

dostajemy dla tego przypadku następujący warunek konieczny i dostateczny:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Warunek ten jest również spełniony dla prostych równoległych, ponieważ wówczas

$$l_1 : m_1 : n_1 = l_2 : m_2 : n_2.$$

7. W układzie współrzędnych o kątach λ, μ, ν znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do osi Oz i równania prostej prostopadłej do płaszczyzny Oxy , przechodzących przez początek układu.

Szukana płaszczyzna jest miejscem geometrycznym punktów, których rzutem prostopadłym na oś Oz jest początek układu współrzędnych. Punkty te mają współrzędną kowariantną $C=0$. Stąd otrzymujemy równanie tej płaszczyzny:

$$x \cos \mu + y \cos \lambda + z = 0.$$

Podobnie znajdujemy równania szukanej prostej. Jest ona wyznaczona przez układ równań

$$(17) \quad x + y \cos \nu + z \cos \mu = 0, \quad x \cos \nu + y + z \cos \lambda = 0.$$

8. W układzie współrzędnych o kątach λ, μ, ν znaleźć równanie prostej tworzącej z osiami współrzędnych kąty $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ i przechodzącej przez początek układu.

Niech A, B, C będą współrzędnymi kowariantnymi punktu $P(x, y, z)$ tej prostej. Wówczas

$$(18) \quad A = |OP| \cos \varphi_x, \quad B = |OP| \cos \varphi_y, \quad C = |OP| \cos \varphi_z,$$

a więc, gdy kąty $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ są różne od $\pi/2$,

$$\frac{A}{\cos \varphi_x} = \frac{B}{\cos \varphi_y} = \frac{C}{\cos \varphi_z}.$$

Stąd otrzymujemy równania prostej

$$\frac{x + y \cos \nu + z \cos \mu}{\cos \varphi_x} = \frac{x \cos \nu + y + z \cos \lambda}{\cos \varphi_y} = \frac{x \cos \mu + y \cos \lambda + z}{\cos \varphi_z}.$$

Jeśli jeden lub dwa z kątów $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ jest równy $\pi/2$, zadanie rozwiązuje się analogicznie, na podstawie (18).

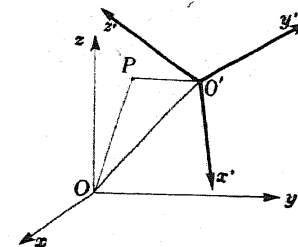
ROZDZIAŁ VI

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, IZOMETRIE, PODOBIENSTWA I PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE

§ 25. Zmiana układu współrzędnych prostokątnych

1. Zmiana współrzędnych punktu. Zajmiemy się obecnie związkami między współrzędnymi jednego i tego samego punktu w dwóch różnych układach współrzędnych $Oxyz$ i $O'x'y'z'$. Rozpatrzmy wprawdzie przypadek najczęściej spotykany, gdy oba układy współrzędnych są prostokątne. Zakładamy przy tym, że wektory podstawowe i, j, k , oraz i', j', k' obu układów mają długość 1.

Oznaczmy przez a, b, c współrzędne punktu O' w układzie $Oxyz$, przez a', b', c' — współrzędne punktu O w układzie $O'x'y'z'$, wreszcie przez x, y, z i x', y', z' — współrzędne dowolnego punktu P w obu układach (rys. 61).



Rys. 61

Mamy więc

$$(1) \quad OP = xi + yj + zk, \quad OO' = ai + bj + ck,$$

$$(2) \quad O'P = x'i' + y'j' + z'k', \quad O'O = a'i' + b'j' + c'k'.$$

Niech a_{11} będzie cosinusem kąta między osiami Ox a $O'x'$. Przy analogicznych oznaczeniach cosinusów kątów między pozostałymi osiami, otrzymujemy tablicę cosinusów tych kątów:

	x'	y'	z'
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Jak wiemy (p. wzór (2) z § 3, str. 16),

$$(3) \quad a_{11} = ii', \quad a_{12} = ij', \quad a_{13} = ik' \quad \text{itd.}$$

oraz

$$(4) \quad i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = jk = ki = 0.$$

Ponieważ

$$OP = OO' + O'P,$$

więc wobec (1) i (2)

$$(5) \quad xi + yj + zk = ai + bj + ck + x'i' + y'j' + z'k'$$

i podobnie

$$(6) \quad x'i' + y'j' + z'k' = a'i' + b'j' + c'k' + xi + yj + zk.$$

Mnożąc równość (5) po kolei przez i, j, k , dostajemy wobec (3) i (4)

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= a + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= b + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= c + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned}$$

Podobnie z równań (6) wynika

$$(8) \quad \begin{aligned} x' &= a' + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y' &= b' + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z' &= c' + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Tak więc zależności między współrzędnymi tego samego punktu w obu układach mają postać (6) i (7).

Prawe strony tych równań są wielomianami liniowymi.

W przypadku, gdy oba układy współrzędnych mają wspólny początek, jest $a=b=c=a'=b'=c'=0$ i wówczas wielomiany (7) i (8) stają się jednorodnymi.

Oznaczmy przez $\mathfrak{A}$ macierz

$$(9) \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Analogiczna macierz dla wielomianów (8) jest równa macierzy przedstawionej $\mathfrak{A}^+$. Ponieważ liczby a_{11}, a_{12}, a_{13} są cosinusami kierunkowymi osi Ox w układzie $O'x'y'z'$ prostokątnym, więc

$$(10) \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1.$$



Ze względu na prostopadłość osi Ox i Oy dostajemy również

$$(11) \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0.$$

Podobne równości zachodzą dla innych wierszy i kolumn.

Widzimy zatem, że macierz $\mathfrak{A}$ wielomianów liniowych, występujących w związkach między współrzędnymi punktu w dwóch różnych układach prostokątnych współrzędnych, jest ortogonalna (p. Przypis I, § 3).

Wynika stąd w szczególności, że

$$(12) \quad |\mathfrak{A}| = \pm 1.$$

W szczególnym przypadku, gdy układy $O'x'y'z'$ i $Oxyz$ mają osie równoległe i zgodnie skierowane, otrzymujemy

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{ik} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq k,$$

a także

$$a = -a', \quad b = -b', \quad c = -c'.$$

W tym przypadku więc równości (7) i (8) mają postać

$$(13) \quad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

Udowodnimy obecnie, że gdy dane są związki postaci (7) lub (8) o macierzy ortogonalnej i dowolny układ prostokątny osi $Oxyz$, to istnieje taki układ prostokątny osi $O'x'y'z'$, że współrzędne punktu w układach $Oxyz$ i $O'x'y'z'$ wyrażają się tymi związkami.

Istotnie, z (10) wynika, że liczby a_{11}, a_{12}, a_{13} są cosinusami kierunkowymi pewnej osi w przestrzeni. Poprowadźmy przez początek O oś Ox_0 o kierunku i zwrocie wyznaczonym przez te liczby. Podobnie określmy osie Oy_0 i Oz_0 . Wobec równości (10) osie te są parami prostopadłe, a więc tworzą pewien układ prostokątny $Ox_0y_0z_0$, o tym samym początku co układ $Oxyz$. Macierzą cosinusów kierunkowych obu układów jest $\mathfrak{A}$. Zatem

$$x_0 = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z.$$

Niech teraz O' będzie punktem, który w układzie $Ox_0y_0z_0$ ma współrzędne $-a', -b', -c'$. Poprowadźmy przez O' układ $O'x'y'z'$ o osiach mających kierunek i zwrot osi Ox_0, Oy_0, Oz_0 . Wobec (13) jest więc $x' = a' + x_0$, czyli

$$x' = a' + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z$$

i podobne wzory dostajemy dla y' oraz z' , c. b. d. o.

Na płaszczyźnie zmiana układu współrzędnych prostokątnych przedstawia się analogicznie. Tu mamy dwa układy prostokątne Oxy i $O'x'y'$; w oznaczeniach podobnych do poprzednich dostajemy tablicę cosinusów kierunkowych:

	x'	y'
x	a_{11}	a_{12}
y	a_{21}	a_{22}

Zależności między współrzędnymi punktu w obu układach mają postać

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= a' + a_{11}x' + a_{12}y', \\ y &= b' + a_{21}x' + a_{22}y', \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} x' &= a' + a_{11}x + a_{21}y, \\ y' &= b' + a_{12}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

Macierz $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ jest ortogonalna i $|\mathfrak{A}| = \pm 1$.

Na odwrót, gdy dane są równania (14) lub (15) o macierzy $\mathfrak{A}$ ortogonalnej, to istnieje taki prostokątny układ $O'x'y'$, że współrzędne w obu układach są związane tymi równaniami.

Zależność między różnymi układami współrzędnych na prostej omówiliśmy w § 4 (p. str. 22).

2. Ruchy układu współrzędnych na płaszczyźnie. Niech będą dane na płaszczyźnie dwa prostokątne układy współrzędnych Oxy i $O'x'y'$. Niech prostokątny układ osi porusza się od chwili $t=0$ do chwili $t=t_1$, zajmując w chwili $t=0$ położenie Oxy , a w chwili $t=t_1$ położenie $O'x'y'$. Położenie układu w każdej chwili pośredniej t jest wyznaczone, gdy dane są np. współrzędne początku układu ruchomego i cosinusy kierunkowe jego osi w układzie Oxy jako funkcje czasu. Oznaczmy te cosinusy kierunkowe w chwili t przez $a_{11}(t), a_{12}(t)$ i $a_{21}(t), a_{22}(t)$. Zatem w chwili $t=0$ jest

$$a_{11}(0) = a_{22}(0) = 1, \quad a_{12}(0) = a_{21}(0) = 0,$$

a w chwili $t=t_1$ jest

$$a_{11}(t_1) = a_{11}, \quad a_{12}(t_1) = a_{12}, \quad a_{21}(t_1) = a_{21}, \quad a_{22}(t_1) = a_{22},$$

gdzie a_{ik} są cosinusami kierunkowymi osi układu $Ox'y'$ w układzie Oxy . W każdej chwili t układowi ruchomemu odpowiada więc macierz

$$\mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

W szczególności

$$(16) \quad \mathfrak{A}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}(t_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Macierz $\mathfrak{A}(t)$ jest dla każdego t macierzą ortogonalną, zatem dla jej wyznacznika otrzymujemy

$$|\mathfrak{A}(t)| = \pm 1.$$

Ponieważ ruch odbywa się w sposób ciągły, więc cosinusy kierunkowe, a zatem i wyznacznik, zmieniają się w sposób ciągły. Wobec (16) jest $|\mathfrak{A}(0)| = +1$, wyznacznik zaś $|\mathfrak{A}(t)|$ może przybierać tylko dwie wartości ± 1 . Nie mogąc przeskoczyć od wartości $+1$ do wartości -1 ze względu na ciągłość, musi zachować wartość 1 .

Udowodniliśmy zatem, że gdy układ $O'x'y'$ powstaje z układu Oxy przez ruch, to

$$(17) \quad |\mathfrak{A}| = 1.$$

Wśród ruchów dwa grają specjalną rolę. Są to przesunięcia i obroty.

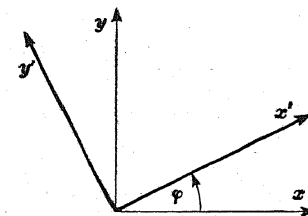
Przesunięciem (lub *translacją*) nazywamy ruch, w którym początek układu współrzędnych przesuwa się po linii prostej, a osie zachowują kierunek i zwrot. Współrzędne w układzie $O'x'y'$, otrzymanym w wyniku przesunięcia układu Oxy , wyrażają się wzorami

$$(18) \quad x = a + x', \quad y = b + y'$$

(por. wzory (13)), gdzie a i b są współrzędnymi punktu O' w układzie Oxy .

Obrotem nazywamy ruch, w którym początek układu współrzędnych zachowuje swe położenie, a osie — orientację.

Niech teraz układy Oxy i $O'x'y'$ mają ten sam początek i drugi niech powstaje z pierwszego przez obrót o kąt φ . Wówczas (rys. 62):



Rys. 62

$$a_{11} = \cos \varphi, \quad a_{12} = \cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin \varphi,$$

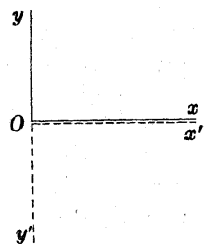
$$a_{21} = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi, \quad a_{22} = \cos \varphi.$$

Otrzymujemy więc

$$(19) \quad x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

Ponieważ — na odwrót — układ Oxy powstaje z układu $Ox'y'$ przez obrót o kąt $-\varphi$, więc zmieniając w (19) φ na $-\varphi$, otrzymujemy

$$(20) \quad x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$



Rys. 63

Jeśli zmieniamy zwrot osi Oy , otrzymujemy nowy układ $Ox'y'$, o którym powiadamy, że powstaje z układu Oxy przez odbicie w osi Ox .

Wówczas

$$x = x', \quad y = -y',$$

a więc macierz $\mathfrak{A}$ ma postać

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$|\mathfrak{A}| = -1.$$

Tak więc układy osi powstające jeden z drugiego przez odbicie mają orientację niezgodną. Żaden nie może być otrzymany z drugiego przez ruch. Układy zaś powstające jeden z drugiego przez ruch mają orientację zgodną i na odwrót (p. § 11, str. 55).

Widzimy, że następujące trzy warunki są równoważne:

- 1° $|\mathfrak{A}| = 1$,
- 2° układy Oxy i $Ox'y'$ powstają jeden z drugiego przez ruch,
- 3° oba układy mają orientację zgodną.

Przejście od jednego układu prostokątnego współrzędnych do innego daje się uzyskać przez przesunięcie, obrót i odbicie, ale nie każdy z tych czynników musi wystąpić.

Należy jeszcze zauważyć, że w dwóch układach osi, powstających jeden z drugiego przez przesunięcie, składowe dowolnego wektora są jednakowe.

Istotnie, wobec (18) jest

$$x_2 - x_1 = (a + x'_2) - (a + x'_1) = x'_2 - x'_1$$

i podobnie

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1.$$

3. Ruchy układu współrzędnych w przestrzeni. Dla przestrzeni dowodzi się zupełnie tak samo, że gdy układ $Ox'y'z'$ powstaje z układu $Oxyz$ przez ruch, to $|\mathfrak{A}| = +1$ i na odwrót. Każdy ruch daje się złożyć z przesunięcia i obrotu *dokoła początku układu* (tj. ruchu, w którym punkt O nie zmienia położenia, a układ zachowuje swą orientację). Każda zmiana układu prostokątnego $Oxyz$ na układ prostokątny $Ox'y'z'$ daje się wykonać przez przesunięcie, obrót i odbicie w jednej z płaszczyzn układu, ale nie każdy z tych czynników musi wystąpić. Następujące warunki są równoważne:

- 1° $|\mathfrak{A}| = 1$,
- 2° układy $Oxyz$ i $Ox'y'z'$ powstają jeden z drugiego przez ruch,
- 3° oba układy mają tę samą orientację.

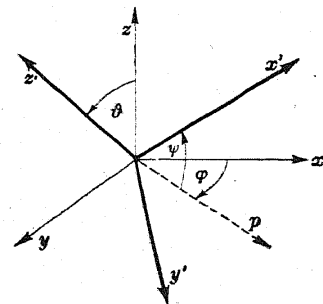
(Na płaszczyźnie obroty dały się przedstawić za pomocą jednego kąta φ (p. wzór (19)). W przestrzeni istnieje analogiczne przedstawienie za pomocą trzech tzw. *kątów Eulera*.)

Mówimy, że ruch jest *obrotem dokoła osi*, gdy każdy punkt tej osi pozostaje na swym miejscu.

Podczas obrotu dokoła jednej z osi układu współrzędnych pozostałe dwie osie obracają się w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Ruch układu, w którym dwie osie pozostają stale w swej płaszczyźnie początkowej, jest obrotem dokoła trzeciej osi.

Weźmy pod uwagę dwa układy współrzędnych $Oxyz$ i $Ox'y'z'$, np. lewoskrętne, które nie powstają jeden z drugiego przez obrót dokoła żadnej z osi Ox, Oy, Oz . Płaszczyzny $Ox'y'$ i Oxy przecinają się wtedy wzdłuż prostej p , której nadajemy taki zwrot, by trójka uporządkowana osi Oz', Oz, Op też tworzyła układ lewoskrętny (rys. 64). Wówczas w każdej z płaszczyzn układu jest określony obieg dodatni liczenia kątów. Układ $Ox'y'z'$ można otrzymać z układu $Oxyz$ przez następujące trzy obroty w obiegu dodatnim:

- 1° obrót dokoła osi Oz o kąt φ , aż do pokrycia się osi Ox z osią Op ,
- 2° obrót dokoła osi Op o kąt θ , aż do pokrycia się osi Oz z osią Oz' ,
- 3° obrót dokoła osi Oz' o kąt ψ , aż do pokrycia się osi Op z osią Ox' .



Rys. 64

Oznaczmy przez $Ox_1y_1z_1$ układ powstający po pierwszym obrocie, a przez $Ox_2y_2z_2$ układ powstający po drugim obrocie. Po pierwszym obrocie mamy wobec (20)

$$x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \quad z_1 = z;$$

po drugim zaś obrocie mamy wobec (19)

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 \cos \vartheta - z_1 \sin \vartheta, \quad z_2 = y_1 \sin \vartheta + z_1 \cos \vartheta;$$

po trzecim wreszcie obrocie mamy

$$x' = x_2 \cos \psi + y_2 \sin \psi, \quad y' = -x_2 \sin \psi + y_2 \cos \psi, \quad z' = z_2.$$

Stąd dostajemy x', y', z' wyrażone przez x, y, z wzorami postaci

$$(21) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

gdzie

$$(18) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ a_{21} &= \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ a_{31} &= -\sin \vartheta \sin \psi, \\ a_{12} &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi, \\ a_{22} &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi, \\ a_{32} &= -\sin \vartheta \cos \psi, \\ a_{31} &= -\sin \psi \sin \vartheta, \\ a_{32} &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\ a_{33} &= \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Obroty w przestrzeni dają się zatem przedstawić przez trzy parametry φ, ψ, ϑ , wprowadzone przez Eulera. W macierzy ortogonalnej 3-go stopnia występuje 9 elementów, między którymi zachodzi 6 związków kształtu (10) i (11). Zatem 6 elementów daje się wyrazić przez 3 pozostałe. Wyrażenia te jednak są bardzo zawile. Natomiast wzory Eulera dają trzy parametry o prostym znaczeniu geometrycznym, z których pomocą możemy wyrazić cosinusy kierunkowe a_{ik} w sposób względnie prosty. Ze wzorów Eulera można wyprowadzić zasadnicze twierdzenia trygonometrii sferycznej.)

§ 26. O przekształceniach zbiorów

Niech będą dane dwa zbiory Z i Z' (o których nie zakładamy, że są różne). Niech każdemu elementowi zbioru Z będzie przyporządkowany element zbioru Z' i niech to przyporządkowanie ma następujące dwie własności:

1° *każdemu elementowi z ze zbioru Z jest przyporządkowany dokładnie jeden element z' ze zbioru Z' ,*

2° *każdy element z' ze zbioru Z' jest przyporządkowany dokładnie jednemu elementowi z zbioru Z .*

Przyporządkowanie takie będziemy oznaczali przez T , pisząc

$$(1) \quad z' = T(z),$$

i nazywali *przekształceniem wzajemnie jednoznacznyim zbioru Z w zbiór Z' lub krótko przekształceniem Z w Z' .*

PRZYKŁAD. W dowolnym zbiorze Z wybieramy dowolne dwa elementy z_1, z_2 i określamy przekształcenie wzorami

$$T(z) = \begin{cases} z & \text{dla } z \neq z_1, \quad z \neq z_2, \\ z_1 & \text{dla } z = z_2, \\ z_2 & \text{dla } z = z_1. \end{cases}$$

Otrzymujemy w ten sposób przekształcenie zbioru Z w siebie.

Oznaczmy przez E takie przekształcenie zbioru Z w siebie, w którym każdy element przyporządkowany jest samemu sobie, tzn. dla którego

$$(2) \quad E(z) = z.$$

Przekształcenie E nazywamy *przekształceniem zbioru Z w siebie przez identyczność* lub po prostu *identycznością*.

Niech teraz T_1 będzie przekształceniem zbioru Z w zbiór Z' , a T_2 — przekształceniem zbioru Z' w zbiór Z'' i niech z będzie dowolnym elementem zbioru Z . Oznaczmy przez z' i z'' elementy zbiorów Z' i Z'' , określone wzorami

$$T_1(z) = z', \quad T_2(z') = z''.$$

Przyporządkujmy elementowi z element z'' . Otrzymujemy przyporządkowanie elementom zbioru Z elementów zbioru Z'' , które — jak łatwo widzieć — również spełnia warunki 1° i 2°. Przyporządkowanie to jest więc przekształceniem wzajemnie jednoznacz-

nym zbioru Z w Z'' . Nazywa się ono *iloczynem przekształcenia* T_1 *przez przekształcenie* T_2 i oznacza się przez $T_2 T_1$.

Na mocy tej definicji jest więc

$$(3) \quad T_2 T_1(z) = T_2(T_1(z)).$$

Np. niech Z składa się z trzech elementów a, b, c , a przekształcenia T_1 i T_2 niech będą określone przez równości:

$$\begin{array}{lll} T_1(a)=c, & T_1(b)=a, & T_1(c)=b, \\ T_2(a)=c, & T_2(b)=b, & T_2(c)=a. \end{array}$$

Wówczas, przyjmując oznaczenie $T = T_2 T_1$, mamy

$$T(a)=a, \quad T(b)=c, \quad T(c)=b.$$

Biorąc zaś przekształcenie $T' = T_1 T_2$, mamy

$$T'(a)=b, \quad T'(b)=a, \quad T'(c)=c.$$

Widzimy więc, że na ogół

$$T_1 T_2 \neq T_2 T_1,$$

czyli *mnożenie przekształceń nie jest przemienne*.

Natomiast *mnożenie przekształceń jest łączne*, czyli zawsze

$$(4) \quad T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1.$$

Istotnie, niech

$$T_1(z)=z', \quad T_2(z')=z'', \quad T_3(z'')=z'''.$$

Wówczas $T_2 T_1(z)=z''$, więc $T_3(T_2 T_1)$ przekształca z w z''' . Z drugiej strony, ponieważ $T_3 T_2$ przeprowadza z' w z''' , więc przekształcenie $(T_3 T_2) T_1$ przeprowadza z w z''' , c. b. d. o.

Jest oczywiste, że dla przekształcenia przez identyczność E i dla każdego przekształcenia T jest $ET=TE=T$.

Niech teraz T będzie dowolnym przekształceniem zbioru Z w Z' . Przyporządkujmy elementowi z' zbioru Z' element z zbioru Z określony wzorem (1). Przyporządkowanie to również spełnia warunki 1^o i 2^o, a więc jest przekształceniem zbioru Z' w Z .

Nosi ono nazwę *przekształcenia odwrotnego do* T ; oznacza się je przez T^{-1} .

Z (1) wynika więc, że

$$(5) \quad T^{-1}(z')=z.$$

W szczególności widzimy z tego określenia, że $T^{-1}T$ jest przekształceniem zbioru Z przez identyczność, a TT^{-1} — przekształceniem zbioru Z' przez identyczność. Gdy zbiory Z i Z' są identyczne, to

$$(6) \quad T^{-1}T=TT^{-1}=E.$$

Niech teraz będzie dany zbiór $\mathfrak{G}$ pewnych przekształceń zbioru Z w siebie, o następujących własnościach:

I^o jeśli przekształcenie T należy do zbioru przekształceń $\mathfrak{G}$, to również przekształcenie T^{-1} należy do $\mathfrak{G}$;

II^o jeśli przekształcenia T_1 i T_2 należą do $\mathfrak{G}$, to również przekształcenia $T_1 T_2$ i $T_2 T_1$ należą do $\mathfrak{G}$.

Każdy zbiór $\mathfrak{G}$ przekształceń, spełniający te dwa warunki, nazywa się *grupą przekształceń*.

Np. zbiór wszystkich przekształceń dowolnego zbioru Z w siebie tworzy grupę; zbiór złożony z samego tylko przekształcenia E , tj. przekształcenia przez identyczność, też tworzy grupę.

Udowodnimy, że w każdej grupie przekształceń można do dowolnych dwóch przekształceń T_1 i T_2 znaleźć dokładnie jedno takie przekształcenie X , że

$$(7) \quad T_1 X = T_2.$$

Istotnie, założmy, że istnieje przekształcenie X spełniające równanie (7). Ponieważ na mocy I^o do grupy należy przekształcenie T_1^{-1} , więc na mocy II^o należy do niej również iloczyn przekształceń $T_1^{-1} T_2$. Mnożąc (7) lewostronnie przez T_1^{-1} , otrzymujemy

$$(8) \quad T_1^{-1}(T_1 X) = T_1^{-1} T_2.$$

Stosując łączność iloczynu oraz (6), otrzymujemy

$$(T_1^{-1} T_1) X = E X = X,$$

skąd wobec (8)

$$(9) \quad X = T_1^{-1} T_2.$$

Równanie (7) ma więc co najwyżej jedno rozwiązanie i musi mieć ono postać (9). Z drugiej strony, równanie (7) ma co najmniej jedno rozwiązanie, ponieważ przekształcenie X określone wzorem (9) spełnia równanie (7). Istotnie

$$T_1(T_1^{-1} T_2) = (T_1 T_1^{-1}) T_2 = E T_2 = T_2.$$

Tym samym twierdzenie jest dowiedzione.

Twierdzenie to wyraża się krócej, mówiąc, że *równanie (7) jest w każdej grupie rozwiązalne jednoznacznie.*

Podobnie dowodzi się, że *równanie*

$$(10) \quad YT_1 = T_2$$

jest w każdej grupie rozwiązalne jednoznacznie.

Rozwiązalność równania (10) musi być jednak dowiedziona niezależnie od rozwiązalności równania (8), gdyż — jak widzieliśmy — mnożenie przekształceń nie jest przemienne.

Jeśli grupa przekształceń $\mathfrak{S}$ jest zawarta w grupie przekształceń $\mathfrak{G}$, to nazywa się *podgrupą grupy* $\mathfrak{G}$.

§ 27. Izometrie

1. Izometrie na płaszczyźnie. Będziemy się zajmowali obecnie *przekształceniami punktowymi*, tj. takimi, w których zbiory Z są zbiorami punktów prostej, płaszczyzny lub przestrzeni.

Weźmy pod uwagę równania

$$(1) \quad x' = a + a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = b + a_{21}x + a_{22}y,$$

gdzie macierz

$$(2) \quad \mathfrak{A} = (a_{ik})$$

jest ortogonalna. Równania te interpretowaliśmy dotychczas jako zależności między współrzędnymi tego samego punktu płaszczyzny w dwu różnych układach współrzędnych prostokątnych.

Możemy im jednak nadać inną interpretację. Ze wzorów (1) wynikają mianowicie wzory

$$(3) \quad x = a_1 + a_{11}x' + a_{21}y', \quad y = b_1 + a_{12}x' + a_{22}y',$$

gdź macierz odwrotna macierzy ortogonalnej jest jej macierzą przestawioną (p. Przypis I, § 4).

Z (1) wynika, że każdej parze uporządkowanej liczb x, y jest jednoznacznie przyporządkowana para x', y' ; z (2) zaś wynika, że każda para uporządkowana liczb x', y' jest przyporządkowana dokładnie jednej parze x, y . Wzory (1) określają zatem przekształcenie wzajemnie jednoznaczne zbioru wszystkich par uporządkowanych x, y na zbiór wszystkich par uporządkowanych x', y' .

Weźmy teraz pod uwagę dwie płaszczyzny Π i Π' oraz w jednej z nich układ prostokątny współrzędnych Oxy , a w drugiej — $O'x'y'$.

Płaszczyzny te mogą być identyczne lub nie. W przypadku płaszczyzn identycznych układy Oxy i $O'x'y'$ mogą również być identyczne lub nie. Pary x, y wyznaczają punkty płaszczyzny Π , a pary x', y' — punkty płaszczyzny Π' . A zatem wzory (1) określają wzajemnie jednoznaczne przekształcenie płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' .

Przekształcenie, które w układach prostokątnych wyraża się wzorami (1), gdzie macierz (2) jest ortogonalna, nazywamy *izometrią*.

Niech izometria T przekształca punkt (x_1, y_1) w punkt (x'_1, y'_1) , a punkt (x_2, y_2) w punkt (x'_2, y'_2) . Wówczas na podstawie (1) mamy

$$x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)$$

$$y'_2 - y'_1 = a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1).$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$p = x_2 - x_1, \quad q = y_2 - y_1, \quad p' = x'_2 - x'_1, \quad q' = y'_2 - y'_1.$$

Zatem

$$(4) \quad p' = a_{11}p + a_{12}q, \quad q' = a_{21}p + a_{22}q.$$

Równania (4) wyznaczają wektor $[p', q']$, w który izometria (1) przekształca wektor $[p, q]$.

Izometria nie zmienia długości wektorów *. Rzeczywiście, mamy wobec (4)

$$\begin{aligned} p'^2 + q'^2 &= (a_{11}p + a_{12}q)^2 + (a_{21}p + a_{22}q)^2 = \\ &= (a_{11}^2 + a_{21}^2)p^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})pq + (a_{12}^2 + a_{22}^2)q^2. \end{aligned}$$

Z własności macierzy ortogonalnych (wzory analogiczne do (10) i (11) z § 25) wynika więc, że

$$p'^2 + q'^2 = p^2 + q^2, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Równania (3) określają przekształcenie odwrotne do (1). Ponieważ macierz (a_{ik}) układu równań (3) jest macierzą przestawioną macierzy $\mathfrak{A}$, więc jest również ortogonalna (p. Przypis I, § 3), a zatem przekształcenie (3) jest izometrią.

Tak więc *przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią*.

Udowodnimy teraz, że *iloczyn dwu izometrii jest izometrią*.

* W § 30 udowodnimy też twierdzenie odwrotne. Zespół obu twierdzeń uzasadnia nazwę izometrii.

Oznaczmy przez T_1 izometrię (1), a przez T_2 izometrię

$$(5) \quad x'' = a'' + \beta_{11}x' + \beta_{12}y', \quad y'' = b'' + \beta_{21}x' + \beta_{22}y',$$

gdzie macierz

$$(6) \quad \mathcal{B} = (\beta_{ik})$$

jest ortogonalna. Położymy T_2T_1 dostajemy, podstawiając (1) do (5). Otrzymujemy w ten sposób

$$(7) \quad x'' = a''' + \gamma_{11}x + \gamma_{12}y, \quad y'' = b''' + \gamma_{21}x + \gamma_{22}y,$$

gdzie

$$\gamma_{11} = \beta_{11}a_{11} + \beta_{12}a_{21}, \quad \gamma_{12} = \beta_{11}a_{12} + \beta_{12}a_{22},$$

$$\gamma_{21} = \beta_{21}a_{11} + \beta_{22}a_{21}, \quad \gamma_{22} = \beta_{21}a_{12} + \beta_{22}a_{22}.$$

Ze wzorów tych wynika dla macierzy $\mathcal{C} = (\gamma_{ik})$ równość

$$(8) \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

Ponieważ macierz $\mathcal{C}$ jest ortogonalna jako iloczyn dwóch macierzy ortogonalnych (p. Przypis I, § 3), więc tym samym przekształcenie (7) jest izometrią, c. b. d. o.

Z równości (8) wynika, że macierz iloczynu dwóch izometrii jest iloczynem ich macierzy i że czynniki w iloczynie macierzy występują w tym samym porządku co czynniki w iloczynie izometrii.

W myśl udowodnionych twierdzeń izometrie przekształcające płaszczyznę w siebie tworzą grupę.

Niech w danej płaszczyźnie układy Oxy i $O'x'y'$ będą identyczne. Rozważamy więc współrzędne punktu (x, y) i jego obrazu (x', y') w tym samym układzie współrzędnych. Wówczas równania

$$(9) \quad x' = x + a, \quad y' = y + b$$

określają izometrię, zwaną przesunięciem o wektor $a = [a, b]$.

Przesunięcia tworzą podgrupę grupy izometrii.

Niech bowiem T będzie przesunięciem (9), a T_1 — przesunięciem o wektor $a_1 = [a_1, b_1]$ czyli przekształceniem określonym przez równania

$$x'' = x' + a_1, \quad y'' = y' + b_1.$$

Wówczas dla T_1T dostajemy

$$(10) \quad x'' = x + (a + a_1), \quad y'' = y + (b + b_1),$$

czyli przesunięcie o wektor $a + b$. Przekształceniem odwrotnym do (9) jest przekształcenie określone równaniami

$$x = x' - a, \quad y = y' - b,$$

czyli przesunięcie o wektor $-a$. Tak więc warunki I^0 i II^0 (str. 127) są spełnione, c. b. d. o.

Ponieważ iloczyn przesunięć o wektor a i o wektor b jest przesunięciem o wektor $a + b$, więc iloczyn przesunięć jest przemienny.

Obrotom o kąt φ dokoła punktu O nazywamy przekształcenie, które wyraża się równościami

$$(11) \quad x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Łatwo sprawdzić, że przekształceniem odwrotnym do (11) jest obrót o kąt $-\varphi$ oraz że iloczyn obrotów o kąt φ i o kąt ψ jest obrotem o kąt $\varphi + \psi$ i że iloczyn ten jest przemienny.

Zatem obroty dokoła tego samego punktu tworzą grupę, w której iloczyn przekształceń jest przemienny.

Natomiast przesunięcia nie są przemienne z obrotami.

Niech bowiem T_1 będzie przesunięciem o wektor a , a T_2 obrotem dokoła punktu O o kąt φ (rys. 65). Niech T_1 przesunie O do P . Wówczas T_2T_1 przekształca punkt O w punkt P' , powstający przez obrót punktu P dokoła punktu O o kąt φ .

Natomiast T_1T_2 przeprowadza O w P , a zatem $T_1T_2 \neq T_2T_1$.

Odbicie symetryczne punktów płaszczyzny w prostej p jest izometrią, ponieważ w dowolnym układzie prostokątnym współrzędnych, którego osią Ox jest prosta p , wyraża się ono równaniami

$$(12) \quad x' = x, \quad y' = -y.$$

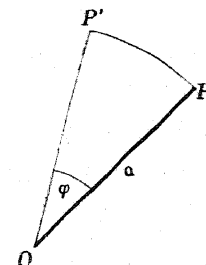
W przeciwieństwie do przesunięć i obrotów odbicie zmieniają orientację płaszczyzny, gdyż zmieniają obieg koła na przeciwny.

Oczywiście, każdą izometrię (1) można złożyć z dwóch przekształceń:

$$(13) \quad x' = a + \xi, \quad y' = b + \eta$$

oraz

$$(14) \quad \xi = a_{11}x + a_{12}y, \quad \eta = a_{21}x + a_{22}y.$$



Rys. 65

Zbadamy teraz bliżej przekształcenia (14). Z równości

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1, \quad \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$$

wynika, że istnieją kąty φ i ψ , dla których

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$

oraz

$$(15) \quad \cos \varphi = \alpha_{11}, \quad -\sin \varphi = \alpha_{12}, \quad \sin \psi = \alpha_{21}, \quad \cos \psi = \alpha_{22}.$$

Z równości

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0$$

wynika dalej, że $\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi = 0$ czyli $\sin(\varphi - \psi) = 0$, skąd

$$(16) \quad \varphi = \psi + k\pi, \quad \text{gdzie} \quad k = 0, 1, -1.$$

Mogą zajść dwa przypadki:

1° $k=0$. Wówczas wobec (14), (15) i (16) dostajemy

$$(17) \quad \xi = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

więc przekształcenie (17) jest obrotem o kąt φ . W tym przypadku

$$(18) \quad |\mathfrak{A}| = |\alpha_{ik}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

2° $k=\pm 1$. Wówczas wobec (15)

$$(19) \quad \xi = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta = -x \sin \varphi - y \cos \varphi.$$

Ta izometria daje się złożyć z następujących dwóch:

$$\xi = \xi', \quad \eta = -\eta'$$

oraz

$$\xi' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta' = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

tj. z odbicia i obrotu. Wobec (19) jest w rozpatrywanym przypadku

$$|\mathfrak{A}| = |\alpha_{ik}| = -1.$$

Udowodniliśmy więc, że każda izometria można złożyć z odbić, przesunięć i obrotów.

Nie każdy jednak z tych czynników musi wystąpić, np. jeśli $|\mathfrak{A}|=1$, to odbicie nie występuje i orientacja płaszczyzny nie ulega zmianie, a jeśli $|\mathfrak{A}|=-1$, to odbicie występuje i orientacja płaszczyzny zmienia się na przeciwną.

Ruchami nazywa się izometrie, dające się złożyć z przesunięć i obrotów.

Oczywiście, *ruchy tworzą grupę*.

Natomiast izometrie zmieniające orientację nie tworzą grupy, gdyż iloczyn dwu takich izometrii jest ruchem.

2. Izometrie w przestrzeni. Izometrie w przestrzeni określa się analitycznie tak jak na płaszczyźnie, zastępując wzory (1) przez wzory (8) z § 25, str. 118, i dowodzi się, że nie zmieniają one odległości i tworzą grupę. Wprowadza się też analogicznie *przesunięcia*

$$(20) \quad x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c,$$

odbicie

$$(21) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z,$$

i obrót dookoła punktu

$$(22) \quad \begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z, \\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z, \\ z' &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z, \end{aligned} \quad \text{gdzie} \quad |\alpha_{ik}| = 1.$$

Pozostają też w mocy analogiczne twierdzenia, jeśli orientację płaszczyzny zastąpić przez orientację przestrzeni.

W przestrzeni jednak, prócz obrotów dookoła punktu, można wprowadzić również *obroty dookoła prostej*. Tak nazywamy obrót dookoła punktu leżącego na prostej, której każdy punkt przechodzi w siebie.

Wówczas każdy punkt przestrzeni obraca się o ten sam kąt dookoła tej prostej.

(Udowodnimy, że każdy obrót dookoła punktu jest obrotem dookoła pewnej prostej przechodzącej przez ten punkt (twierdzenie Eulera).

W tym celu wyprowadzimy wpierw następujący lemat:

Jeśli macierz ortogonalna $\mathfrak{A}$ spełnia warunek

$$(23) \quad |\mathfrak{A}| = 1,$$

to

$$(24) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}-1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-1 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oznaczmy przez A_{ik} dopełnienie algebraiczne elementu a_{ik} w macierzy $\mathfrak{A}$. Wobec (23) oraz równości $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}$ jest więc

$$A_{ik} = a_{ik}.$$

Przez bezpośrednie obliczenie dostajemy równość

$$\begin{vmatrix} a_{11}+s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+s \end{vmatrix} =$$

$$= s^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})s^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})s + |\mathfrak{A}| =$$

$$= s^3 + (a_{11} + a_{12} + a_{13})s^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})s + 1.$$

Wstawiając do niej $s = -1$, otrzymujemy 0, a więc równość (24) zachodzi, c. b. d. o.

Niech teraz będzie dany obrót (22), który nie jest identycznością. Weźmy pod uwagę punkty, które ten obrót przeprowadza w nie same. Dla tych punktów jest więc

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} (25) \quad & (a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ & a_{21}x + (a_{22} - 1)y + a_{23}z = 0, \\ & a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)z = 0. \end{aligned}$$

Wobec (24) wyznacznik układu równań (25) jest równy 0, a więc rząd macierzy tego układu nie przekracza 2. Ale rząd ten nie może też być mniejszy od 2. Gdyby bowiem był równy 0, to byłoby

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq k, \\ 1 & \text{dla } i = k \end{cases}$$

i obrót byłby wówczas przekształceniem przez identyczność, wbrew założeniu. Gdyby zaś rząd macierzy układu równań (25) był równy 1, to układ ten byłby równoważny tylko jednemu z tych równań (p. Przypis I, § 2). Równanie to przedstawiałoby zatem płaszczyznę Π złożoną z punktów przechodzących w siebie. Wobec (23)

izometria ta nie zmienia orientacji. Punkty leżące po jednej stronie płaszczyzny Π przechodzą więc w punkty leżące po tej samej jej stronie. Ponieważ każdy punkt przestrzeni jest wyznaczony przez swe odległości od trzech punktów płaszczyzny Π , te zaś przechodzą w siebie, więc każdy punkt przestrzeni przechodziłby w siebie, wbrew założeniu.

Tak więc rząd macierzy układu (25) jest równy 2. Układ ten sprowadza się zatem do dwóch równań. Przedstawiają one prostą, której każdy punkt przechodzi w siebie, c. b. d. o.

Z udowodnionego twierdzenia wnosimy w szczególności, że wynik kolejnych obrotów przestrzeni dokoła kilku prostych przechodzących przez jeden punkt O może być otrzymany przez obrót dokoła jednej prostej przechodzącej przez ten punkt.)

§ 28. Zmiana układu współrzędnych ukośnokątnych

1. Zmiana układu współrzędnych na prostej. Zanim przystąpimy do zbadania zmian układów współrzędnych w płaszczyźnie i przestrzeni, zbadamy naprzód, jak jest na prostej.

Jeśli oś $O'x'$ powstaje z osi Ox przez przesunięcie początku układu o wektor o składowej a , to między współrzędnymi punktu w obu układach zachodzi zależność

$$(1) \quad x = x' + a.$$

Jeśli zaś oś $O'x'$ powstaje z osi Ox przez zmianę zwrotu, to

$$(2) \quad x = -x'.$$

Jeśli wreszcie zmienimy tylko długość wektora podstawowego i bez zmiany zwrotu osi Ox , to (p. wzór (3) z § 4, str. 21)

$$x = mx', \quad \text{gdzie } m > 0.$$

Najogólniejszą zmianą układu współrzędnych jest zmiana zwrotu i długości wektora podstawowego wraz z przesunięciem początku układu. Wówczas

$$(3) \quad x' = bx + a,$$

gdzie

$$b = \begin{cases} m > 0, & \text{gdy nie ma zmiany zwrotu,} \\ -m < 0, & \text{gdy jest zmiana zwrotu.} \end{cases}$$

Na odwrót, do każdego układu Ox i równości (3) można znaleźć taki układ $O'x'$, że zależności między współrzędnymi punktu w obu układach mają postać (3).

2. Zmiana układu współrzędnych w przestrzeni i na płaszczyźnie. Przy zmianie prostokątnych układów współrzędnych jednego na drugi zakładaliśmy, że w obu układach wektory podstawowe mają długość 1. Obecnie odrzucamy to założenie i bierzemy pod uwagę w przestrzeni dwa układy, na ogół ukośnokątne, $Oxyz$ i $O'x'y'z'$ o dowolnych wektorach podstawowych i, j, k i i', j', k' .

Oznaczmy przez a, b, c współrzędne punktu O' w układzie $Oxyz$, a przez a', b', c' współrzędne punktu O w układzie $O'x'y'z'$. Oczywiście, zachodzą wzory (1), (2), (4) i (5) z § 25, str. 117-118.

Jak wiemy z § 6 (p. str. 27), każdy wektor a w przestrzeni daje się przedstawić w postaci

$$(4) \quad a = ai + bj + ck$$

gdzie a, b, c są składowymi zwyczajnymi wektora a w układzie $Oxyz$. Stosując to w szczególności do wektorów i', j', k' , otrzymujemy

$$(5) \quad \begin{aligned} i' &= a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k, \\ j' &= a_{12}i + a_{22}j + a_{32}k, \\ k' &= a_{13}i + a_{23}j + a_{33}k. \end{aligned}$$

Ponieważ wektory i', j', k' nie są równoległe do jednej płaszczyzny, więc (p. § 11, str. 56)

$$(6) \quad |\mathcal{A}| = |a_{ik}| \neq 0.$$

Podstawiając (5) do wzoru (5) z § 25, str. 118, otrzymujemy

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')i + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')j + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')k.$$

Wiemy również, że każdy wektor daje się przedstawić w postaci (4) tylko w jeden sposób. Znaczy to, że po obu stronach ostatniej równości współczynniki przy i, j i k są jednakowe. Otrzymujemy w ten sposób zależności:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= a + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= b + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= c + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy, że *zależności między współrzędnymi punktu w dowolnych dwóch układach współrzędnych ukośnokątnych w przestrzeni mają postać (7), a więc wyrażają się za pomocą wielomianów pierwszego stopnia, przy czym spełniony jest warunek (6).*

Na odwrót, *gdy dany jest układ współrzędnych $Oxyz$ i równania (7), spełniające warunek (6), to istnieje taki układ współrzędnych $O'x'y'z'$, że równania (7) są zależnościami między współrzędnymi punktu w obu układach.*

Dla dowodu wystarczy wziąć za O' punkt mający w układzie $Oxyz$ współrzędne a, b, c i wprowadzić z tego punktu wektory i', j', k' określone przez wzory (5). Wobec (6) wektory te nie leżą w jednej płaszczyźnie, a więc wyznaczają układ współrzędnych $O'x'y'z'$. Na podstawie udowodnionego twierdzenia współrzędne x', y', z' wyrażają się przez współrzędne x, y, z zależnościami (7), c. b. d. o.

Udowodnimy obecnie, że *gdy wektor a ma w układzie $Oxyz$ składowe p, q, r , a w układzie $O'x'y'z'$ składowe p', q', r' , to*

$$(8) \quad \begin{aligned} p &= a_{11}p' + a_{12}q' + a_{13}r', \\ q &= a_{21}p' + a_{22}q' + a_{23}r', \\ r &= a_{31}p' + a_{32}q' + a_{33}r'. \end{aligned}$$

Istotnie, utwórzmy wektor $P_1P_2 = a$; punkt P_1 niech ma w tych układach współrzędne x_1, y_1, z_1 i x'_1, y'_1, z'_1 , a punkt P_2 — współrzędne x_2, y_2, z_2 i x'_2, y'_2, z'_2 . Zatem

$$(9) \quad \begin{aligned} p &= x_2 - x_1, & q &= y_2 - y_1, & r &= z_2 - z_1, \\ p' &= x'_2 - x'_1, & q' &= y'_2 - y'_1, & r' &= z'_2 - z'_1. \end{aligned}$$

Podstawiając do równości (7) naprzód x'_1, y'_1, z'_1 , a następnie x'_2, y'_2, z'_2 , dostajemy po lewych stronach naprzód x_1, y_1, z_1 , a następnie x_2, y_2, z_2 . Odejmując stronami, otrzymujemy więc

$$x_2 - x_1 = a_{11}(x'_2 - x'_1) + a_{12}(y'_2 - y'_1) + a_{13}(z'_2 - z'_1)$$

i podobnie dla $y_2 - y_1, z_2 - z_1$. Na mocy (9) wynika stąd (8).

W szczególności widzimy, że *dla kierunku, określonego w układzie $Oxyz$ stosunkiem $p:q:r$, a w układzie $O'x'y'z'$ stosunkiem $p':q':r'$, zachodzi zależność*

$$(10) \quad p:q:r = (a_{11}p' + a_{12}q' + a_{13}r') : (a_{21}p' + a_{22}q' + a_{23}r') : (a_{31}p' + a_{32}q' + a_{33}r').$$

Tak samo dowodzi się na płaszczyźnie, że jeśli wektory jednostkowe i', j' układu $O'x'y'$ wyrażają się przez wektory jednostkowe i, j układu Oxy związkami

$$(11) \quad i' = a_{11}i + a_{21}j, \quad j' = a_{12}i + a_{22}j,$$

to związki dla współrzędnych punktu mają postać

$$(12) \quad x = a + a_{11}x' + a_{12}y', \quad y = b + a_{21}x' + a_{22}y',$$

przy czym macierz $\mathfrak{A}$ spełnia warunek (6).

Na odwrót, wzory postaci (12) o macierzy nieosobliwej, tj. spełniającej warunek (6), możemy uważać za zależności między współrzędnymi punktu w dowolnym układzie $O'x'y'$ a współrzędnymi tegoż punktu w odpowiednio dobranym układzie Oxy .

Dla wektora a o składowych p, q w jednym i składowych p', q' w drugim układzie współrzędnych jest

$$(13) \quad p = a_{11}p' + a_{12}q', \quad q = a_{21}p' + a_{22}q'.$$

Miedzy zaś stosunkami $p:q$ i $p':q'$, określającymi kierunek w obu układach współrzędnych, zachodzi zależność

$$(14) \quad p:q = (a_{11}p' + a_{12}q') : (a_{21}p' + a_{22}q').$$

(*Uwaga.* Niech dana będzie dowolna forma kwadratowa dodatnia (p. Przypis I, § 3)

$$(15) \quad f(p, q) = g_{11}p^2 + 2g_{12}pq + g_{22}q^2.$$

Przez przekształcenie kształtu (13) formie tej możemy nadać postać

$$(16) \quad f_1(p', q') = p'^2 + q'^2,$$

(p. Przypis I, § 3). Forma (16) daje więc kwadrat długości wektora w układzie prostokątnym, wzory zaś (13) wyznaczają przejście do pewnego nowego układu współrzędnych, w którym wobec tożsamości

$$f_1(p', q') = f(p, q)$$

kwadrat długości wektora wyraża się wzorem (15).

Udowodniliśmy, że każda forma kwadratowa dodatnia przedstawia w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych kwadrat długości wektora.

Oczywiście, twierdzenie to zachodzi też w przestrzeni.)

§ 29. Przekształcenia afiniczne

1. Przekształcenia afiniczne prostej. Niech na dwóch prostych p i p' dane będą dwa układy współrzędnych, tj. początki O i O' oraz wektory podstawowe i i i' . Punktowi o odciętej x na prostej p przyporządkujemy punkt o odciętej x' na prostej p' , określony przez równanie

$$(1) \quad x' = ax + b,$$

gdzie $a \neq 0$.

Odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, gdyż z (1) wynika, że

$$(2) \quad x = \frac{1}{a}x' - \frac{b}{a},$$

a wobec $a \neq 0$ istnieje x spełniające równanie (2) i jest tylko jedno.

Przekształcenie prostej p na prostą p' , określone wzorem (1), gdzie $a \neq 0$, nazywa się *afinicznym*.

W szczególnym przypadku proste p i p' mogą być identyczne oraz odcięte x i x' mogą być liczone w tym samym układzie współrzędnych lub nie.

Określenie przekształcenia afinicznego nie zależy od układu współrzędnych, tzn. że jakiegokolwiek weźmiemy układy współrzędnych na prostych p i p' , przekształcenie to wyrazi się zawsze wzorem postaci (1).

Rzeczywiście, przejście do nowego układu O_1x_1 na prostej p i nowego układu $O'_1x'_1$ na prostej p' wyraża się przez równości kształtu

$$x = mx_1 + n, \quad x' = m'x'_1 + n',$$

gdzie $m \neq 0$ i $m' \neq 0$. Stąd wobec (1)

$$x'_1 = \frac{x' - n'}{m'} = \frac{ax + b - n'}{m'} = \frac{amx_1 + an + b - n'}{m'}$$

czyli

$$(3) \quad x'_1 = a_1x_1 + n_1,$$

gdzie

$$a_1 = m'^{-1}am \neq 0.$$

Przekształcenie (1) wyraża się więc względem nowych układów współrzędnych na obu prostych wzorem (3), c. b. d. o.

Przekształcenia afiniczne prostej w siebie tworzą grupę. Istotnie, przekształceniem odwrotnym do (1) jest (2), czyli również przekształcenie afiniczne. Iloczynem przekształcenia (1) i przekształcenia

$$x'' = a'x' + b',$$

gdzie $a' \neq 0$, jest przekształcenie

$$x'' = a'a x' + (ab + b'),$$

gdzie $a'a \neq 0$, czyli znów przekształcenie afiniczne.

Każde przekształcenie afiniczne prostej w siebie daje się złożyć z przekształceń następujących trzech typów:

$$(4) \quad x' = ax, \quad \text{gdzie } a > 0,$$

$$(5) \quad x' = -x,$$

$$(6) \quad x' = x + b.$$

Zakładamy tu, że współrzędne punktu i obrazu liczone są w tym samym układzie współrzędnych.

Typ (4) nazywamy *homotetią*.

Powstaje ona przez powiększenie w stosunku $a:1$ odległości wszelkich punktów od punktu O .

Typ (5) jest *odbiciem* w punkcie O , a typ (6) — *przesunięciem* o wektor o składowej b .

Dla dowodu, że każde przekształcenie afiniczne prostej w siebie jest iloczynem homotetii, odbicia i przesunięcia, wystarczy zauważyć, że przekształcenie (1), gdzie x i x' obliczane są w tym samym układzie współrzędnych, jest iloczynem przekształceń

$$x' = ax'', \quad x'' = (\text{sign } a)x''', \quad x''' = x'' + b,$$

$$\text{gdzie } a = |a| \neq 0 \text{ i } \text{sign } a = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a > 0, \\ 0, & \text{gdy } a = 0, \\ -1, & \text{gdy } a < 0. \end{cases} *$$

Gdy $a > 0$, drugie z tych przekształceń jest identycznością, a gdy $a < 0$ — odbiciem.

Gdy l jest składową wektora l , to obrazem wektora l jest wektor l' o składowej

$$l' = al.$$

* sign jest skrótem słowa *signum*, które znaczy po łacinie *znak*.

Wynika to natychmiast z (1). Stąd dostajemy

$$\frac{|l'|}{|l|} = |a|.$$

Zatem w każdym przekształceniu afinicznym prostej stosunek długości wektora do długości obrazu jest stałą zależną jedynie od przekształcenia.

Niechaj T będzie przekształceniem afinicznym, a Z — zbiorem wszystkich punktów x odcinka

$$(7) \quad m \leq x \leq n.$$

T przekształca Z w zbiór wszystkich punktów pewnego odcinka i to w ten sposób, że środek przechodzi na środek.

Istotnie, niech

$$m' = am + b, \quad n' = an + b.$$

Niech dalej x' będzie obrazem punktu x leżącego na odcinku (7). Jeśli $a > 0$, to z (7) wynika, że

$$am + b \leq ax + b \leq an + b$$

czyli

$$m' \leq x' \leq n',$$

jeśli zaś $a < 0$, to podobnie okazuje się, że

$$n' \leq x' \leq m'.$$

W każdym więc razie obraz punktu odcinka (7) leży na odcinku, którego końcami są punkty o współrzędnych m' i n' . Korzystając z (2), dowodzi się, że i na odwrót, każdy punkt odcinka o końcach m' i n' jest obrazem jakiegoś punktu odcinka (7). Wykazaliśmy więc, że odcinek przechodzi w odcinek.

Pozostaje jeszcze dowieść, że środek odcinka przechodzi w środek obrazu. Środkiem odcinka (7) jest punkt

$$x = \frac{m+n}{2},$$

a jego obrazem jest punkt

$$x' = a \frac{m+n}{2} + b = \frac{am+b}{2} + \frac{an+b}{2} = \frac{m'+n'}{2}$$

czyli środek odcinka o końcach m' i n' , c. b. d. o.

2. Przekształcenia afiniczne płaszczyzny. Niech dane będą dwie płaszczyzny Π i Π' , a na nich dowolne układy kartezjańskie współrzędnych Oxy i $O'x'y'$. Wzory

$$(8) \quad x' = a_{11}x + a_{12}y + a, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b,$$

gdzie

$$(9) \quad |\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

określają przekształcenie płaszczyzny Π w Π' . Istotnie, każdy punkt (x', y') płaszczyzny Π' jest obrazem dokładnie jednego punktu (x, y) płaszczyzny Π , gdyż z (8) wynika, że

$$a_{11}x + a_{12}y = x' - a, \quad a_{21}x + a_{22}y = y' - b,$$

a stąd wobec (9) otrzymuje się za pomocą wzorów Cramera (p. Przypis I, § 1)

$$(10) \quad x = b_{11}x' + b_{12}y' + a', \quad y = b_{21}x' + b_{22}y' + b',$$

gdzie

$$(11) \quad \mathcal{B} = (b_{ik}) = \mathcal{A}^{-1},$$

więc

$$(12) \quad |\mathcal{B}| \neq 0.$$

Przekształcenie (8) nazywa się *przekształceniem afinicznym* płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' .

Przykładem przekształcenia afinicznego jest każda izometria.

Nie każde jednak przekształcenie afiniczne jest izometrią.

Np. przekształcenie afiniczne

$$x' = 2x, \quad y' = 2y,$$

gdzie x, y i x', y' są współrzędnymi punktów płaszczyzny Π liczącymi w tym samym układzie współrzędnych, nie jest izometrią, ponieważ powiększa dwukrotnie odległość każdego punktu od początku układu.

Rzut prostopadły płaszczyzny Π' na płaszczyznę Π jest przekształceniem afinicznym. Dobierając bowiem układy Oxy i $O'x'y'$ jak na str. 76, otrzymujemy

$$x = x', \quad y = y' \cos \varphi,$$

a zatem

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos \varphi \neq 0.$$

Podobnie jak dla prostej, *określenie przekształcenia afinicznego na płaszczyźnie nie jest zależne od wyboru układu współrzędnych.* Przejdźmy bowiem na płaszczyźnie Π' do układu współrzędnych $O_1x_1y_1$ związanego z układem $O'x'y'$ zależnościami

$$(13) \quad x'_1 = c_{11}x' + c_{12}y' + a'_1, \quad y'_1 = c_{21}x' + c_{22}y' + b'_1, \quad |\mathcal{C}| = |c_{ik}| \neq 0,$$

na płaszczyźnie zaś Π — do układu współrzędnych $O_1x_1y_1$ związanego z układem Oxy zależnościami

$$(14) \quad x_1 = b_{11}x' + b_{12}y' + a', \quad y_1 = b_{21}x' + b_{22}y' + b', \quad |\mathcal{B}| = |b_{ik}| \neq 0.$$

Z (8), (13) i (14) dostajemy następujące zależności między współrzędnymi x_1, y_1 punktu w układzie $O_1x_1y_1$ a współrzędnymi x'_1, y'_1 jego obrazu w układzie $O'_1x'_1y'_1$:

$$x'_1 = d_{11}x_1 + d_{12}y_1 + a_2, \quad y'_1 = d_{21}x_1 + d_{22}y_1 + b_2,$$

gdzie

$$\mathcal{D} = (d_{ik}) = \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}.$$

Jest więc

$$|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| \cdot |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \neq 0, \quad \text{c. b. d. d.}$$

Przekształcenie odwrotne do afinicznego jest afiniczne. Wynika to stąd, że przekształceniem odwrotnym do (8) jest przekształcenie (10), oraz z nierówności (12).

Iloczyn dwóch przekształceń afinicznych jest przekształceniem afinicznym. Jeśli bowiem T_1 jest przekształceniem (8), a T_2 — przekształceniem

$$x'' = b_{11}x' + b_{12}y' + a', \quad y'' = b_{21}x' + b_{22}y' + b', \quad |\mathcal{B}| \neq 0,$$

to podobnie jak dla izometrii (str. 130) otrzymujemy

$$x'' = c_{11}x + c_{12}y + a'', \quad y'' = c_{21}x + c_{22}y + b'',$$

gdzie $\mathcal{C} = (c_{ik}) = \mathcal{B}\mathcal{A}$, skąd $|\mathcal{C}| \neq 0$, c. b. d. d.

W szczególności z udowodnionych twierdzeń wynika, że *przekształcenia afiniczne płaszczyzny w siebie tworzą grupę.*

Istnieje jedno i tylko jedno przekształcenie afiniczne płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' , które trzy z góry dane punkty P_1, P_2, P_3 , nie leżące na jednej prostej, przeprowadza w trzy z góry dane punkty P'_1, P'_2, P'_3 , również nie leżące na jednej prostej.

Dla dowodu weźmy punkt P_1 za początek ukośnokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie II , osie zaś i jednostki na nich dobierzmy tak, by wektorami podstawowymi były

$$i = P_1P_2 \quad \text{oraz} \quad j = P_1P_3.$$

Punkty P_1, P_2, P_3 są więc w tym układzie współrzędnych punktami

$$P_1(0, 0), \quad P_2(1, 0), \quad P_3(0, 1).$$

Utwórzmy układ współrzędnych $O'x'y'$ w płaszczyźnie II' , którego początkiem jest punkt P'_1 , a wektorami podstawowymi są

$$i = P'_1P'_2, \quad j = P'_1P'_3.$$

W tym układzie P'_1, P'_2, P'_3 są punktami

$$P'_1(0, 0) \quad P'_2(1, 0) \quad P'_3(0, 1).$$

Przypuśćmy, że istnieje przekształcenie T kształtu (8), które punkty P_i przeprowadza w P'_i (dla $i=1, 2, 3$).

Ponieważ P_1 przechodzi w P'_1 , więc podstawiając $x=0$ i $y=0$ do (8), dostajemy $x'=0$ i $y'=0$. Zatem $a=b=0$ i przekształcenie T ma postać

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y.$$

Ponieważ P_2 przechodzi w P'_2 , więc podstawiając tu $x=1$ i $y=0$, otrzymujemy $x'=1$ i $y'=0$. Zatem $a_{11}=1$ i $a_{21}=0$. Podobnie $a_{12}=0$ i $a_{22}=1$.

Przekształcenie T , o ile istnieje, musi więc mieć postać

$$(15) \quad x' = x, \quad y' = y.$$

Ale (15) jest przekształceniem afinicznym, przeprowadzającym punkty P_1, P_2, P_3 w punkty P'_1, P'_2, P'_3 . Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny II w płaszczyznę II' przekształca każdą prostą płaszczyzny II w prostą płaszczyzny II' , i to afinicznie (w sensie afinicznego przekształcenia prostej, określonego na str. 139).

Istotnie, niech p będzie dowolną prostą płaszczyzny II . Weźmy tę prostą za oś Ox układu kartezjańskiego Oxy . Przekształcenie ma wówczas postać (8). Zachodzą zatem również wzory (10).

Prosta p czyli $y=0$ przechodzi więc w prostą

$$b_{21}x' + b_{22}y' + b' = 0,$$

co dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Weźmy teraz prostą p' za oś Ox' układu $O'x'y'$ na płaszczyźnie II' . Obrazem osi Ox jest więc oś Ox' . Obrazem punktu $(x, 0)$ jest punkt osi p' o odciętej

$$x' = a_{11}x + a.$$

Jest to więc przekształcenie afiniczne prostej p w prostą p' , c. b. d. o.

Przekształcenia afiniczne przeprowadzają proste równoległe w proste równoległe. W przeciwnym bowiem razie istniałyby dwie proste równoległe p_1 i p_2 , którym odpowiadałyby dwie proste p'_1 i p'_2 , przecinające się w pewnym punkcie P . Punkt P byłby więc obrazem pewnego punktu prostej p_1 i zarazem pewnego punktu prostej p_2 . Ponieważ proste te się nie przecinają, więc P byłby obrazem dwóch różnych punktów, wbrew wzajemnej jednoznaczności przekształcenia.

Przekształcenie (8) przeprowadza wektor $a=[p, q]$ w wektor a' o składowych

$$(16) \quad p' = a_{11}p + a_{12}q, \quad q' = a_{21}p + a_{22}q.$$

Dowodzi się tego tak samo, jak wzoru (4) z § 27 (p. str. 129).

Jeśli przekształcenie afiniczne przeprowadza wektor a w wektor a' i wektor b w wektor b' , to przeprowadza ono wektor $c=m \cdot a + n \cdot b$ w wektor $c'=m \cdot a' + n \cdot b'$.

Istotnie, niech

$$a = [p_1, q_1], \quad b = [p_2, q_2], \quad a' = [p'_1, q'_1], \quad b' = [p'_2, q'_2].$$

Wówczas między liczbami p_i, q_i, p'_i, q'_i , gdzie $i=1$ i 2 , zachodzą związki (16) oraz

$$c = [mp_1 + np_2, mq_1 + nq_2].$$

Niech $c' = [p', q']$; zatem

$$\begin{aligned} p' &= a_{11}p + a_{12}q = a_{11}(mp_1 + np_2) + a_{12}(mq_1 + nq_2) = \\ &= m(a_{11}p_1 + a_{12}q_1) + n(a_{11}p_2 + a_{12}q_2) = mp'_1 + np'_2 \end{aligned}$$

i podobnie

$$q' = mq'_1 + nq'_2, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Ponieważ przekształcenie afiniczne przeprowadza odcinki w odcinki, więc *trójkąt przechodzi w trójkąt i to tak, że wnętrze trójkąta przechodzi we wnętrze jego obrazu.*

Istotnie, niech P będzie dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta $P_1P_2P_3$; prosta PP_1 niech przecina prostą P_2P_3 w punkcie Q . Punkt Q' leży więc na boku P_2P_3 trójkąta $P_1P_2'P_3'$. Ponieważ odcinek PQ przechodzi w odcinek P_1Q' , więc punkt P , jako punkt wewnętrzny odcinka P_1Q , przechodzi w punkt wewnętrzny P' odcinka P_1Q' . Punkt P leży zatem wewnątrz trójkąta $P_1P_2'P_3'$, c. b. d. o.

Przekształcenie afiniczne zmienia pola wszystkich trójkątów w tym samym stosunku, tzn. że *stosunek pola obrazu trójkąta do pola pierwotnego trójkąta jest liczbą stałą, zależną od przekształcenia, a niezależną od położenia trójkąta.*

Niech bowiem wektory podstawowe układów współrzędnych mają długość 1. Uporządkujmy wierzchołki P_1, P_2, P_3 trójkąta tak, by obieg był dodatni, oraz oznaczmy przez p_1, q_1 i p_2, q_2 składowe wektorów P_1P_2 i P_1P_3 . Wówczas

$$P = \frac{1}{2} \sin \nu \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

W analogicznych oznaczeniach dla obrazu mamy

$$(17) \quad P' = \pm \frac{1}{2} \sin \nu' \begin{vmatrix} p'_1 & q'_1 \\ p'_2 & q'_2 \end{vmatrix}$$

(tu bowiem punkty P'_1, P'_2, P'_3 wzięte w tym porządku nie muszą już mieć obiegu dodatniego, więc może wystąpić znak $-$). Wobec (16) jest

$$\begin{vmatrix} p'_1 & q'_1 \\ p'_2 & q'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix},$$

skąd

$$(18) \quad \frac{P'}{P} = \pm \frac{\sin \nu'}{\sin \nu} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Jeśli w szczególności płaszczyzny Π i Π' oraz układy współrzędnych Oxy i $O'x'y'$ są identyczne, to warunkiem koniecznym i wystarczającym, by w (18) występował znak $+$, jest zgodność obiegów po trójkątach $P_1P_2P_3$ i $P'_1P'_2P'_3$.

Wynika stąd, że *przekształcenia afiniczne płaszczyzny w siebie o wyznaczniku dodatnim nie zmieniają orientacji płaszczyzny, a o wyznaczniku ujemnym zmieniają orientację* (jeśli współrzędne punktów i ich obrazów liczymy w tym samym układzie współrzędnych).

3. Podobieństwa. Za pomocą przekształcenia afinicznego możemy dowolny trójkąt przeprowadzić w dowolny inny. Wynika stąd, że przekształcenia afiniczne na ogół nie zachowują kątów. Szczególnie ważną rolę grają jednak te, które zachowują kąty.

Nazywamy je *podobieństwami*.

Podobieństwa przekształcające płaszczyznę w samą siebie tworzą grupę, gdyż iloczyn dwóch podobieństw, jak również przekształcenie odwrotne do podobieństwa, zachowuje kąty, a więc jest podobieństwem.

Oczywiście *każda izometria jest podobieństwem*, lecz nie na odwrót.

Przykładem podobieństwa, które nie jest izometrią, jest przekształcenie określone w sposób następujący. Niech O i P będą dowolnymi punktami płaszczyzny. Przyporządkujmy punktowi P punkt P' tejże płaszczyzny tak, by $OP' = k \cdot OP$, gdzie k jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą różną od 0. Przekształcenie to jest podobieństwem, ponieważ w każdym układzie ukośnokątnym o początku O jest ono określone przez równości

$$(19) \quad x' = kx, \quad y' = ky,$$

a zatem jest afiniczne; zarazem zachowuje kąty, bo każdy odcinek zwiększa k razy, przekształca więc trójkąt na trójkąt podobny.

Przekształcenie (19) nazywa się *homotetią*, punkt O — jej *środkiem*, a liczba k — *współczynnikiem powiększenia*.

Każde podobieństwo daje się złożyć z izometrii i homotetii.

Istotnie, niechaj przekształcenie T będzie podobieństwem; poprowadźmy z dowolnego punktu O dwa prostopadłe wektory podstawowe $i = OP_1$ i $j = OP_2$, oba o długości 1. Niech T przekształca punkt O w punkt O' , a wektory i i j — w wektory $i' = O'P'_1$ i $j' = O'P'_2$, wychodzące z O' . Ponieważ trójkąt OP_1P_2 jest równoramienny, więc wobec tego, że przekształcenie T , jako podobieństwo, zachowuje kąty, również i trójkąt $O'P'_1P'_2$ jest równoramienny, czyli $|i'| = |j'|$.

Niech zatem

$$|i'| = k, \quad |j'| = k.$$

Weźmy pod uwagę homotetię H , określoną wzorem

$$(20) \quad OP' = k \cdot OP.$$

Przeprowadza ona punkty P_1, P_2 w punkty $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ i trójkąt $OP_1\bar{P}_2$ przystaje do trójkąta $O'P_1P_2'$. Istnieje zatem izometria I , która przekształca O w O' , $\bar{P}_1$ w P_1' i $\bar{P}_2$ w P_2' . Jeśli więc najprzód przekształcimy płaszczyznę przez homotetię H , a następnie przez izometrię I , to przeprowadzimy O w O' , P_1 w P_1' i P_2 w P_2' . Ponieważ punkty O, P_1, P_2 i ich obrazy nie leżą na jednej prostej, więc iloczyn homotetii H i izometrii I jest identyczny z danym z góry podobieństwem T , c. b. d. o.

Podobieństwo przekształca koło w koło, gdyż jest iloczynem izometrii i homotetii, które obie mają tę własność.

(*Jeśli przekształcenie afiniczne przeprowadza chociażby jedno koło K w koło K' , to jest podobieństwem.*)

Dla dowodu założmy najprzód, że promienie kół K i K' są jednakowe. Środek O koła K połowi wszystkie cięciwy koła przechodzące przez niego. Ponieważ przekształcenie afiniczne przeprowadza środek odcinka w środek obrazu tego odcinka, więc obraz O' punktu O połowi cięciwy koła K' przechodzące przez niego. Zatem O' jest środkiem koła K' . Obierzmy na kole K dwa punkty P_1 i P_2 tak, by wektory

$$i = OP_1, \quad j = OP_2$$

były prostopadłe. W układzie współrzędnych Oxy wyznaczonym przez te wektory na płaszczyźnie Π , na której leży koło K , koło to ma równanie

$$(21) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

a punkty P_1 i P_2 mają współrzędne $0, r$ i $r, 0$. Przyjmijmy oznaczenia:

$$(22) \quad i' = O'P_1', \quad j' = O'P_2'$$

i utwórzmy analogiczny układ współrzędnych w płaszczyźnie Π' . Wówczas przekształcenie ma postać (por. str. 144)

$$(23) \quad x' = x, \quad y' = y.$$

Ponieważ w myśl założenia promienie kół K i K' są jednakowe, więc

$$|i'| = |i| = |j'| = |j| = r.$$

Wobec (23) koło K' jako obraz koła (21) ma zatem równanie

$$(24) \quad x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Z drugiej strony, na mocy wzoru (4) z § 7, str. 31, koło o środku $(0, 0)$ i promieniu r ma równanie

$$(25) \quad x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\nu = r^2,$$

gdzie ν jest kątem między wektorami (22). Odejmując (24) od (25), dostajemy dla każdego punktu (x', y') koła K'

$$2x'y'\cos\nu = 0.$$

Ponieważ na kole K' istnieją punkty, w których $x' \neq 0$ i $y' \neq 0$, więc $\cos\nu = 0$ czyli $\nu = \pi/2$. Dowiedliśmy więc, że oba układy współrzędnych Oxy i $O'x'y'$ są prostokątne, przekształcenie zaś wyraża się wzorami (23). Tym samym jest ono izometrią.

Założmy teraz, że promienie obu kół nie są równe. Wówczas wyrównujemy je uprzednio przez homotetię. Nowe przekształcenie jest — jak dowiedliśmy przed chwilą — izometrią, a więc pierwotne składa się z izometrii i homotetii, czyli z dwóch podobieństw; tym samym jest ono podobieństwem, c. b. d. o.)

4. Przekształcenia afiniczne przestrzeni. Analogicznie do płaszczyzny, przekształcenia afiniczne przestrzeni w samą siebie określa się przez wzory

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a,$$

$$(26) \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b,$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c,$$

gdzie

$$(27) \quad |\mathfrak{A}| = |a_{ik}| \neq 0,$$

i dowodzi się, że to określenie przekształcenia afinicznego nie zależy od wyboru układu współrzędnych oraz że przekształcenia afiniczne przestrzeni tworzą grupę.

Przekształcenia afiniczne przestrzeni przeprowadzają płaszczyznę w płaszczyznę i to tak, że każda płaszczyzna zostaje przekształcona afinicznie. Wynika stąd, że:

1° trójkąt przechodzi w trójkąt (p. str. 146),

2° każda prosta przechodzi w prostą i to afinicznie.

Podobnie, przekształcenia afiniczne przestrzeni zachowują równoległość prostych oraz równoległość płaszczyzn.

Do każdej czwórki punktów P_1, P_2, P_3, P_4 nie leżących na jednej płaszczyźnie można dobrać dokładnie jedno przekształcenie afiniczne przeprowadzające je w punkty P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 również nie leżące na jednej płaszczyźnie.

W przestrzeni natomiast nieprawdziwe jest twierdzenie, że przekształcenie afiniczne zmienia pola trójkątów w tym samym stosunku. Np. w prostokątnym układzie współrzędnych przekształcenie afiniczne

$$x' = 2x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

przeprowadza płaszczyznę Oyz w siebie w ten sposób, że każdy punkt przechodzi sam w siebie, a zatem stosunek pól trójkątów jest równy 1, płaszczyznę zaś Oxy też przeprowadza ono w siebie, lecz jest na niej przekształceniem afinicznym

$$x' = 2x, \quad y' = y, \quad |\mathfrak{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

a zatem pola trójkątów zwiększają się 2 razy.

Zachodzi natomiast twierdzenie następujące:

Dla przekształcenia afinicznego przestrzeni stosunek objętości czworosięka do objętości jego obrazu jest wielkością stałą, zależną jedynie od przekształcenia.

Pojęcia podobieństwa i homotetii wprowadza się dla przestrzeni analogicznie jak dla płaszczyzny.

Każde podobieństwo składa się z izometrii i homotetii.

Podobieństwa przeprowadzają kule w kule.

Wszystkich tych twierdzeń dowodzi się zupełnie podobnie jak na płaszczyźnie.

(§ 30. Własności przekształceń afinicznych

1. Przekształcenie prostej. Na str. 141 udowodniliśmy, że przekształcenie afiniczne prostej w prostą przeprowadza odcinek w odcinek, a środek odcinka w środek obrazu tego odcinka.

Twierdzenie to daje się odwrócić: przekształcenie T prostej p w prostą p' , które przeprowadza odcinek w odcinek w ten sposób, że środek przechodzi w środek, jest afiniczne.

Dla dowodu weźmy dowolny punkt O za początek układu współrzędnych na prostej p , inny zaś jej punkt P za koniec wektora

podstawowego i . Na prostej p' weźmy analogicznie obrazy punktów O' i P' za początek układu współrzędnych i koniec wektora podstawowego i' . Przekształcenie T przeprowadza punkt o współrzędnej x w punkt o współrzędnej

$$(1) \quad x' = f(x).$$

Mamy dowieść, że funkcja $f(x)$ ma postać (1) z § 29 (p. str. 139). Otóż z założenia, że obrazem punktu O jest punkt O' , wynika, że

$$f(0) = 0.$$

Z założenia zaś o przekształceniu środka w środek wynika, że dla dowolnej pary punktów x_1, x_2 jest

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x'_1 + x'_2}{2}$$

czyli

$$(2) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Wobec dowolności x_1 i x_2 możemy tu podstawić $x_1 = 0$ i $x_2 = x$. Dostajemy więc

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}.$$

Z (2) wynika więc dla każdej pary liczb x_1, x_2 równość

$$(3) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$

stąd zaś przez indukcję

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n).$$

W szczególności dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej $x = x_1 = x_2 = \dots = x_n$ jest

$$(4) \quad f(nx) = n f(x).$$

Podstawiając tu $x = 1/n$, dostajemy $f(1) = n f(1/n)$ czyli

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1),$$

a ponieważ punkt P przechodzi w punkt P' , więc $f(1) = 1$, skąd

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Stąd i z (4) otrzymujemy dla wszelkiej liczby naturalnej m

$$(5) \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \frac{1}{n}\right) = m f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Na mocy (3) jest $f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0$ czyli

$$f(-x) = -f(x).$$

Stąd zaś i z (5) wynika, że dla każdej liczby wymiernej w jest

$$f(w) = w.$$

Udowodnimy teraz, że dla każdej liczby rzeczywistej x jest

$$(6) \quad f(x) = x.$$

Przypuśćmy, że dla pewnego x_0 jest $x_0 \neq f(x_0)$, np. że

$$x_0 < f(x_0).$$

Niech w_1 i w_2 będą liczbami wymiernymi, dla których

$$(7) \quad w_1 < x_0 < w_2 < f(x_0).$$

Odcinek o końcach mających współrzędne w_1 i w_2 przechodzi w myśl założenia w odcinek, którego końce mają współrzędne $f(w_1) = w_1$ a $f(w_2) = w_2$, a tym samym liczba $f(x_0)$ musiałaby leżeć między w_1 a w_2 , wbrew (7).

Podobnie dowodzi się, że nie może być $x_0 > f(x_0)$. Dla każdego x zachodzi więc równość (6), czyli przekształcenie ma w przyjętych układach współrzędnych kształt (1) z § 29, c. b. d. o.

2. Przekształcenie płaszczyzny i przestrzeni. Twierdzenie Staudta i Darboux dla przekształceń afinicznych. Udowodnimy* twierdzenie odwrotne do jednego z poprzednio dowiedzionych (p. str. 144), a mianowicie następujące *twierdzenie Staudta i Darboux*:

Przekształcenie wzajemnie jednoznaczne T płaszczyzny w płaszczyznę, które przeprowadza proste w proste, jest afiniczne.

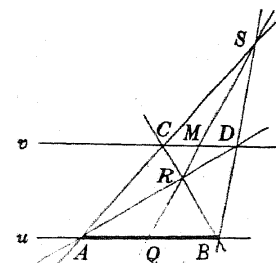
* w sposób zbliżony do użytego w książce: Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, *Аналитическая геометрия*, 1, ОГИЗ 1948, str. 121-125.

Posłużymy się mianowicie tzw. *konfiguracją Steinera*, która pozwala, gdy dane są dwie proste równoległe, znaleźć z pomocą samego liniału środek dowolnego odcinka leżącego na jednej z tych prostych.

Niech proste u i v będą równoległe i niech na prostej u dany będzie odcinek AB (rys. 66). Dowolny punkt S poza prostymi u i v łączymy prostymi z punktami A i B ; znajdujemy punkty przecięcia C i D tych prostych z prostą v . Proste AD i BC przecinają się w punkcie R .

Prosta SR przecina prostą u w punkcie Q , który jest środkiem odcinka AB .

Rzeczywiście, z równoległości prostych u i v wynika, że



Rys. 66

$$|AQ| : |CM| = |SQ| : |SM|, \quad |BQ| : |MD| = |SQ| : |SM|,$$

skąd

$$(8) \quad |AQ| : |QB| = |CM| : |MD|.$$

Podobnie

$$|AQ| : |MD| = |QR| : |RM|, \quad |BQ| : |CM| = |QR| : |RM|,$$

skąd

$$(9) \quad |AQ| : |BQ| = |MD| : |CM|.$$

Z (8) i (9) wynika, że

$$|AQ| : |BQ| = |BQ| : |AQ|,$$

stąd zaś, że $|AQ| = |BQ|$, c. b. d. o.

Stwierdzamy dalej, że *zawsze zachodzi nierówność*

$$(10) \quad |RM| < |SM|.$$

Bowiem z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy

$$\frac{|SM|}{|SQ|} = \frac{|CM|}{|AQ|} = \frac{|CM|}{|BQ|} = \frac{|RM|}{|RQ|},$$

skąd

$$(11) \quad |SM| \cdot |RQ| = |RM| \cdot |SQ|,$$

a ponieważ $|SQ| > |RQ|$, więc z (11) wynika (10).

Z (10) wynika dalej, że *środek P odcinka RS leży zewnątrz odcinka MQ*.

Wreszcie, zachodzi wzór

$$(12) \quad |PM| \cdot |PQ| = |PR|^2 = |PS|^2;$$

z (11) wynika bowiem równość

$$(|SP| + |PM|) \cdot (|PQ| - |PR|) = (|PR| - |PM|) \cdot (|SP| + |PQ|),$$

skąd po wymnożeniu, z uwagi na $|SP| = |PR|$, dostajemy (12).

Do dowodu twierdzenia Staudta i Darboux potrzebne nam będą jeszcze dwa lematy:

Lemat 1. Niech na prostej p będzie dany odcinek MQ i punkt P leżący zewnątrz niego. Możemy wówczas przez M i Q przeprowadzić proste równoległe, a następnie tak dobrać na prostej p dwa punkty R i S , żeby otrzymać konfigurację Steinera (p. rys. 66, str. 153), w której *środkiem odcinka RS jest punkt P*.

Dowód. Oznaczmy przez M ten z punktów M i Q , który jest bliższy P :

$$|PM| < |PQ|.$$

Wówczas

$$|PM| < \sqrt{|PM| \cdot |PQ|} < |PQ|.$$

Zatem między punktami M i Q leży punkt R , dla którego zachodzi wzór (12). Przeprowadźmy przez M i Q dwie proste równoległe u i v i odetnijmy na prostej u równe wektory AQ i QB . Wówczas proste AR i RD wyznaczą na prostej v punkty C i D ; z podobieństwa trójkątów AQR i RMD oraz QBR i QMC wynika, że $CM = MD$. Prosta CA przecina prostą QP w punkcie S_1 , a prosta BD przecina prostą QP w punkcie S_2 . Ponieważ

$$|S_1M| : |S_1Q| = |CM| : |AQ| = |MD| : |QB| = |S_2M| : |S_2Q|,$$

więc punkty S_1 i S_2 zlewają się w jeden punkt S . Dla punktu S zachodzi wzór (12), a więc P jest *środkiem odcinka RS*, c. b. d. o.

Lemat 2. Jeśli przekształcenie T płaszczyzny przeprowadza proste w proste, to jest ono na każdej prostej przekształceniem afinicznym tej prostej.

Dowód. Na podstawie twierdzenia o przekształceniach prostych (p. str. 150) wystarczy udowodnić, że przekształcenie T przeprowadza odcinek w odcinek tak, że *środek przechodzi w środek*.

Zauważmy naprzód, że T przeprowadza proste równoległe w proste równoległe (dowód jak na str. 145).

Zauważmy następnie, że przekształcenie T przeprowadza *środek P dowolnego odcinka RS w środek P' odcinka R'S'*, gdzie R' i S' są obrazami punktów R i S . Możemy bowiem na RS jako na przekątnej zbudować równoległobok $RSUV$. Wówczas P jest punktem przecięcia przekątnych RS i UV . Ponieważ równoległobok przechodzi w równoległobok, więc punkt P przechodzi w punkt przecięcia przekątnych $R'S'$ i $U'V'$ czyli w *środek odcinka R'S'*.

Należy jeszcze udowodnić, że odcinek przechodzi w odcinek. W tym celu weźmy na prostej p dowolne punkty M i Q oraz punkt P leżący zewnątrz odcinka MQ . Zbudujmy na odcinku MQ konfigurację Steinera tak, by punkt P był *środkiem odcinka RS* (lemat 1). Ponieważ T przeprowadza proste równoległe w proste równoległe, więc konfiguracja Steinera przejdzie w konfigurację Steinera, a zatem punkt P — w *środek P' odcinka R'S'* czyli w punkt leżący zewnątrz odcinka $M'Q'$. Tak więc przekształcenie T przeprowadza punkty zewnętrzne odcinka w punkty zewnętrzne jego obrazu.

Gdyby przekształcenie T przeprowadziło prócz tego jakiś punkt wewnętrzny P odcinka MQ w punkt zewnętrzny P' odcinka $M'Q'$, to przekształcenie odwrotne T^{-1} przeprowadzałoby wówczas punkt zewnętrzny P' odcinka $M'Q'$ w punkt wewnętrzny P odcinka MQ . Ale przekształcenie T^{-1} również spełnia założenie lematu (przekształca proste w proste). Spełnia więc ono też wyprowadzony z tego założenia wniosek, którym jest — jak widzieliśmy przed chwilą — przekształcanie punktów zewnętrznych odcinka w punkty zewnętrzne jego obrazu. Otrzymalibyśmy więc sprzeczność.

Tym samym udowodnione jest, że przekształcenie T przeprowadza odcinek w odcinek, c. b. d. o.

Twierdzenie Staudta i Darboux wynika z lematu 2, jak następuje:

Niech Oxy będzie dowolnym układem kartezjańskim w płaszczyźnie Π ; za układ $O'x'y'$ w płaszczyźnie Π' weźmy obraz układu Oxy . Ponieważ przekształcenie T przeprowadza proste równoległe w proste równoległe, więc w szczególności proste równoległe do osi Oy przejdą w proste równoległe do osi $O'y'$. Innymi słowy, odcięta obrazu punktu P' zależy tylko od odciętej punktu P , nie zależy zaś od jego rzędnej. Zatem przekształcenie T wyraża się wzorami

$$(13) \quad x' = f(x), \quad y' = g(y).$$

Równość $x' = f(x)$ określa przekształcenie osi Ox w oś $O'x'$, które jest afiniczne na podstawie lematu 2. Jest więc ono postaci

$$f(x) = ax + b, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0.$$

Podobnie

$$g(y) = cy + d, \quad \text{gdzie} \quad c \neq 0.$$

Ponieważ przekształcenie (13) ma w przyjętych układach współrzędnych postać

$$x' = ax + b, \quad y' = cy + d, \quad \text{gdzie} \quad ac \neq 0,$$

więc jest ono afiniczne, c. b. d. o.

W przestrzeni prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Przekształcenie wzajemnie jednoznaczne T przestrzeni w siebie, które ma jedną z następujących własności:

(I) *przeprowadza proste w proste,*

(II) *przeprowadza płaszczyzny w płaszczyzny,*

jest afiniczne.

Z własności (II) wynika własność (I). T przekształca bowiem krawędź przecięcia dwu płaszczyzn w krawędź przecięcia obrazów tych płaszczyzn.

Na odwrót, z własności (II) wynika własność (I). Gdy bowiem w płaszczyźnie Π proste p_1 i p_2 się przecinają, to płaszczyzna Π jest miejscem geometrycznym wszystkich prostych p przecinających proste p_1 i p_2 . Obrazami prostych p_1 , p_2 i p są proste p'_1 , p'_2 i p' . Zatem Π' , jako obraz Π , jest miejscem geometrycznym prostych p' , te zaś przecinają dwie proste p'_1 i p'_2 (które się również przecinają), a więc Π' jest płaszczyzną.

Załóżmy teraz, że przekształcenie T ma własność (II). Niech Π będzie jakąkolwiek płaszczyzną. Przechodzi ona w płaszczyznę Π' i — ponieważ z (II) wynika (I) — proste przechodzą w proste. Zatem przekształcenie Π w Π' jest afiniczne na mocy twierdzenia Staudta i Darboux, a wobec tego (p. § 29, str. 144) przekształcenie prostej w prostą jest również afiniczne. Jest oczywiste, że płaszczyzny równoległe przechodzą w płaszczyzny równoległe.

Niech $Oxyz$ będzie dowolnym układem współrzędnych kartezjańskich na Π , a $O'x'y'z'$ niech będzie jego obrazem na Π' . Ponieważ płaszczyzny równoległe do Π , tj. płaszczyzny o równaniu postaci $z=c$, przechodzą w płaszczyzny równoległe do Π' , więc w przedstawieniu przekształcenia T przez funkcje

$$x' = f(x, y, z), \quad y' = g(x, y, z), \quad z' = h(x, y, z)$$

trzecia funkcja nie zależy od x ani y . Analogicznie stwierdza się, że pierwsza funkcja nie zależy od y ani z i druga od x ani z . Zatem

$$x' = f(x), \quad y' = g(y), \quad z' = h(z).$$

Ponieważ $x' = f(x)$ wyznacza przekształcenie osi Ox w oś $O'x'$, które jest afiniczne, więc

$$x' = ax + a', \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0,$$

i podobnie

$$y' = by + b', \quad \text{gdzie} \quad b \neq 0,$$

$$z' = cz + c', \quad \text{gdzie} \quad c \neq 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Z udowodnionych twierdzeń wynika jako prosty wniosek, że każde wzajemnie jednoznaczne przekształcenie T przestrzeni (płaszczyzny), które zachowuje odległość, jest izometrią.

Istotnie, stwierdzamy naprzód, że proste przechodzą w proste, czyli że T jest przekształceniem afinicznym.

Na to, by trzy punkty P_1, P_2, P_3 leżały na jednej prostej, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła jedna z równości:

$$(14) \quad |P_1P_2| + |P_2P_3| = |P_1P_3|,$$

$$(15) \quad |P_1P_3| + |P_3P_2| = |P_1P_2|.$$

Ale gdy jedna z tych równości zachodzi, to zachodzi ona również dla punktów P'_1, P'_2, P'_3 , gdyż T nie zmienia odległości. Punkty P'_1, P'_2 i P'_3 leżą więc też na jednej prostej.

Stwierdzamy dalej, że przekształcenie T nie zmienia kątów, gdyż nie zmienia boków trójkąta; jest więc ono podobieństwem.

Jako takie, składa się ono z homotetii i izometrii. W homotetii tej musi być współczynnik powiększenia $k=1$, gdyż w przeciwnym razie odległości punktów zwiększyłyby się k -krotnie. Zatem T jest izometrią, c. b. d. o.

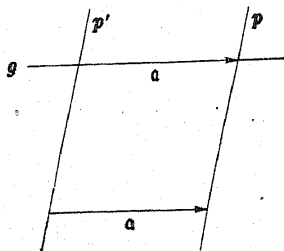
Ostatnie twierdzenie jest prawdziwe także dla prostej. Wystarczy udowodnić, że T jest przekształceniem afinicznym, czyli że odcinek przechodzi w odcinek i środek odcinka w środek obrazu tego odcinka. Otóż na to, by punkt P_3 był punktem odcinka P_1P_2 , potrzeba i wystarcza, by zachodziła równość (15). Wówczas jednak ta sama równość zachodzi dla obrazu. Środek P_3 odcinka P_1P_2 daje się scharakteryzować przez równość

$$|P_1P_3| = |P_3P_2|,$$

a więc przechodzi on w środek.

3. Rzut równoległy. Niech dane będą dwie proste p i p' oraz prosta g , nie równoległa do żadnej z nich.

Rzut równoległy do g prostej p na prostą p' jest przekształceniem afinicznym, gdyż przeprowadza odcinek w odcinek, a środek odcinka w środek obrazu tego odcinka.



Rys. 67

Jeśli ponadto proste p i p' są równoległe, to rzut równoległy do g prostej p na prostą p' jest izometrią, zachowującą kierunek i zwrot wektorów (rys. 67).

Ponieważ w tym przypadku wektory łączące odpowiednie punkty prostych p i p' są równe, więc izometria ta powstaje przez przesunięcie prostej p o pewien wektor.

Jeśli proste p i p' przecinają się, to ich punkt przecięcia może być uważany raz za punkt prostej p , a drugi raz za punkt prostej p' .

Na to, by przekształcenie afiniczne T prostej w prostą było rzutem równoległym, potrzeba i wystarcza, by przeprowadzało ono punkt przecięcia tych prostych w siebie.

Konieczność warunku jest oczywista (rys. 68). Dla dowodu dostateczności założmy, że punkt przecięcia P tych prostych przechodzi na siebie, tj. że

$$T(P) = P.$$

Obierzmy P za początek układu współrzędnych na obu prostych. Ponieważ przekształcenie T przeprowadza punkt o współrzędnej $x=0$ w punkt o współrzędnej $x'=0$, więc wyraża się ono wzorem

$$x' = ax, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0,$$

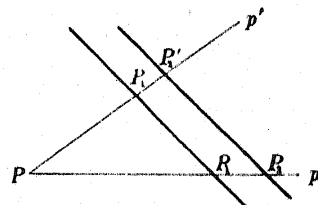
skąd

$$\frac{|x'|}{|x|} = |a|.$$

Dla odpowiadających sobie par punktów P_1, P'_1 i P_2, P'_2 mamy więc

$$\frac{|PP'_1|}{|PP_1|} = \frac{|PP'_2|}{|PP_2|};$$

proste $P_1P'_1$ i $P_2P'_2$ są zatem równoległe, c. b. d. o.



Rys. 68

Z poprzednich twierdzeń wynika, że nie każde przekształcenie afiniczne prostej w prostą jest rzutem równoległym.

Udowodnimy natomiast, że każde przekształcenie afiniczne prostej w prostą da się złożyć ze skończenie wielu (mianowicie z co najwyżej czterech) rzutów równoległych.

Założmy naprzód, że proste p i p' nie są równoległe. Niech P będzie dowolnie ustalonym punktem prostej p , a P' jego obrazem na prostej p' w przekształceniu T :

$$(16) \quad P' = T(P).$$

Przesuńmy prostą p tak, by punkt P pokrył się z P' . Innymi słowy, weźmy pod uwagę rzut równoległy T_1 prostej p na prostą p'' równoległą do p i przechodzącą przez punkt P' :

$$(17) \quad T_1(P') = P'.$$

Niech Q będzie punktem prostej p i niech

$$(18) \quad T(Q) = Q', \quad T_1(Q) = Q''.$$

Przyporządkowanie

$$(19) \quad T_2(Q'') = Q'$$

określa przekształcenie afiniczne prostej p'' w prostą p' , dla którego wobec (16) i (17) jest

$$T_2(P') = P'.$$

Ponieważ P' jest punktem przecięcia prostych p'' i p' , więc tym samym (p. str. 158) T_2 jest rzutem równoległym. Z (18) i (19) wynika, że

$$T(Q) = T_2(Q'') = T_2[T_1(Q)]$$

czyli

$$T = T_2 T_1.$$

T jest więc iloczynem dwu rzutów.

Jeśli zaś proste p i p' są równoległe, to bierzemy prostą pomocniczą $\bar{p}$, nierównoległą do nich, dowolne przekształcenie afiniczne T_1 prostej p w prostą $\bar{p}$ oraz takie przekształcenie afiniczne T_2 prostej $\bar{p}$ w prostą p' , żeby

$$T = T_2 T_1.$$

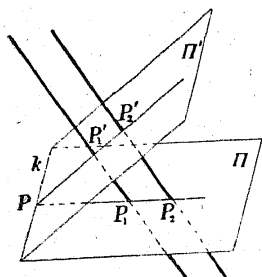
W myśl pierwszej części dowodu każde z przekształceń T_1 i T_2 daje się złożyć z dwóch rzutów równoległych, a tym samym T z czterech takich rzutów, c. b. d. o.

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe i na płaszczyźnie: każde przekształcenie afiniczne płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' (identyczną z Π lub nie) daje się złożyć ze skończenie wielu (mianowicie co najwyżej trzech) rzutów równoległych.

Udowodnimy wprawdzie twierdzenie pomocnicze:

Jeśli k jest krawędzią przecięcia dwóch nierównoległych płaszczyzn Π i Π' , to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by przekształcenie afiniczne T płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' było rzutem równoległym, jest żeby każdy punkt prostej k przechodził sam w siebie.

Ponieważ konieczność tego warunku jest oczywista, więc dowiedzimy jego dostateczności. Weźmy w płaszczyźnie Π dowolne



Rys. 69

dwa punkty P_1 i P_2 tak, by prosta P_1P_2 przecinała prostą k w punkcie P (rys. 69). Obraz tej prostej jest prostą $P'_1P'_2$, również przechodzącą przez P . Ponieważ

$$T(P)=P,$$

więc na mocy twierdzenia ze str. 158 przekształcenie prostej P_1P_2 w prostą $P'_1P'_2$ jest rzutem równoległym, czyli proste $P_1P'_1$ i $P_2P'_2$ są równoległe. T jest więc rzutem równoległym. Tym samym dowód twierdzenia pomocniczego jest zakończony.

Niech teraz będą dane płaszczyzny nierównoległe Π i Π' oraz przekształcenie afiniczne T płaszczyzny Π w płaszczyznę Π' . Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie Π dowolną prostą p , której obrazem na płaszczyźnie Π' jest prosta p' skośna względem p . Taka prosta p oczywiście istnieje, bo w przeciwnym razie każdy punkt krawędzi przecięcia obu płaszczyzn przeszedłby sam w siebie. Niech P będzie dowolnym punktem prostej p i niech $T(P)=P'$. Przesuńmy równolegle płaszczyznę Π tak, by punkt P pokrył się z punktem P' . Innymi słowy, weźmy rzut T_1 płaszczyzny Π na płaszczyznę równoległą Π'' , dla którego

$$T_1(P)=P'.$$

Niech T przeprowadza p w p'' . Proste p'' i p' mają punkty wspólne, lecz są różne. Dla dowolnego punktu Q płaszczyzny Π niechaj

$$T(Q)=Q', \quad T_1(Q)=Q''.$$

Oznaczmy przez T_2 przekształcenie Π'' w Π' , określone przez równość $T_2(Q'')=Q'$ czyli

$$(20) \quad T_2=TT_1^{-1}.$$

Przekształcenie T_2 przeprowadza p'' w p' i zachodzi równość

$$(21) \quad T_2(P')=P'.$$

Oznaczmy przez Π''' dowolną płaszczyznę przechodzącą przez p' , różną od Π' . Ponieważ T_2 przekształca prostą p'' w prostą p' i zachodzi równość (21), więc istnieje rzut o kierunku l , który dla prostej p'' jest identyczny z przekształceniem T_2 . Oznaczmy przez T_3 rzut o kierunku l płaszczyzny Π'' na płaszczyznę Π''' i niech

$$T_2(Q'')=Q', \quad T_3(Q'')=Q''';$$

stąd

$$Q'=T_2[T_3^{-1}(Q''')].$$

A zatem przekształcenie $T_2T_3^{-1}$ przeprowadza płaszczyznę Π''' w płaszczyznę Π' w ten sposób, że każdy punkt krawędzi przecięcia p' tych płaszczyzn przechodzi sam w siebie. Jest więc ono rzutem; oznaczmy go przez T_4 . Wówczas

$$T_2T_3^{-1}=T_4,$$

skąd $T_2=T_3T_4$ i wobec (20)

$$T=T_3T_4T_1.$$

Tak więc T składa się z trzech rzutów.

W przypadku, gdy płaszczyzny Π i Π' są równoległe, można — podobnie jak dla przekształceń prostej w prostą — użyć pośrednictwa płaszczyzny nierównoległej do żadnej z nich.)

§ 31. O klasyfikacji pojęć i twierdzeń geometrii

W 1872 roku, w wykładzie inauguracyjnym na uniwersytecie w Erlangen, Feliks Klein wygłosił szereg tez, które stały się podstawą współczesnej klasyfikacji pojęć i twierdzeń geometrii *. Klasyfikacja ta opiera się na pojęciu grupy przekształceń.

* F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872. Przedruk w czasopiśmie *Mathematische Annalen*, tom 43 (1893) oraz w wydawnictwie F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, I, Berlin 1921.

Weźmy np. pod uwagę grupę przekształceń afinicznych przestrzeni. Każde przekształcenie tej grupy przeprowadza proste w proste, płaszczyzny w płaszczyzny, odcinki w odcinki. Wyrażamy to krótko, mówiąc, że prosta, płaszczyzna i odcinek są *niezmiennikami przekształceń afinicznych*. Dlatego nazywamy pojęcia prostej, płaszczyzny i odcinka *pojęciami afinicznymi*. Podobnie, pojęciami afinicznymi są — jak widzieliśmy — równoległość płaszczyzn i prostych oraz środek odcinka.

Teoria własności, które są niezmiennikami przekształceń afinicznych, nazywa się *geometrią afiniczną*.

Ogólnie, Klein nazywa *geometrią grupy przekształceń* $\mathfrak{G}$ teorię własności, które są niezmiennikami przekształceń należących do grupy $\mathfrak{G}$.

Np. stosunek długości dwóch odcinków nie występuje w geometrii afinicznej, gdyż możemy przez przekształcenie afiniczne każdy trójkąt przeprowadzić w dowolny inny trójkąt, a więc zmienić stosunek boków. Natomiast — jak udowodnimy w następnym rozdziale — stosunek długości odcinków leżących na jednej prostej jest pojęciem afinicznym.

Grupa afiniczna zawiera grupę podobieństw. Każde więc twierdzenie afiniczne jest prawdziwe w *geometrii podobieństw*.

W geometrii podobieństw, prócz pojęć afinicznych, występują np. pojęcia kąta i koła, gdyż są to niezmienniki podobieństw. Geometria podobieństw jest bogatsza niż afiniczna; przez zwężenie bowiem grupy przekształceń afinicznych wyróżniliśmy nowe przekształcenia, podobieństwa, które prócz tych własności, jakie mają wszystkie przekształcenia afiniczne, mają jeszcze inne własności, jak np. niezmienniczość kątów, dzięki czemu ilość wniosków się wzbogaca.

W geometrii podobieństw występuje jeszcze jedno ważne pojęcie: stosunek dwóch dowolnych odcinków. Dzięki temu, gdy raz ustalimy pewien odcinek jako jednostkę długości, możemy wszystkim innym odcinkom przypisać długość jako ich stosunek do obraznej jednostki.

Grupa podobieństw zawiera grupę izometrii. Teoria niezmienników tej grupy nazywa się *geometrią metryczną*.

Każde twierdzenie geometrii afinicznej lub podobieństw jest prawdziwe w geometrii metrycznej, lecz nie na odwrót. Prócz pojęć geometrii podobieństw występują tu jeszcze inne pojęcia, np. 1 m, 1 cm³ itd. Jednakże geometria kończy się właściwie na geo-

metrii podobieństw, bo np. w twierdzeniu, że w trójkącie o bokach 1, 2 i $\sqrt{3}$ kąty wynoszą 30°, 60° i 90°, obojętna jest dla nas jednostka miary, a zmiana jednostki miary prowadzi od razu do przekształcenia podobnego przestrzeni. Geometria metryczna należy więc raczej do geodezji, astronomii, fizyki itd. niż do matematyki.

(Dlaczego Klein oparł swą klasyfikację geometrii na pojęciu grupy przekształceń, a nie dowolnego zbioru przekształceń?)

Weźmy pod uwagę pojęcie przystawiania dwu tworów przestrzennych, znane z geometrii elementarnej. Możemy je określić jako własność polegającą na tym, że istnieje izometria przekształcająca jeden z tych tworów w drugi.

Niech będzie dana geometria pewnego zbioru 3 przekształceń czyli teoria niezmienników przekształceń należących do tego zbioru. Nazwijmy dwa twory *przystającymi według zbioru 3*, jeśli w zbiorze tym istnieje przekształcenie, które przeprowadza jeden twór w drugi. Naturalne jest żądanie, żeby spełnione były następujące własności:

1° *zwrotność*: każdy twór przystaje do siebie według zbioru 3.

2° *symetria*: jeśli U_1 przystaje do U_2 według zbioru 3, to U_2 przystaje do U_1 według zbioru 3.

3° *przechođność*: jeśli U_1 przystaje do U_2 , a U_2 do U_3 według zbioru 3, to U_1 przystaje do U_3 według tegoż zbioru przekształceń.

Własność 1° jest na pewno spełniona, jeśli tylko zbiór 3 zawiera przekształcenie identyczne E . Wówczas bowiem istnieje w zbiorze 3 przekształcenie każdego tworu w siebie.

Własność 2° jest spełniona, jeżeli tylko zbiór 3 zawiera zawsze wraz z przekształceniem T przekształcenie odwrotne T^{-1} . Jeśli bowiem T przekształca U_1 w U_2 , to T^{-1} przekształca U_2 w U_1 .

Własność 3° jest spełniona, gdy wraz z przekształceniem T_1 przeprowadzającym U_1 w U_2 i przekształceniem T_2 przeprowadzającym U_2 w U_3 , w zbiorze 3 zawsze istnieje przekształcenie $T_2 T_1$, ponieważ przeprowadza ono U_1 w U_3 .

Ale z tych trzech własności wynika, że 3 jest grupą przekształceń.)

Weźmy jeszcze pod uwagę przekształcenia wzajemnie jednoznaczne płaszczyzny w płaszczyznę, które są *ciągłe*, tzn. dające się wyrazić wzorami

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y),$$

gdzie f i g są funkcjami ciągłymi w całej płaszczyźnie.

Przekształcenia takie nazywają się przekształceniami *topologicznymi* lub *homeomorfizmami*.

Tworzą one grupę, a ich geometria nazywa się *topologią płaszczyzny*.

Pojęcie prostej nie jest oczywiście pojęciem topologicznym. Jeśli jednak zdefiniujemy krzywą ciągłą jako twór dający się określić przez równania

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t),$$

dla $0 \leq t \leq 1$, gdzie funkcje f i φ są ciągłe, to takie pojęcie krzywej ciągłej jest pojęciem topologicznym.

Każde twierdzenie topologii płaszczyzny jest prawdziwe w geometrii afinicznej, gdyż przekształcenia afiniczne są wzajemnie jednoznaczne i ciągłe.

Widzimy zatem, że otrzymujemy rozmaite działy geometrii zależnie od tego, jaką grupę przekształceń bierzemy za podstawę. Pojęcie grupy przekształceń pozwala w ten sposób zbudować jednolitą i konsekwentną klasyfikację rozmaitych działów geometrii. Po raz pierwszy podniósł to Klein, czym w wysokim stopniu przyczynił się do uporządkowania i planowego rozwoju geometrii współczesnej.

W rozdziałach VII i VIII zajmować się będziemy geometrią afiniczną oraz geometrią podobieństw płaszczyzny i przestrzeni.

ROZDZIAŁ VII

ELEMENTY NIEWŁAŚCIWE, WSPÓLRZĘDNE JEDNORODNE

§ 32. Elementy w nieskończoności

W geometrii okazuje się wielce pożyteczną przestrzeń wzbogaconą o tzw. *punkty niewłaściwe*, zwane też *punktami w nieskończoności*.

Podstawą intuicyjną tego wzbogacenia przestrzeni jest następujące rozumowanie:

Wyobraźmy sobie w przestrzeni linie proste przechodzące przez punkty $P_1, P_2, \dots$ i przecinające się w pewnym punkcie P . Jeśli punkt P oddala się nieograniczenie, a punkty $P_1, P_2, \dots$ pozostają nieruchome, to proste te dążą do położenia równoległego.

Geometry sprzed XIX wieku wyrażali to mówiąc, że wszystkie proste równoległe przecinają się w jednym i tym samym „punkcie w nieskończoności”, a tym samym, że każdemu kierunkowi odpowiada jednoznacznie pewien punkt w nieskończoności. Nie definiowali jednak samego punktu w nieskończoności. Współczesna geometria wprowadza dwie takie definicje: *syntetyczną*, tj. nie opartą na pojęciach liczbowych, i *analityczną*, tj. posługującą się tymi pojęciami. Użyjemy tu metody syntetycznej.

Przestrzeń w dotychczasowym znaczeniu nazywamy *euklidesową*, a kierunki w tej przestrzeni — *punktami w nieskończoności* lub krócej *punktami w ∞* .

Zbiór złożony ze wszystkich punktów przestrzeni euklidesowej i wszystkich punktów w ∞ nazywamy *przestrzenią rzutową*.

W sensie tej definicji przestrzeń euklidesowa jest więc częścią przestrzeni rzutowej.