

Rzut linii śrubowej (15) na płaszczyznę Oxy jest kołem

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = 0,$$

rzut jej zaś na płaszczyznę Oyz jest krzywą

$$x = 0, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = k\varphi$$

czyli sinusoidą

$$x = 0, \quad y = a \sin \frac{z}{k}.$$

ROZDZIAŁ IV

PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE

§ 17. Równania prostej na płaszczyźnie

1. Równanie ogólne. Niech będzie dany na płaszczyźnie układ ukośnokątny współrzędnych Oxy o dowolnych wektorach podstawowych i, j oraz dowolna prosta p . Oznaczmy przez A, B składowe kowariantne wektora (niezerowego) α , prostopadłego do tej prostej, przez $P_0(x_0, y_0)$ jakikolwiek ustalony punkt tej prostej, przez $P(x, y)$ dowolny jej punkt, wreszcie przez ξ wektor OP i przez ξ_0 wektor OP_0 . Zatem

$$(1) \quad P_0P = \xi - \xi_0.$$

Ponieważ punkt P leży w myśl założenia na prostej p , więc wektor P_0P jest prostopadły do wektora α ; na odwrót, gdy P_0P jest prostopadły do α , to punkt P leży na prostej p . Warunkiem więc koniecznym i dostatecznym na to, by punkt P leżał na prostej p , jest znikanie iloczynu skalarowego $\alpha \cdot P_0P$ czyli

$$(2) \quad \alpha(\xi - \xi_0) = 0.$$

Korzystając ze wzoru (6) z § 9, str. 41, dostajemy zatem równanie prostej p w postaci

$$(3) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Przyjmując oznaczenie

$$(4) \quad C = -Ax_0 - By_0,$$

możemy równanie (3) napisać w postaci

$$(5) \quad Ax + By + C = 0.$$

Udowodniliśmy zatem, że każda prosta na płaszczyźnie daje się przedstawić przez równanie postaci (5), gdzie

$$(6) \quad A^2 + B^2 > 0.$$

Udowodnimy, że na odwrót, każde równanie postaci (5) przedstawia prostą.

Niech bowiem będzie dane równanie postaci (5), którego współczynniki A i B spełniają nierówność (6). Oczywiście, istnieją punkty płaszczyzny spełniające to równanie, np. punkt $(-C/A, 0)$, gdy $A \neq 0$. Niech $P_0(x_0, y_0)$ będzie którymkolwiek z tych punktów; zatem

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Odejmując tę równość stronami od równania (5), otrzymujemy równoważne mu równanie kształtu (3). Niech α będzie wektorem, którego składowymi kowariantnymi są A i B . Wobec (6) wektor α nie jest wektorem zerowym. Zatem z (3) wynika (2); ostatni wzór jest równoważny prostopadłości wektorów α i P_0P , a więc każdy punkt $P(x, y)$ tworzy geometrycznego, określonego przez równanie (5), leży na prostopadłej do α przechodzącej przez P_0 i na odwrót, c. b. d. o.

Ponieważ każde równanie pierwszego stopnia daje się sprowadzić do postaci (5), więc wynika stąd, że na płaszczyźnie każde równanie pierwszego stopnia przedstawia prostą.

Równanie postaci (5) nazywa się *równaniem ogólnym prostej*.

Uwaga. Gdy $A=B=C=0$, równanie (5) jest spełnione przez współrzędne dowolnego punktu płaszczyzny. W tym więc przypadku twór określony przez to równanie jest całą płaszczyzną.

Gdy natomiast $A=B=0$, lecz $C \neq 0$, równanie (5) przedstawia twór pusty, gdyż nie jest spełnione przez współrzędne żadnego punktu na płaszczyźnie.

2. Przedstawienie parametryczne prostej. Niechaj w dowolnym układzie ukośnokątnym współrzędnych na płaszczyźnie będzie dana prosta p i niech stosunek $m:n$ wyznacza jej kierunek; innymi słowy, niech wektor $b(m, n)$ będzie równoległy do prostej p . Niechaj $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$, ξ i ξ_0 mają te same znaczenia co poprzednio. Zachodzi więc wzór (1). Na to, by punkt P leżał na prostej p , potrzeba i wystarcza, żeby wektor P_0P był równoległy do wektora b . Ponieważ wektor P_0P ma składowe $x-x_0$ i $y-y_0$, więc otrzymujemy następujący warunek równoległości:

$$(7) \quad (x-x_0):(y-y_0)=m:n.$$

Jeśli $m \neq 0$ i $n \neq 0$, to możemy napisać (7) w postaci

$$(8) \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}.$$

Widzimy więc, że równanie każdej prostej nierównoległej do żadnej z osi współrzędnych możemy przedstawić w postaci (8), gdzie $[m, n]$ jest dowolnym wektorem równoległym do tej prostej, (x_0, y_0) zaś — dowolnym jej punktem. Oczywiście i na odwrót, każde równanie postaci (8) przedstawia prostą, gdyż jest pierwszego stopnia.

Na to, by zachodziło równanie (7), potrzeba i wystarcza, by istniała liczba $s \neq 0$, dla której

$$(9) \quad x = x_0 + ms, \quad y = y_0 + ns.$$

Na to więc, by punkt $P(x, y)$, różny od $P_0(x_0, y_0)$, leżał na prostej p , potrzeba i wystarcza, żeby jego współrzędne dały się napisać w postaci (9). Ponieważ dla $s=0$ otrzymujemy punkt $P_0(x_0, y_0)$, więc równania (9) spełnione są przez wszystkie punkty prostej p i tylko przez jej punkty.

Układ równań (9) stanowi tzw. *parametryczne przedstawienie prostej na płaszczyźnie*.

Przedstawienie to jest ogólniejsze od (8), gdyż — podobnie jak dla (5) — w tej postaci dają się przedstawić wszystkie proste płaszczyzny, podczas gdy w postaci (8) dają się przedstawić tylko proste nierównoległe do osi współrzędnych.

Równania (9) są równoważne jednemu równaniu wektorowemu

$$(10) \quad \xi - \xi_0 = s \cdot b.$$

Ponieważ wektor b jest równoległy do prostej p , więc możemy tej prostej nadać zwrot wektora b . Wówczas (9) jest nie tylko przedstawieniem prostej p , ale jest przedstawieniem jednej z dwóch osi, jakie można utworzyć z prostej p . Gdy $s > 0$, wektor P_0P ma ten sam zwrot, co wektor b , gdy zaś $s < 0$, zwrot wektora P_0P jest przeciwny.

Załóżmy teraz, że wektory podstawowe są równej długości:

$$|i|=|j|=1.$$

Jeśli $|b|=1$, to s jest równe wartości wektora P_0P na osi otrzymanej z prostej p przez nadanie jej zwrotu wektora b .

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, by $|b|=1$, jest w dowolnym układzie ukośnokątnym

$$(11) \quad m^2 + n^2 + 2mn \cos \nu = 1,$$

w układzie zaś prostokątnym

$$(12) \quad m^2 + n^2 = 1.$$

W przypadku (12) składowe wektora o długości 1 są jego cosinusami kierunkowymi α_x i α_y . A więc w układzie prostokątnym, w którym wektory podstawowe mają długość 1, prosta daje się przedstawić w postaci

$$(13) \quad x = x_0 + \alpha_x s, \quad y = y_0 + \alpha_y s,$$

gdzie α_x i α_y są cosinusami kierunkowymi jednej z dwóch osi, jakie można utworzyć z tej prostej, s zaś — wartością wektora P_0P na tej osi.

Jeśli w dowolnym układzie współrzędnych Oxy dane są dwa różne punkty $P_0(x_0, y_0)$, i $P_1(x_1, y_1)$, to wektor b o składowych

$$(14) \quad m = x_1 - x_0, \quad n = y_1 - y_0$$

jest równoległy do prostej przechodzącej przez te punkty.

Zatem prosta przechodząca przez punkty $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_1, y_1)$ ma przedstawienie parametryczne

$$(15) \quad x = x_0 + (x_1 - x_0)s, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)s.$$

Jeśli ponadto prosta ta nie jest równoległa do osi układu współrzędnych, to można ją również przedstawić w postaci

$$(16) \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Uwagi. 1. Niech punkt $P(x, y)$ porusza się po prostej p ruchem jednostajnym. W chwili $t=0$ niech punkt P zajmuje położenie $P_0(x_0, y_0)$, a w chwili $t=1$ — położenie $P_1(x_1, y_1)$. Wówczas wektor P_0P_1 jest prędkością ruchu jednostajnego i w każdej chwili t jest

$$P_0P = t \cdot P_0P_1.$$

Rzutując wektory P_0P i P_0P_1 na osie współrzędnych i przechodząc do wartości ich rzutów na tych osiach, dostajemy

$$x - x_0 = t(x_1 - x_0), \quad y - y_0 = t(y_1 - y_0).$$

Widzimy, że w równaniach (15) możemy interpretować wektor b jako wektor prędkości ruchu jednostajnego punktu po prostej, a s — jako czas liczony od chwili, w którym punkt zajmował położenie $P_0(x_0, y_0)$.

2. Pole trójkąta o wierzchołkach $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_1, y_1)$ wyraża się wzorem (17) z § 10, str. 49. Zatem na to, by te trzy punkty leżały na jednej prostej, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(17) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Takie jest więc równanie prostej przechodzącej przez punkty P_0 i P_1 . Ta postać równania prostej przez dwa punkty jest — jak łatwo sprawdzić — równoważna postaciom (15) i (16).

3. **Równanie kierunkowe.** Niech prosta p nie będzie równoległa do osi Oy układu prostokątnego współrzędnych Oxy . Daje się więc ona przedstawić w postaci (7), skąd

$$(18) \quad y - y_0 = \mu(x - x_0),$$

gdzie

$$(19) \quad \mu = n/m.$$

W § 12 liczbę μ nazwaliśmy *współczynnikiem kierunkowym* prostej p . Oznaczając przez b wyraz wolny $\mu(x_0 - y_0)$ równania (17), otrzymujemy

$$(20) \quad y = \mu x + b.$$

Podstawiając tu $x=0$, otrzymujemy punkt przecięcia $P(0, b)$ prostej p z osią Oy . W przedstawieniu (19) b jest zatem rzędną punktu przecięcia prostej p z osią y .

4. **Równanie odcinkowe.** Niechaj prosta (5) nie przechodzi przez początek układu współrzędnych i niech przecina obie osie współrzędnych w punktach $V(v, 0)$ i $W(0, w)$. Punkty te otrzymujemy z (5), podstawiając raz $x=0$, a drugi raz $y=0$, skąd dostajemy

$$v = -C/A, \quad w = -C/B, \quad C \neq 0.$$

Dzieląc (5) przez $-C$, otrzymamy więc równanie tej prostej w postaci

$$(21) \quad \frac{x}{v} + \frac{y}{w} = 1.$$

Równanie (21) nazywa się *równaniem odcinkowym* prostej, ponieważ v i w są długościami odcinków, jakie ta prosta odcina na osiach współrzędnych, licząc od punktu O .

Na odwrót, jeśli równanie prostej ma postać (21), to punkty $(v, 0)$ i $(0, w)$ są jej punktami przecięcia z osiami układu współrzędnych.

§18. Kąt między dwiema prostymi

Niech będą dane dwie proste p_1 i p_2 . Niech wektor b_1 będzie równoległy do p_1 , a wektor b_2 do p_2 . Proste p_1 i p_2 tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych. Kąt jednej pary równy jest kątowi między b_1 a b_2 , a kąt drugiej pary — kątowi między b_1 a $-b_2$. Jeśli wektory b_1 i b_2 mają składowe zwyczajne m_1, n_1 i m_2, n_2 , to (p. wzór (10) z § 9, str. 42)

$$(1) \quad \cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \cos \nu}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + 2m_1 n_1 \cos \nu} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + 2m_2 n_2 \cos \nu}},$$

gdzie bierzemy znak $+$ dla jednej pary kątów wierzchołkowych, a znak $-$ dla drugiej pary.

W szczególności, w prostokątnych układach współrzędnych

$$(2) \quad \cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Ze wzorów (1) i (2) możemy korzystać, gdy proste są przedstawione równaniem postaci (8), str. 87, lub parametrycznie. Jeśli w układzie prostokątnym proste są przedstawione równaniem kierunkowym (p. (19), str. 19), to dla znalezienia kątów przez nie utworzonych możemy korzystać ze wzoru (18) z § 12, str. 64.

Niech teraz proste p_1 i p_2 będą przedstawione w ukośnokątnym układzie współrzędnych równaniami ogólnymi

$$(3) \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Biorąc na nich dowolnie po jednym punkcie, (x_1, y_1) na p_1 i (x_2, y_2) na p_2 , możemy przejść do postaci

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) = 0, \quad A_2(x - x_2) + B_2(y - y_2) = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$x - x_1 : y - y_1 = -B_1 : A_1, \quad x - x_2 : y - y_2 = -B_2 : A_2.$$

Prosta p_1 ma więc kierunek $-B_1 : A_1$, prosta zaś p_2 — kierunek $-B_2 : A_2$; zatem

$$(4) \quad m_1 = -B_1, \quad n_1 = A_1, \quad m_2 = -B_2, \quad n_2 = A_2.$$

Podstawiając (4) do (1), dostajemy dla kąta zawartego między prostymi (3) wzór

$$(5) \quad \cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + B_1 A_2) \cos \nu}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos \nu} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2 \cos \nu}}.$$

W szczególności, w układzie prostokątnym współrzędnych

$$(6) \quad \cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Z (5) i (6) otrzymujemy warunek prostopadłości dwóch prostych przedstawionych równaniami ogólnymi (3):

1° w dowolnym układzie ukośnokątnym współrzędnych

$$(7) \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + B_1 A_2) \cos \nu = 0.$$

2° w układzie prostokątnym współrzędnych

$$(8) \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \quad \text{czyli } A_1 : B_1 = -B_2 : A_2.$$

Np. jeśli prosta ma w układzie prostokątnym współrzędnych równanie postaci (5) z § 17, str. 85, to prosta do niej prostopadła i przechodząca przez punkt (x_1, y_1) ma równanie

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0.$$

Wyprowadzimy jeszcze warunek równoległości dwóch prostych przedstawionych równaniami (3). Jak wiemy (p. § 17, str. 85), A_1, B_1 i A_2, B_2 są składowymi kowariantnymi wektorów prostopadłych do prostych (3). Na to więc, by proste (3) były równoległe (lub pokrywały się — bo pokrywanie się prostych uważamy za szczególny przypadek równoległości), potrzeba i wystarcza, żeby wektory do nich prostopadłe były równoległe czyli żeby (por. wzór (12) z § 12, str. 61)

$$(9) \quad A_1 : B_1 = A_2 : B_2.$$

Udowodnimy, że na to, by równania (3) przedstawiały tę samą prostą, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(10) \quad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2.$$

Dostateczność tego warunku jest oczywista. Gdy bowiem zachodzi równość (10), to

$$A_2 = \varrho A_1, \quad B_2 = \varrho B_1, \quad C_2 = \varrho C_1, \quad \varrho \neq 0,$$

a więc oba równania (3) są równoważne.

Na odwrót, jeżeli równania (3) przedstawiają tę samą prostą i (x_0, y_0) jest dowolnym jej punktem, to

$$(11) \quad A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0, \quad A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0,$$

a ponieważ proste (3) są równoległe, więc zachodzi równość (9) czyli

$$(12) \quad A_2 = \varrho A_1, \quad B_2 = \varrho B_1, \quad \varrho \neq 0.$$

Wobec (11) otrzymujemy stąd

$$C_1 = -(A_1 x_0 + B_1 y_0), \quad C_2 = -A_2 x_0 - B_2 y_0 = -\varrho(A_1 x_0 + B_1 y_0)$$

czyli $C_2 = \varrho C_1$. Stąd i z (12) wynika (10).

§ 19. Przykłady

1. Znaleźć środek koła wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A(75, 75)$, $B(175, 0)$, $C(147, -21)$ (w układzie współrzędnych prostokątnych).

Znajdziemy najprzód składowe wektorów AB i AC . Wynoszą one $+100, -75$ i $72, -96$. Zatem $|AB| = 125$ i $|AC| = 120$. Widzimy więc, że wektor AB ma cosinusy kierunkowe $\alpha_x = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}$, $\alpha_y = -\frac{75}{125} = -\frac{3}{5}$, a wektor AC ma cosinusy kierunkowe $\beta_x = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$, $\beta_y = -\frac{96}{120} = -\frac{4}{5}$. Stąd otrzymujemy kierunek dwusiecznej kąta o wierzchołku A (p. wzór (20) z § 8, str. 39)

$$(a_x + \beta_x) : (a_y + \beta_y) = \frac{7}{5} : -\frac{7}{5} = 1 : -1.$$

Dwusieczną tą ma więc równanie $\frac{x-75}{1} = \frac{y-75}{-1}$ czyli

$$x + y - 150 = 0.$$

Wektory BA i BC mają składowe $-100, 75$ i $-28, -21$. Zatem $|BA| = 125$ i $|BC| = 35$. Wektory te mają więc cosinusy kierunkowe

$\alpha_x = -4/5$, $\alpha_y = 3/5$ i $\beta_x = -4/5$, $\beta_y = -3/5$. Tym samym dwusieczna kąta o wierzchołku B ma kierunek

$$(a_x + \beta_x) : (a_y + \beta_y) = -\frac{8}{5} : 0 = 1 : 0,$$

jest więc równoległa do osi Ox i ma zatem równanie

$$y = 0.$$

Środek koła wpisanego jest punktem przecięcia obu dwusiecznych. Jego współrzędne otrzymamy więc, rozwiązując układ równań

$$x + y = 150, \quad y = 0.$$

Dostajemy punkt $(150, 0)$.

2. W układzie współrzędnych ukośnokątnych o kącie $\nu = 60^\circ$ dana jest prosta p o równaniu $3x + 2y - 27 = 0$ oraz punkty $P(2, 1)$ i $Q(1, 3)$. Promień świetlny wychodzący z P odbija się od prostej p w punkcie R i przechodzi przez Q . Znaleźć współrzędne punktu R .

Oznaczmy przez Q' odbicie punktu Q w prostej p (rys. 56). Łatwo dowieść, że punkt R jest punktem przecięcia prostej PQ' z prostą p . Znajdziemy wpierw położenie punktu Q' . W tym celu wyznaczmy kierunek $a:b$ wektora prostopadłego do p . W danym razie (p. wzór (5) z § 17, str. 85)

$$A = 3, \quad B = 2, \quad \cos \nu = 1/2, \quad \sin \nu = \sqrt{3}/2,$$

więc na mocy (5) z § 9, str. 40,

$$a = 8/3, \quad b = 2\sqrt{3}/3$$

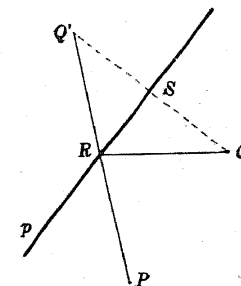
Zatem $a:b = 4:3$. Prosta QQ' , jako mająca ten kierunek i przechodząca przez Q , ma przedstawienie parametryczne

$$(1) \quad x = 1 + 4s, \quad y = 3 + 3s.$$

Aby znaleźć jej punkt przecięcia S z prostą p , podstawiamy (1) do równania prostej p . Otrzymujemy

$$3(1 + 4s) + 2(3 + 3s) - 27 = 0$$

czyli $s_0 = 1$. Jak wiemy z § 17, str. 87, parametr s_0 jest proporcjonalny do wartości rzutu wektora QS na oś QQ' . Zatem dla punktu Q'



Rys. 56

wobec $QQ' = 2QS$ jest $s = 2s_0 = 2$, a więc punkt Q' ma współrzędne 9 i 9. Tym samym prosta PQ' ma równanie $\frac{x-2}{9-2} = \frac{y-1}{9-1}$ czyli

$$8x - 7y - 9 = 0.$$

Rozwiązując układ równań prostych p i QQ' , otrzymujemy punkt $C\left(\frac{207}{37}, \frac{189}{37}\right)$.

§ 20. Postać normalna równania prostej

Niech w ukośnokątnym układzie współrzędnych Oxy (rys. 57) będzie dana prosta q . Oznaczmy przez e wektor jednostkowy prostopadły do q , o zwrocie od początku O ku tej prostej. Jeśli prosta q przechodzi przez O , to wybieramy i ustalamy dowolny z dwóch możliwych zwrotów wektora e . Niech e będzie osią wyznaczoną przez e , $P_0(x_0, y_0)$ — dowolnym punktem prostej q , $P(x, y)$ — dowolnym punktem płaszczyzny i P_q — rzutem prostokątnym punktu P na prostą q . Ponieważ wektor P_0P_q leży na prostej q , więc iloczyn skalarny $P_0P_q \cdot e$ jest zerem. Wynika stąd, że

$$e \cdot P_0P = e \cdot (P_0P_q + P_qP) = e \cdot P_qP.$$

Oznaczmy przez d wartość rzutu wektora P_qP na oś e . Zatem

$$(1) \quad d = e \cdot P_qP = e \cdot P_0P.$$

Gdy punkt P leży po przeciwnej stronie prostej q niż początek układu współrzędnych, liczba d jest równa odległości δ punktu P od prostej q , gdy zaś punkt P leży po tej samej stronie prostej q co początek układu, to $d = -\delta$.

Ponieważ wektor e jest jednostkowy, więc jego składowe kowariantne są jego cosinusami kierunkowymi α_x i α_y . Wektor P_0P ma składowe zwyczajne $x - x_0$ i $y - y_0$; zatem dla iloczynu skalarnego $e \cdot P_0P$ zachodzi równość

$$e \cdot P_0P = \alpha_x(x - x_0) + \alpha_y(y - y_0),$$

skąd wobec (1)

$$(2) \quad d = \alpha_x(x - x_0) + \alpha_y(y - y_0).$$

Równość (2) zachodzi dla dowolnego punktu $P(x, y)$ płaszczyzny, w szczególności więc dla początku $O(0, 0)$ układu współrzędnych. Oznaczmy przez p odległość punktu O od prostej q . Zatem $p > 0$ i $d = -p$. Podstawiając $x = 0$ i $y = 0$ do (2), otrzymujemy więc

$$(3) \quad -p = -\alpha_x x_0 - \alpha_y y_0.$$

Stąd i z (2) wynika, że dla dowolnego punktu płaszczyzny jest

$$(4) \quad d = \alpha_x x + \alpha_y y - p.$$

W szczególności wnosimy stąd, że warunkiem koniecznym i dostatecznym, by punkt $P(x, y)$ leżał na prostej q , jest

$$(5) \quad \alpha_x x + \alpha_y y - p = 0.$$

Jest to tzw. *równanie normalne prostej* lub jej *równanie Hessego*.

Charakteryzuje się ono tym, że współczynniki α_x i α_y są cosinusami kierunkowymi wektora jednostkowego, a wyraz wolny $-p$ jest ujemny lub równy 0.

Wprowadźmy oznaczenie skrócone *

$$(6) \quad h(x, y) \equiv \alpha_x x + \alpha_y y - p.$$

Równość (4) możemy więc napisać krótko

$$(7) \quad d = h(x, y),$$

a tym samym dla odległości δ punktu $P(x, y)$ od prostej q otrzymujemy

$$(8) \quad \delta = |h(x, y)|.$$

Z (7) wynika więc następujące twierdzenie:

Prosta o równaniu normalnym (5) dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny, w których wyrażenie $h(x, y)$ ma przeciwne znaki. Jeśli prosta nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, to $h(x, y) > 0$ w tej półpłaszczyźnie, która nie zawiera początku układu współrzędnych, a $h(x, y) < 0$ w tej półpłaszczyźnie, która go zawiera.

* Znak $\equiv$ oznacza tożsamość. O dwóch wielomianach mówimy, że są *równe tożsamościowo*, gdy mają one te same współczynniki. Wtedy mają one równe wartości dla równych wartości zmiennych. W algebrze dowodzi się, że i na odwrót: wielomiany przybierające równe wartości dla tych samych układów wartości swych zmiennych są równe tożsamościowo.

Oznaczenie (6) wprowadzamy po to, by w dalszym ciągu nie wypisywać za każdym razem całego wielomianu $\alpha_x x + \alpha_y y - p$, lecz używać zamiast niego krótszego wyrażenia $h(x, y)$.

Niech teraz q będzie prostą o równaniu ogólnym

$$(9) \quad Ax + By + C = 0.$$

Znajdziemy równanie normalne tej prostej. Ponieważ równania (5) i (9) przedstawiają tę samą prostą, więc (p. str. 91)

$$A : B : C = a_x : a_y : -p$$

czyli

$$a_x = \varrho A, \quad a_y = \varrho B, \quad -p = \varrho C, \quad \varrho \neq 0.$$

Zadanie sprowadza się zatem do znalezienia ϱ . W tym celu użyjemy wzoru (9) z § 9, str. 41. Wobec $|\varrho| = 1$ dostajemy równość

$$\sin^2 \nu = a_x^2 + a_y^2 - 2a_x a_y \cos \nu = \varrho^2 (A^2 + B^2 - 2AB \cos \nu),$$

a stąd

$$\varrho = \pm \frac{\sin \nu}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \nu}}.$$

Znak należy dobrać tak, by $\varrho C = -p \leq 0$.

Widzimy więc, że prosta (9) ma równanie normalne kształtu

$$(10) \quad h(x, y) = \frac{(Ax + By + C) \sin \nu}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \nu}} = 0,$$

gdzie znak przed pierwiastkiem jest taki, by wyraz wolny był ujemny lub równy 0.

Dla odległości zaś punktu $P(x, y)$ od prostej (9) zachodzi wzór

$$(11) \quad \delta = \left| \frac{(Ax + By + C) \sin \nu}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \nu}} \right|.$$

W szczególności, gdy układ współrzędnych Oxy jest prostokątny, równaniem normalnym prostej (9) jest

$$(12) \quad h(x, y) = \frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

gdzie znak przed pierwiastkiem jest dobrany jak poprzednio.

Wprowadźmy oznaczenie skrócone

$$(13) \quad u(x, y) = Ax + By + C.$$

Z (10) wynika, że

$$(14) \quad u(x, y) = c h(x, y),$$

gdzie c jest pewną stałą. Wobec tego możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Niech $u(x, y) = 0$ będzie równaniem ogólnym dowolnej prostej; prosta ta dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny, mianowicie w jednej z nich jest $u(x, y) > 0$, a w drugiej $u(x, y) < 0$.

PRZYKŁADY. 1. Niech osie Ox i Oy tworzą kąt $\nu = 120^\circ$. W jakich punktach płaszczyzny zachodzi nierówność

$$(*) \quad 2x + 3y - 1 < 0?$$

W danym razie jest $u(x, y) = 2x + 3y - 1$, skąd na mocy (10)

$$h(x, y) = \frac{\sqrt{3}(2x + 3y - 1)}{2\sqrt{20}}.$$

Nierówność $(*)$ zachodzi więc w półpłaszczyźnie, nie zawierającej początku układu współrzędnych.

2. Niech boki trójkąta PQR , ostrokatnego lub prostokątnego (rys. 58) mają równania normalne

$$h_1(x, y) = 0, \quad h_2(x, y) = 0, \quad h_3(x, y) = 0$$

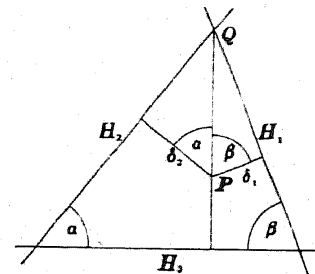
względem układu prosto- lub ukośno-kątnego współrzędnych o początku O leżącym wewnątrz trójkąta. Jakie jest równanie wysokości tego trójkąta, opuszczonej z punktu Q ?

Wszystkie trzy wyrażenia $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$, $h_3(x, y)$ są wewnątrz trójkąta ujemne, ponieważ początek układu współrzędnych leży wewnątrz trójkąta. Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem wysokości przechodzącej przez wierzchołek Q , leżącym wewnątrz trójkąta. Jego odległości od dwóch pierwszych boków są na mocy (11)

$$\delta_1 = |h_1(x, y)| = -h_1(x, y), \quad \delta_2 = |h_2(x, y)| = -h_2(x, y).$$

Obliczając PQ z dwóch trójkątów prostokątnych, otrzymujemy $\delta_1 / \cos \beta = \delta_2 / \cos \alpha$, skąd

$$\delta_1 \cos \alpha = \delta_2 \cos \beta.$$



Rys. 58

Zatem dla każdego punktu wysokości, leżącego wewnątrz trójkąta, jest

$$(15) \quad h_1(x, y) \cos \alpha - h_2(x, y) \cos \beta = 0.$$

Zatem równanie (15) jest równaniem wysokości trójkąta, opuszczonej z punktu Q (łatwo tego dowieść również dla trójkątów rozwartokątnych).

Analogicznie dowodzi się, że równaniem dwusiecznej kąta wewnętrznego, przechodzącej przez Q , jest

$$(16) \quad h_1 - h_2 = 0,$$

a równaniem środkowej trójkąta, przechodzącej przez Q , jest

$$(17) \quad h_1 \sin \alpha - h_2 \sin \beta = 0.$$

§ 21. Pęk prostych na płaszczyźnie

Pękiem przecinających się prostych nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt P .

Punkt P nazywa się *wierzchołkiem pęku*.

Pękiem prostych równoległych nazywamy zbiór wszystkich prostych o jednym kierunku.

Niechaj w dowolnym układzie współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie będą dane dwie różne proste p_1 i p_2 o równaniach

$$(1) \quad u_1(x, y) = 0, \quad u_2(x, y) = 0,$$

gdzie

$$(2) \quad u_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1, \quad u_2(x, y) = A_2x + B_2y + C_2.$$

Jeżeli proste (1) nie są równoległe, tj. jeżeli

$$(3) \quad A_1 : B_1 \neq A_2 : B_2,$$

to dla każdego układu liczb λ_1, λ_2 , dla których $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, równanie

$$(4) \quad \lambda_1 u_1(x, y) + \lambda_2 u_2(x, y) = 0$$

przedstawia prostą.

Istotnie, równanie (4) po rozwinięciu ma postać

$$(5) \quad (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = 0.$$

Należy więc jeszcze tylko dowieść, że współczynniki przy x i y nie znikają równocześnie, czyli że nie jest równocześnie

$$(6) \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0.$$

Otóż gdyby równości (6) zachodziły równocześnie i byłoby np. $\lambda_1 \neq 0$, to mielibyśmy

$$A_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_2, \quad B_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} B_2,$$

skąd $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$ wbrew (3).

Jeśli zaś proste (1) są równoległe, to równanie (4) albo przedstawia prostą, albo jest sprzeczne. Z równoległości bowiem i z założenia, że proste (1) nie są identyczne, wynika, że

$$A_1 = \varrho A_2, \quad B_1 = \varrho B_2, \quad C_1 \neq \varrho C_2, \quad \varrho \neq 0.$$

Równanie (5) ma więc postać

$$(7) \quad (\lambda_1 \varrho + \lambda_2)(A_2 x + B_2 y) + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = 0.$$

Otóż gdy

$$\lambda_1 \varrho + \lambda_2 \neq 0,$$

równanie (7) przedstawia prostą, a gdy

$$\lambda_1 \varrho + \lambda_2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \varrho,$$

to $\lambda_1 \neq 0$ i

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \lambda_1 (C_1 - \varrho C_2) \neq 0;$$

równanie (7) jest więc wówczas sprzeczne.

Udowodnimy, że na to, by prosta q należała do pęku wyznaczonego przez proste (1), potrzeba i wystarcza, żeby dała się ona przedstawić równaniem postaci (4).

Istotnie, założmy naprzód, że prosta q ma równanie (4).

Jeśli proste (1) się przecinają, to współrzędne ich punktu przecięcia spełniają równanie (4) dla wszelkich wartości λ_1 i λ_2 . Każda więc prosta o równaniu postaci (4) należy do pęku wyznaczonego przez proste (1).

Jeśli zaś proste (1) są równoległe, to równanie (4) jest identyczne z równaniem (7). Skoro więc równanie (4) przedstawia prostą q , to $\lambda_1 \varrho + \lambda_2 \neq 0$ i prosta (7) jest równoległa do prostej $u_2(x, y) = 0$, a więc należy do pęku.

Warunek jest więc dostateczny.

Aby udowodnić, że jest on konieczny, wystarczy wykazać, że można tak dobrać współczynniki λ_1 i λ_2 w równaniu (4), by prosta (4) przeszła przez dowolny punkt $P_0(x_0, y_0)$ płaszczyzny, różny od ewentualnego punktu przecięcia P prostych (1). W tym celu wystarczy przyjąć

$$\lambda_1 = u_2(x_0, y_0), \quad \lambda_2 = -u_1(x_0, y_0).$$

Wówczas bowiem liczby λ_1 i λ_2 nie są jednocześnie równe zeru, gdyż w przypadku przecinających się prostych punkt P_0 nie jest ich punktem przecięcia, a w przypadku prostych równoległych równania (1) nie mają wspólnych rozwiązań. Dla tych liczb λ_1 i λ_2 równanie (4) jest więc spełnione przez współrzędne punktu $P_0(x_0, y_0)$.

Udowodnione twierdzenie można również wypowiedzieć w następującej postaci:

Na to, by trzy różne proste

$$(8) \quad u_1(x, y) = 0, \quad u_2(x, y) = 0, \quad u_3(x, y) = 0$$

należały do jednego pęku, potrzeba i wystarcza, żeby wielomiany

$$u_1(x, y), \quad u_2(x, y), \quad u_3(x, y)$$

były liniowo zależne, tzn. żeby istniały trzy liczby μ_1, μ_2, μ_3 nie znikające równocześnie i spełniające tożsamość

$$(9) \quad \mu_1 u_1(x, y) + \mu_2 u_2(x, y) + \mu_3 u_3(x, y) = 0.$$

Istotnie, założmy, że proste (8) należą do jednego pęku. Wówczas na mocy poprzedniego twierdzenia trzecia z tych prostych daje się przedstawić również równaniem postaci (4). Wobec tego, że to równanie i trzecie z równań (8) przedstawiają tę samą prostą, wszystkie współczynniki obu równań są proporcjonalne, czyli dla pewnego ϱ zachodzi tożsamość

$$u_3(x, y) = \varrho \lambda_1 u_1(x, y) + \varrho \lambda_2 u_2(x, y).$$

Przyjmując więc

$$\mu_1 = \varrho \lambda_1, \quad \mu_2 = \varrho \lambda_2, \quad \mu_3 = -1,$$

otrzymujemy tożsamość (9).

Na odwrót, założmy, że zachodzi tożsamość (9) i niech np. $\mu_3 \neq 0$. Wtedy

$$u_3(x, y) = -\frac{\mu_1}{\mu_3} u_1(x, y) - \frac{\mu_2}{\mu_3} u_2(x, y),$$

skąd wynika, że prosta $u_3(x, y) = 0$ jest identyczna z prostą

$$\mu_1 u_1(x, y) + \mu_2 u_2(x, y) = 0,$$

a więc należy do pęku wyznaczonego przez pierwsze dwie z prostych (8), c. b. d. o.

Z warunku (9) wynika inny prosty warunek wyznacznikowy. Zachodzi mianowicie twierdzenie:

Na to, by trzy proste

$$(10) \quad \begin{aligned} u_1(x, y) &= A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ u_2(x, y) &= A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \\ u_3(x, y) &= A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \end{aligned}$$

należały do jednego pęku, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(11) \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, warunek (9) jest równoważny układowi równań

$$A_1 \mu_1 + A_2 \mu_2 + A_3 \mu_3 = 0, \quad B_1 \mu_1 + B_2 \mu_2 + B_3 \mu_3 = 0, \quad C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 + C_3 \mu_3 = 0.$$

Na to zaś, by ten układ równań miał rozwiązania μ_1, μ_2, μ_3 nie znikające jednocześnie, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła równość (11).

PRZYKŁADY. 1. W układzie prostokątnym współrzędnych Oxy trójkąt ma boki o równaniach

$$2x - y + 3 = 0, \quad x - 2y + 1 = 0, \quad 2x + 3y + 1 = 0.$$

Znaleźć równanie wysokości prostopadłej do trzeciego boku.

Wysokość ta ma przejść przez punkt przecięcia pierwszych dwóch prostych, więc daje się przedstawić równaniem postaci

$$(*) \quad \lambda_1(2x - y + 3) + \lambda_2(x - 2y + 1) = 0$$

czyli

$$(2\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)y + (3\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Z warunku prostopadłości do trzeciej prostej otrzymujemy

$$2(2\lambda_1 + \lambda_2) - 3(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$$

czyli $\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$ i

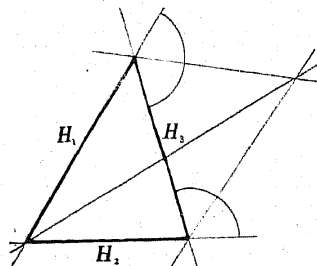
$$(**) \quad \lambda_1 : \lambda_2 = 4 : 1.$$

Ponieważ w równaniu (*) nie gra roli wartość liczb λ_1 i λ_2 , lecz ich stosunek (**), więc możemy przyjąć np. $\lambda_1=4$ i $\lambda_2=1$, skąd otrzymujemy dla wysokości równanie

$$9x-6y+13=0.$$

2. Dowieść, że dwusieczne dwóch kątów zewnętrznych trójkąta i dwusieczna trzeciego kąta wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie.

Boki trójkąta dzielą płaszczyznę na 7 części. Dwa kąty zewnętrzne leżą w jednej z nich (rys. 59). W tej części właśnie umieścimy początek dowolnego kartezjańskiego układu współrzędnych. Niechaj boki trójkąta mają równania normalne



Rys. 59

$$h_1(x, y)=0, \quad h_2(x, y)=0, \quad h_3(x, y)=0.$$

W punktach wybranej części płaszczyzny wszystkie trzy wyrażenia $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$, $h_3(x, y)$ są ujemne. Aby znaleźć równanie dwusiecznej kąta zewnętrznego, którego ramionami są proste h_1 i h_3 , zauważmy, że dwusieczna ta jest miejscem geometrycznym punktów równo oddalonych od tych prostych. Ponieważ dla punktów tej części płaszczyzny odległości od ramion wynoszą

$$\delta_1=|h_1(x, y)|=-h_1(x, y), \quad \delta_3=|h_3(x, y)|=-h_3(x, y),$$

więc z $\delta_1=\delta_3$ otrzymujemy równanie tej dwusiecznej:

$$h_1(x, y)-h_3(x, y)=0.$$

Podobnie, dwusieczne drugiego kąta zewnętrznego i kąta wewnętrznego mają równania:

$$h_3(x, y)-h_2(x, y)=0, \quad h_2(x, y)-h_1(x, y)=0.$$

Z tożsamości

$$(h_1-h_3)+(h_3-h_2)+(h_2-h_1)=0$$

wynika na mocy (9), że wszystkie trzy dwusieczne należą do jednego pęku, a że nie są równoległe, więc przecinają się w jednym punkcie.

ROZDZIAŁ V

PŁASZCZYZNA I PROSTA W PRZESTRZENI

§ 22. Płaszczyzna w przestrzeni

1. **Równanie ogólne płaszczyzny.** Niech w przestrzeni będzie dany dowolny kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$, płaszczyzna Π i wektor a prostopadły do Π . Niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnym punktem tej płaszczyzny, $P(x, y, z)$ — dowolnym punktem przestrzeni, a r i r_0 — wektorami OP i OP_0 .

Na to, by punkt P leżał na płaszczyźnie Π , potrzeba i wystarczy, żeby wektor P_0P był prostopadły do wektora a czyli żeby

$$(1) \quad a(r-r_0)=0.$$

Oznaczmy współrzędne kowariantne wektora a przez A, B, C . Warunek (1) jest równoważny równaniu

$$(2) \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Widzimy zatem, że każda płaszczyzna daje się przedstawić równaniem pierwszego stopnia.

Na odwrót, każde równanie pierwszego stopnia przedstawia płaszczyznę.

Istotnie, niech dane będzie równanie pierwszego stopnia

$$(3) \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

gdzie

$$A^2+B^2+C^2>0;$$

oznaczymy przez a wektor o współrzędnych kowariantnych A, B, C . Istnieją punkty, których współrzędne spełniają równanie (1), np. punkt $P(-D/A, 0, 0)$, gdy $A \neq 0$. Niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie którymkolwiek z nich. Wówczas

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$