uważać wzory (9) za przedstawienie parametryczne na płaszczyźnie linii prostej bez jednego punktu. Parametrem jest stosunek pojedynczego podziału.

W szczególności, dla środka odcinka jest $\lambda=1$ i

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Analogiczne wzory otrzymujemy w przestrzeni.

2. Twierdzenia Menelaosa i Cevy. Niech punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ leżą na prostej właściwej p i niech prosta właściwa

$$(10) \quad u(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

przecina prostą p w punkcie P (właściwym lub nie) różnym od B . Wówczas

$$(11) \quad (AB, P) = -\frac{u(x_1, y_1)}{u(x_2, y_2)}.$$

Istotnie, jeśli P jest punktem właściwym, to przyjmując $(AB, P) = \lambda$, mamy (9). Ponieważ P leży na prostej p , więc podstawiając wartości (9) do (10), dostajemy

$$a_1(x_1 + \lambda x_2) + a_2(y_1 + \lambda y_2) + a_3(1 + \lambda) = 0,$$

stąd zaś

$$\lambda = -\frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3} = -\frac{u(x_1, y_1)}{u(x_2, y_2)}.$$

Jeśli natomiast P jest punktem w ∞ , to

$$(AB, P) = -1.$$

Z drugiej strony, prosta (10) jest wówczas równoległa do prostej p , czyli

$$a_1(x_2 - x_1) + a_2(y_2 - y_1) = 0,$$

skąd

$$a_1 x_2 + a_2 y_2 = a_1 x_1 + a_2 y_1,$$

stąd zaś

$$-\frac{u(x_1, y_1)}{u(x_2, y_2)} = -\frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3} = -\frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3} = -1 = (AB, P),$$

czyli (11).

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie Cevy:

Dany jest na płaszczyźnie trójkąt o wierzchołkach A, B i C właściwych oraz dowolny punkt S nie leżący na bokach tego trójkąta. Niech proste SA, SB i SC przecinają boki trójkąta ABC w punktach A_1, B_1 i C_1 . Wówczas

$$(12) \quad (AB, C_1)(BC, A_1)(CA, B_1) = 1.$$

Dowód. Punkty A_1, B_1, C_1 i S mogą być właściwe lub nie. Niech punkty A, B i C mają współrzędne kartezjańskie x_i, y_i , gdzie $i=1, 2$ i 3 , a proste: u_1 przez punkty A i S oraz u_2 przez punkty B i S (rys. 71) niech mają (w oznaczeniach skróconych) równania

$$u_1 = 0 \quad \text{ i } \quad u_2 = 0.$$

Zatem

$$(13) \quad u_1(x_1, y_1) = 0 \quad \text{ i } \quad u_2(x_2, y_2) = 0.$$

Prosta u_3 przez punkty C i S , jako należąca do pęku wyznaczonego przez proste u_1 i u_2 , ma równanie (p. § 35, str. 174)

$$u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0,$$

a ponieważ przechodzi ona przez punkt C , więc

$$u_3(x_3, y_3) = \lambda_1 u_1(x_3, y_3) + \lambda_2 u_2(x_3, y_3) = 0$$

czyli

$$(14) \quad \lambda_1 : \lambda_2 = -u_2(x_3, y_3) : u_1(x_3, y_3).$$

Na podstawie (11) jest więc

$$(AB, C_1) = -\frac{u_3(x_1, y_1)}{u_3(x_2, y_2)} = -\frac{\lambda_1 u_1(x_1, y_1) + \lambda_2 u_2(x_1, y_1)}{\lambda_1 u_1(x_2, y_2) + \lambda_2 u_2(x_2, y_2)},$$

skąd wobec (13) i (14)

$$(15) \quad (AB, C_1) = -\frac{\lambda_2 u_2(x_1, y_1)}{\lambda_1 u_1(x_2, y_2)} = \frac{u_1(x_3, y_3) u_2(x_1, y_1)}{u_2(x_3, y_3) u_1(x_2, y_2)}.$$

Dalej

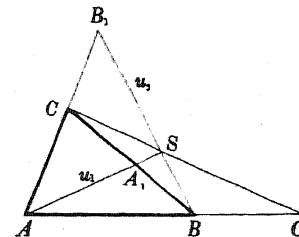
$$(16) \quad (BC, A_1) = -\frac{u_1(x_2, y_2)}{u_1(x_3, y_3)}, \quad (CA, B_1) = -\frac{u_2(x_3, y_3)}{u_2(x_1, y_1)}.$$

Na mocy więc (15) i (16) iloczyn po lewej stronie wzoru (12) jest równy 1, c. b. d. o.

Prawdziwe jest i twierdzenie odwrotne: *gdy zachodzi równość (12), to proste AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie.*

Jeśli bowiem S jest punktem przecięcia prostych AA_1 i BB_1 , to prosta SC przecina AB w pewnym punkcie C'_1 , dla którego w myśl twierdzenia Cevy jest

$$(AB, C'_1)(BC, A_1)(CA, B_1) = 1,$$



Rys. 71

a ponieważ założyliśmy równość (12), więc

$$(AB, C_1) = (AB, C_1),$$

czyli punkty C_1 i C_1' są identyczne.

Udowodnimy jeszcze następujące twierdzenie Menelaosa:

Dany jest na płaszczyźnie trójkąt o wierzchołkach A , B i C właściwych oraz prosta właściwa u , przecinająca boki tego trójkąta w punktach A_1 , B_1 i C_1 , lecz nie przechodząca przez jego wierzchołki (rys. 72). Wówczas

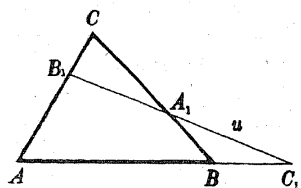
$$(17) \quad (AB, C_1)(BC, A_1)(CA, B_1) = -1.$$

Dowód. Niech prosta u ma równanie $u(x, y) = 0$. Zatem na mocy (11)

$$(AB, C_1) = -\frac{u(x_1, y_1)}{u(x_2, y_2)},$$

$$(BC, A_1) = -\frac{u(x_2, y_2)}{u(x_3, y_3)},$$

$$(CA, B_1) = -\frac{u(x_3, y_3)}{u(x_1, y_1)}.$$



Rys. 72

Przez pomnożenie dostajemy (17), c. b. d. o.

Uwaga. Jak widać z dowodu, twierdzenie Menelaosa pozostaje w mocy, gdy prosta u jest równoległa do jednego z boków trójkąta ABC , a także gdy wszystkie trzy punkty A_1 , B_1 i C_1 lub niektóre z nich są punktami w ∞ .

Podobnie jak odwrotności twierdzenia Cevy, dowodzi się też odwrotności twierdzenia Menelaosa: gdy zachodzi równość (17), to punkty A_1 , B_1 i C_1 leżą na jednej prostej.

Twierdzenia Cevy i Menelaosa oraz ich twierdzenia odwrotne są przykładami twierdzeń geometrii afinicznej.

§ 38. Punkty zespolone

1. Punkty zespolone na prostej. Poprzednio powiększyliśmy zbiór punktów przestrzeni euklidesowej przez uzupełnienie go punktami w ∞ do zbioru punktów przestrzeni rzutowej. Obecnie powiększymy go jeszcze przez dołączenie tzw. *punktów zespolonych*. Okazuje się to pożyteczne nie tylko dla głębszego zrozumienia geometrii, lecz również dla uproszczenia wyśłowień i dowodów twierdzeń geometrii rzeczywistej.

Niech na prostej rzutowej będzie dany kartezjański układ współrzędnych. Wówczas każdy punkt właściwy wyznaczony jest przez liczbę rzeczywistą x (odcięta tego punktu). Punkty te w dalszym ciągu nazywać będziemy *punktami rzeczywistymi*.

Punkty rzeczywiste mają zatem współrzędne kartezjańskie rzeczywiste.

Dopuszczymy obecnie współrzędne zespolone, uważając je za odcięte punktu zespolonego na prostej; innymi słowy *punktem zespolonym* o odciętej x nazywamy po prostu liczbę zespoloną x .

Punkty zespolone oznaczamy w ten sam sposób co poprzednio punkty rzeczywiste, a więc przez (x) , $P(x)$ itd., np. (i) , $(2-i)$.

Współrzednymi jednorodnymi punktu zespolonego (x) nazywamy liczby x_1 i x_2 spełniające związek

$$x_1 : x_2 = x : 1,$$

czyli liczby

$$x_1 = \varrho x, \quad x_2 = \varrho, \quad \text{gdzie} \quad \varrho \neq 0.$$

Punkt rzeczywisty może mieć współrzędne jednorodne zespolone, ich stosunek jednak musi być rzeczywisty. Np. liczby $x_1 = 1+i$ i $x_2 = 2+2i$ są współrzednymi jednorodnymi punktu rzeczywistego o odciętej $x=1/2$.

Jeśli $x_2 = 0$, to dla każdej liczby zespolonej x_1 jest

$$x_1 : x_2 = 1 : 0.$$

Wobec tego punktowi w ∞ prostej przypisujemy nadal współrzedne jednorodne $x_1 : 0$, gdzie x_1 jest dowolną liczbą zespoloną. Jeśli $x_2 \neq 0$, to punkt $x_1 : x_2$ będziemy nadal nazywali *właściwym*.

Tak powiększona prosta składa się więc z *punktów właściwych* (które są rzeczywiste lub nie) i z *jednego punktu w ∞* , który jest rzeczywisty. Nazywamy ją *prostą rzutową zespoloną* lub krócej — *prostą zespoloną*.

Niech teraz na prostej zespolonej będą dane dwa układy współrzędnych Ox i $O'x'$. Wówczas między współrzednymi kartezjańskimi x i x' jednego i tego samego punktu rzeczywistego zachodzi zależność (p. § 28, str. 135)

$$(1) \quad x' = bx + a, \quad \text{gdzie} \quad b \neq 0.$$

Przez analogię punkt zespolony, który ma w pierwszym układzie współrzedną x , uważamy wtedy i tylko wtedy za *identyczny* z punktem, który ma w drugim układzie współrzedną x' , gdy za-

chodzi zależność (1). Ponieważ a i b są z założenia liczbami rzeczywistymi, więc wynika stąd, że można mówić o punktach rzeczywistych i zespolonych prostej, niezależnie od wyboru układu współrzędnych.

Ponieważ między liczbami zespolonymi nie określa się relacji $<$, więc na prostej zespolonej nie określa się pojęcia odcinka.

Odcinek zatem występuje tylko na prostej rzeczywistej.

Na prostej zespolonej określa się natomiast pojęcie środka pary punktów (x_1) i (x_2) jako punktu o odciętej

$$(2) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Łatwo dowieść, że to określenie nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

Tak samo stosunek pojedynczego podziału pary punktów $A(x_1)$, $B(x_2)$ punktem $P(x)$ określa się jako liczbę (por. wzór (5) z § 37, str. 183)

$$(3) \quad (AB, P) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Stosunek (AB, P) przybiera każdą wartość zespoloną dokładnie w jednym punkcie P i

$$(AB, P_\infty) = -1.$$

Wynika to natychmiast z określenia (3) tak jak w § 37. Przyjmując bowiem oznaczenie

$$(AB, P) = \lambda,$$

dostajemy z (3)

$$(4) \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Równość ta daje równocześnie przedstawienie parametryczne prostej zespolonej przez stosunek λ pojedynczego podziału, po wyłączeniu z prostej punktu $B(x_2)$.

Przekształceniem afinicznym prostej rzutowej zespolonej nazywamy przekształcenie, które

1° punkt w ∞ przeprowadza w siebie,

2° dla punktów właściwych wyraża się wzorem (1), gdzie a i b są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Przekształcenia afiniczne nie zmieniają stosunku pojedynczego podziału i na odwrót.

Dowód jest taki sam jak dla prostej rzeczywistej.

Tak samo również dowodzi się, że przekształcenia afiniczne prostej zespolonej tworzą grupę. Nazywa się ją grupą afiniczną zespoloną.

Zawiera ona jako podgrupę grupę afiniczną rzeczywistą, tj. taką grupę przekształceń, dla których a i b we wzorze (1) są rzeczywiste.

Grupy afiniczne zespolone i rzeczywiste wyznaczają w myśl programu Kleina geometrię afiniczną zespoloną i geometrię afiniczną rzeczywistą.

Pojęciami geometrii afinicznej zespolonej są np. środek pary punktów (dowód jak na str. 141) i stosunek pojedynczego podziału (p. str. 184). Nie występuje w tej geometrii punkt rzeczywisty, gdyż np. przez przekształcenie $x' = ix$ możemy punkty rzeczywiste przeprowadzić w zespolone.

Pojęcie punktu rzeczywistego i nierzeczywistego występuje natomiast, w geometrii afinicznej rzeczywistej na prostej zespolonej, czyli gdy dopuszczamy wyłącznie przekształcenia (1) o współczynnikach rzeczywistych. W dalszym ciągu będziemy się zajmowali przeważnie tą właśnie geometrią, ponieważ mamy w tej książce na celu badanie własności tworów rzeczywistych. Twory zespolone będą zaś miały jedynie charakter pomocniczy, ułatwiający zrozumienie własności tworów rzeczywistych.

W geometrii rzeczywistej na prostej zespolonej występuje pojęcie punktów zespolonych sprzężonych, tj. punktów $P_1(x)$ i $P_2(\bar{x})$ o współrzędnych niejednorodnych

$$x = a + bi, \quad \bar{x} = a - bi,$$

nie występujące natomiast w geometrii zespolonej.

Środkiem pary punktów sprzężonych jest punkt rzeczywisty. Punkt jest identyczny ze sprzężonym wtedy i tylko wtedy, gdy jest rzeczywisty.

2. Punkty zespolone na płaszczyźnie i w przestrzeni. Punkty zespolone właściwe w kartezjańskim układzie współrzędnych wprowadza się na płaszczyźnie i w przestrzeni w sposób podobny jak na prostej, tj. jako pary uporządkowane (x, y) liczb zespolonych. Następnie określa się współrzędne jednorodne jako trójki liczb x_1, x_2, x_3 , dla których

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$$

stosunki zaś kształtu $x_1 : x_2 : 0$ uważa się za wyznaczające punkty w ∞ .

Jeśli zależności między współrzędnymi punktów rzeczywistych, np. na płaszczyźnie, w dwu układach kartezjańskich (rzeczywistych) Oxy i $O'x'y'$ mają postać

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= a_{33}x_3, \end{aligned} \quad \text{gdzie} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{i} \quad a_{33} \neq 0,$$

to punkty zespolone, które w jednym układzie są wyznaczone stosunkiem $x_1:x_2:x_3$, a w drugim — stosunkiem $x'_1:x'_2:x'_3$, uważamy za *identyczne*.

Jeśli zaś traktujemy wzory (5) jako określające przekształcenie płaszczyzny rzutowej zespolonej, to przekształcenie określone przez te wzory nazywamy *afinicznym*.

Podobnie rozszerza się przestrzeń rzutową rzeczywistą do przestrzeni rzutowej zespolonej.

Zajmować się będziemy głównie przekształceniami afinicznymi rzeczywistymi, czyli *geometrią afiniczną rzeczywistą płaszczyzny zespolonej*.

§ 39. Twory zespolone pierwszego stopnia

1. Twory pierwszego stopnia na płaszczyźnie zespolonej.

Zbiór punktów płaszczyzny określony przez równanie

$$(1) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad |a_1| + |a_2| + |a_3| \neq 0,$$

nazywamy *prostą*; a_1, a_2 i a_3 są tu dowolnymi liczbami zespolonymi.

Jeśli $a_1 = a_2 = 0$, to równanie (1) charakteryzuje zbiór punktów w ∞ i otrzymujemy prostą w ∞ .

Jeśli zaś $|a_1| + |a_2| > 0$, to prosta nazywa się *właściwą*; należy do niej wówczas dokładnie jeden punkt w ∞ , mianowicie punkt o współrzędnych jednorodnych

$$x_1:x_2:x_3 = -a_2:a_1:0.$$

Prosta nazywa się *rzeczywistą*, gdy stosunek $a_1:a_2:a_3$ jest rzeczywisty.

Prosta ta składa się z punktów prostej rzeczywistej w dawnym znaczeniu i z nieskończenie wielu punktów zespolonych nierzeczywistych.

Przekształcenia afiniczne przeprowadzają proste w proste. Ze wzoru (5), str. 192, dostajemy bowiem

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma x_1 &= b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3, \\ \sigma x_2 &= b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3, \\ \sigma x_3 &= b_{33}x'_3, \end{aligned} \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^{-1},$$

a więc

$$(3) \quad |\mathfrak{B}| \neq 0, \quad b_{33} = \frac{1}{a_{33}} \neq 0.$$

Podstawiając do (1) wartości zmiennych wyznaczone z (2), otrzymujemy równanie obrazu prostej (1) w postaci

$$(4) \quad a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 = 0,$$

gdzie

$$a'_1 = a_1b_{11} + a_2b_{21}, \quad a'_2 = a_1b_{12} + a_2b_{22}, \quad a'_3 = a_1b_{13} + a_2b_{23} + a_3b_{33}.$$

Wobec (3) jest więc $|a'_1| + |a'_2| + |a'_3| > 0$, a zatem równanie (4) przedstawia prostą.

To samo rozumowanie algebraiczne wykazuje, że jeśli twór algebraiczny ma w jakimś układzie współrzędnych równanie (1), to w każdym układzie współrzędnych ma równanie tej samej postaci; tak więc określenie prostej na płaszczyźnie zespolonej nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

W § 34 były podane wzory wyznaczające punkt przecięcia dwóch prostych, warunek współliniowości trzech punktów, równanie prostej przez dwa punkty oraz definicje i twierdzenia o pękach. Ponieważ w tamtych rozważaniach nie opieraliśmy się nigdzie na założeniu, że współrzędne są liczbami rzeczywistymi, więc pozostają one w mocy dla prostych płaszczyzny zespolonej.

Jako przykład twierdzenia o prostych na płaszczyźnie zespolonej udowodnimy, że *na każdej prostej nierzeczywistej leży dokładnie jeden punkt rzeczywisty, który jest właściwy*.

Istotnie, jeżeli prosta nie jest rzeczywista, to nie jest ona prostą w ∞ . Ma zatem równanie kształtu (1), gdzie

$$(5) \quad |a_1| + |a_2| > 0.$$

Niech

$$a_1 = a_1 + \beta_1 i, \quad a_2 = a_2 + \beta_2 i, \quad a_3 = a_3 + \beta_3 i.$$

Musi być

$$(6) \quad a_1 : a_2 : a_3 \neq \beta_1 : \beta_2 : \beta_3,$$

bo w przeciwnym razie mielibyśmy

$$a_1 = \varrho \beta_1, \quad a_2 = \varrho \beta_2, \quad a_3 = \varrho \beta_3,$$

gdzie $\varrho \neq 0$ byłoby rzeczywiste, a więc

$$a_1 : a_2 : a_3 = \beta_1(\varrho + i) : \beta_2(\varrho + i) : \beta_3(\varrho + i) = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

i prosta (1) byłaby rzeczywista. Na mocy tożsamości

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + i(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)$$

musi więc być dla punktu rzeczywistego tej prostej

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0.$$

Wobec (6) ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, które jest rzeczywiste i przy tym $x_3 \neq 0$, c. b. d. o.

Punktami sprzężonymi nazywamy punkty $(x_1 : x_2 : x_3)$ i $(y_1 : y_2 : y_3)$, których współrzędne jednorodne można tak dobrać, żeby liczby x_i i y_i były sprzężone.

2. Pewne parametryczne przedstawienie prostej. Niech będzie dany na prostej właściwej p kartezjański układ współrzędnych i dwa różne punkty M i N o współrzędnych m i n . Jak udowodniliśmy w § 37 (str. 185), możemy punkty właściwe tej prostej, pozostałe po wyrzuceniu punktu N , przedstawić za pomocą stosunku pojedynczego podziału wzorem

$$(7) \quad x = \frac{m + \lambda n}{1 + \lambda}$$

tak, że każdej liczbie λ odpowiada punkt właściwy prostej p różny od N i na odwrót.

Ustalmy teraz jakiejkolwiek pary m_1, m_2 i n_1, n_2 współrzędnych jednorodnych punktów M i N ; zatem

$$(8) \quad m = \frac{m_1}{m_2}, \quad n = \frac{n_1}{n_2}.$$

Podstawiając (8) do (7), dostajemy dla współrzędnych jednorodnych x_1 i x_2 punktu x

$$(9) \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{m_1}{m_2} + \lambda \frac{n_1}{n_2}}{1 + \lambda} = \frac{m_1 n_2 + \lambda m_2 n_1}{m_2 n_2 (1 + \lambda)}.$$

Niech

$$(10) \quad \mu = n_2, \quad \nu = \lambda m_2.$$

Wówczas

$$(11) \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\mu m_1 + \nu n_1}{\mu m_2 + \nu n_2}.$$

Jasne jest, że jeśli zamiast liczb (10) wziąć liczby

$$(12) \quad \mu' : \nu' = n_2 : \lambda m_2 = \mu : \nu$$

to również zachodzi (11). Biorąc w (11) $\mu : \nu = 0 : 1$, otrzymamy punkt N . Nie może być równocześnie

$$\mu m_1 + \nu n_1 = 0, \quad \mu m_2 + \nu n_2 = 0,$$

bo dostalibyśmy stąd $m_1 : m_2 = n_1 : n_2$ a więc punkty M i N byłyby identyczne. Jeśli więc

$$\mu m_2 + \nu n_2 = 0,$$

to z (11) dostajemy punkt o współrzędnych $x_1 : x_2 = 1 : 0$ czyli P_∞ .

Udowodniliśmy zatem, że jeśli na prostej wybierzemy dowolne dwa punkty M i N oraz ustalimy ich współrzędne jednorodne m_1, m_2 i n_1, n_2 , to dla każdego punktu $(x_1 : x_2)$ tej prostej istnieje stosunek $\mu : \nu$, dla którego

$$(13) \quad x_1 : x_2 = \mu m_1 + \nu n_1 : \mu m_2 + \nu n_2;$$

na odwrót, każdemu stosunkowi $\mu : \nu$ odpowiada dokładnie jeden punkt $(x_1 : x_2)$ tej prostej.

Udowodnimy jeszcze, że każdemu punktowi prostej odpowiada dokładnie jeden stosunek $\mu : \nu$, czyli że stosunek $x_1 : x_2$ wyznacza stosunek $\mu : \nu$ przez wzór (13) jednoznacznie.

Istotnie z (13) dostajemy

$$\varrho x_1 = \mu m_1 + \nu n_1, \quad \varrho x_2 = \mu m_2 + \nu n_2,$$

stąd zaś

$$(14) \quad \mu = \frac{\varrho(x_1 n_2 - n_1 x_2)}{m_1 n_2 - n_1 m_2}, \quad \nu = \frac{\varrho(x_1 m_2 - m_1 x_2)}{m_1 n_2 - n_1 m_2},$$

gdzie mianownik jest różny od zera, gdyż punkty M i N są z założenia różne. Z (14) otrzymujemy

$$\mu : \nu = (x_1 n_2 - n_1 x_2) : (x_1 m_2 - m_1 x_2), \quad \text{c. b. d. o.}$$

Wzory (13) są pewnym często używanym przedstawieniem parametrycznym prostej rzutowej.

Niech teraz p będzie prostą właściwą lub prostą w ∞ , leżącą na płaszczyźnie, w której Oxy jest układem współrzędnych. Niech $M(m_1:m_2:m_3)$ i $N(n_1:n_2:n_3)$ będą dwoma dowolnymi punktami prostej p .

Wówczas — analogicznie do (13) — prostą p można przedstawić parametrycznie w postaci

$$(15) \quad ox_i = \mu m_i + \nu n_i, \quad \text{gdzie } i=1, 2, 3.$$

Udowodnimy wpierw, że każdy punkt (15) leży na prostej p . Niech ta prosta ma równanie

$$(16) \quad u(x_i) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Jest więc

$$u(m_i) = 0, \quad u(n_i) = 0.$$

Stąd dla punktu (15) wynika równość

$$(17) \quad u(x_i) = u(\mu m_i + \nu n_i) = \mu u(m_i) + \nu u(n_i) = 0,$$

a więc punkt (15) leży na prostej (16).

Należy teraz okazać, że dla każdego punktu P prostej p istnieje stosunek $\mu:\nu$, spełniający warunek (15). W tym celu niech q będzie dowolną prostą przechodzącą przez P i mającą równanie

$$(18) \quad u_1(x) = 0.$$

Istnieje dokładnie jeden punkt (15) leżący na prostej q ; na to bowiem, by punkt (15) leżał na q , potrzeba i wystarcza, żeby

$$(19) \quad 0 = u_1(\mu m_i + \nu n_i) = \mu u_1(m_i) + \nu u_1(n_i).$$

Ponieważ punkty M i N są różne, więc

$$u_1(m_i) \neq 0 \quad \text{lub} \quad u_1(n_i) \neq 0,$$

a zatem z (19) wynika, że

$$\mu:\nu = -u_1(n_i):u_1(m_i).$$

Punkt (15), otrzymany za pomocą tak wyznaczonego stosunku $\mu:\nu$, jest punktem P , gdyż leży on na prostych p i q , które przecinają się z założenia dokładnie w jednym punkcie P .

Pozostaje do okazania, że stosunek $\mu:\nu$ jest wyznaczony przez punkt prostej p jednoznacznie. W tym celu zauważmy, że ponieważ punkty M i N są różne, więc jedna z trzech liczb

$$m_1 n_2 - n_1 m_2, \quad m_1 n_3 - n_1 m_3, \quad m_2 n_3 - n_2 m_3,$$

np. pierwsza, jest różna od zera. Wówczas z równości (16) dla $i=1$ i 2 dostajemy (14), c. b. d. o.

Ze wzorów (14) wynika, że gdy punkty M i N oraz ich współrzędne są rzeczywiste, to stosunki $\mu:\nu$ są rzeczywiste.

3. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni zespolonej. Twór określony przez równanie pierwszego stopnia

$$(20) \quad u_1(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \quad \text{gdzie } \sum_{i=1}^4 |a_i| > 0,$$

nazywamy płaszczyzną w przestrzeni zespolonej.

Na to, by płaszczyzna (20) była identyczna z płaszczyzną

$$(21) \quad u_2(x) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0, \quad \text{gdzie } \sum_{i=1}^4 |b_i| > 0,$$

potrzeba i wystarcza, żeby

$$(22) \quad a_1:a_2:a_3:a_4 = b_1:b_2:b_3:b_4.$$

Ponieważ dostateczność tego warunku jest oczywista, więc dowiedzimy jego konieczności. Przypuśćmy zatem, że równość (22) nie zachodzi. Wówczas nie dla każdej pary wskaźników i, k jest $a_i b_k - b_i a_k = 0$; np.

$$(23) \quad a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0.$$

Oś Oz przebija płaszczyznę (20) w punkcie $-a_2:a_1:0:0$, a płaszczyznę (21) — w punkcie $-b_2:b_1:0:0$. Wobec (23) punkty te są różne, a więc i płaszczyzny (20) i (21) są różne. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

W przypadku, gdy

$$(24) \quad a_1:a_2:a_3:a_4 \neq b_1:b_2:b_3:b_4,$$

zbiór punktów wspólnych płaszczyzny (20) i płaszczyzny (21) nazywamy prostą w przestrzeni zespolonej.

W przestrzeni zespolonej każda prosta ma z każdą płaszczyzną jeden punkt wspólny lub całkowicie leży na tej płaszczyźnie.

Istotnie, niech prosta p będzie przedstawiona układem równań (20) i (21), płaszczyzna zaś równaniem

$$(25) \quad \Pi_3(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0, \quad \text{gdzie } \sum_{i=1}^4 |c_i| > 0.$$

Równania (20), (21) i (25) wyznaczają macierz

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Wobec (24) jest $R(\mathfrak{U}) \geq 2$. Mogą zajść dwa przypadki:

1° $R(\mathfrak{U})=3$. Wówczas układ równań (20), (21) i (25) ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_1:x_2:x_3:x_4=A_1:-A_2:A_3:-A_4$, gdzie A_k jest minorem macierzy $\mathfrak{U}$, powstającym z niej przez opuszczenie k -tej kolumny (p. Przypis I, § 2); zatem prosta p przebija płaszczyznę (25) dokładnie w jednym punkcie.

2° $R(\mathfrak{U})=2$. Wówczas na mocy (24) jest

$$(26) \quad \Pi_3(x) \equiv \lambda_1 \Pi_1(x) + \lambda_2 \Pi_2(x),$$

gdzie λ_1 i λ_2 są pewnymi stałymi (p. Przypis I, § 2). Z równość $\Pi_1(x)=\Pi_2(x)=0$ wynika wobec (25), że $\Pi_3(x)=0$; zatem płaszczyzna (25) zawiera prostą p , c. b. d. o.

Z (26) wynika również, że wszystkie definicje i twierdzenia o płaszczyznach w przestrzeni rzutowej rzeczywistej przenoszą się bez zmiany na przestrzeń rzutową zespoloną.

Podobnie jak na płaszczyźnie, dowodzi się twierdzenia:

Gdy $M(m_1:m_2:m_3:m_4)$ i $N(n_1:n_2:n_3:n_4)$ są różnymi punktami prostej p , to można ją przedstawić parametrycznie układem równań

$$(27) \quad \varrho x_i = \mu m_i + \nu n_i, \quad \text{gdzie} \quad i=1,2,3,4.$$

Dowód składa się z trzech kroków. Dowodzi się mianowicie, że:

1° punkty (27) leżą na każdej płaszczyźnie przechodzącej przez punkty M i N ;

2° do każdej płaszczyzny można tak dobrać $\mu:\nu$, by punkt (27) leżał na niej; na podstawie poprzednich twierdzeń można zatem otrzymać dowolny punkt prostej p w postaci (27);

3° przez dowolny punkt prostej p stosunek $\mu:\nu$ jest wyznaczony jednoznacznie (np. wzorem (14)).

Warunki współliniowości trzech punktów i współpunktowości czterech płaszczyzn z § 35 (p. str. 176 i 177) przenoszą się na przestrzeń zespoloną bez zmiany dowodu.

Z przedstawienia (27) i twierdzeń poprzednich wynikają już w prosty sposób twierdzenia 1-10 z § 32.

§ 40. Twory algebraiczne

1. Twory algebraiczne na prostej. Niech na prostej zespolonej będzie dany układ współrzędnych kartezjańskich. Zajmiemy się obecnie tworami dającymi się przedstawić w tym układzie przez równania algebraiczne.

Weźmy pod uwagę równanie we współrzędnych niejednorodnych

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Aby napisać równanie tego samego tworzy we współrzędnych jednorodnych, podstawiamy $x=x_1/x_2$ do (1):

$$(2) \quad a_0 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + a_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Stąd mnożąc przez x_2^n , otrzymujemy równanie

$$(3) \quad a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n = 0.$$

Lewa strona równania (3) jest wielomianem jednorodnym stopnia n . W dalszym ciągu wielomiany jednorodne stopnia n nazywać będziemy krótko *formami stopnia n* .

Na odwrót, dzieląc przez x_2^n równanie postaci (3), dochodzimy do postaci (1). Jeśli równanie (1) jest stopnia n , to i równanie (3) jest tego samego stopnia.

Jeśli jednak równanie (3) jest stopnia n , to (1) może być stopnia niższego, a mianowicie, gdy $a_0=0$; wówczas jest ono spełnione dla punktu w ∞

$$x_1:x_2=1:0.$$

Na odwrót, gdy punkt w ∞ spełnia równanie (3), to $a_0=0$. A zatem na to, by równanie niejednorodne (1) i równanie jednorodne (3) były równoważne, potrzeba i wystarcza, żeby równanie (3) było spełnione tylko dla punktów właściwych.

Tworem algebraicznym stopnia n nazywamy zbiór przedstawiony przez równanie postaci (3) i nie dający się przedstawić przez równanie stopnia niższego.

W celu zbadania tworów algebraicznych wykażemy wpierw, że w zakresie liczb zespolonych każda forma stopnia n rozkłada się na czynniki liniowe jednorodne.

Dowód sprowadzimy do analogicznego twierdzenia dla wielomianów jednej zmiennej. Wiadomo z algebry, że gdy $a_0 \neq 0$, to

istnieje dokładnie jeden rozkład na czynniki liniowe, mianowicie rozkład postaci

$$(4) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

gdzie α_k są liczbami zespolonymi.

Jeżeli więc $a_0 \neq 0$, to mamy dla formy stopnia n

$$\begin{aligned} (5) \quad f(x_1, x_2) &\equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n \equiv \\ &\equiv x_2^n \left[a_0 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n + a_1 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{n-1} + \dots + a_n \right] \equiv \\ &\equiv a_0 x_2^n \left(\frac{x_1}{x_2} - \alpha_1 \right) \left(\frac{x_1}{x_2} - \alpha_2 \right) \dots \left(\frac{x_1}{x_2} - \alpha_n \right) \equiv \\ &\equiv a_0 (x_1 - \alpha_1 x_2) (x_1 - \alpha_2 x_2) \dots (x_1 - \alpha_n x_2); \end{aligned}$$

jest to rozkład na czynniki liniowe jednorodne.

Jeżeli zaś $a_0 = 0$, to oznaczając przez a_k pierwszy współczynnik różny od 0, otrzymujemy

$$f(x_1, x_2) \equiv x_2^k (a_k x_1^{n-k} + a_{k+1} x_1^{n-k-1} x_2 + \dots + a_n x_2^{n-k}).$$

W nawiasie po stronie prawej występuje forma o pierwszym współczynniku $a_k \neq 0$, a więc zachodzi dla niej rozkład postaci (5). Otrzymujemy zatem

$$f(x_1, x_2) \equiv a_k x_2^k (x_1 - \alpha_1 x_2) \dots (x_1 - \alpha_{n-k} x_2)$$

czyli znowu rozkład na czynniki liniowe jednorodne, c. b. d. o.

Rozkład taki zawsze możemy napisać w postaci

$$(6) \quad f(x_1, x_2) \equiv (\beta_1 x_1 - \alpha_1 x_2) (\beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2) \dots (\beta_n x_1 - \alpha_n x_2),$$

gdzie $|\beta_k| + |\alpha_k| > 0$ dla $k=1, 2, \dots, n$.

Udowodnimy teraz, że na prostej zespolonej twór algebraiczny stopnia n jest zbiorem złożonym z n różnych punktów i na odwrót.

Istotnie, gdy

$$(7) \quad f(x_1, x_2) = 0,$$

to z (6) wynika, że zachodzi jedna z n równości

$$x_1 : x_2 = \alpha_k : \beta_k \quad \text{dla} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Rozpatrywany twór algebraiczny składa się zatem co najwyżej z n punktów $(\alpha_k : \beta_k)$, gdyż może być

$$\alpha_k : \beta_k = \alpha_l : \beta_l \quad \text{dla} \quad k \neq l.$$

Na odwrót, zbiór złożony z $m < n$ punktów $(\alpha_k : \beta_k)$ daje się przedstawić równaniem

$$(\beta_1 x_1 - \alpha_1 x_2) (\beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2) \dots (\beta_m x_1 - \alpha_m x_2) = 0,$$

a więc jest stopnia $m < n$. Rozpatrywany twór algebraiczny składa się więc także co najmniej z n różnych punktów, c. b. d. o.

(Uwaga. We współrzędnych jednorodnych rozważamy tylko twory przedstawione przez równanie (7), gdzie $f(x_1, x_2)$ jest formą stopnia n . Z jednorodności współrzędnych wynika bowiem, że

$$(8) \quad f(\varrho x_1, \varrho x_2) = \varrho^n f(x_1, x_2).$$

Jeśli więc współrzędne jednorodne $x_1 : x_2$ punktu spełniają równanie (7), to wobec (8) wszelkie inne współrzędne jednorodne $\varrho x_1 : \varrho x_2$ tegoż punktu (w tym samym układzie współrzędnych) również spełniają równanie (7). Tym samym należenie punktu do tworu algebraicznego nie zależy od wyboru poszczególnego stosunku współrzędnych jednorodnych, wyznaczających ten punkt.

Jeśli zaś równanie (7) nie jest jednorodne, to rozbijając $f(x_1, x_2)$ na wielomiany jednorodne

$$f(x_1, x_2) \equiv f_n(x_1, x_2) + f_{n-1}(x_1, x_2) + \dots + f_0(x_1, x_2),$$

gdzie $f_k(x_1, x_2)$ jest formą stopnia k , mamy

$$f(\varrho x_1, \varrho x_2) = \varrho^n f_n(x_1, x_2) + \varrho^{n-1} f_{n-1}(x_1, x_2) + \dots + f_0(x_1, x_2);$$

dla każdego więc punktu (x_1, x_2) prostej, byle by tylko $f_i(x_1, x_2) \neq 0$ dla pewnego $i=1, 2, \dots, n$, możemy — nie zmieniając przyjętego na niej układu współrzędnych — tak dobrać liczbę zespoloną ϱ , by $f(\varrho x_1, \varrho x_2) = 0$, czyli znaleźć takie współrzędne jednorodne tego punktu, żeby równanie (7) było spełnione.)

2. Twory algebraiczne na płaszczyźnie. Krzywą algebraiczną stopnia n nazywamy na płaszczyźnie zbiór punktów przedstawiony przez równanie

$$(9) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

gdzie lewa strona jest formą stopnia n , ale nie dający się przedstawić przez równanie niższego stopnia.

Np. każda prosta jest krzywą pierwszego stopnia.

Jeżeli forma $f(x_1, x_2, x_3)$ zawiera czynnik x_3 , to krzywa (9) zawiera prostą $x_3 = 0$ czyli prostą w ∞ .

Np. równanie $x_1x_3=0$ przedstawia parę prostych $x_1=0$ i $x_3=0$, czyli oś Oy i prostą w ∞ .

Jeśli zaś forma $f(x_1, x_2, x_3)$ nie zawiera czynnika x_3 , to zbiegając osobno wyrazy zawierające tylko zmienne x_1 i x_2 , a osobno wyrazy zawierające zmienną x_3 , możemy tę formę przedstawić w postaci

$$f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) + x_3\psi(x_1, x_2, x_3),$$

gdzie φ jest formą stopnia n o współczynnikach nieznikających. Aby znaleźć punkty przecięcia krzywej (9) z prostą w ∞ , podstawiamy $x_3=0$ i otrzymujemy

$$\varphi(x_1, x_2) = 0.$$

Jest to równanie (o dwóch zmiennych) stopnia n , o nieznikających współczynnikach; ma więc ono co najwyżej n rozwiązań.

Wynika stąd, że krzywa (9) zawiera prostą w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy forma $f(x_1, x_2, x_3)$ zawiera czynnik x_3 .

Załóżmy teraz, że krzywa (9) nie zawiera prostej w ∞ . Możemy więc napisać (9) w postaci

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^kx_2^l + \dots = 0,$$

gdzie $a \neq 0$ i $k+l=n$.

Dzieląc przez x_3^n , otrzymujemy równanie

$$(10) \quad ax^ky^l + \dots = 0,$$

które przedstawia punkty właściwe krzywej (9).

Na odwrót, gdy dana jest krzywa (10), to przechodząc do współrzędnych jednorodnych, otrzymujemy krzywą (9).

Widzimy, że gdy krzywa (9) nie zawiera prostej w ∞ , to krzywa ta jest również wyznaczona przez równanie (10) w tym sensie, że znając (10) możemy zbudować (9), a tym samym znaleźć też punkty w ∞ tej krzywej. Np. równanie

$$x^2 - y^2 = 1$$

po przejściu do współrzędnych jednorodnych przybiera postać

$$(11) \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Prócz punktów właściwych równanie (11) jest spełnione jeszcze przez dwa punkty w ∞ ; jeśli bowiem $x_3=0$, to

$$x_1^2 = x_2^2, \quad x_1 = \pm x_2, \quad x_1 : x_2 = \pm 1 : 1,$$

czyli

$$x_1 : x_2 : x_3 = \pm 1 : 1 : 0.$$

W dalszym ciągu często okaże się wygodne badać krzywe w współrzędnych niejednorodnych. Nie jest to jednak uszczuplenie istotne, gdyż zawsze możemy znaleźć punkty w ∞ tej krzywej w opisany wyżej sposób.

Każda prosta przecina każdą krzywą stopnia n nie więcej niż w n punktach albo leży całkowicie na tej krzywej.

Dla dowodu użyjemy przedstawienia parametrycznego prostej:

$$(12) \quad \varrho x_i = \mu m_i + \nu n_i$$

(§ 39, str. 196). Podstawiając do (9), dostajemy

$$f(\mu m_1 + \nu n_1, \mu m_2 + \nu n_2, \mu m_3 + \nu n_3) = 0.$$

Porządkując to równanie względem μ i ν , otrzymujemy równanie stopnia nie większego od n

$$a_0\mu^n + a_1\mu^{n-1}\nu + \dots + a_n\nu^n = 0.$$

Gdy nie znikają tu wszystkie współczynniki, równanie to wyznacza nie więcej niż n stosunków $\mu : \nu$; dostajemy wówczas nie więcej niż n punktów przecięcia krzywej (9) z prostą (12). Gdy zaś znikają wszystkie współczynniki, to równanie jest spełnione dla każdego stosunku $\mu : \nu$, a więc cała prosta (12) leży na krzywej (9), c. b. d. o.

Za pomocą tego twierdzenia możemy np. udowodnić, że lemniskata

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

(p. § 15, str. 74) jest krzywą stopnia 4. Prosta bowiem $y = a\sqrt{3}/4$ przecina ją w 4 punktach o odciętych $\pm a\sqrt{21}/4$ i $\pm a\sqrt{5}/4$. Ponieważ ta prosta nie leży całkowicie na lemniskacie (np. punkt $(0, a\sqrt{3}/4)$ nie leży na niej), więc lemniskata nie daje się przedstawić przez równanie stopnia niższego niż czwarty.

W algebrze dowodzi się, że do każdej krzywej stopnia n można dobrać prostą, przecinającą ją w n różnych punktach.

Równanie stopnia n może przedstawiać krzywą stopnia niższego niż n ; np. równanie $x^2 = 0$ przedstawia oś Oy .

Krzywa stopnia n może się rozpaść na kilka krzywych niższych stopni; np. krzywa

$$(x^2 + y^2 - 25)(x - 2) = 0$$

składa się z koła $x^2 + y^2 - 25 = 0$ i prostej $x - 2 = 0$. Krzywa ta jest stopnia 3, tj. nie daje się przedstawić równaniem stopnia niższego

niż 3, gdyż prosta $y=3$ przecina ją w punktach o odciętych -4 , 4 i 2 .

Krzywe algebraiczne rozpadające się na krzywe niższych stopni nazywają się *zdegenerowane*.

W algebrze dowodzi się, że *na to, by krzywa (9) była zdegenerowana, potrzeba, żeby lewa strona równania (9) była formą rozkładającą się na czynniki niższych stopni*. Jest to oczywiście i *warunek dostateczny*.

Stopień krzywej algebraicznej Γ jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych.

Weźmy bowiem pod uwagę przekształcenie

$$(13) \quad \rho x_i = a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + a_{i3}x'_3, \quad \text{gdzie} \quad i=1, 2, 3.$$

Podstawiając do (9) wartości x_i z (13) i porządkując względem zmiennych x'_1, x'_2, x'_3 , dostajemy równanie obrazu Γ' krzywej Γ w postaci

$$f_1(x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

Oczywiście

$$\text{stopień } f_1 \leq \text{stopień } f,$$

gdyż w (13) występują tylko wielomiany pierwszego stopnia. Zatem i dla samych krzywych

$$(14) \quad \text{stopień } \Gamma' \leq \text{stopień } \Gamma.$$

Przekształcenie odwrotne do (13) przeprowadza Γ' w Γ ; rozumując w ten sam sposób, dostajemy więc

$$\text{stopień } \Gamma \leq \text{stopień } \Gamma'.$$

Stąd i z (14) wynika, że

$$\text{stopień } \Gamma' = \text{stopień } \Gamma, \quad \text{c. b. d. o.}$$

To samo rozumowanie algebraiczne okazuje również, że *stopień krzywej algebraicznej nie zależy od układu współrzędnych*.

Uwaga. Część rzeczywista i właściwa krzywej algebraicznej może nie być krzywą ciągłą w sensie § 31 (p. str. 164). Np. krzywa

$$(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$$

składa się w swej części rzeczywistej z punktu $(0, 0)$ i prostej $x = 1$. Nie da się ona przedstawić w postaci

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

gdzie f i φ są funkcjami ciągłymi, gdyż odcięta x przybiera wartości 0 i 1 , lecz nie przybiera wartości pośrednich.

3. Twory algebraiczne w przestrzeni. W przestrzeni określa się w sposób analogiczny *powierzchnię algebraiczną stopnia n* .

Tak samo również dowodzi się, że *prosta przebija powierzchnię stopnia n nie więcej niż w n punktach albo leży na niej całkowicie*.

Stopień powierzchni jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych.

Przekrój powierzchni stopnia n płaszczyzną nazywamy *krzywą algebraiczną płaską stopnia n* , gdy nie jest on przekrojem płaskim żadnej powierzchni stopnia niższego od n .

Ta definicja obejmuje więc tylko krzywe *płaskie* stopnia n . Zarazem jednak obejmuje ona również przekroje powierzchni płaszczyzną w ∞ i płaszczyzną zespoloną, nie objęte dawną definicją (p. str. 201). Poprzednio bowiem rozpatrywaliśmy tylko krzywe algebraiczne w układzie współrzędnych Oxy ; automatycznie zakładaliśmy zatem, że krzywa leży w płaszczyźnie rzeczywistej i właściwej.

Udowodnimy, że dawna definicja jest szczególnym przypadkiem obecnej.

Otóż istotnie, jeżeli płaszczyzna tnąca jest właściwa i rzeczywista, to możemy ją obrać za płaszczyznę Oxy układu współrzędnych $Oxyz$. Współrzędne x_1, x_2, x_4 są na tej płaszczyźnie współrzędnymi jednorodnymi. Równanie krzywej algebraicznej Γ , która jest w dawnym sensie stopnia n , ma w tych współrzędnych postać

$$f(x_1, x_2, x_4) = 0.$$

To samo równanie przedstawia w przestrzeni powierzchnię algebraiczną (walcową) stopnia n , której przekrojem płaszczyzną jest krzywa Γ . Zatem krzywa Γ jest w nowym sensie stopnia co najwyżej n .

Gdyby jednak była ona w nowym sensie stopnia mniejszego od n , to istniałaby powierzchnia stopnia co najwyżej $n-1$

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

której przekrój płaszczyzną $x_3 = 0$ byłby krzywą Γ . Krzywa ta dałaby się więc przedstawić w płaszczyźnie Oxy przez równanie

$$f_1(x_1, x_2, 0, x_4) = 0,$$

które jest stopnia co najwyżej $n-1$, wbrew stopniowi n krzywej Γ na płaszczyźnie Oxy .

Zatem Γ jest krzywą dokładnie stopnia n w nowym sensie, c. b. d. o.

Dział geometrii zajmujący się krzywymi i powierzchniami algebraicznymi nosi nazwę *geometrii algebraicznej*.

Ponieważ wprowadzone pojęcia mają charakter niezmienniczy nie tylko względem grupy przekształceń afinicznych, lecz również względem grupy przekształceń rzutowych (którą będziemy rozpatrywali w rozdziale XVI), więc geometria algebraiczna jest częścią geometrii rzutowej.

W poprzednich rozdziałach badaliśmy twory algebraiczne pierwszego stopnia. Wielkie znaczenie dla matematyki i jej zastosowań mają też twory algebraiczne drugiego stopnia. Zajmiemy się nimi szczegółowo w następnych rozdziałach.

(§ 41. Punkty cykliczne i koło sferyczne

1. Punkty cykliczne. Niech Oxy będzie układem współrzędnych na płaszczyźnie rzeczywistej właściwej. Określmy *odległość* d dwu punktów zespolonych (x, y) i (x_1, y_1) wzorem *

$$(1) \quad d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

W płaszczyźnie rzeczywistej, gdy odległość d dwu punktów, określona wzorem (1), jest równa 0, punkty są rzeczywiste.

W płaszczyźnie zaś zespolonej twierdzenie to nie jest prawdziwe. Gdy bowiem

$$(2) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0,$$

to

$$(3) \quad y - y_1 = \pm i(x - x_1).$$

Widzimy więc, że punkty, które są od punktu (x_1, y_1) oddalone o 0 w sensie (1), leżą na dwóch prostych (3), przechodzących przez ten punkt.

Proste te noszą nazwę *prostych minimalnych*.

Zatem przez każdy punkt przechodzą dwie proste minimalne.

Proste minimalne mają równania

$$(4) \quad y = \pm ix + c,$$

* Nazwa *odległość* liczby (1) jest pozostałością z XIX wieku. Obecnie odległością dwu elementów zbioru nazywa się liczba rzeczywista nieujemna, spełniająca pewne warunki.

gdzie c jest dowolną stałą zespoloną. Aby znaleźć punkty w ∞ na prostych minimalnych, sprowadzamy równania (4) do postaci jednorodnej. Otrzymujemy

$$(5) \quad ix_1 + x_2 + cx_3 = 0, \quad -ix_1 + x_2 + cx_3 = 0.$$

Podstawiając tu $x_3 = 0$, dostajemy

$$ix_1 + x_2 = 0 \quad \text{lub} \quad -ix_1 + x_2 = 0.$$

Stąd

$$(6) \quad x_1 : x_2 = 1 : -i \quad \text{lub} \quad x_1 : x_2 = 1 : i.$$

Zatem każda prosta minimalna przecina prostą w ∞ w jednym z dwóch punktów nierzeczywistych sprzężonych

$$1 : -i : 0, \quad 1 : i : 0.$$

Punkty te noszą nazwę *punktów cyklicznych*.

Na odwrót, każda prosta właściwa przechodząca przez jeden z punktów cyklicznych jest minimalna.

Istotnie, gdy prosta właściwa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad a_3 \neq 0$$

przechodzi np. przez punkt cykliczny $1 : i : 0$, to $a_1i + a_2 = 0$ czyli $a_1 : a_2 = 1 : -i$, a więc równanie prostej ma kształt

$$x_1 - ix_2 + cx_3 = 0;$$

równanie to powstaje z drugiego z równań (5) przez pomnożenie go przez i , prosta jest więc minimalna.

Każde koło przecina prostą w ∞ w punktach cyklicznych.

Istotnie, koło

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ma równanie jednorodne

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2x_3^2.$$

Aby znaleźć punkty przecięcia tego koła z prostą w ∞ , podstawiamy tu $x_3 = 0$. Dostajemy

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_1^2 = -x_2^2, \quad x_1 = \pm ix_2,$$

a więc

$$x_1 : x_2 : x_3 = \pm i : 1 : 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Każda krzywa drugiego stopnia Γ , która ma równanie rzeczywiste, zawiera punkty rzeczywiste, przechodzi przez punkty cykliczne i nie zawiera linii prostej, jest kołem.

Niech bowiem krzywa Γ ma równanie

$$(7) \quad ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0.$$

Ponieważ równanie to ma być spełnione dla współrzędnych punktów cyklicznych, więc

$$-a + ib + c = 0, \quad -a - ib + c = 0.$$

Stąd $a = c$ i $b = 0$. Nie może być $a = c = 0$, gdyż wówczas krzywa (7) zawierałaby prostą w ∞ o równaniu $x_3 = 0$, wbrew założeniu. Dzieliąc równanie (7) przez a i sprowadzając je do postaci niejednorodnej, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0.$$

Równanie to przekształcamy dalej w postać

$$(8) \quad (x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma.$$

Tu α, β i γ są rzeczywiste i krzywa zawiera punkty rzeczywiste. Musi więc być

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0.$$

Zatem równanie (8) przedstawia koło, c. b. d. o.

Na to by przekształcenie afiniczne rzeczywiste T było podobieństwem, potrzeba i wystarcza, żeby przeprowadzało ono parę punktów cyklicznych w nią samą.

Istotnie, jeśli przekształcenie afiniczne T jest podobieństwem, to przeprowadza ono koła w koła. Tym samym punkty przecięcia prostej w ∞ z kołami, czyli punkty cykliczne, przechodzą na cykliczne. Warunek jest więc dostateczny.

Jest on też konieczny, bo jeśli przekształcenie afiniczne rzeczywiste przeprowadza parę punktów cyklicznych w nią samą, to krzywe drugiego stopnia o równaniach rzeczywistych, nie rozpadające się na proste i przechodzące przez punkty cykliczne, przechodzą w takie same krzywe. Tym samym koła przechodzą w koła, a zatem (p. § 29, str. 148) przekształcenie T jest podobieństwem, c. b. d. o.

Przesunięcia i obroty przekształcają każdy punkt cykliczny w siebie. Odbicia zaś zamieniają punkty cykliczne jeden na drugi.

Istotnie, przesunięcie

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

wyraża się we współrzędnych jednorodnych równościami

$$\varrho x'_1 = x_1 + ax_3, \quad \varrho x'_2 = x_2 + bx_3, \quad \varrho x'_3 = x_3.$$

Punktowi $(x_1 : x_2 : 0)$ prostej w ∞ odpowiada zatem punkt o współrzędnych

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = 0,$$

czyli $x'_1 : x'_2 : 0 = x_1 : x_2 : 0$. Przesunięcie przekształca więc każdy punkt prostej w ∞ w siebie. W szczególności dotyczy to punktów cyklicznych.

Obrót

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

ma we współrzędnych jednorodnych postać

$$\varrho x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \quad \varrho x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \quad \varrho x'_3 = x_3.$$

Punkt cykliczny $1 : i : 0$ przechodzi więc w punkt

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = (\cos \varphi + i \sin \varphi) : (-\sin \varphi + i \cos \varphi) : 0 =$$

$$= (\cos \varphi + i \sin \varphi) : i (\cos \varphi + i \sin \varphi) : 0 = 1 : i : 0,$$

czyli w siebie. Podobnie dowodzi się tego dla drugiego punktu cyklicznego.

Odbicie

$$x' = x, \quad y' = -y$$

ma we współrzędnych jednorodnych kształt

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = -x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3,$$

przekształca więc ono punkt $1 : i : 0$ w punkt $1 : -i : 0$ i na odwrót, c. b. d. o.

Ponieważ proste minimalne są prostymi przechodzącymi przez punkty cykliczne, więc z ostatniego twierdzenia wynika, że podobieństwa przekształcają proste minimalne w proste minimalne.

Z poprzednich twierdzeń widoczna jest podstawowa rola punktów cyklicznych w geometrii podobieństw: grupa podobieństw może być scharakteryzowana jako grupa przekształceń afinicznych, których niezmiennikiem jest para punktów cyklicznych.

Ponieważ grupę podobieństw można też scharakteryzować przez każdą z następujących dwóch własności:

1° niezmienniczość kątów,

2° niezmienniczość pary punktów cyklicznych,

więc musi istnieć związek między kątami a punktami cyklicznymi. Związek ten został znaleziony przez Laguerre'a. Ponieważ wymaga on pojęcia stosunku podwójnego podziału, będziemy się mogli nim zająć dopiero w § 81.

Zauważyć należy, że z niezmienniczości 2^o wynika charakter geometryczny punktów cyklicznych w geometrii podobieństw: możemy mówić o punktach cyklicznych płaszczyzny bez podawania układu współrzędnych.

2. Koło sferyczne i stożek minimalny. Zbadamy obecnie analogiczne pojęcia w przestrzeni. Określmy odległość d dwóch punktów zespolonych (x, y, z) i (a, b, c) wzorem

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Wówczas zbiór punktów oddalonych od (a, b, c) o 0 jest określony przez równanie.

$$(8) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0.$$

Zbiór tych punktów nazywamy *stożkiem minimalnym* *.

Łatwo widzieć, że jeśli punkt (a, b, c) jest rzeczywisty, to jest on jedynym punktem rzeczywistym stożka (8).

Stożek (8) ma we współrzędnych jednorodnych równanie

$$(9) \quad (x_1 - ax_4)^2 + (x_2 - bx_4)^2 + (x_3 - cx_4)^2 = 0.$$

Aby znaleźć przekrój tego stożka płaszczyzną w ∞ , podstawiamy $x_4 = 0$. Otrzymujemy

$$(10) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Twór (10) nazywa się *kołem sferycznym*.

Gra ono w przestrzeni taką rolę jak punkty cykliczne na płaszczyźnie. Udowodnimy mianowicie, że każde podobieństwo przestrzeni przekształca koło sferyczne w siebie.

* Nazwa *stożek* jest uzasadniona w danym razie następującymi względami:

Jak wynika z § 16, stożek obrotowy o wierzchołku w punkcie (a, b, c) i o osi równoległej do Oz ma równanie

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (z-c)^2 = 0.$$

Przez przekształcenie afiniczne

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' - c = i(z - c)$$

stożek ten przechodzi w twór (8). Ponieważ przekształcenia afiniczne rzeczywiste przeprowadzają stożki w stożki, więc przez analogię twór (8) nazywamy stożkiem.

Istotnie, dla odbicia

$$\varrho x'_1 = -x_1, \quad \varrho x'_i = x_i, \quad \text{gdzie } i=2, 3, 4$$

i dla przesunięcia

$$\varrho x'_1 = x_1 + a_{14}x_4, \quad \varrho x'_2 = x_2 + a_{24}x_4, \quad \varrho x'_3 = x_3 + a_{34}x_4, \quad \varrho x'_4 = x_4$$

jest to oczywiste. Podobnie i dla powiększenia

$$\varrho x'_1 = kx_1, \quad \varrho x'_2 = kx_2, \quad \varrho x'_3 = kx_3, \quad \varrho x'_4 = kx_4,$$

gdyż wówczas

$$(11) \quad \varrho^2(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

skąd na mocy (10)

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0, \quad x_4' = 0,$$

czyli obrazem koła (10) jest ono samo. Wreszcie dla obrotu

$$\varrho x'_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4, \quad \text{gdzie } k=1, 2, 3, \quad \varrho x'_4 = x_4,$$

macierz $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, gdzie $i, k=1, 2, 3$, jest ortogonalna. Zatem zachodzi tożsamość (11) ze współczynnikiem $k=1$, a stąd znów równania koła sferycznego, c. b. d. o.

Podobnie jak na płaszczyźnie, dowodzi się, że każda kula przecina płaszczyznę w ∞ wzdłuż koła sferycznego.

Dowodzi się też, że każda powierzchnia drugiego stopnia, która ma równanie rzeczywiste, zawiera punkty rzeczywiste, nie zawiera płaszczyzny i przechodzi przez koło sferyczne, jest kulą.

Udowodnimy, że każda płaszczyzna rzeczywista właściwa przebija koło sferyczne w dwóch punktach, które są jej punktami cyklicznymi.

Istotnie, punkty cykliczne płaszczyzny rzeczywistej właściwej są określone niezależnie od układu współrzędnych (p. str. 210). Jeśli więc daną płaszczyznę Π obierzemy za płaszczyznę Oxy układu prostokątnego współrzędnych $Oxyz$, to współrzędnymi jednorodnymi punktu tej płaszczyzny są $x_1, x_2, 0, x_4$. W układzie współrzędnych Oxy na tej płaszczyźnie współrzędnymi jednorodnymi punktu są x_1, x_2, x_4 . Płaszczyzna Oxy czyli płaszczyzna o równaniu $x_3=0$ przecina koło (10) w punktach, dla których

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

czyli w punktach cyklicznych

$$x_1 : x_2 : x_4 = \pm i : 1 : 0,$$

c. b. d. o.

Każde przekształcenie afiniczne rzeczywiste T przestrzeni, które przeprowadza koło sferyczne w siebie, jest podobieństwem.

Istotnie, niech φ będzie kątem między dwoma wektorami a i b , leżącymi w płaszczyźnie Π . Przekształcenie T przeprowadza płaszczyznę Π w płaszczyznę Π' , przy czym punkty przecięcia płaszczyzny Π z kołem sferycznym przechodzą w punkty przecięcia płaszczyzny Π' z kołem sferycznym (na mocy założonej niezmienniczości koła sferycznego względem przekształcenia T). Tym samym punkty cykliczne płaszczyzny Π przechodzą w punkty cykliczne płaszczyzny Π' , a zatem przekształcenie płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' jest podobieństwem (p. str. 209). Stąd zaś wynika, że kąty nie ulegają zmianie, a z niezmienniczości kątów wynika, że przekształcenie T przestrzeni jest podobieństwem, c. b. d. o.

Weźmy pod uwagę stożek minimalny (8). Równanie jego jest równoważne równaniu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = -(z-c)^2$$

czyli równaniu

$$(12) \quad [(x-a) + i(y-b)][(x-a) - i(y-b)] = [i(z-c)]^2.$$

Wynika stąd, że na stożku tym leżą całkowicie proste, które są krawędziami przecięcia płaszczyzn

$$(13) \quad \lambda(x-a + i(y-b)) = \mu i(z-c), \quad \mu(x-a - i(y-b)) = \lambda i(z-c),$$

gdzie λ i μ są dowolnymi liczbami nie znikającymi jednocześnie.

Proste te nazywamy prostymi minimalnymi w przestrzeni.

Oczywiście proste minimalne są to proste przechodzące przez punkty koła sferycznego. Każda płaszczyzna rzeczywista przechodząca przez wierzchołek stożka minimalnego przecina go wzdłuż pary prostych minimalnych, które są zarazem prostymi minimalnymi tej płaszczyzny.)

ROZDZIAŁ VIII

K O Ł O

§ 42. Równanie koła

Koło o środku (a, b) i promieniu r ma w układzie współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie równanie postaci

$$(1) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Uogólnimy obecnie pojęcie koła.

Kołem będziemy nazywali każdy twór, dający się przedstawić równaniem postaci (1), gdzie a , b i r są liczbami zespolonymi.

W szczególności koło może nie zawierać punktów rzeczywistych (np. gdy a i b są rzeczywiste, a $r^2 < 0$) lub zawierać jeden tylko punkt rzeczywisty (mianowicie gdy a i b są rzeczywiste, a $r=0$).

Z równania (1) otrzymujemy po wykonaniu działań i po redukcji równoważne równanie postaci

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0.$$

Każde koło daje się więc przedstawić w postaci (2). Na odwrót, uzupełniając równanie (2) do kwadratu, otrzymujemy równoważne mu równanie

$$(3) \quad (x+m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2 - p,$$

przedstawiające koło o środku $(-m, -n)$.

Jeśli w równaniu (3) współczynniki m , n i p są rzeczywiste, to możemy rozróżnić trzy przypadki:

1° $m^2 + n^2 - p > 0$. Wówczas równanie (3) przedstawia koło rzeczywiste o promieniu $\sqrt{m^2 + n^2 - p}$.

2° $m^2 + n^2 - p = 0$. Wówczas na płaszczyźnie rzeczywistej równanie (3) przedstawia jeden punkt rzeczywisty.