

ROZDZIAŁ III

RÓWNANIA TWORÓW GEOMETRYCZNYCH

§ 14. Określenie równania tworów geometrycznych

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie twór geometryczny (zbiór punktów) U i pewien układ współrzędnych kartezjańskich Oxy (na ogół ukośnokątny). Mówimy, że równanie

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

jest równaniem tworów U , gdy:

1° dla każdego punktu (x, y) tego tworów jest ono spełnione;
2° każdy punkt (x, y) , dla którego jest ono spełnione, należy do U .

Twór określony równaniem (1) nazywa się również *miejsce geometrycznym* punktów spełniających równanie (1).

Np.

$$x - a = 0$$

jest równaniem prostej równoległej do osi Oy , przecinającej oś Ox w punkcie $(a, 0)$. W układzie prostokątnym współrzędnych

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

(gdzie $a > 0$) jest równaniem koła o promieniu a i o środku w początku O układu współrzędnych. Równanie to bowiem jest równoważne równaniu

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a,$$

wyrażającemu, że punkt (x, y) jest oddalony o a od początku układu.

Ponieważ równanie (1) jest równoważne równaniu

$$(2) \quad kf(x, y) = 0$$

dla każdego $k \neq 0$, więc równania (1) i (2) określają ten sam twór geometryczny.

Podobnie, równania

$$g(x, y) - h(x, y) = 0 \quad \text{ i } \quad g(x, y) = h(x, y),$$

jako równoważne, określają ten sam twór geometryczny.

Analogicznie wprowadza się pojęcie tworów geometrycznych, określonych przez układ równań

$$(3) \quad f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0.$$

Oczywiście, twór określony układem równań (3) jest zbiorem punktów wspólnych tworów określonych przez równanie $f_1(x, y) = 0$ i tworów określonych przez równanie $f_2(x, y) = 0$.

Np. twór określony przez układ równań

$$x = a, \quad y = b$$

jest punktem przecięcia prostej $x = a$ i prostej $y = b$, czyli punktem (a, b) . Twór określony w układzie prostokątnym współrzędnych przez układ dwóch równań

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = 0$$

jest zbiorem punktów przecięcia koła $x^2 + y^2 = 4$ i osi Ox , składa się więc z dwóch punktów $(2, 0)$ i $(-2, 0)$.

Tak samo określa się równanie tworów w układach współrzędnych ukośnokątnych $Oxyz$ w przestrzeni.

Np. w przestrzeni równanie $z = a$ określa płaszczyznę równoległą do płaszczyzny Oxy i przecinającą oś Oz w punkcie $(0, 0, a)$. W układzie prostokątnym równanie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ określa kulę o promieniu a i środku w początku układu. Układ równań

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1$$

określa zbiór złożony z punktów przecięcia kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i płaszczyzny $z = 1$. Płaszczyzna ta jest oddalona od środka kuli o 1, promień zaś kuli wynosi 2, więc układ równań (4) określa w przestrzeni koło.

Zauważmy, że jedno i to samo równanie

$$f(x, y) = 0$$

(albo układ dwóch lub więcej równań), o ile określa zbiór niepusty, to określa w przestrzeni inny twór niż na płaszczyźnie. Np. równanie $x^2 + y^2 = 0$ określa na płaszczyźnie jeden punkt $(0, 0)$, a w przestrzeni — zbiór punktów $(0, 0, z)$ czyli oś Oz .

Twór geometryczny może być również określony nierównościami.

Np. nierówność $x > 0$ określa półpłaszczyznę złożoną z punktów o odciętej dodatniej, ponieważ dla wszystkich tych i tylko tych punktów nierówność ta jest spełniona. W układzie prostokątnym płaskim nierówność $x^2 + y^2 < a^2$ określa wnętrze koła, nierówność zaś $x^2 + y^2 \leq a^2$ określa wnętrze koła wraz z obwodem. W przestrzeni układ nierówności

$$x > 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 9$$

określa wnętrze odcinka kuli.

Określenie równania tworów nie da się przenieść bezpośrednio ze współrzędnych kartezjańskich na biegunowe, gdyż każdemu punktowi odpowiada nieskończenie wiele par współrzędnych biegunowych. Postępujemy więc nieco inaczej. Niech mianowicie

$$(5) \quad f(\varrho, \varphi) = 0$$

będzie dowolnym równaniem biegunowym i niech punkt P ma tę własność, że co najmniej jedna para jego współrzędnych biegunowych spełnia równanie (5).

Zbiór takich punktów P nazywamy *tworem określonym przez równanie* (5).

Np. równanie

$$(6) \quad \varrho = a$$

(gdzie $a > 0$) określa pewne koło K . To samo koło jest określone przez równanie

$$(7) \quad \varrho = -a.$$

Jeśli punkt P leży na tym kole K , to nie dla wszystkich współrzędnych biegunowych punktu P zachodzi równość (6); równość ta zachodzi dla pary współrzędnych punktu P koła K wtedy i tylko wtedy, gdy wybierzemy je tak, żeby $\varrho > 0$.

Podobnie określa się równanie tworów we współrzędnych cylindrycznych lub sferycznych w przestrzeni.

§15. Przykłady równań tworów płaskich

1. Kisoida. Niech na płaszczyźnie będzie dane koło o średnicy $OA = a$. W punkcie A prowadzimy styczną, a następnie z O półprostą przecinającą koło w punkcie B , styczną zaś w punkcie C .



Kreślmy wektor $OP = BC$. Miejsce geometryczne końca P wektora OP , gdy B obiega koło (p. rys. 48), nazywamy *kisoidą Dioklesa* *.

Niech O będzie biegunem układu biegunowego, a prosta OA ze zwrotem od O do A – osią tego układu. Możemy punktowi P przypisać współrzędne biegunowe ϱ, φ zawarte w granicach

$$(1) \quad 0 \leq \varphi < \pi/2 \quad \text{lub} \quad 3\pi/2 < \varphi < 2\pi, \quad \varrho \geq 0.$$

Wówczas

$$|AC| = a |\operatorname{tg} \varphi|, \quad |BC| = |AC| \cdot |\sin \varphi| = a \frac{\sin^2 \varphi}{|\cos \varphi|}.$$

Ponieważ w przedziałach (1) $\cos \varphi$ jest dodatni, dostajemy wobec $\varrho = |OP| = |BC|$

$$(2) \quad \varrho = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Dla każdego więc punktu kisoidy i jego współrzędnych biegunowych, spełniających nierówności (1), spełnione jest równanie (6).

Na odwrót, gdy dla punktu Q spełnione jest równanie (2), to punkt Q leży na kisoidzie.

Jeśli bowiem $\varrho \geq 0$, to z (2) wynika $\cos \varphi \geq 0$. Na prostej OQ leży wobec tego punkt P kisoidy, który ma współrzędne biegunowe spełniające równanie (2). Punkty P i Q , jako mające te same współrzędne biegunowe, są identyczne.

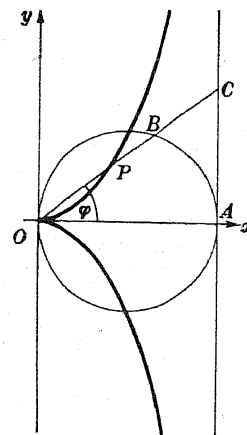
Jeśli zaś $\varrho < 0$, to wprowadzając oznaczenia

$$\varrho_1 = -\varrho, \quad \varphi_1 = \varphi + \pi,$$

dostajemy współrzędne tego samego punktu P . Ponieważ z (2) wynika, że

$$\varrho_1 = -\varrho = |\varrho| = a \frac{\sin^2(\varphi + \pi)}{\cos(\varphi + \pi)},$$

więc widzimy, że P leży na kisoidzie.



Rys. 48

* Diokles (III w. przed n. e.), matematyk grecki, znalazł tę krzywą, starając się rozwiązać zagadnienie skonstruowania za pomocą cyrkla i liniału krawędzi sześcianu, którego objętość byłaby dwa razy większa niż objętość sześcianu o danej krawędzi.

Tym samym równanie (2) określa kisoide we współrzędnych biegunowych.

Weźmy pod uwagę układ prostokątny współrzędnych Oxy , związany z układem biegunowym w sposób opisany w § 13, i zastosujmy wzory (1) z § 13, str. 66. Równanie (6) jest równoważne równaniu

$$\rho^3 \cos \varphi = a \rho^2 \sin^2 \varphi$$

czyli — w myśl tych wzorów — równaniu

$$(3) \quad x(x^2 + y^2) = ay^2,$$

które jest więc równaniem kisoidy w prostokątnym układzie współrzędnych Oxy . Równanie to jest 3-go stopnia. Jak udowodnimy w § 40, str. 204, wynika z tego, że w każdym układzie ukośnokątnym współrzędnych krzywa ta ma również równanie 3-go stopnia.

Łatwo udowodnić, że gdy punkt oddala się po kisoidzie nieograniczenie, to jego odległość od stycznej w punkcie A dąży do zera. Odległość ta bowiem jest równa liczbie

$$d = a - |OP| \cos \varphi = a - a \sin^2 \varphi = a \cos^2 \varphi,$$

a więc d staje się dowolnie małe, gdy φ zmierza do $\pi/2$ lub do $-\pi/2$.

Dla tej przyczyny styczna w punkcie A nazywa się *asymptotą kisoidy*.

2. Lemniskata. Niech na płaszczyźnie będą dane dwa punkty F_1 i F_2 o odległości $2a$. Miejsce geometryczne punktów P , dla których

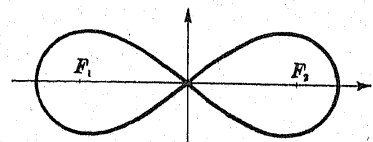
$$(4) \quad |PF_1| |PF_2| = a^2,$$

nazywa się *lemniskatą*.

Przyjmijmy oś F_1F_2 ze zwrotem od F_1 ku F_2 za oś odciętych, symetralną zaś odcinka F_1F_2 z dowolnym zwrotem — za oś rzędnych (rys. 49). W tym układzie współrzędnych kartezjańskich punkty F_1 i F_2 mają współrzędne $-a, 0$ i $a, 0$. Oznaczając przez $P(x, y)$ dowolny punkt płaszczyzny, mamy:

$$|PF_1|^2 = (x + a)^2 + y^2,$$

$$|PF_2|^2 = (x - a)^2 + y^2.$$



Rys. 49

Na to więc, by punkt $P(x, y)$ leżał na lemniskacie, czyli by spełniał równanie (4), potrzeba i wystarcza, żeby

$$[(x + a)^2 + y^2][(x - a)^2 + y^2] = a^4.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie równoważne

$$(5) \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Jest to równanie lemniskaty; krzywa ta ma zatem we współrzędnych kartezjańskich równanie 4-go stopnia.

W celu bliższego zbadania kształtu lemniskaty, zauważmy, że gdy leży na niej punkt (x, y) , to leżą na niej również punkty $(x, -y)$, $(-x, y)$ i $(-x, -y)$. Innymi słowy, osie Ox i Oy są osiami symetrii lemniskaty. Wystarczy więc zbadać jej kształt jedynie w pierwszej ćwiartce. W tym celu przejdziemy do współrzędnych biegunowych, posługując się wzorami (1) z § 13, str. 66. Podstawiając je do równania (5), otrzymujemy

$$(6) \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Wobec ograniczenia się do pierwszej ćwiartki możemy założyć, że $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Ponieważ $r^2 \geq 0$, więc zachodzi nierówność $\cos \varphi \geq 0$, skąd $0 \leq 2\varphi \leq \pi/2$ czyli $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Gdy φ się zmienia od 0 do $\pi/4$, to r maleje od a do 0. Otrzymujemy kształt widoczny na rysunku 49: lemniskata składa się z dwóch pętli, związanych w początku układu.

3. Parametryczne przedstawienie krzywej. Niech na płaszczyźnie porusza się punkt (x, y) i niech jego położenie w chwili t będzie określone równaniami

$$(7) \quad x = f(t), \quad y = g(t).$$

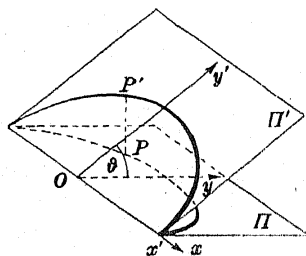
Przy założeniu, że funkcje $f(t)$ i $g(t)$ są ciągłe, tor punktu nazywa się *krzywą ciągłą*, a układ równań (7) — jej *przedstawieniem parametrycznym*.

Niech np. po kole o środku O i promieniu r porusza się punkt $P(x, y)$ ze stałą prędkością kątową 1. Wówczas łuk φ , jaki zatoczy punkt P po czasie t , jest równy t . Jeśli za oś Ox obierzemy średnicę przechodzącą przez początkowe położenie punktu P , a za oś Oy — średnicę do niej prostopadłą, to dla współrzędnych punktu $P(x, y)$ na kole otrzymamy równania

$$(8) \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

Jest to parametryczne przedstawienie koła. Gdy t zmienia się od 0 do 2π , to P obiega koło jeden raz. Każdej dalszej zmianie o 2π odpowiada jeden obieg koła.

4. Elipsa. Niechaj dwie płaszczyzny Π i Π' będą nieprostopadłe i nierównoległe. Na drugiej z nich niech leży koło. Rzut prostopadły tego koła na płaszczyznę Π nazywa się *elipsą*.



Rys. 50

Bez zmiany tego rzutu możemy płaszczyznę Π doprowadzić przez przesunięcie równoległe do takiego położenia, by krawędź przecięcia obu płaszczyzn przechodziła przez środek koła (rys. 50). Weźmy tę krawędź za oś Ox układu prostokątnego współrzędnych Oxy na płaszczyźnie Π , a środek O koła — za początek tego układu. Tę samą krawędź weźmy za oś Ox' układu prostokątnego $Ox'y'$ współrzędnych na płaszczyźnie Π' , z tym samym początkiem O . Oznaczając przez ϑ kąt między płaszczyznami Π i Π' , przez $P'(x', y')$ dowolny punkt na Π' , a przez $P(x, y)$ jego rzut na Π , dostajemy

$$(9) \quad x = x', \quad y = y' \cos \vartheta.$$

Ponieważ koło w układzie $Ox'y'$ ma przedstawienie parametryczne

$$x' = a \cos t, \quad y' = a \sin t,$$

więc dla rzutów P punktów P' tego koła na płaszczyznę Π otrzymamy

$$x = a \cos t, \quad y = a \cos \vartheta \sin t,$$

a zatem oznaczając $a \cos \vartheta$ przez b ,

$$(10) \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Jest to przedstawienie parametryczne elipsy. Dostajemy zeń, przez wyrugowanie parametru t , równanie elipsy w postaci $f(x, y) = 0$, mianowicie tzw. *równanie kanoniczne* (lub *centralne*) *elipsy*:

$$(11) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Łatwo dowodzi się, że i na odwrót, każde równanie postaci (11), gdzie $a > b > 0$, przedstawia elipsę, tj. rzut prostopadły koła na płaszczyznę nachyloną pod kątem $\vartheta = \arccos b/a$ do płaszczyzny koła.

5. Przedstawienie wymierne koła. W przedstawieniu koła równaniami (8) występują funkcje trygonometryczne. Można jednak również przedstawić koło parametrycznie za pomocą funkcji wymiernych. W tym celu przyjmijmy oznaczenie

$$u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Wówczas

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}},$$

stąd zaś

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

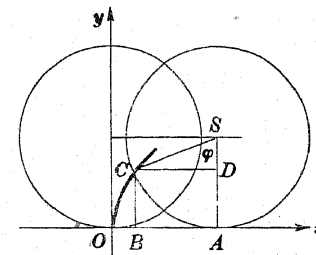
Z (8) dostajemy zatem

$$(12) \quad x = a \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = a \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Gdy u zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, otrzymujemy wszystkie punkty koła i każdy tylko jeden raz z wyjątkiem punktu $(a, 0)$, do którego zbliża się nieograniczenie punkt (12), gdy u dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$. Natomiast w przedstawieniu (8), gdy t zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, punkt obiega koło nieskończenie wiele razy.

6. Cykloida. Krzywa zwana *cykloidą* jest to tor, po którym porusza się punkt P koła toczącego się bez poślizgu po prostej i pozostającego stale w tej samej płaszczyźnie (rys. 51). Niech osią Ox prostokątnego układu współrzędnych będzie prosta, po której się toczy koło, a początkiem tego układu — położenie punktu P , w którym znajduje się on na osi Ox . Niechaj po obrocie o kąt φ punkt P zajmie położenie C . Z definicji toczenia wynika, że długość wektora OA jest równa łukowi AC koła, czyli

$$|OA| = a\varphi.$$



Rys. 51

Zatem dla odciętej punktu C mamy

$$x = |OB| = |OA| - |AB| = a\varphi - a \sin \varphi,$$

a dla rzędnej

$$y = |BC| = |AS| - |SD| = a - a \cos \varphi.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy następujące przedstawienie parametryczne cykloidy

$$(13) \quad x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Kształt cykloidy jest przedstawiony na rys. 52. Rugując φ , otrzymujemy

$$x = a \left[\arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a} \right)^2} \right].$$



Rys. 52

W prostokątnym układzie współrzędnych równanie cykloidy nie jest więc algebraiczne. Można udowodnić, że nie jest też ono algebraiczne w żadnym układzie ukośno-kątnym (p. § 40, str. 204).

§ 16. Przykłady równań tworów przestrzennych

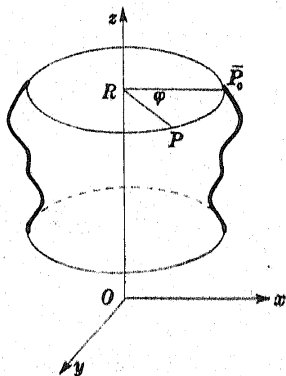
1. Powierzchnie obrotowe. Niech w płaszczyźnie Oxz układu prostokątnego współrzędnych leży krzywa Γ (rys. 53), dająca się przedstawić równaniem postaci

$$(1) \quad x = f(z).$$

Niech krzywa ta dokona pełnego obrotu dookoła osi Oz . Powstaje wówczas *powierzchnia obrotowa* Ω .

Niech $P(x, y, z)$ będzie dowolnym punktem na Ω , a $P_0(x_0, 0, z_0)$ — jego położeniem początkowym na płaszczyźnie Oxz . Punkty P i P_0 mają wspólny rzut R na oś Oz , zatem

$$z = z_0.$$



Rys. 53

Z drugiej strony, $|PR| = |RP_0|$ czyli

$$(2) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = |x_0|.$$

Ponieważ punkt P_0 leży na krzywej (1), więc

$$|x_0| = |f(z_0)| = |f(z)|,$$

stąd zaś wobec (2)

$$(3) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = |f(z)|.$$

Na odwrót, gdy dla punktu $P(x, y, z)$ zachodzi równanie (3), to ten punkt leży na Ω . W oznaczeniach bowiem

$$x_0 = f(z), \quad z_0 = z,$$

widać od razu, że punkt $P_0(x_0, 0, z_0)$ leży na krzywej Γ oraz że punkty P i P_0 mają, wobec $z_0 = z$, ten sam rzut R na oś Oz . Związek (3) wyraża, że $|RP| = |RP_0|$, czyli że P powstaje przez obrót punktu P_0 dookoła osi Oz .

Równanie (3) jest równoważne równaniu

$$(4) \quad x^2 + y^2 = f^2(z);$$

jest to więc równanie powierzchni obrotowej Ω .

Jako szczególny przypadek weźmy powierzchnię stożka, który powstaje przez obrót dookoła osi Oz dwusiecznej kąta zawartego między osią Ox a osią Oz w pierwszej ćwiartce płaszczyzny Oxz (rys. 54). Dwusieczna ta przebiega przez ćwiartki pierwszą i trzecią; każdy jej punkt jest równo oddalony od osi Ox i Oz ; jest więc ona określona układem równań

$$x = z, \quad y = 0.$$

Wobec (4) równaniem stożka jest równanie

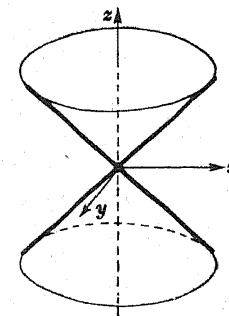
$$(5) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Przedstawienie (1) jest szczególnym przypadkiem przedstawienia parametrycznego

$$(6) \quad x = f(t), \quad z = g(t),$$

gdyż jest ono równoważne przedstawieniu

$$x = f(t), \quad z = t.$$



Rys. 54

Otóż jeśli krzywa Γ w płaszczyźnie Oxz jest przedstawiona nie równaniem (1), lecz ogólniej, w postaci parametrycznej (6), to równanie powierzchni obrotowej Ω możemy otrzymać również w postaci parametrycznej. Oznaczmy bowiem przez φ kąt mierzony w obiegu dodatnim, o jaki obrócił się punkt P_0 , dochodząc do położenia P (p. rys. 53, str. 78). Wówczas dla współrzędnych punktu P zachodzą równości

$$x = |RP| \cos \varphi = |RP_0| \cos \varphi = |x_0| \cos \varphi = |f(t)| \sin \varphi.$$

Obliczając podobnie y i korzystając z równości $z = z_0$, otrzymujemy ostatecznie

$$(7) \quad x = |f(t)| \cos \varphi, \quad y = |f(t)| \sin \varphi, \quad z = g(t).$$

Na odwrót, każdy punkt postaci (7) leży na powierzchni Ω .

Powierzchnia Ω daje się również przedstawić równaniami

$$(8) \quad x = f(t) \cos \varphi, \quad y = f(t) \sin \varphi, \quad z = g(t).$$

Jeśli bowiem $f(t) \geq 0$, to związki (7) i (8) są identyczne. Jeśli zaś $f(t) < 0$, to otrzymujemy (8) z (7), zastępując φ przez $\varphi + \pi$.

Jak widzimy, powierzchnia obrotowa daje się przedstawić za pomocą dwóch parametrów: kąta φ i parametru t na krzywej Γ^* .

Każde położenie krzywej Γ w czasie obrotu nazywa się *południkiem* powierzchni Ω , a każde koło zatoczone przez ustalony punkt krzywej Γ — *równoleżnikiem* tej powierzchni obrotowej.

Np. przez obrót koła

$$x = a \sin \vartheta, \quad z = a \cos \vartheta,$$

leżącego na płaszczyźnie Oxz , dokoła osi Oz powstaje kula, dająca się wobec (8) przedstawić parametrycznie układem równań

$$(9) \quad x = a \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = a \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = a \cos \vartheta.$$

Równoleżniki i południki tej kuli są identyczne z równoleżnikami i południkami występującymi w astronomii i geografii. Liczby ϑ i φ są tu współrzędnymi sferycznymi kątowymi punktu na kuli.

2. Powierzchnie walcowe. Powierzchnią walcową nazywa się powierzchnia, powstająca przez ruch równoległy (ślizganie się) prostej równoległej do stałego kierunku wzdłuż pewnej krzywej Γ .

* W geometrii różniczkowej *powierzchnią* nazywa się każdy twór, dający się przedstawić za pomocą funkcji dwóch parametrów przy założeniach dodatkowych, dotyczących ciągłości i różniczkowości tych funkcji.

Prosta ta w każdym swym położeniu nazywa się *tworzącą* powierzchni walcowej, a krzywa Γ — jej *prowadzącą*.

Niech będzie dany w przestrzeni układ prostokątny współrzędnych $Oxyz$ i powierzchnia walcowa Ω o tworzących równoległych do osi Oz , przecinająca płaszczyznę Oxy wzdłuż krzywej Γ , która w układzie Oxy na tej płaszczyźnie ma równanie

$$(10) \quad f(x, y) = 0.$$

W układzie współrzędnych przestrzennych $Oxyz$ krzywa ta jest zatem określona przez układ równań

$$(11) \quad f(x, y) = 0, \quad z = 0.$$

Na to, by punkt $P(x, y, z)$ leżał na powierzchni Ω , potrzeba i wystarcza, żeby jego rzut prostopadły na płaszczyznę Oxy leżał na krzywej Γ . Ponieważ rzutem punktu $P(x, y, z)$ na tę płaszczyznę jest punkt $P_1(x, y, 0)$, więc równanie (10) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, by punkt $P(x, y, z)$ leżał na powierzchni Ω . Równanie to określa więc powierzchnię Ω .

Np. w układzie prostokątnym Oxy współrzędnych na płaszczyźnie równanie $x^2 + y^2 = a^2$ przedstawia koło o środku w początku układu, w przestrzeni zaś przedstawia ono walec obrotowy, którego osią jest oś Oz . Równanie $z(z^2 + y^2) = ay^2$ przedstawia walec, którego tworzącą jest prosta równoległa do osi Ox , ślizgająca się po kisołdzie leżącej na płaszczyźnie Oyz .

W układzie ukośnokątnym współrzędnych przestrzennych równanie $f(x, y) = 0$ przedstawia powierzchnię walcową o tworzących równoległych do osi Oz .

3. Rzut krzywej. Weźmy pod uwagę dwie powierzchnie o równaniach

$$(12) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

przenikające się wzdłuż pewnej krzywej Γ , i znajdziemy równania rzutów tej krzywej na płaszczyznę układu współrzędnych.

Pierwsze z tych równań przedstawia kulę o promieniu a , drugie zaś, na mocy (5), stożek obrotowy, którego osią jest oś Oz , a wierzchołkiem — początek układu. Niech $P(x, y, z)$ będzie dowolnym punktem krzywej przenikania Γ ; trójka liczb x, y, z speł-

nia więc oba równania (12). Z równań tych otrzymujemy przez eliminację z

$$(13) \quad x^2 + y^2 = a^2/2.$$

Współrzędne każdego punktu krzywej I' spełniają zatem równanie (13). Równanie to przedstawia w przestrzeni walec o tworzących równoległych do osi Oz . Walec ten przechodzi przez krzywą I' . Każda tworząca tego walca przecina I' , gdyż jest określona parą równań $x=x_0$, $y=y_0$, gdzie

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2/2.$$

Na tworzącej tej leży więc punkt $Q(x_0, y_0, a/\sqrt{2})$, którego współrzędne spełniają oba równania (12), czyli punkt Q krzywej I' . Stąd wynika, że rzut krzywej I' na płaszczyznę Oxy jest przekrojem walca (13) tą płaszczyzną, a więc ma równania

$$(14) \quad x^2 + y^2 = a^2/2, \quad z=0.$$

Jest to koło o środku $(0,0)$ i promieniu $a/\sqrt{2}$.

Znalezienie rzutu krzywej I' na płaszczyznę Oxy sprowadza się więc do przeprowadzenia przez I' walca o tworzących równoległych do osi Oz . Analitycznie równania tego rzutu otrzymuje się przez eliminację współrzędnej z z równań powierzchni, przenikających się wzdluz krzywej I' .

Oczywiście, w celu znalezienia rzutu na płaszczyznę Oxz eliminujemy y . Otrzymujemy

$$2z^2 = a^2, \quad z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Rzuty te leżą więc na płaszczyznach

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad z = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

które są równoległe do płaszczyzny Oxy i przecinają kulę wzdluz pary przystających kół, których rzutem na płaszczyznę Oxy jest koło (14). A więc rzutem krzywej I' na płaszczyznę Oxz jest twór złożony z odcinka

$$y=0, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}},$$

i z odcinka

$$y=0, \quad z = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Analogicznie znajdujemy rzut na płaszczyznę Oyz .

4. Linia śrubowa. Niech walec obrotowy o promieniu a obraca się dokoła swej osi ze stałą prędkością kątową ω . Po tworzącej walca niech porusza się punkt P ze stałą prędkością v . Tor punktu P nazywa się *linią śrubową*.

Przyjmijmy za oś Oz oś walca; płaszczyznę Oxy niech będzie płaszczyzna prostopadła do osi Oz i przechodząca przez położenie P_0 punktu w chwili $t=0$ (rys. 55); osią Ox niech będzie oś OP_0 ze zwrotem od O do P_0 . Osi Oz nadajemy zwrot wyznaczony przez ruch punktu P po tworzącej walca. Rzut P_1 punktu P na płaszczyznę Oxy obraca się dokoła punktu O . Osi Oy nadajemy taki zwrot, by obrót ten miał obieg dodatni. W chwili t walec obrócił się o kąt $\varphi = \omega t$. Punkt P ma więc wtedy współrzędne cylindryczne $a, \omega t, vt$. We współrzędnych prostokątnych jest zatem (p. § 13, wzory (5), str. 67)

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = vt.$$

Jest to parametryczne przedstawienie linii śrubowej. Przyjmując

$$\omega t = \varphi, \quad v/\omega = k,$$

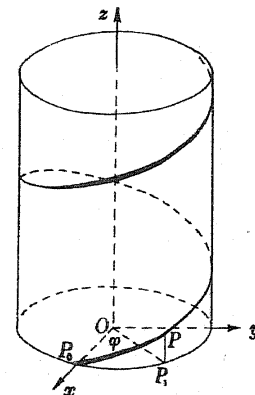
otrzymujemy przedstawienie linii śrubowej za pomocą nowego parametru φ :

$$(15) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = k\varphi.$$

Na rys. 55 układ współrzędnych jest prawoskrętny.

Linia śrubowa nazywa się *prawo-* lub *lewo-*skrętna zależnie od tego, czy układ współrzędnych $Oxyz$, określony jak wyżej, jest prawo- czy lewoskrętny.

Gdy $k < 0$, to w układzie prawoskrętnym $Oxyz$ równanie (15) również przedstawia linię śrubową; tu jednak walec obraca się w obiegu ujemnym i linia śrubowa jest lewoskrętna.



Rys. 55

Rzut linii śrubowej (15) na płaszczyznę Oxy jest kołem

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = 0,$$

rzut jej zaś na płaszczyznę Oyz jest krzywą

$$x = 0, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = k\varphi$$

czyli sinusoidą

$$x = 0, \quad y = a \sin \frac{z}{k}.$$

ROZDZIAŁ IV

PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE

§ 17. Równania prostej na płaszczyźnie

1. Równanie ogólne. Niech będzie dany na płaszczyźnie układ ukośnokątny współrzędnych Oxy o dowolnych wektorach podstawowych i, j oraz dowolna prosta p . Oznaczmy przez A, B składowe kowariantne wektora (niezerowego) α , prostopadłego do tej prostej, przez $P_0(x_0, y_0)$ jakikolwiek ustalony punkt tej prostej, przez $P(x, y)$ dowolny jej punkt, wreszcie przez ξ wektor OP i przez ξ_0 wektor OP_0 . Zatem

$$(1) \quad P_0P = \xi - \xi_0.$$

Ponieważ punkt P leży w myśl założenia na prostej p , więc wektor P_0P jest prostopadły do wektora α ; na odwrót, gdy P_0P jest prostopadły do α , to punkt P leży na prostej p . Warunkiem więc koniecznym i dostatecznym na to, by punkt P leżał na prostej p , jest znikanie iloczynu skalarowego $\alpha \cdot P_0P$ czyli

$$(2) \quad \alpha(\xi - \xi_0) = 0.$$

Korzystając ze wzoru (6) z § 9, str. 41, dostajemy zatem równanie prostej p w postaci

$$(3) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Przyjmując oznaczenie

$$(4) \quad C = -Ax_0 - By_0,$$

możemy równanie (3) napisać w postaci

$$(5) \quad Ax + By + C = 0.$$