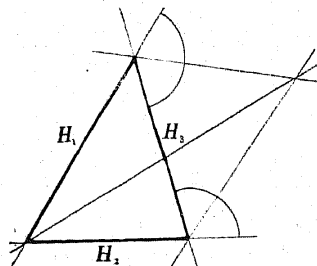


Ponieważ w równaniu (*) nie gra roli wartość liczb λ_1 i λ_2 , lecz ich stosunek (**), więc możemy przyjąć np. $\lambda_1=4$ i $\lambda_2=1$, skąd otrzymujemy dla wysokości równanie

$$9x-6y+13=0.$$

2. Dowieść, że dwusieczne dwóch kątów zewnętrznych trójkąta i dwusieczna trzeciego kąta wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie.

Boki trójkąta dzielą płaszczyznę na 7 części. Dwa kąty zewnętrzne leżą w jednej z nich (rys. 59). W tej części właśnie umieścimy początek dowolnego kartezjańskiego układu współrzędnych. Niechaj boki trójkąta mają równania normalne



Rys. 59

$$h_1(x, y)=0, \quad h_2(x, y)=0, \quad h_3(x, y)=0.$$

W punktach wybranej części płaszczyzny wszystkie trzy wyrażenia $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$, $h_3(x, y)$ są ujemne. Aby znaleźć równanie dwusiecznej kąta zewnętrznego, którego ramionami są proste h_1 i h_3 , zauważmy, że dwusieczna ta jest miejscem geometrycznym punktów równo oddalonych od tych prostych. Ponieważ dla punktów tej części płaszczyzny odległości od ramion wynoszą

$$\delta_1=|h_1(x, y)|=-h_1(x, y), \quad \delta_3=|h_3(x, y)|=-h_3(x, y),$$

więc z $\delta_1=\delta_3$ otrzymujemy równanie tej dwusiecznej:

$$h_1(x, y)-h_3(x, y)=0.$$

Podobnie, dwusieczne drugiego kąta zewnętrznego i kąta wewnętrznego mają równania:

$$h_3(x, y)-h_2(x, y)=0, \quad h_2(x, y)-h_1(x, y)=0.$$

Z tożsamości

$$(h_1-h_3)+(h_3-h_2)+(h_2-h_1)=0$$

wynika na mocy (9), że wszystkie trzy dwusieczne należą do jednego pęku, a że nie są równoległe, więc przecinają się w jednym punkcie.

ROZDZIAŁ V

PŁASZCZYZNA I PROSTA W PRZESTRZENI

§ 22. Płaszczyzna w przestrzeni

1. **Równanie ogólne płaszczyzny.** Niech w przestrzeni będzie dany dowolny kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$, płaszczyzna Π i wektor a prostopadły do Π . Niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnym punktem tej płaszczyzny, $P(x, y, z)$ — dowolnym punktem przestrzeni, a r i r_0 — wektorami OP i OP_0 .

Na to, by punkt P leżał na płaszczyźnie Π , potrzeba i wystarczy, żeby wektor P_0P był prostopadły do wektora a czyli żeby

$$(1) \quad a(r-r_0)=0.$$

Oznaczmy współrzędne kowariantne wektora a przez A, B, C . Warunek (1) jest równoważny równaniu

$$(2) \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Widzimy zatem, że każda płaszczyzna daje się przedstawić równaniem pierwszego stopnia.

Na odwrót, każde równanie pierwszego stopnia przedstawia płaszczyznę.

Istotnie, niech dane będzie równanie pierwszego stopnia

$$(3) \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

gdzie

$$A^2+B^2+C^2>0;$$

oznaczymy przez a wektor o współrzędnych kowariantnych A, B, C . Istnieją punkty, których współrzędne spełniają równanie (1), np. punkt $P(-D/A, 0, 0)$, gdy $A \neq 0$. Niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie którymkolwiek z nich. Wówczas

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

a więc równanie (3) jest równoważne równaniu (2). Z tego zaś wynika, że punkty $P(x, y, z)$ spełniające równanie (3) wypełniają płaszczyznę prostopadłą do wektora a .

Równanie postaci (3) nazywa się — analogicznie do równania ogólnego prostej (§ 17, str. 85) — *równaniem ogólnym płaszczyzny*.

Widzimy zarazem, że w przypadku prostokątnego układu współrzędnych współczynniki przy x, y, z w równaniu ogólnym płaszczyzny są składowymi zwyczajnymi wektora prostopadłego do tej płaszczyzny.

2. Równanie odcinkowe płaszczyzny. Łatwo sprawdzić, że płaszczyzna, która przecina osie układu w punktach o współrzędnych $u, 0, 0$, $0, v, 0$ i $0, 0, w$, ma równanie

$$(4) \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

Nazywa się je — podobnie jak dla prostej (p. § 17, str. 89) — *równaniem odcinkowym płaszczyzny*.

3. Kąt między płaszczyznami. Znajdziemy obecnie wzory, wyznaczające kąty dwusienne między płaszczyznami o równaniach

$$(5) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Niech w tym celu a_1 i a_2 będą wektorami o składowych kowariantnych A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2 . Ponieważ są to wektory prostopadłe do obu płaszczyzn, więc kąty dwusienne między płaszczyznami są równe kątom między wektorami a_1 i a_2 oraz między wektorami a_1 i $-a_2$. Oznaczając przez a_2, b_2, c_2 składowe zwyczajne wektora a_2 , mamy więc

$$(6) \quad \cos \varphi = \pm \frac{A_1a_2 + B_1b_2 + C_1c_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

W szczególności w prostokątnych układach współrzędnych

$$(7) \quad \cos \varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Wynikają stąd następujące twierdzenia:

Na to, by płaszczyzny (5) były prostopadłe, potrzeba i wystarcza, żeby

1° w układzie ukośnokątnym współrzędnych

$$(8) \quad A_1a_2 + B_1b_2 + C_1c_2 = 0,$$

2° w układzie zaś prostokątnym

$$(9) \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Na to, by w dowolnym układzie współrzędnych (ukośnokątnym lub prostokątnym) równania (5) przedstawiały płaszczyzny równoległe, potrzeba i wystarcza, żeby prostopadłe do nich wektory a_1 i a_2 były równoległe, czyli żeby współrzędne kowariantne tych wektorów spełniały warunek

$$(10) \quad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2.$$

Na to, by równania (5) przedstawiały płaszczyzny identyczne, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(11) \quad A_1 : B_1 : C_1 : D_1 = A_2 : B_2 : C_2 : D_2.$$

Dowody tych twierdzeń są analogiczne do dowodów dla prostej na płaszczyźnie (p. § 18, str. 91-92).

4. Przedstawienie parametryczne płaszczyzny. Płaszczyzna w przestrzeni daje się również przedstawić w postaci parametrycznej, za pomocą dwóch parametrów.

Wyprowadźmy z dowolnego punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ płaszczyzny Π leżące na niej wektory nierównoległe $a_1 = [a_1, b_1, c_1]$ i $a_2 = [a_2, b_2, c_2]$. Dla każdego punktu P płaszczyzny Π wektor P_0P jest równoległy do tej płaszczyzny, a więc istnieje para liczb s, t (p. § 5, str. 23), dla której

$$P_0P = s \cdot a_1 + t \cdot a_2.$$

Stąd przez przejście do składowych obu wektorów otrzymujemy *przedstawienie parametryczne płaszczyzny*:

$$(12) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + sa_1 + ta_2, \\ y &= y_0 + sb_1 + tb_2, \\ z &= z_0 + sc_1 + tc_2. \end{aligned}$$

Oczywiście, liczby s i t są współrzędnymi punktu na płaszczyźnie Π w układzie współrzędnych, którego początkiem jest P_0 , a wektorami podstawowymi a_1 i a_2 .

5. Równanie normalne płaszczyzny. Niech w dowolnym układzie kartezjańskim współrzędnych $Oxyz$ w przestrzeni będzie dana płaszczyzna Π . Oznaczmy przez e wektor o długości 1, prostopadły do płaszczyzny Π , o zwrocie od początku układu współrzęd-

nych ku tej płaszczyźnie. W przypadku, gdy płaszczyzna Π przechodzi przez początek O , nadajemy wektorowi e którykolwiek z dwóch możliwych zwrotów. Składowe kowariantne wektora e są więc równe cosinusom α_x, α_y i α_z kątów, jakie ten wektor tworzy z osiami. Niech q będzie osią prostopadłą do płaszczyzny Π i mającą zwrot wektora e , $P(x, y, z)$ — dowolnym punktem przestrzeni, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — dowolnym punktem płaszczyzny Π , a d — wartością rzutu wektora P_0P na oś q . Wówczas — analogicznie jak dla prostej na płaszczyźnie (p. str. 94) — jest $d = P_0P \cdot e$ czyli

$$(13) \quad d = \alpha_x(x - x_0) + \alpha_y(y - y_0) + \alpha_z(z - z_0).$$

W szczególności, gdy P jest początkiem układu współrzędnych, rzut wektora P_0P na oś q ma zwrot przeciwny zwrotowi wektora e (lub P_0P jest wektorem zerowym). Oznaczając więc przez p odległość początku O układu współrzędnych od płaszczyzny Π , obliczoną w zwrocie dodatnim, mamy

$$O_\Pi O \cdot e = -p.$$

Podstawiając $x=y=z=0$ do (13), dostajemy stąd

$$-p = -(\alpha_x x_0 + \alpha_y y_0 + \alpha_z z_0)$$

czyli: dla dowolnego punktu (x, y, z) przestrzeni jest

$$(14) \quad d = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - p.$$

W szczególności, na to, by punkt $P(x, y, z)$ leżał na płaszczyźnie Π , potrzeba i wystarczy, żeby

$$(15) \quad \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - p = 0.$$

Jest to tzw. *równanie normalne płaszczyzny*. Nazywa się je także jej *równaniem Hessego*.

Podobnie jak dla prostej (p. str. 95), przyjmujemy dla skrócenia następujące oznaczenie:

$$(16) \quad h(x, y, z) \equiv \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - p.$$

Równanie normalne płaszczyzny przybiera więc postać

$$h(x, y, z) = 0,$$

a odległość δ punktu $P(x, y, z)$ od płaszczyzny (15), liczona w zwrocie dodatnim, wyrazi się wzorem

$$(17) \quad \delta = |d| = |h(x, y, z)|.$$

Niech teraz płaszczyzna Π w przestrzeni będzie przedstawiona równaniem ogólnym

$$(18) \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Jak wiemy (p. str. 103), A, B, C są składowymi kowariantnymi wektora a prostopadłego do płaszczyzny. Niech a, b, c będą jego składowymi zwyczajnymi. Oczywiście możemy tak dobrać liczbę ϱ , by równanie

$$(19) \quad \varrho Ax + \varrho By + \varrho Cz + \varrho D = 0$$

było równaniem normalnym płaszczyzny. Na to potrzeba i wystarczy, by wektor $\varrho \cdot a$ o współrzędnych kowariantnych $\varrho A, \varrho B, \varrho C$ i zwyczajnych $\varrho a, \varrho b, \varrho c$ miał długość 1, skąd

$$\varrho A \cdot \varrho a + \varrho B \cdot \varrho b + \varrho C \cdot \varrho c = 1$$

czyli

$$\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{Aa + Bb + Cc}}.$$

Jeśli znak obierzemy tak, by $\varrho D \leq 0$, otrzymamy równanie normalne. Zatem

$$(20) \quad h(x, y, z) \equiv \pm \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{Aa + Bb + Cc}}.$$

W szczególności dla odległości punktu $P(x, y, z)$ od płaszczyzny (15) dostajemy wzór

$$(21) \quad \delta = |h(x, y, z)| = \left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{Aa + Bb + Cc}} \right|.$$

W układzie prostokątnym współrzędnych jest $A=a, B=b$ i $C=c$, a więc

$$(22) \quad \delta = |h(x, y, z)| = \left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Płaszczyzna o równaniu $u(x, y, z) = 0$ dzieli przestrzeń na dwie części; w jednej z nich jest $u(x, y, z) < 0$, a w drugiej $u(x, y, z) > 0$.

6. Pęki płaszczyzn. Pękiem przecinających się płaszczyzn nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn zawierających jedną prostą wspólną p .

Ta prosta nazywa się *osią pęku płaszczyzn*.

Pękiem płaszczyzn równoległych nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn równoległych do jednej i tej samej płaszczyzny.

Niech w dowolnym kartezjańskim układzie współrzędnych będą dane dwie różne płaszczyzny:

$$(23) \quad \begin{aligned} u_1(x, y, z) &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ u_2(x, y, z) &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

Tak samo jak dla pęku prostych na płaszczyźnie, dowodzi się następujących twierdzeń:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, by płaszczyzna należała do pęku wyznaczonego przez płaszczyzny (23), jest, żeby dała się ona przedstawić przez równanie postaci

$$(24) \quad \lambda_1 u_1(x, y, z) + \lambda_2 u_2(x, y, z) = 0,$$

gdzie $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$.

Na to, by płaszczyzna

$$(25) \quad u_3(x, y, z) \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

należała do pęku wyznaczonego przez płaszczyzny (23), potrzeba i wystarczy, żeby istniały liczby μ_1, μ_2, μ_3 nie znikające równocześnie i spełniające warunek

$$(26) \quad \mu_1 u_1(x, y, z) + \mu_2 u_2(x, y, z) + \mu_3 u_3(x, y, z) \equiv 0.$$

Warunek ten jest równoważny warunkowi, by rząd macierzy

$$(27) \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

był równy 2.

7. Płaszczyzna przez trzy punkty. Niech będą dane w przestrzeni cztery punkty

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2), \quad P_3(x_3, y_3, z_3), \quad P_4(x_4, y_4, z_4).$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by te cztery punkty leżały na jednej płaszczyźnie, jest równość

$$(28) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Równość ta wyraża bowiem, że objętość czworościanu o wierzchołkach P_1, P_2, P_3 i P_4 jest równa zero (p. § 10, str. 49). Wynika stąd twierdzenie:

Jeśli trzy punkty P_1, P_2, P_3 nie leżą na jednej prostej, to równaniem płaszczyzny przechodzącej przez te trzy punkty jest

$$(29) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to bowiem równanie pierwszego stopnia: istotnie, rozwijając je według pierwszego wiersza, otrzymujemy

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

przy czym (p. § 10, wzór (17), str. 49)

$$2P_{yz} = |A| \sin \lambda, \quad 2P_{xz} = |B| \sin \mu, \quad 2P_{xy} = |C| \sin \nu,$$

gdzie P_{yz} jest polem rzutu trójkąta $P_1P_2P_3$ na płaszczyznę Oyz itd.; zatem liczby A, B i C nie mogą zniknąć równocześnie.

§ 23. Prosta w przestrzeni

1. Prosta jako krawędź przecięcia dwóch płaszczyzn. Niech w przestrzeni będą dane dwie płaszczyzny nierównoległe

$$(1) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

a więc (p. str. 105) dla których

$$(2) \quad A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2.$$

Płaszczyzny te przecinają się wzdłuż prostej. Na to, by punkt leżał na tej prostej, potrzeba i wystarczy, żeby jego współrzędne spełniały jednocześnie oba równania (1). Układ równań (1) wyznacza więc krawędź przecięcia dwóch płaszczyzn.

Jest oczywiste, że każda prosta da się przedstawić w postaci (1) nieskończenie wieloma sposobami, ponieważ istnieje nieskończenie wiele par płaszczyzn przechodzących przez tę prostą. Jeśli jednak dane jest jedno przedstawienie prostej w postaci (1), to każdą płaszczyznę przechodzącą przez tę prostą możemy otrzymać, dobierając odpowiednio λ_1 i λ_2 w równaniu (p. wzór (24), str. 108):

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)z + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) = 0.$$

Znajdźmy kierunek $l:m:n$ prostej (1). W tym celu zauważmy, że prosta (1), jako leżąca w obu płaszczyznach, jest prostopadła do wektorów prostopadłych do tych płaszczyzn. Wektory te mają współrzędne kowariantne A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2 . Zachodzą więc dwa warunki prostopadłości:

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0, \quad A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0.$$

Wobec (2) otrzymujemy stąd (p. przykład 2, str. 62).

$$(3) \quad l:m:n = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

2. Przedstawienie prostej przez jej rzuty. Prosta p w przestrzeni może być również określona przez swoje rzuty, równoległe do osi układu współrzędnych, na dwie spośród płaszczyzn tego układu. Jeśli np. rzuty prostej p na płaszczyzny Oxy i Oxz mają w tych płaszczyznach równania

$$(4) \quad y = ax + b, \quad z = cx + d,$$

to te równania wyznaczają prostą p . Równania (4) możemy też traktować jako równania dwóch płaszczyzn przechodzących przez prostą p , z których pierwsza jest równoległa do osi Oz , a druga do osi Ox .

Aby przejść od (1) do (4), należy z równań (1) wyeliminować raz z , a drugi raz y . Eliminacja z daje rzut prostej p na płaszczyznę Oxy , równoległy do osi Oz ; podobnie dostajemy drugi rzut.

3. Przedstawienie parametryczne prostej. Prosta w przestrzeni może być też przedstawiona w postaci parametrycznej. W tym celu oznaczamy przez $b = [l, m, n]$ dowolny wektor równoległy do prostej (prosta ma więc kierunek $l:m:n$), przez $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dowolny, lecz ustalony punkt na prostej, a przez $P(x, y, z)$ punkt bieżący na niej. Wówczas — analogicznie jak dla prostej na płaszczyźnie (p. wzór (7) z § 17, str. 86) — zbiór punktów P różnych od P_0 daje się przedstawić równaniem

$$(5) \quad (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = l : m : n.$$

Jeśli prosta nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn układu współrzędnych, to $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ i (5) możemy napisać w postaci

$$(6) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

W każdym zaś razie zamiast przedstawienia (5) możemy użyć równoważnego mu przedstawienia

$$(7) \quad x = x_0 + ls, \quad y = y_0 + ms, \quad z = z_0 + ns.$$

Dla $s=0$ otrzymujemy również punkt P_0 , który nie jest uchwycony w przedstawieniu (5).

Jest to *przedstawienie parametryczne prostej w przestrzeni*.

Układ równań (7) można zastąpić jednym równaniem wektorowym

$$(8) \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{b} \cdot s.$$

Przedstawienie parametryczne prostej wyznacza oś, jaka powstaje z tej prostej przez nadanie jej zwrotu wektora $\vec{b}$.

W szczególnym przypadku, gdy $|\vec{b}|=1$, liczba s jest równa wartości wektora $\vec{r} - \vec{r}_0$ na tej osi, liczba zaś $|s|$ jest równa odległości punktu P od punktu P_0 .

Jeśli układ współrzędnych jest prostokątny i $|\vec{b}|=1$, to składowe wektora $\vec{b}$ są jego cosinusami kierunkowymi i prosta daje się wówczas przedstawić w formie

$$(9) \quad x = x_0 + s a_x, \quad y = y_0 + s a_y, \quad z = z_0 + s a_z.$$

W dowolnym zaś układzie współrzędnych kartezjańskich prosta przechodząca przez dwa punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ma kierunek

$$l:m:n = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1),$$

a więc ma równania

$$(10) \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)s, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)s, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)s.$$

Jeśli ponadto prosta ta nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn układu współrzędnych, to daje się też przedstawić w postaci

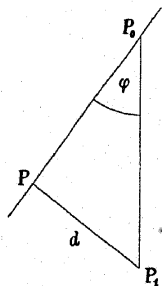
$$(11) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Podobnie jak na płaszczyźnie (p. str. 88), można również w przestrzeni uważać przedstawienie parametryczne prostej za przedstawienie ruchu jednostajnego po tej prostej.

§ 24. Przykłady zagadnień dla prostej i płaszczyzny w przestrzeni

1. Znaleźć w układzie prostokątnym współrzędnych odległość punktu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ od prostej

$$(1) \quad x = x_0 + ls, \quad y = y_0 + ms, \quad z = z_0 + ns.$$



Rys. 60

Niech P_0 będzie punktem o współrzędnych x_0, y_0, z_0 , P zaś — rzutem prostokątnym punktu P_1 na tę prostą (rys. 60). Zatem

$$|P_1P| = |P_1P_0| \cdot |\sin \varphi|.$$

Oznaczając przez $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ cosinusy kierunkowe prostej (1), przez $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ cosinusy wektora P_0P_1 i wprowadzając jeszcze skróty

$$d = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}, \quad \delta = |P_1P_0|,$$

mamy

$$\alpha_x = \frac{l}{d}, \quad \alpha_y = \frac{m}{d}, \quad \alpha_z = \frac{n}{d},$$

$$\beta_x = \frac{x_1 - x_0}{\delta}, \quad \beta_y = \frac{y_1 - y_0}{\delta}, \quad \beta_z = \frac{z_1 - z_0}{\delta}.$$

Korzystając ze wzoru 18, str. 38, dostajemy zatem

$$(2) \quad |P_0P_1| = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & m \\ z_1 - z_0 & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & n \\ x_1 - x_0 & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & l \\ y_1 - y_0 & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

2. Podać warunek równoległości prostej

$$x = x_0 + ls, \quad y = y_0 + ms, \quad z = z_0 + ns$$

do płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ponieważ wektor a o składowych kowariantnych A, B, C jest prostopadły do płaszczyzny, więc na to, by prosta była równoległa do płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, żeby wektor o składowych zwyczajnych l, m, n był prostopadły do wektora a . Zatem warunek równoległości prostej do płaszczyzny ma postać

$$(3) \quad lA + mB + nC = 0.$$

3. Wyprowadzić równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch nierównoległych prostych p_1 i p_2 o równaniach

$$(4) \quad x = x_1 + l_1s, \quad y = y_1 + m_1s, \quad z = z_1 + n_1s,$$

$$(5) \quad x = x_2 + l_2t, \quad y = y_2 + m_2t, \quad z = z_2 + n_2t.$$

Zachowując poprzednie oznaczenia, otrzymujemy wobec (3) następujące dwa warunki, wyznaczające wektor równoległy do płaszczyzny:

$$l_1A + m_1B + n_1C = 0, \quad l_2A + m_2B + n_2C = 0,$$

skąd

$$A : B : C = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Równanie tej płaszczyzny ma więc postać

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

czyli

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Znaleźć równanie prostej p o kierunku $l:m:n$, przecinającej proste nierównoległe (4) i (5).

W tym celu przez prostą (4) prowadzimy płaszczyznę równoległą do kierunku $l:m:n$. Ma ona wobec (6) równanie

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ponieważ przechodzi przez punkt (x_1, y_1, z_1) i jest równoległa do kierunków $l:m:n$ i $l_1:m_1:n_1$. Taką samą płaszczyznę prowadzimy przez prostą (5). Ma ona równanie

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l & m & n \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Równania (7) i (8) wyznaczają prostą p .

5. Znaleźć najkrótszą odległość między prostymi (4) i (5).

W tym celu prowadzimy przez początek układu współrzędnych płaszczyznę Π równoległą do obu prostych. Ma ona równanie

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijając wyznacznik według pierwszego wiersza, dostajemy

$$Ax + By + Cz = 0,$$

gdzie

$$(10) \quad A = m_1 n_2 - n_1 m_2, \quad B = n_1 l_2 - l_1 n_2, \quad C = l_1 m_2 - m_1 l_2.$$

Liczby A, B, C są składowymi kowariantnymi wektora prostopadłego do płaszczyzny. Niech a, b, c będą jego składowymi zwyczajnymi. Wówczas płaszczyzna (9) ma równanie normalne

$$(11) \quad h(x, y, z) = \frac{\pm 1}{\sqrt{Aa + Bb + Cc}} \begin{vmatrix} x & y & z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ leży na prostej (4), a punkt $P_2(x_2, y_2, z_2)$ — na prostej (5). Niech

$$\delta_1 = h(x_1, y_1, z_1), \quad \delta_2 = h(x_2, y_2, z_2).$$

Jeśli oba punkty leżą po jednej stronie płaszczyzny (11), to liczby δ_1 i δ_2 mają ten sam znak, a liczby $|\delta_1|$ i $|\delta_2|$ są odległościami prostych od płaszczyzny (11). W tym przypadku więc dla najkrótszej odległości obu prostych dostajemy

$$(12) \quad \delta = |\delta_1 - \delta_2|.$$

Jeśli punkty P_1 i P_2 leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny, to δ_1 i δ_2 mają przeciwne znaki i wówczas

$$\delta = |\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_1 - \delta_2|.$$

W każdym przypadku zachodzi więc równość (12) czyli

$$(13) \quad \delta = |h(x_1, y_1, z_1) - h(x_2, y_2, z_2)|.$$

Wobec (11) dostajemy

$$(14) \quad \delta = \frac{\pm 1}{\sqrt{Aa + Bb + Cc}} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

przy czym znak ułamka powinien być taki, żeby otrzymać liczbę δ dodatnią.

W szczególności, w prostokątnym układzie współrzędnych jest

$$(15) \quad \delta = \left| \frac{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

W układzie ukośnokątnym, w którym np. $\lambda = \mu = \nu = 60^\circ$, zachodzą na mocy wzoru (29) z § 9, str. 44, następujące związki między składowymi kowariantnymi a zwyczajnymi wektora prostopadłego do płaszczyzny:

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c, & B &= \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c, & C &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c, \\ 2a &= 3A - B - C, & 2b &= -A + 3B - C, & 2c &= -A - B + 3C. \end{aligned}$$

Dla prostych

$$x = y = 1 + z \quad \text{i} \quad x = 1 + s, \quad y = 2s, \quad z = -s$$

jest

$$l_1 : m_1 : n_1 = 1 : 1 : 1, \quad l_2 : m_2 : n_2 = 1 : 2 : -1.$$

Zatem wobec (10) —

$$A = -3, \quad B = 2, \quad C = 1,$$

skąd

$$a = -6, \quad b = 4, \quad c = 2,$$

stąd zaś $Aa + Bb + Cc = 28$.

Równanie normalne płaszczyzny Π jest więc następujące:

$$h(x, y, z) = \frac{-3x + 2y + z}{\pm \sqrt{56}}.$$

Tym samym

$$\delta = |h(0, 0, -1) - h(-1, 0, 0)| = \frac{4}{\sqrt{28}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

6. Podać warunek na to, żeby proste (4) i (5) leżały na jednej płaszczyźnie.

Jeśli proste te nie są równoległe, to żeby leżały one na jednej płaszczyźnie, potrzeba i wystarcza, by się przecinały. Wobec (14)

dostajemy dla tego przypadku następujący warunek konieczny i dostateczny:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Warunek ten jest również spełniony dla prostych równoległych, ponieważ wówczas

$$l_1 : m_1 : n_1 = l_2 : m_2 : n_2.$$

7. W układzie współrzędnych o kątach λ, μ, ν znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do osi Oz i równania prostej prostopadłej do płaszczyzny Oxy , przechodzących przez początek układu.

Szukana płaszczyzna jest miejscem geometrycznym punktów, których rzutem prostopadłym na oś Oz jest początek układu współrzędnych. Punkty te mają współrzędną kowariantną $C=0$. Stąd otrzymujemy równanie tej płaszczyzny:

$$x \cos \mu + y \cos \lambda + z = 0.$$

Podobnie znajdujemy równania szukanej prostej. Jest ona wyznaczona przez układ równań

$$(17) \quad x + y \cos \nu + z \cos \mu = 0, \quad x \cos \nu + y + z \cos \lambda = 0.$$

8. W układzie współrzędnych o kątach λ, μ, ν znaleźć równanie prostej tworzącej z osiami współrzędnych kąty $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ i przechodzącej przez początek układu.

Niech A, B, C będą współrzędnymi kowariantnymi punktu $P(x, y, z)$ tej prostej. Wówczas

$$(18) \quad A = |OP| \cos \varphi_x, \quad B = |OP| \cos \varphi_y, \quad C = |OP| \cos \varphi_z,$$

a więc, gdy kąty $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ są różne od $\pi/2$,

$$\frac{A}{\cos \varphi_x} = \frac{B}{\cos \varphi_y} = \frac{C}{\cos \varphi_z}.$$

Stąd otrzymujemy równania prostej

$$\frac{x + y \cos \nu + z \cos \mu}{\cos \varphi_x} = \frac{x \cos \nu + y + z \cos \lambda}{\cos \varphi_y} = \frac{x \cos \mu + y \cos \lambda + z}{\cos \varphi_z}.$$

Jeśli jeden lub dwa z kątów $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ jest równy $\pi/2$, zadanie rozwiązuje się analogicznie, na podstawie (18).

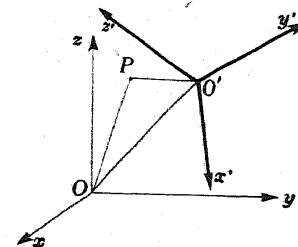
ROZDZIAŁ VI

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, IZOMETRIE, PODOBIENSTWA I PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE

§ 25. Zmiana układu współrzędnych prostokątnych

1. Zmiana współrzędnych punktu. Zajmiemy się obecnie związkami między współrzędnymi jednego i tego samego punktu w dwóch różnych układach współrzędnych $Oxyz$ i $O'x'y'z'$. Rozpatrzmy wprawdzie przypadek najczęściej spotykany, gdy oba układy współrzędnych są prostokątne. Zakładamy przy tym, że wektory podstawowe i, j, k , oraz i', j', k' obu układów mają długość 1.

Oznaczmy przez a, b, c współrzędne punktu O' w układzie $Oxyz$, przez a', b', c' — współrzędne punktu O w układzie $O'x'y'z'$, wreszcie przez x, y, z i x', y', z' — współrzędne dowolnego punktu P w obu układach (rys. 61).



Rys. 61

Mamy więc

$$(1) \quad OP = xi + yj + zk, \quad OO' = ai + bj + ck,$$

$$(2) \quad O'P = x'i' + y'j' + z'k', \quad O'O = a'i' + b'j' + c'k'.$$

Niech a_{11} będzie cosinusem kąta między osiami Ox a $O'x'$. Przy analogicznych oznaczeniach cosinusów kątów między pozostałymi osiami, otrzymujemy tablicę cosinusów tych kątów:

	x'	y'	z'
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Jak wiemy (p. wzór (2) z § 3, str. 16),

$$(3) \quad a_{11} = ii', \quad a_{12} = ij', \quad a_{13} = ik' \quad \text{itd.}$$