

ROZDZIAŁ II

SKŁADOWE WEKTORA I WSPÓLRZĘDNE PUNKTU

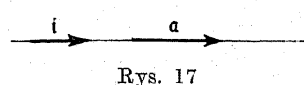
§ 4. Składowe wektora i współrzędne punktu na prostej

1. Składowe wektora. Niechaj będzie dana oś x . Ustalmy na niej wektor niezerowy i o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi.

Wektor i nazywamy *wektorem podstawowym układu współrzędnych*.

Dla każdego wektora a równoległego do osi x istnieje liczba l dla której (rys. 17)

$$(1) \quad a = l \cdot i.$$



Rys. 17

Na odwrót, każdy wektor postaci (1) jest równoległy do osi x . Równym wektorem a odpowiadają równe liczby l , a różnym wektorom — różne liczby.

Liczbę l nazywamy *składową wektora* a w układzie współrzędnych, w którym wektorem podstawowym jest i .

Jeśli $l > 0$, to wektor a ma zwrot zgodny z osią, jeśli zaś $l < 0$ to zwrot jego jest przeciwny. Gdy $l = 0$, to $a = 0$.

Jeśli długość wektora podstawowego i jest równa 1 (tj. ma on długość jednostki podstawowej, którą mierzymy wszystkie odcinki w przestrzeni), to $|a| = |l|$. W tym więc przypadku składowa l jest wartością wektora a na osi x (p. Rozdział I, str. 12).

Jeśli zmienimy zwrot osi x , to znaki składowych wektorów przejdą na przeciwne. Gdy zmienimy wektor podstawowy i na nowy wektor podstawowy

$$(2) \quad i' = m \cdot i,$$

to dla składowej l' wektora a w układzie współrzędnych, w którym wektorem podstawowym jest i' , będzie

$$a = l' \cdot i'.$$

Wobec (2) dostajemy stąd $l' \cdot i' = l \cdot i$ czyli $l' \cdot m \cdot i = l \cdot i$, skąd $l = l' \cdot m$ czyli

$$(3) \quad l' = l/m.$$

Tym samym *składowe wektorów są odwrotnie proporcjonalne do długości wektorów podstawowych*.

Wektor a o składowej l oznaczajmy przez $[l]$. Jest więc w myśl definicji:

$$(4) \quad [l] = l \cdot i.$$

Składowa sumy dwu wektorów jest równa sumie ich składowych:

$$(5) \quad [l] + [m] = [l + m].$$

W myśl bowiem określenia (4) mamy

$$[l] + [m] = l \cdot i + m \cdot i = (l + m) \cdot i = [l + m].$$

Podobnie dowodzi się, że dla każdej liczby rzeczywistej s jest

$$(6) \quad s \cdot [l] = [sl].$$

Z (5) i (6) wynika, że dla każdej pary s, t liczb rzeczywistych i każdej pary $[l], [m]$ wektorów zachodzi równość

$$(7) \quad s \cdot [l] + t \cdot [m] = [sl + tm].$$

Z równości (7) wynika w szczególności dla $s = t = 1$ równość (5), a dla $t = 0$ — równość (6). Równość (7) zawiera więc (5) i (6) jako przypadki szczególne. Szczególnym przypadkiem (7) jest także równość

$$(8) \quad [l] - [m] = [l - m].$$

2. Współrzędne punktu. Ustalmy obecnie na osi, prócz wektora podstawowego i , jeszcze dowolny punkt O . Każdy punkt P tej osi jest wówczas wyznaczony przez wektor OP , który jest z kolei wyznaczony przez swą składową na tej osi.

Składową wektora OP nazywamy *współrzędną punktu P* .

Tak więc pojęcie składowej wektora określiliśmy dla wektorów swobodnych, a współrzędne punktu P określamy jako składową wektora umiejscowionego OP o początku O .

Np. punkt O ma współrzędną 0; koniec wektora i po umiejscowieniu go w ten sposób, by początkiem był punkt O , ma współrzędną 1. Punkt O dzieli prostą na dwie półproste; na jednej z nich

współrzędne punktów są dodatnie, a na drugiej ujemne. W ten sposób przypisaliśmy każdemu punktowi prostej liczbę rzeczywistą i każdej liczbie rzeczywistej — punkt. Różnym punktom odpowiadają różne liczby i na odwrót.

Punkt P o współrzędnej x oznaczamy przez $P(x)$ lub krócej przez (x) .

Weźmy pod uwagę dwa punkty $P(x_1)$ i $Q(x_2)$. Wówczas wektor PQ ma składową

$$(9) \quad l = x_2 - x_1.$$

Istotnie, $OQ = OP + PQ$ czyli $PQ = OQ - OP$, skąd wobec (8) do stajemy (9).

W ten sposób znaleźliśmy związek między składowymi wektora a współzrędnymi punktów.

Zbadajmy, w jaki sposób zmienia się współrzędna punktu wraz ze zmianą początku układu współrzędnych, lecz bez zmian wektora podstawowego i . Niechaj punkt O' , który ma w pierwotnym układzie współrzędną q , będzie początkiem nowego układu współrzędnych (rys 18). Oznaczmy przez x współrzędną punktu P w układzie współrzędnych o początku O , a przez x' współrzędną tegoż punktu P w układzie współrzędnych o początku O' . Ponieważ $OP = OO' + O'P$, więc przechodząc do składowych, dostajemy

$$(10) \quad x = q + x'.$$

Wzór ten daje zatem zależność między współzrędnymi punktu przy przesunięciu początku układu współrzędnych do punktu o pierwotnej współrzędnej q . Zauważmy, że jeślibyśmy przesunęli początek układu i zmienili wektor podstawowy i na $-i$, to zamiast (10) otrzymalibyśmy

$$(11) \quad x = q - x'.$$

Składowe wektora zostały określone niezależnie od punktu O . Zatem przesunięcie początku układu współrzędnych nie zmienia składowych wektora.

Wynika to również z (10), bo po przesunięciu otrzymujemy

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - q) - (x_1 - q) = x_2 - x_1.$$

§ 5. Składowe wektora i współrzędne punktu na płaszczyźnie

1. Zależności między wektorami równoległymi do płaszczyzny. Niech $i \neq 0$ i $j \neq 0$ będą wektorami nierównoległymi. Wektory te, jak każde dwa wektory, są oczywiście równoległe do pewnej płaszczyzny; oznaczmy ją przez Π .

Udowodnimy, że dla każdego wektora a , równoległego do płaszczyzny Π , istnieje dokładnie jedna para l, m liczb o własności

$$(1) \quad a = l \cdot i + m \cdot j$$

i , na odwrót, każdy wektor kształtu (1) jest równoległy do płaszczyzny Π .

W tym celu z dowolnego punktu P przestrzeni wyprowadźmy dwa wektory równe wektorom i i j . Oznaczmy przez i i j proste, na których leżą tak otrzymane wektory (rys. 19). Niech $a = PQ$. Niech Q_i będzie rzutem wektora PQ na prostą i . Wówczas

$$(2) \quad PQ = PQ_i + Q_iQ.$$

Ponieważ wektor PQ_i jest równoległy do wektora i , więc istnieje taka liczba l , że

$$(3) \quad PQ_i = l \cdot i;$$

podobnie

$$(4) \quad Q_iQ = m \cdot j.$$

Wobec (2) z (3) i (4) wynika (1).

Należy jeszcze dowieść, że istnieje tylko jedna para liczb l, m o własności (1). Przypuśćmy, że istnieje jeszcze inna para l', m' o tejże własności. Jest więc

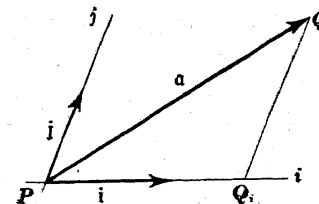
$$(5) \quad l \neq l' \quad \text{lub} \quad m \neq m'$$

oraz

$$(6) \quad a = l' \cdot i + m' \cdot j.$$

Odejmując (6) od (1), otrzymujemy $0 = (l - l') \cdot i + (m - m') \cdot j$ czyli

$$(7) \quad (l - l') \cdot i = (m' - m) \cdot j.$$



Rys. 19

Niech zachodzi np. pierwsza z nierówności (5). Z (7) i z założenia, że $i \neq 0$ oraz $j \neq 0$, wynika, że zachodzi również druga z nierówności (5). Mamy więc

$$i = \frac{m' - m}{l - l'} \cdot j,$$

a zatem wektory i i j byłyby równoległe, wbrew założeniu.

Wreszcie, dla dowodu, że każdy wektor kształtu (1) jest równoległy do płaszczyzny Π , zauważmy, że w myśl definicji mnożenia wektora przez liczbę każdy z wektorów $l \cdot i$ i $m \cdot j$ jest równoległy do Π (lub równy 0). Z konstrukcji sumy dwóch wektorów (jako przekątnej równoległoboku) wynika, że wektor $l \cdot a + m \cdot b$ jest także równoległy do Π , c. b. d. o.

Z udowodnionego twierdzenia płynie następujący wniosek:

Na to, by trzy wektory a , b i c były równoległe do jednej płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, żeby istniały trzy nieznikające równocześnie liczby l , m i n , dla których

$$(8) \quad l \cdot a + m \cdot b + n \cdot c = 0.$$

Istotnie, założmy na przód, że zachodzi równość (8) i niech np. $n \neq 0$. Wówczas

$$(9) \quad c = -\frac{l}{n} \cdot a - \frac{m}{n} \cdot b.$$

Jeśli $a=b=0$, to $c=0$, więc wszystkie trzy wektory są równoległe do (jakiegokolwiek w danym razie) płaszczyzny; jeśli zaś np. $a \neq 0$, a $b=0$, to z (9) wynika na mocy poprzedniego twierdzenia równoległość a i c , a więc znowu równoległość wszystkich trzech wektorów do jednej płaszczyzny; wreszcie, jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to bądź wektor c jest równoległy do a i b , gdy te wektory są równoległe, bądź w przypadku przeciwnym wszystkie trzy wektory są równoległe do jednej płaszczyzny na podstawie poprzedniego twierdzenia. Tak więc równość (8) jest warunkiem wystarczającym.

Podobnie dowodzi się konieczności tego warunku przez rozważenie kilku przypadków i zastosowanie poprzedniego twierdzenia.

2. Składowe wektora na płaszczyźnie. Niech na dowolnej płaszczyźnie Π leżą dwie nierównoległe osie o punkcie przecięcia O .

Będziemy je nazywali *osiąmi współrzędnych* i oznaczali przez Ox , Oy ; sam punkt O nazywać się będzie ich *początkiem*.

Na osi Ox obierzmy wektor i mający ten sam zwrot co oś, a na osi Oy analogiczny wektor j (rys. 20).

Wektory te nazywamy *podstawowymi*.

Każdy wektor a płaszczyzny Π daje się przedstawić w postaci (1). W ten sposób każdemu wektorowi płaszczyzny odpowiada jedna uporządkowana para liczb l, m .

Natomiast parze liczb l, m odpowiada w płaszczyźnie Π nieskończenie wiele wektorów równych. Liczby l, m wyznaczają zatem w płaszczyźnie Π wektor swobodny.

Nazywamy je *składowymi tego wektora* w układzie współrzędnych Oxy o wektorach podstawowych i i j , a wektor przez nie wyznaczony oznaczamy przez $[l, m]$.

Z tego określenia wynika, że

$$(10) \quad [l, m] = l \cdot i + m \cdot j.$$

Np. wektor i ma składowe 1 i 0, a wektor j — składowe 0 i 1; zatem

$$i = [1, 0], \quad j = [0, 1].$$

Wektory $[l, l]$ są równoległe do przekątnej równoległoboku zbudowanego na i i j (czyli do wektora $i + j$). Wektory $[l, 0]$ są równoległe do osi Ox , a wektory $[0, m]$ do osi Oy .

Niech $a = [l, m]$ i niech a_x będzie rzutem wektora a na oś Ox , równoległym do osi Oy . Wówczas $a_x = [l, 0]$. Wynika stąd, że l jest wartością rzutu wektora a na oś Ox , równoległego do osi Oy , gdy jednostką długości na osi Ox jest $|i|$. Podobnie, m jest wartością rzutu wektora a na oś Oy , gdy jednostką długości na osi Oy jest $|j|$.

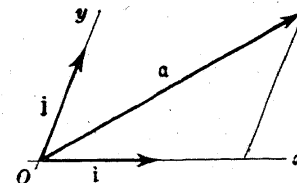
Jeśli nie zmieniając osi Ox i Oy przyjmiemy za wektory jednostkowe $i' = p \cdot i$ i $j' = r \cdot j$, to wektor, który w pierwszym układzie współrzędnych miał składowe l i m , w drugim układzie ma składowe l/p i m/r .

Gdy zmieniamy wektor podstawowy na osi Ox , biorąc — i zamiast i , to składowa l wektora $[l, m]$ zmienia znak.

Najczęściej będziemy stosowali układy współrzędnych, w których wektory jednostkowe i i j mają długości równe.

Udowodnimy obecnie, że

$$(11) \quad [l_1, m_1] + [l_2, m_2] = [l_1 + l_2, m_1 + m_2].$$



Rys. 20

Istotnie,

$$[l_1, m_1] = l_1 \cdot i + m_1 \cdot j, \quad [l_2, m_2] = l_2 \cdot i + m_2 \cdot j,$$

a więc

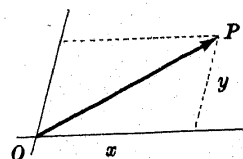
$$[l_1, m_1] + [l_2, m_2] = (l_1 + l_2) \cdot i + (m_1 + m_2) \cdot j,$$

skąd wynika (11). Podobnie

$$(12) \quad p[l, m] = [pl, pm].$$

Ponieważ składowe wektorów są zależne jedynie od wektorów i i j , a nie od ich umiejscowienia na płaszczyźnie, więc w dwóch układach współrzędnych o osiach równoległych i wektorach podstawowych równych wektor ma te same składowe.

3. Współrzędne punktu. Niech obecnie dany będzie na płaszczyźnie układ osi współrzędnych Oxy oraz punkt P na tejże płaszczyźnie. Poprowadźmy z początku układu wektor OP (rys. 21)



Rys. 21

Składowe wektora OP nazywamy *współrzędnymi punktu P* i oznaczamy przez x i y .

Współrzędna x nazywa się *odciętą*, a y — *rzędną* punktu P .

W ten sposób każdemu punktowi odpowiada dokładnie jedna para liczb i oczywiście na odwrót, każdej parze liczb odpowiada dokładnie jeden punkt.

Parze składowych wektora odpowiada — jak widzieliśmy — nieskończenie wiele wektorów równych, natomiast parze współrzędnych odpowiada tylko jeden punkt; w określeniu bowiem współrzędnych punktu umiejscowiliśmy wektor OP , biorąc jego początek w początku układu.

Punkt P o współrzędnych x i y oznaczamy przez $P(x, y)$ lub przez (x, y) .

Np. początek układu ma współrzędne $0, 0$. Dla punktów na osi Ox jest $y = 0$, a dla punktów na osi Oy jest $x = 0$. Jeśli $|i| = |j|$, to dla punktów leżących na dwusiecznych kątów między osiami jest $x =$ lub $x = -y$.

Punkty prostej równoległej do osi Ox i przecinającej oś O w punkcie $(0, a)$ mają rzędną $y = a$; na odwrót, gdy rzędną punkt jest równa a , to punkt leży na tej prostej.

Osie układu dzielą płaszczyznę na cztery części; w *pierwszej* ćwiartce obie współrzędne są dodatnie, w drugiej odcięte są ujemne a rzędne dodatnie itd. (rys. 22).

Niech w płaszczyźnie będą dane dwa punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$. Wówczas wektor PQ ma składowe

$$(13) \quad l = x_2 - x_1 \quad \text{ i } \quad m = y_2 - y_1$$

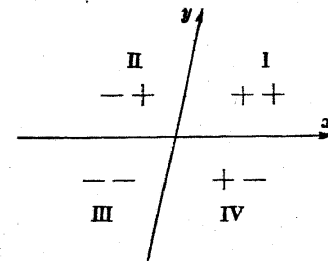
(od współrzędnych końca odejmujemy współrzędne początku).

Istotnie, w myśl określenia współrzędnych punktu jest

$$OP = [x_1, y_1] \quad \text{ i } \quad OQ = [x_2, y_2],$$

skąd

$$\begin{aligned} PQ &= OQ - OP = [x_2, y_2] - [x_1, y_1] = \\ &= [x_2 - x_1, y_2 - y_1]. \end{aligned}$$



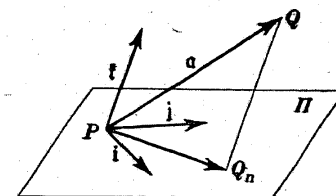
Rys. 22

§ 6. Składowe wektora i współrzędne punktu w przestrzeni

1. Zależności między wektorami w przestrzeni. Niech i, j i $\hat{f}$ będą trzema wektorami w przestrzeni, nierównoległymi do jednej płaszczyzny. Udowodnimy, że dla każdego wektora a w przestrzeni istnieje dokładnie jeden układ liczb l, m, n , dla którego

$$(1) \quad a = l \cdot i + m \cdot j + n \cdot \hat{f}.$$

W tym celu z dowolnego punktu P przestrzeni wyprowadźmy wektory $i, j, \hat{f}$. Oznaczmy przez Π płaszczyznę wyznaczoną przez wektory i i j (rys. 23). Niech $PQ = a$, a Q_{Π} niech będzie rzutem punktu Q na płaszczyznę Π , równoległym do wektora $\hat{f}$. Wówczas



Rys. 23

$$(2) \quad a = PQ = PQ_{\Pi} + Q_{\Pi}Q.$$

Ponieważ wektor $Q_{\Pi}Q$ jest równoległy do wektora $\hat{f}$, więc

$$(3) \quad Q_{\Pi}Q = n \cdot \hat{f},$$

gdzie n jest pewną liczbą rzeczywistą. Ponieważ PQ_{Π} jest wektorem leżącym w płaszczyźnie Π , więc na podstawie twierdzenia z poprzedniego paragrafu (p. wzór (1), str. 23) istnieją takie liczby l i m , że

$$PQ_{\Pi} = l \cdot i + m \cdot j.$$

Stąd wobec (2) i (3) wynika (1).

Przypuśćmy, że prócz przedstawienia (1) istnieje jeszcze inne przedstawienie

$$(4) \quad \alpha = l' \cdot i + m' \cdot j + n' \cdot k;$$

zachodzi więc co najmniej jedna z nierówności

$$(5) \quad l \neq l', \quad m \neq m', \quad n \neq n'.$$

Odejmując (4) od (1), otrzymujemy

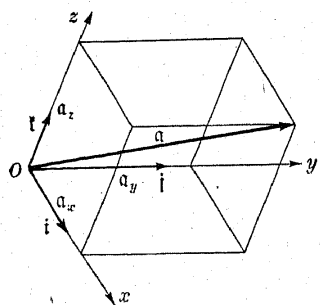
$$(l-l') \cdot i + (m-m') \cdot j + (n-n') \cdot k = 0.$$

Niech np. $l \neq l'$. Wówczas

$$i = \frac{m'-m}{l-l'} \cdot j + \frac{n'-n}{l-l'} \cdot k,$$

a więc wektor i byłby równoległy do płaszczyzny równoległej do wektorów j i k , wbrew założeniu.

2. Składowe wektora w przestrzeni. Niech x, y i z będą trzema osiami w przestrzeni, przechodzącymi przez wspólny punkt O i nie-równoległymi do jednej płaszczyzny. Na osiach tych obierzmy od-



Rys. 24

powiednio wektory i, j, k o tych samych zwrotach co osie. Wówczas każdy wektor α daje się przedstawić w postaci (1).

Liczby l, m i n nazywamy *składowymi wektora* w układzie współrzędnych $Oxyz$ o wektorach podstawowych i, j, k .

Wektor α oznaczamy przez $[l, m, n]$.

Jeśli na osi x za jednostkę długości przyjęto $|i|$, to l jest wartością rzutu a_x wektora α na oś x i podobnie dla pozostałych współrzędnych (rys. 24).

Tak np. $i = [1, 0, 0]$, $j = [0, 1, 0]$, $k = [0, 0, 1]$; wektor $[l, l, l]$ jest równoległy do przekątnej równoległościanu zbudowanego na wektorach i, j, k (czyli do wektora $i + j + k$).

Osie x, y i z nazywamy *osiąmi współrzędnych* i oznaczamy przez Ox, Oy i Oz . Płaszczyzny wyznaczone przez pary osi oznaczamy przez Oxy, Oxz i Oyz . Wektory równoległe do płaszczyzny Oxy mają postać $[l, m, 0]$, równoległe do płaszczyzny Oxz — postać $[l, 0, n]$, a równoległe do płaszczyzny Oyz — postać $[0, m, n]$. Wektory rów-

noległe do osi Ox, Oy i Oz mają odpowiednio postacie $[a, 0, 0]$, $[0, a, 0]$ i $[0, 0, a]$.

Podobnie jak na płaszczyźnie, dowodzi, się że:

$$(6) \quad [l_1, m_1, n_1] + [l_2, m_2, n_2] = [l_1 + l_2, m_1 + m_2, n_1 + n_2],$$

$$(7) \quad p \cdot [l, m, n] = [pl, pm, pn].$$

5. Współrzędne punktu w przestrzeni. Współrzędne punktu P w przestrzeni określamy tak jak na płaszczyźnie, jako składowe wektora OP . Oznaczamy je przez x, y, z , sam zaś punkt P — przez $P(x, y, z)$ lub (x, y, z) .

Np. początek układu ma współrzędne $0, 0, 0$, punkty osi Ox mają współrzędne $x, 0, 0$, punkty osi Oz — współrzędne $0, 0, z$, a punkty płaszczyzny Oyz — współrzędne $0, y, z$.

Układ współrzędnych $Oxyz$ wyznacza na każdej z płaszczyzn Oxy, Oyz i Oxz układ współrzędnych płaski. Współrzędne x, y punktu $(x, y, 0)$ leżącego w płaszczyźnie Oxy są równocześnie współrzędnymi tego punktu w układzie Oxy , leżącym w tej płaszczyźnie.

Rzut punktu (x, y, z) na płaszczyznę Oyz , równoległy do osi Ox , ma współrzędne $0, y, z$. Rzut tego samego punktu na oś y , równoległy do płaszczyzny Oxz ma współrzędne $0, y, 0$.

Płaszczyzny układu współrzędnych dzielą przestrzeń na osiem części. W jednej z nich współrzędne x, y, z mają znaki $+, +, +$, w drugiej znaki $-, +, +$, w trzeciej $+, -, +$ itd.

Pierwszą ósemką nazywa się tę, w której wszystkie współrzędne są dodatnie.

Wektor α , którego początkiem jest punkt $P(x_1, y_1, z_1)$, końcem zaś punkt $Q(x_2, y_2, z_2)$, ma składowe

$$(8) \quad a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1, \quad c = z_2 - z_1.$$

PRZYKŁADY. 1. Dane są w przestrzeni dwa punkty $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$. Znaleźć współrzędne środka odcinka, łączącego te punkty.

Środek odcinka jest punktem S , określonym przez równość wektorową

$$(9) \quad PS = SQ.$$

Niech S ma współrzędne x, y, z . Wówczas

$$PS = [x - x_1, y - y_1, z - z_1], \quad SQ = [x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z].$$

Z (9) wynika więc, że

$$x - x_1 = x_2 - x, \quad y - y_1 = y_2 - y, \quad z - z_1 = z_2 - z,$$

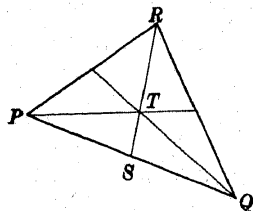
czyli

$$(10) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2. Znaleźć współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ i $R(x_3, y_3, z_3)$.

Środek ciężkości T jest punktem przecięcia środkowych. Niech S będzie środkiem odcinka PQ (rys. 25); zatem punkt T jest określony przez równość wektorową

$$ST = \frac{1}{3} SR.$$



Rys. 25

Przechodząc stąd do składowych, otrzymujemy wobec (10) dla pierwszej składowej wektora ST

$$x - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{3} \left(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} \right),$$

skąd

$$(11) \quad x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Podobne równości zachodzą dla pozostałych dwu współrzędnych.

§ 7. Iloczyn skalarowy i długość wektora

1. Iloczyn skalarowy i długość wektora na płaszczyźnie. Obierzmy na płaszczyźnie dowolny układ współrzędnych Oxy i niech kąt między osiami wynosi ν (rys. 26).

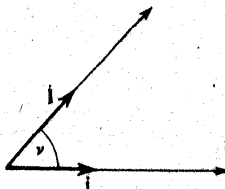
Odtąd zakładamy stale, że wektory podstawowe i i j mają tę samą długość, równą wspólnej na obu osiach jednostce miary.

Zatem:

$$|i| = 1, \quad |j| = 1,$$

skąd wynika, że

$$(1) \quad ij = \cos \nu \quad i^2 = j^2 = 1.$$



Rys. 26

Niech teraz dane będą w tejże płaszczyźnie dwa wektory

$$a = [l_1, m_1], \quad b = [l_2, m_2];$$

wówczas

$$a = l_1 \cdot i + m_1 \cdot j, \quad b = l_2 \cdot i + m_2 \cdot j.$$

Stąd otrzymujemy dla ich iloczynu skalarowego

$$(2) \quad \begin{aligned} ab &= [l_1 \cdot i + m_1 \cdot j][l_2 \cdot i + m_2 \cdot j] = \\ &= l_1 l_2 \cdot i^2 + m_1 m_2 \cdot j^2 + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \cdot ij, \end{aligned}$$

czyli wobec (1) dostajemy wzór

$$(3) \quad ab = l_1 l_2 + m_1 m_2 + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \cos \nu.$$

W szczególnym przypadku, gdy wektory a i b są równe, $ab = a^2$. Dostajemy więc równocześnie wzór na długość wektora

$$(4) \quad |a|^2 = l^2 + m^2 + 2lm \cos \nu.$$

Np. w układzie współrzędnych o kącie $\nu = \pi/3$ mamy

$$|a|^2 = l^2 + m^2 + lm;$$

wektor o składowych 1 i 2 ma więc tu długość

$$|a| = \sqrt{1+4+2} = \sqrt{7} = 2,96 \dots$$

Przy wyprowadzaniu wzoru (3) korzystaliśmy z założenia, że $|i| = |j| = 1$. Jeśli odrzucimy to założenie, to dla iloczynu skalarowego nie otrzymamy wzoru w postaci (3), lecz w postaci (2), w której występują liczby stałe i^2 , ij , j^2 , wyznaczone przez dany układ współrzędnych, lecz niezależne od wektora a . Możemy je oznaczyć przez

$$(5) \quad g_{11} = i^2, \quad g_{12} = g_{21} = ij, \quad g_{22} = j^2$$

i wówczas wzór (2) przybiera postać

$$(6) \quad ab = g_{11} l_1 l_2 + g_{12} l_1 m_2 + g_{21} l_2 m_1 + g_{22} m_1 m_2,$$

a zamiast wzoru (4) dostajemy

$$(7) \quad |a|^2 = g_{11} l^2 + 2g_{12} lm + g_{22} m^2.$$

Z (7) wynika, że kwadrat długości wektora jest formą kwadratową, tj. wielomianem jednorodnym drugiego stopnia, względem współrzędnych wektora *. Forma ta nie przybiera wartości ujemnych (jako kwadrat długości) i gdy jedna z liczb l, m jest różna od zera, to forma ma war-

* Natomiast iloczyn skalarowy jest formą dwuliniową, która jest formą biegunową formy (11); por. Przypis I, § 3.

tość dodatnią. Jest więc ona *właściwa dodatnia* (por. Przypis I, § 3). Udo-
wodnimy w § 28, że gdy dana jest dowolna forma kwadratowa właściwa
dodatnia, to istnieje taki układ współrzędnych *Oxy* oraz takie wektory
podstawowe *i* i *j* (na ogół nierówne co do długości), że dana forma przed-
stawia w tym układzie kwadrat długości wektora.

Szczególnie ważną rolę grają układy, w których $\nu = \pi/2$, czyli
tzw. *układy prostokątne* współrzędnych.

Dla nich $\cos \nu = 0$ i otrzymane wzory przybierają szczególni
prostą postać:

$$(8) \quad ab = l_1 l_2 + m_1 m_2,$$

$$(9) \quad |a|^2 = l^2 + m^2.$$

Niech dane będą dwa punkty: $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$. Obliczmy
ich odległość $d = |PQ|$. Ponieważ wektor PQ ma składowe $x_2 - x_1$
i $y_2 - y_1$ (p. § 5, wzór (13), str. 27), więc w *układach współrzędnych*
o kącie ν jest

$$(10) \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \nu;$$

w szczególności w *układzie prostokątnym współrzędnych* jest

$$(11) \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

PRZYKŁAD. Znaleźć środek S koła opisanego na trójkącie
o wierzchołkach $P(0, 0)$, $Q(0, 1)$ i $R(1, 0)$. Oznaczmy współrzędne
punktu S przez x i y . Z warunków $|SP| = |SQ|$ i $|SP| = |SR|$
otrzymujemy równania

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \nu = (x - 1)^2 + y^2 + 2(x - 1)y \cos \nu,$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \nu = x^2 + (y - 1)^2 + 2x(y - 1) \cos \nu.$$

Z równań tych wyznaczamy współrzędne środka S

$$(12) \quad x = y = \frac{1}{2(1 + \cos \nu)}.$$

2. Iloczyn skalarowy i długość wektora w przestrzeni

Niech teraz *Oxyz* będzie dowolnym układem współrzędnych w prze-
strzeni o kątach (rys. 24)

$$\nu = \angle xOy, \quad \mu = \angle xOz, \quad \lambda = \angle yOz$$

i — zgodnie ze stałym obecnie założeniem — o wektorach podsta-
wowych *i, j, k* równej długości:

$$(13) \quad |i| = |j| = |k| = 1.$$

Zatem

$$(14) \quad ij = \cos \nu, \quad ik = \cos \mu, \quad jk = \cos \lambda.$$

Gdy dane są wektory

$$a = [l_1, m_1, n_1], \quad b = [l_2, m_2, n_2],$$

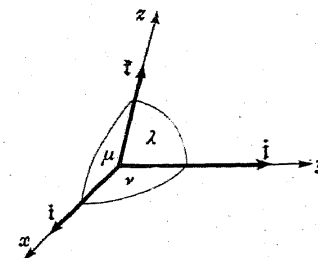
to

$$a = l_1 \cdot i + m_1 \cdot j + n_1 \cdot k,$$

$$b = l_2 \cdot i + m_2 \cdot j + n_2 \cdot k.$$

Stąd ich iloczyn skalarowy:

$$(15) \quad ab = l_1 l_2 \cdot i^2 + m_1 m_2 \cdot j^2 + n_1 n_2 \cdot k^2 + \\ + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \cdot ij + (l_1 n_2 + n_1 l_2) \cdot ik + \\ + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \cdot jk.$$



Rys. 27

Ostatecznie więc wobec (13) i (14)

$$(16) \quad ab = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \cos \nu + \\ + (l_1 n_2 + n_1 l_2) \cos \mu + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \cos \lambda.$$

Gdy $a = b$, otrzymujemy stąd wzór dla kwadratu długości
wektora:

$$(17) \quad |a|^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2lm \cos \nu + 2ln \cos \mu + 2mn \cos \lambda.$$

W szczególności w *układach współrzędnych prostokątnych*, tzn.
gdy $\lambda = \mu = \nu = \pi/2$, otrzymujemy prostą postać iloczynu skalaro-
wego i kwadratu długości wektora

$$(18) \quad ab = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2,$$

$$(19) \quad |a|^2 = l^2 + m^2 + n^2.$$

Wzór na odległość punktów $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$, możemy
otrzymać, podstawiając do (16) lub do (18)

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

Wzór ten napiszemy tylko dla układu prostokątnego współ-
rzędnych:

$$(20) \quad |a|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

PRZYKŁADY. 1. Znaleźć odległość punktów

$$P(1,1,2) \text{ i } Q(2,-1,3)$$

w układzie współrzędnych, w którym wszystkie trzy kąty są równe 60° .

Wektor PQ ma składowe $l=1$, $m=-2$ i $n=1$. Ponieważ $\cos \lambda = \cos \mu = \cos \nu = \frac{1}{2}$, dostajemy

$$d^2 = 1 + 4 + 1 - 2 + 1 - 2 = 3, \text{ skąd } d = \sqrt{3} = 1,73 \dots$$

2. Dany jest prostokątny układ współrzędnych $Oxyz$. Znaleźć odległość d punktu (x, y, z) od osi Ox (rys. 28).

Rzut P punktu $P(x, y, z)$ na oś Ox równoległy do płaszczyzny Oyz ma współrzędne $x, 0, 0$. Ponieważ $d = |P_x P|$, więc

$$(21) \quad d = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Podobnie odległość punktu $P(x, y, z)$ od osi Oy wynosi $\sqrt{x^2 + z^2}$, a od osi Oz wynosi $\sqrt{x^2 + y^2}$.

W przypadku ogólnym, gdy wektory podstawowe i, j, k na osiach Ox, Oy i Oz mają długości dowolne, aby otrzymać wzór dla iloczynu skalarnego, przyjmujemy oznaczenia:

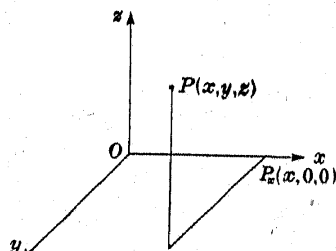
$$(22) \quad g_{11} = i^2, \quad g_{22} = j^2, \quad g_{33} = k^2, \quad g_{12} = g_{21} = ij, \\ g_{13} = g_{31} = ik, \quad g_{23} = g_{32} = jk.$$

Wówczas z (15) dostajemy:

$$(23) \quad ab = g_{11}l_1l_2 + g_{22}m_1m_2 + g_{33}n_1n_2 + \\ + g_{12}(l_1m_2 + m_1l_2) + g_{23}(m_1n_2 + n_1m_2) + g_{31}(n_1l_2 + l_1n_2),$$

$$(24) \quad |a|^2 = g_{11}l^2 + g_{22}m^2 + g_{33}n^2 + 2g_{12}lm + \\ + 2g_{23}mn + 2g_{31}nl.$$

Z (24) wynika, że również w przestrzeni kwadrat odległości jest formą kwadratową właściwą dodatnią składowych wektora. W § 28 udowodnimy, że każda forma kwadratowa właściwa dodatnia jest kwadratem długości wektora w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych.



Rys. 28

§ 8. Kąty między wektorami w prostokątnych układach współrzędnych

1. Cosinusy kierunkowe na płaszczyźnie. Niech Oxy będzie — jak poprzednio — układem prostokątnym współrzędnych na płaszczyźnie, w którym $|i|=|j|=1$, a w tym układzie niech będzie dany wektor a , tworzący z osiami Ox i Oy kąty φ_x i φ_y (rys. 29). Kąty te są zawarte między 0 a π .

Ponieważ składowe l i m wektora a są wartościami jego rzutów na osie, więc (p. wzór (15) z § 2, str. 12)

$$(1) \quad l = |a| \cos \varphi_x, \quad m = |a| \cos \varphi_y.$$

Np. wektor o długości 2, tworzący z osiami Ox i Oy kąty $\pi/3$ i $\pi/6$, ma składowe 1 i $1/\sqrt{3}$.

Liczby

$$(2) \quad a_x = \cos \varphi_x, \quad a_y = \cos \varphi_y$$

nazywamy *cosinusami kierunkowymi wektora a* .

Np. wektor i ma cosinusy kierunkowe 1 i 0 . Wektor $-j$ ma cosinusy kierunkowe 0 i -1 . Wektor $(1,1)$ ma cosinusy kierunkowe $1/\sqrt{2}$ i $1/\sqrt{2}$.

Z (1) wynika na mocy wzoru (6) z § 7, str. 31, że

$$(3) \quad a_x = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad a_y = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Z tych równości widzimy, że dla cosinusów kierunkowych każdego wektora a zachodzi związek

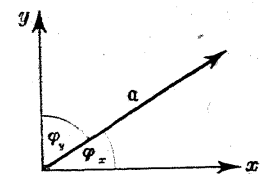
$$(4) \quad a_x^2 + a_y^2 = 1$$

czyli

$$(5) \quad \cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y = 1.$$

Ostatnią równość można otrzymać również wprost stąd, że na mocy określenia kątów φ_x i φ_y jest $\cos \varphi_y = \pm \sin \varphi_x$.

Składowe wektora o długości 1 są zarazem jego cosinusami kierunkowymi.



Rys. 29

Jeśli wektor a ma cosinusy kierunkowe a_x i a_y , to wektor o składowych a_x i a_y jest wektorem o długości 1, równoległym do a i mającym ten sam zwrot. Jest on równy wektorowi $a/|a|$.

Cosinusami kierunkowymi osi nazywamy cosinusy kątów utworzonych przez nią z osiami układu współrzędnych.

Cosinusy kierunkowe osi są równe cosinusom kierunkowym każdego wektora, mającego ten sam kierunek i zwrot co oś.

2. Cosinusy kierunkowe w przestrzeni. Podobnie jak na płaszczyźnie, wprowadzamy cosinusy kierunkowe

$$a_x = \cos \varphi_x, \quad a_y = \cos \varphi_y, \quad a_z = \cos \varphi_z$$

wektora a o składowych l, m, n w przestrzeni w układzie prostokątnym współrzędnych *Oxyz* (rys. 30). Jak poprzednio, otrzymujemy wzory następujące:

$$(6) \quad l = |a| \cos \varphi_x, \quad m = |a| \cos \varphi_y, \quad n = |a| \cos \varphi_z,$$

skąd

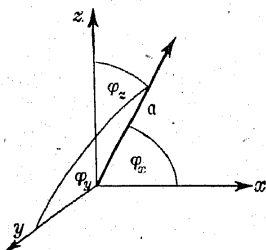
$$(7) \quad a_x = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad a_y = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad a_z = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Między cosinusami kierunkowymi dowolnego wektora zachodzi zależność

$$(8) \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

czyli

$$(9) \quad \cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y + \cos^2 \varphi_z = 1.$$



Rys. 30

Wynika to natychmiast z (7). Jak z tego widzimy, kąty, jakie wektor tworzy z osiami współrzędnych, nie są niezależne. Jeśli dwa z tych kątów są dane, to cosinus trzeciego może przybierać co najwyżej dwie wartości. Jeśli wektory a i b są równoległe i mają zgodne zwroty, to dla ich cosinusów kierunkowych zachodzą równości:

$$a_x = \beta_x, \quad a_y = \beta_y, \quad a_z = \beta_z.$$

Jeśli natomiast wektory te są równoległe, lecz mają zwroty przeciwnie, to zachodzą równości:

$$(10) \quad a_x = -\beta_x, \quad a_y = -\beta_y, \quad a_z = -\beta_z.$$

Pierwsza równość jest oczywista. Dla dowodu drugiej wystarczy zauważyć, że jeśli wektor a ma składowe a, b, c , to wektor $-a$ ma składowe $-a, -b, -c$. Posługując się równościami (7), otrzymujemy (10).

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla wektorów na płaszczyźnie.

5. Kąty między wektorami. Jak wiemy (p. § 3, str. 16), iloczyn skalarowy dwóch wektorów $a = [l_1, m_1, n_1]$ i $b = [l_2, m_2, n_2]$ jest równy

$$ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi.$$

Stąd otrzymujemy następujący wzór na cosinus kąta między dwoma wektorami:

$$(11) \quad \cos \varphi = \frac{ab}{|a| \cdot |b|}.$$

Na mocy wzorów (9) i (19) z § 7 mamy więc:

1° na płaszczyźnie

$$(12) \quad \cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{(l_1^2 + m_1^2)^{1/2} (l_2^2 + m_2^2)^{1/2}};$$

2° w przestrzeni

$$(13) \quad \cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)^{1/2} (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)^{1/2}}.$$

W szczególności, jeśli wektory a i b są jednostkowe, to ich składowe są cosinusami kierunkowymi. Dostajemy stąd następujące dwa wzory, wyrażające cosinus kąta między wektorami przez cosinusy kierunkowe wektorów:

1° na płaszczyźnie

$$(14) \quad \cos \varphi = a_x \beta_x + a_y \beta_y;$$

2° w przestrzeni

$$(15) \quad \cos \varphi = a_x \beta_x + a_y \beta_y + a_z \beta_z.$$

Wzór (11) określa $\cos \varphi$ niezależnie od układu współrzędnych. Występują w nim pojęcia czysto geometryczne, jak długość wektora, cosinus kąta, iloczyn skalarowy; chwytają one jednocześnie płaszczyznę i przestrzeń. Pozwoli on nam również znaleźć kąt między wektorami w ukośnokątnym układzie współrzędnych. Dzięki jego niezależności od układu współrzędnych można się nim posługiwać w najogólniejszych układach współrzędnych, używanych w geometrii różniczkowej i fizyce teoretycznej. To samo dotyczy długości wektora, wyrażonej w postaci $d^2 = aa$.

Celem geometrii jest badanie własności tworów geometrycznych. Układ współrzędnych grają w tym badaniu rolę pomocniczą. Nazwa *Geometria analityczna* nie jest zupełnie właściwa. Właściwszą byłaby nazwa *Metoda analityczna w geometrii*. Metoda ta polega na wprowadzaniu układów współrzędnych i badaniu własności geometrycznych środkami algebry i analizy. Celem jednak jest zawsze znajdowanie związków geometrycznych, niezależnych od układów współrzędnych ani od innych środków pomocniczych. Przykładami pojęć geometrycznych niezależnych od układu współrzędnych są: długość wektora, iloczyn skalarny. Nie są nimi natomiast np. składowe wektora, współrzędne punktu, cosinusy kierunkowe, gdyż zmieniają się one wraz z układem współrzędnych. Wiele własności geometrycznych, niezależnych od układu współrzędnych, wyraża się zależnościami algebraicznymi między współrzędnymi składowymi, cosinusami kierunkowymi itp. W § 31 zaznajomimy się ze sposobami rozpoznawania, czy dana zależność algebraiczna jest związkiem geometrycznym.

Ze wzorów (12) i (13) wynikają następujące warunki konieczne i dostateczne prostopadłości dwóch wektorów różnych od zerowego:

1° na płaszczyźnie

$$(16) \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0;$$

2° w przestrzeni

$$(17) \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Znając cosinus kąta między dwoma wektorami w przestrzeni możemy znaleźć wartość sinusa tego kąta. Z uwagi na to, że $0 < \varphi < \pi$ znajdujemy go w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= (1 - \cos^2 \varphi)^{1/2} = [1 - (\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z)^2]^{1/2} = \\ &= [(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2)(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) - (\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z)^2]^{1/2} = \\ &= [(\alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y)^2 + (\alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z)^2 + (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)^2]^{1/2} *. \end{aligned}$$

A więc

$$(18) \quad \sin \varphi = \left(\left| \frac{\alpha_y}{\beta_y} \frac{\alpha_z}{\beta_z} \right|^2 + \left| \frac{\alpha_z}{\beta_z} \frac{\alpha_x}{\beta_x} \right|^2 + \left| \frac{\alpha_x}{\beta_x} \frac{\alpha_y}{\beta_y} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Analogicznie dostajemy dla płaszczyzny

$$(19) \quad \sin \varphi = |\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x|.$$

* To przekształcenie jest szczególnym przypadkiem (dla $n=3$) następującej tożsamości Lagrange'a:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i,k=1, i < k}^n (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

PRZYKŁAD. Dane są dwa wektory: AB o cosinusach kierunkowych $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ i AC o cosinusach kierunkowych $\beta_x, \beta_y, \beta_z$. Znaleźć cosinusy kierunkowe dwusiecznej kąta między nimi.

Odetnijmy (rys. 31) na osi wyznaczonej przez wektor AB wektor e_1 o długości 1, początku w A i zwrocie od A do B . Wektor ten ma składowe α_x, α_y i α_z . Analogiczny wektor e_2 na osi wyznaczonej przez AC ma składowe β_x, β_y i β_z . Ponieważ $|e_1| = |e_2|$, więc wektor $e_1 + e_2$ leży na dwusiecznej kąta między wektorami AB i AC oraz ma składowe $\alpha_x + \beta_x, \alpha_y + \beta_y$ i $\alpha_z + \beta_z$.

Obliczmy jego długość d :

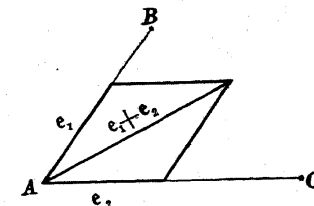
$$\begin{aligned} d^2 &= (\alpha_x + \beta_x)^2 + (\alpha_y + \beta_y)^2 + (\alpha_z + \beta_z)^2 = \\ &= (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) + (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) + \\ &\quad + 2(\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z) = \\ &= 2 + 2 \cos \varphi = 4 \cos^2 \varphi / 2, \end{aligned}$$

zatem

$$d = 2 \cos \varphi / 2.$$

Cosinusy kierunkowe wektora $e_1 + e_2$ są cosinusami dwusiecznej. Wynoszą one

$$(20) \quad \frac{\alpha_x + \beta_x}{2 \cos \varphi / 2}, \quad \frac{\alpha_y + \beta_y}{2 \cos \varphi / 2}, \quad \frac{\alpha_z + \beta_z}{2 \cos \varphi / 2}.$$



Rys. 31

§ 9. Współrzędne kowariantne

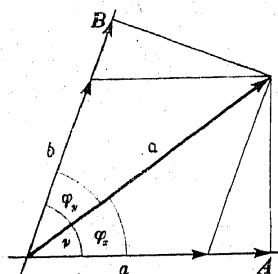
Wprowadzając składowe wektora na płaszczyźnie, skorzystaliśmy z tego, że wektor jest wyznaczony przez swoje rzuty na osie Ox i Oy , równoległe do osi Oy i Ox (w przestrzeni — przez rzuty na osie Ox, Oy i Oz równoległe do płaszczyzn Oyz, Ozx i Oxy). Wartości tych rzutów na osiach, mierzone w jednostkach $|i|$ i $|j|$ (w przestrzeni zaś — w jednostkach $|i|, |j|$ i $|k|$), nazwaliśmy *składowymi* wektora.

Zwróćmy jednak uwagę na to, że wektor jest również wyznaczony przez swoje rzuty *prostopadłe* na osie. Wartości rzutów prostopadłych mogą więc również być użyte do określenia wektora. Zajmiemy się obecnie bliższym rozpatrzeniem tych rzutów.

1. Współrzędne kowariantne na płaszczyźnie. Dany jest układ współrzędnych Oxy (rys. 32), w którym kąt między osiami wynosi ν oraz jednostki długości

$$(1) \quad |i| = |j| = 1.$$

Niech wektor a tworzy z osiami Ox i Oy kąty φ_x i φ_y . Niech rzut wektora a na oś Ox , równoległy do osi Oy , ma wartość a , rzut zaś prostopadły — wartość A . Oznaczmy przez b i B analogiczne wartości rzutu wektora a na oś y .



Rys. 32

Liczby a i b , które nazywaliśmy składowymi wektora, nazywa się także *składowymi kontrawariantnymi*.

W dalszym ciągu będziemy je nazywać *składowymi zwyczajnymi*.

Liczby zaś A i B nazywają się *składowymi kowariantnymi* wektora a .

Dla prostokątnych układów współrzędnych oba rodzaje rzutów są identyczne, więc

$$a = A, \quad b = B.$$

Natomiast w ogólnych układach ukośnokątnych mamy (p. wzór (15) z § 2, str. 12):

$$(2) \quad A = |a| \cos \varphi_x = a \cdot i, \quad B = |a| \cos \varphi_y = a \cdot j.$$

Podobnie jak w § 5 (str. 26), wychodząc z pojęcia składowych wektora wprowadziliśmy pojęcie współrzędnych punktu, tak i teraz, *współrzędne kowariantne punktu P* określimy jako składowe kowariantne wektora OP . Współrzędne zaś punktu w dotychczasowym znaczeniu będziemy nazywali *współrzędnymi kontrawariantnymi* lub *zwyczajnymi*.

Znajdziemy teraz zależności między składowymi zwyczajnymi a kowariantnymi. W tym celu pomnożmy równość

$$(3) \quad a = a \cdot i + b \cdot j$$

skalarowo przez i . Dostajemy

$$A = a i = a \cdot i^2 + b \cdot i j, \quad B = a j = a \cdot i j + b \cdot j^2,$$

czyli wobec (1)

$$(4) \quad A = a + b \cos \nu, \quad B = a \cos \nu + b.$$

Wzory te wyrażają składowe kowariantne przez zwyczajne. Uważając wzory (4) za równania o niewiadomych a i b , możemy wyrazić składowe zwyczajne przez kowariantne. Otrzymujemy:

$$(5) \quad a = \frac{A - B \cos \nu}{\sin^2 \nu}, \quad b = \frac{B - A \cos \nu}{\sin^2 \nu}.$$

Dla ukośnokątnych układów współrzędnych dostajemy z (2) i (4) następujące wzory, wyrażające cosinusy kierunkowe wektora przez jego współrzędne zwyczajne:

$$\cos \varphi_x = \frac{a + b \cos \nu}{|a|}, \quad \cos \varphi_y = \frac{a \cos \nu + b}{|a|},$$

gdzie $|a|$ jest określone przez wzór (4) z § 7 (str. 31).

Iloczyn skalarowy dwu wektorów ma w ukośnokątnych układach współrzędnych postać niewygodną ze względu na długość wzorów (por. wzory (3) i (15) z § 7). Przy równoczesnym posługiwaniu się składowymi kowariantnymi i zwyczajnymi można mu nadać prostszą postać. Oznaczmy w tym celu współrzędne zwyczajne wektorów a_1 i a_2 przez a_1, b_1 i a_2, b_2 , kowariantne zaś przez A_1, B_1 i A_2, B_2 . Wówczas

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \nu = \\ &= a_1 (a_2 + b_2 \cos \nu) + b_1 (a_2 \cos \nu + b_2) = \\ &= a_2 (a_1 + b_1 \cos \nu) + b_2 (a_1 \cos \nu + b_1), \end{aligned}$$

skąd

$$(6) \quad a_1 a_2 = a_1 A_2 + b_1 B_2 = a_2 A_1 + b_2 B_1.$$

W szczególności, gdy $a_1 = a_2 = a$, wynika stąd wzór

$$(7) \quad |a|^2 = a A + b B.$$

Wzór ten ma budowę podobną do wzoru dla długości wektora w prostokątnych układach współrzędnych. Ponieważ dla układów prostokątnych jest $a = A$ i $b = B$, więc otrzymuje się z niego wzór (9) z § 7 (p. str. 32).

Najczęściej będziemy się posługiwali postacią (6) dla iloczynu skalarowego i postacią (7) dla długości wektora.

Zbadamy jeszcze, jak wyraża się iloczyn skalarowy i długość wektora przez same współrzędne kowariantne. Korzystając z (5), dostajemy z (6) i (7):

$$(8) \quad a_1 a_2 = \frac{1}{\sin^2 \nu} [A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + B_1 A_2) \cos \nu],$$

$$(9) \quad |a|^2 = \frac{1}{\sin^2 \nu} [A^2 + B^2 - 2AB \cos \nu].$$

Znajdźmy teraz cosinus kąta między dwoma wektorami w ukośnokątnych układach współrzędnych. Z równości

$$\cos \varphi = \frac{ab}{|a| \cdot |b|}$$

(p. wzór (11), str. 37) dostajemy trzy wzory:

$$(10) \quad \cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cos \nu}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \cos \nu} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + 2a_2 b_2 \cos \nu}},$$

$$(11) \quad \cos \varphi = \frac{a_1 A_2 + b_1 B_2}{\sqrt{a_1 A_1 + b_1 B_1} \sqrt{a_2 A_2 + b_2 B_2}},$$

$$(12) \quad \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + B_1 A_2) \cos \nu}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos \nu} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2 \cos \nu}}.$$

Najczęściej posługiwać się będziemy wzorem (11).

Wynika z niego *warunek prostokątności dwóch wektorów w ukośnokątnych układach współrzędnych*:

$$(13) \quad a_1 A_2 + b_1 B_2 = 0,$$

jako też równoważny mu warunek

$$(14) \quad A_1 a_2 + B_1 b_2 = 0.$$

Widzieliśmy (§ 8, str. 35), że między cosinusami kierunkowymi wektora w układzie prostokątnym współrzędnych zachodzi zależność $\cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y = 1$. Podobna zależność zachodzi również w układzie ukośnokątnym współrzędnych. W celu znalezienia jej pomnożmy (3) skalarowo przez a . Otrzymujemy

$$|a|^2 = aa = a(ia) + b(ja) = a|a| \cos \varphi_x + b|a| \cos \varphi_y,$$

stąd zaś

$$(15) \quad |a| = a \cos \varphi_x + b \cos \varphi_y.$$

Z równości (2) i (4) dostajemy

$$(16) \quad |a| \cos \varphi_x = a + b \cos \nu, \quad |a| \cos \varphi_y = a \cos \nu + b.$$

Z (15) i (16) wynika, że układ równań jednorodnych

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 \cos \varphi_x + u_3 \cos \varphi_y &= 0, \\ u_1 \cos \varphi_x + u_2 + u_3 \cos \nu &= 0, \\ u_1 \cos \varphi_y + u_2 \cos \nu + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

ma rozwiązanie niezerowe

$$u_1 = |a|, \quad u_2 = -a, \quad u_3 = -b,$$

a zatem jego wyznacznik jest równy zeru:

$$(17) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi_x & \cos \varphi_y \\ \cos \varphi_x & 1 & \cos \nu \\ \cos \varphi_y & \cos \nu & 1 \end{vmatrix} = 0$$

czyli

$$(18) \quad \cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y - 2 \cos \varphi_x \cos \varphi_y \cos \nu = \sin^2 \nu.$$

Widzimy, że równość $\cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y = 1$ jest szczególnym przypadkiem równości (18) dla $\nu = \pi/2$.

Poprzednio określiliśmy składowe kowariantne wektora dla układów współrzędnych Oxy , w których wektory podstawowe mają równe długości, i z tego wyprowadziliśmy równości $A = ai$, $B = aj$ (p. wzór (2), str. 40). W układach współrzędnych, w których wektory podstawowe są dowolne, przyjmujemy te właśnie równości za definicję współrzędnych kowariantnych wektora. Wynika z niej, że

$$(19) \quad A = |i| \cdot |a| \cdot \cos \varphi_x, \quad B = |j| \cdot |a| \cdot \cos \varphi_y,$$

czyli że A i B są wartościami rzutów prostopadłych wektora a na osie, mierzonymi w jednostkach $|i|$ i $|j|$. Wynika z niej także (w oznaczeniach z § 7, str. 34), że

$$(20) \quad \begin{aligned} A = ai &= ai^2 + bij = g_{11}a + g_{12}b, \\ B = aj &= aij + bj^2 = g_{21}a + g_{22}b, \end{aligned}$$

stąd zaś (na mocy wzoru (23) z § 7, str. 34) dostajemy

$$ab = a_1(g_{11}a_2 + g_{21}b_2) + b_1(g_{21}a_2 + g_{22}b_2)$$

czyli

$$(21) \quad ab = a_1 A_2 + b_1 B_2.$$

Zatem

$$(22) \quad |a|^2 = aA + bB.$$

Wprowadzenie współrzędnych kowariantnych nadaje więc iloczynowi skalarowemu w każdym ukośnokątnym układzie współrzędnych postać (21), a kwadratowi skalarowemu postać (22).

Niech

$$(23) \quad g = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12},$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g} = -\frac{g_{21}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}.$$

Wówczas dostajemy z (20)

$$(24) \quad a = g^{11} A + g^{12} B, \quad b = g^{21} A + g^{22} B.$$

Macierze

$$\mathfrak{G} = (g_{ik}) \quad \text{i} \quad \mathfrak{G}' = (g^{ik})$$

są wzajemnie odwrotne (p. Przypis I), czyli

$$(25) \quad \mathfrak{G}' = \mathfrak{G}^{-1}.$$

2. Współrzędne kowariantne w przestrzeni. Niech $Oxyz$ będzie układem ukośnokątnym współrzędnych o kątach ν, μ, λ między osiami, w którym

$$(26) \quad |i| = |j| = |f| = 1.$$

Podobnie jak na płaszczyźnie, nazywamy *współrzędnymi kowariantnymi* A, B, C wektora a wartości jego rzutów prostopadłych na osie. Mamy więc

$$(27) \quad A = |a| \cos \varphi_x, \quad B = |a| \cos \varphi_y, \quad C = |a| \cos \varphi_z.$$

Równości te są równoważne następującym:

$$(28) \quad A = a_i, \quad B = a_j, \quad C = a_f,$$

z których wobec $a = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot f$ wynikają równości

$$(29) \quad \begin{aligned} A &= a + b \cos \nu + c \cos \mu, \\ B &= a \cos \nu + b + c \cos \lambda, \\ C &= c \cos \mu + b \cos \lambda + c. \end{aligned}$$

Otrzymujemy z nich następujące wyrażenia przez współrzędne zwyczajne i kowariantne dla iloczynu skalarowego, długości wektora i kąta między wektorami:

$$(30) \quad ab = a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2,$$

$$(31) \quad |a|^2 = aA + bB + cC,$$

$$(32) \quad \cos \varphi = \frac{a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2}{\sqrt{a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1} \sqrt{a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2}}.$$

Z (27) i (29) wynika, że:

$$\begin{aligned} a + b \cos \nu + c \cos \mu - |a| \cos \varphi_x &= 0, \\ a \cos \nu + b + c \cos \lambda - |a| \cos \varphi_y &= 0, \\ a \cos \mu + b \cos \lambda + c - |a| \cos \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Podobnie jak dowiedliśmy (15), dowodzi się za pomocą równości (27), (28) i (31), że

$$(33) \quad a \cos \varphi_x + b \cos \varphi_y + c \cos \varphi_z - |a| = 0.$$

Z równości (30)-(33) wynika, że równość

$$(34) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & \cos \varphi_x \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & \cos \varphi_y \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos \varphi_z \\ \cos \varphi_x & \cos \varphi_y & \cos \varphi_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zachodzi dla cosinusów kierunkowych dowolnego wektora.

Jest to uogólnienie wzoru (9) z § 8, str. 36, na ukośnokątne układy współrzędnych.

Analogicznie jak na płaszczyźnie, w ukośnokątnym układzie współrzędnych, w którym wektory jednostkowe i, j, f nie mają równych długości, wzory (28) służą za definicję składowych kowariantnych wektora. W oznaczeniach z § 7 (p. (22), str. 34) dowodzi się podobnie jak na płaszczyźnie, że

$$(35) \quad \begin{aligned} A &= g_{11} a + g_{12} b + g_{13} c, \\ B &= g_{21} a + g_{22} b + g_{23} c, \\ C &= g_{31} a + g_{32} b + g_{33} c. \end{aligned}$$

W tym przypadku wzory (30)-(32) również zachowują swą ważność.

§ 10. Objętość czworościanu i pole trójkąta

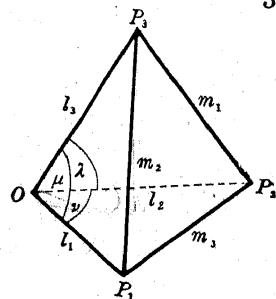
1. Objętość czworościanu. Niech

$$(1) \quad g = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik g napotkaliśmy już przy wyrażaniu współrzędnych kowariantnych przez zwyczajne (p. wzór (29), str. 44). Zobaczymy, że jest on zawsze różny od zera i że wiąże się on z objętością czworościanu, którego trzema krawędziami są wektory i, j, f . Wynika to z twierdzenia:

Niech V będzie objętością czworoscianu, którego trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka O mają długości l_1, l_2, l_3 i tworzą między sobą kąty ν, μ, λ . Wówczas

$$(2) \quad V^2 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 \cos \nu & l_1 l_3 \cos \mu \\ l_2 l_1 \cos \nu & l_2^2 & l_2 l_3 \cos \lambda \\ l_3 l_1 \cos \mu & l_3 l_2 \cos \lambda & l_3^2 \end{vmatrix}.$$



Rys. 33

Istotnie, przyjmijmy wierzchołek O : początek układu współrzędnych, a prostą na których leżą krawędzie czworoscianu za osie współrzędnych, nadając im zwrot od O ku wierzchołkom (rys. 33). Niech ponadto wektory podstawowe spełniają jak poprzednio, założenie $|i| = |j| = |k| = 1$. Zatem

$$(3) \quad a_1 = OP_1 = l_1 \cdot i, \quad a_2 = OP_2 = l_2 \cdot j, \quad a_3 = OP_3 = l_3 \cdot k.$$

Pole trójkąta OP_1P_2 wynosi

$$(4) \quad D = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \nu.$$

Oznaczmy przez $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ kąty, jakie wysokość czworoscianu opuszczona z punktu P_3 , tworzy z osiami współrzędnych. Ponieważ $\varphi_x = \varphi_y = \pi/2$, więc (p. wzór (34) z § 9 str. 45)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & 0 \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & 0 \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos \varphi_z \\ 0 & 0 & \cos \varphi_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

czyli wobec (1)

$$g - \cos^2 \varphi_z \sin^2 \nu = 0,$$

skąd

$$(5) \quad \cos^2 \varphi_z \sin^2 \nu = g.$$

Ponieważ długość tej wysokości wynosi $l_3 \cos \varphi_z$ więc wobec (5) mamy

$$V = \frac{1}{6} l_1 l_2 l_3 \sin \nu \cos \varphi_z,$$

skąd

$$V^2 = \frac{1}{36} l_1^2 l_2^2 l_3^2 \sin^2 \nu \cos^2 \varphi_z.$$

Korzystając z (5), mamy dalej

$$(6) \quad V^2 = \frac{1}{36} l_1^2 l_2^2 l_3^2 g.$$

Podstawiając tu (1) dostajemy (2), c. b. d. o.

Z (6) wynika w szczególności, że w każdym układzie współrzędnych jest $g > 0$.

Używając oznaczeń rysunku 33 i twierdzenia cosinusowego dla trójkątów, możemy również wyrazić objętość (2) czworoscianu przez długości krawędzi:

$$(7) \quad V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2l_1^2 & m_3^2 - l_1^2 - l_2^2 & m_2^2 - l_1^2 - l_3^2 \\ m_3^2 - l_1^2 - l_2^2 & 2l_2^2 & m_1^2 - l_2^2 - l_3^2 \\ m_2^2 - l_1^2 - l_3^2 & m_1^2 - l_2^2 - l_3^2 & 2l_3^2 \end{vmatrix}.$$

Korzystając z (3), możemy (2) przekształcić w postać

$$(8) \quad V^2 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Dotychczasowe wzory (2), (6), (7) i (8) na objętość czworoscianu nie zależą od układu współrzędnych. Ostatni wzór pozwoli nam wyrazić objętość czworoscianu przez składowe wektorów a_1, a_2, a_3 w dowolnym układzie ukośnokątnym. Niech bowiem wektor a_i ma składowe zwyczajne a_i, b_i, c_i , a kowariantne A_i, B_i, C_i . Ponieważ

$$a_i a_k = a_i A_k + b_i B_k + c_i C_k, \quad \text{gdzie} \quad i, k = 1, 2, 3,$$

więc wobec (8)

$$V^2 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 & a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 & a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 \\ a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 & a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 & a_2 A_3 + b_2 B_3 + c_2 C_3 \\ a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 & a_3 A_2 + b_3 B_2 + c_3 C_2 & a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 \end{vmatrix}.$$

Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu wyzników (p. Przypis I, § 1) jest więc

$$(9) \quad 36V^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Wobec (1) i wzoru (29) z § 9, str. 44, stosując ponownie twierdzenie Cauchy'ego, dostajemy

$$(10) \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

a więc ostatecznie

$$(11) \quad 6V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \sqrt{g}$$

(gdzie skrajne krótkie kreski $||$ oznaczają wartość bezwzględną)

W szczególności dla układu prostokątnego jest $g=1$, więc

$$(12) \quad 6V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Weźmy teraz pod uwagę układ współrzędnych ukośnokątny, w którym wektory podstawowe i, j, k nie mają równych długości. Wówczas zachodzi wzór (35) z § 9, str. 45. Przyjmując oznaczenia

$$(13) \quad g = |g_{ik}|,$$

widzimy, że znowu zachodzi równość (10). A więc z (8) wynika (1). Stąd wynika dalej, że liczba $\sqrt{g}$ jest równa objętości równoległoscianu zbudowanego na wektorach i, j, k).

Niech teraz czworościan będzie określony przez swoje cztery wierzchołki $Q_i(x_i, y_i, z_i)$, gdzie $i=1, 2, 3, 4$. Biorąc za O punkt (p. rys. 33, str. 46), mamy więc

$$a_i = x_i - x_4, \quad b_i = y_i - y_4, \quad c_i = z_i - z_4,$$

skąd

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 & 1 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 & 1 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Stąd dalej (przez pomnożenie czwartej kolumny przez x_4 i dodanie do pierwszej, potem przez y_4 i dodanie do drugiej itd.) otrzymujemy

$$(14) \quad 6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{g}.$$

2. Pole trójkąta na płaszczyźnie i w przestrzeni. W analogiczny sposób dowodzimy na płaszczyźnie dla trójkąta $Q_1 Q_2 Q_3$ o polu P , że jeśli $a_1 = Q_1 Q_2$ i $a_2 = Q_1 Q_3$, to

$$(15) \quad P^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_2 a_1 & a_2^2 \end{vmatrix}.$$

Jeśli w układzie ukośnokątnym współrzędnych, w którym $|i|=|j|=1$, wektor a_i ma składowe zwyczajne a_i i b_i , gdzie $i=1$ i 2 , to

$$(16) \quad 2P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \sin \nu.$$

Jeśli wierzchołek Q_i ma współrzędne x_i i y_i , gdzie $i=1$ i 2 , to

$$(17) \quad 2P = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \nu.$$

W szczególności więc w układzie prostokątnym współrzędnych:

$$(18) \quad 2P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$(19) \quad 2P = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Niech obecnie dane będą w przestrzeni w układzie prostokątnym współrzędnych trzy punkty:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3).$$

Oznaczmy przez P pole trójkąta ABC (jeśli wierzchołki leżą na jednej prostej, to $P=0$), a przez P_{xy} , P_{xz} , P_{yz} — pola rzutów trójkąta ABC na płaszczyzny Oxy , Oxz , Oyz układu współrzędnych. Pola tych rzutów równe są wartościom bezwzględnych wyznaczników

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Niech ψ_{xy} , ψ_{xz} , ψ_{yz} będą kątami jakie płaszczyzna Π , zawierająca trójkąt ABC , tworzy z płaszczyznami Oxy , Oxz , Oyz . Zatem (p. wzór (28) z § 2, str. 14)

$$(20) \quad P_{xy} = P \cos \psi_{xy}, \quad P_{xz} = P \cos \psi_{xz}, \quad P_{yz} = P \cos \psi_{yz}.$$

Z drugiej strony, kąt ψ_{xy} między płaszczyzną Π a płaszczyzną Oxy jest równy bądź kątowi φ_x , jaki wektor prostopadły do Π tworzy z osią Oz , bądź kątowi $\pi - \varphi_x$. W każdym więc razie $\cos \psi_{xy} = \pm \cos \varphi_x$ i podobnie dla pozostałych kątów. Z tożsamości

$$\cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y + \cos^2 \varphi_z = 1$$

wynika więc, że

$$\cos^2 \psi_{xy} + \cos^2 \psi_{xz} + \cos^2 \psi_{yz} = 1.$$

Podnosząc wszystkie równości (20) do kwadratu i dodając otrzymujemy

$$P^2 = P_{xy}^2 + P_{xz}^2 + P_{yz}^2$$

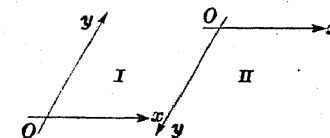
czyli

$$(21) \quad P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2}.$$

§ 11. Orientacja układu wektorów

1. Orientacja pary wektorów na płaszczyźnie. Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie dwa układy współrzędnych o wspólnym początku układu O i wspólnej osi Ox ; osie Oy niech leżą na jednej prostej, lecz niech mają zwroty przeciwne.

Jest widoczne, że obracając osie dookoła punktu O (nawet gdy są ruchome jedna względem drugiej), nie można pierwszego układu przeprowadzić w drugi bez przejścia przez położenie pośrednie, w którym proste Ox i Oy nakryłyby się, a więc nie tworzyłyby układu współrzędnych.



Rys. 34

Mając ustalony jeden z układów (np. układ I, rys. 34), można podzielić wszelkie układy osi na dwa rodzaje:

1° układy, które dają się przez obrót każdej osi z osobna dookoła punktu O i obrót sztywny układu dookoła dowolnego punktu płaszczyzny oraz przez przesuwanie uzyskać z układu I bez przejścia przez położenie, w którym proste Ox i Oy się nakrywają,

2° pozostałe układy (np. układ II, rys. 34).

Intuicyjny ten fakt wyrazimy obecnie w sposób ściślejszy. Zamiast o osiach będziemy mówili o wektorach.

Niech w dowolnym układzie współrzędnych dana będzie para uporządkowana wektorów niezerowych a_1, a_2 o współrzędnych zycznych a_1, b_1 i a_2, b_2 . Parze tej przyporządkujemy wyznacznik

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Np. dla wektorów jednostkowych będzie

$$\begin{vmatrix} i & j \\ j & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Wyznacznik (1) zależy od porządku wektorów:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Na to, by dwa wektory niezerowe były równoległe, potrzeba i u starczy, żeby

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, do równoległości wektorów a_1 i a_2 potrzeba i wystarcza, żeby $a_1 = m \cdot a_2$ czyli żeby

$$a_1 - m a_2 = 0, \quad b_1 - m b_2 = 0.$$

Układ obu tych równań jest równoważny warunkowi (3).

Dwie pary uporządkowane wektorów niezerowych a_1 i a'_1, a'_2 nazywają się *zgodnie zorientowanymi*, gdy wyznaczniki $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{vmatrix}$ mają ten sam znak, tj. gdy iloczyn ich jest dodatni

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Oznaczając przez A'_1, B'_1 i A'_2, B'_2 współrzędne kowariant drugiej pary, mamy

$$g \cdot \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A'_1 & B'_1 \\ A'_2 & B'_2 \end{vmatrix},$$

a więc

$$g \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A'_1 & B'_1 \\ A'_2 & B'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 A'_1 + b_1 B'_1 & a_1 A'_2 + b_1 B'_2 \\ a_2 A'_1 + b_2 B'_1 & a_2 A'_2 + b_2 B'_2 \end{vmatrix}.$$

Wobec tego, że $g > 0$ (§ 10, str. 47), warunek (4) jest równoważny następującemu:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1 a'_1 & a_1 a'_2 \\ a_2 a'_1 & a_2 a'_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Wyrazy wyznacznika (5) są wielkościami niezależnymi od układu współrzędnych (jako iloczyny skalarowe). Przyjęte określenie *zgodnej orientacji dwu par wektorów nie zależy więc od układu współrzędnych*, mimo że same wyznaczniki $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{vmatrix}$ zależą od niego.

Przez zmianę porządku dwu wektorów uzyskujemy, wobec (5), dwie pary zorientowane niezgodnie; tak samo — przez zmianę zwrotu jednego wektora.

Na mocy określenia, zgodność orientacji dwu par wektorów jest relacją między tymi parami, mającą (jeśli żadna para nie składa się z wektorów równoległych) następujące trzy własności:

1^o *Zwrotność*. Każda para wektorów jest zgodnie zorientowana z sobą samą. Istotnie

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}^2 > 0.$$

2^o *Symetria*. Gdy para a_1, a_2 jest zgodnie zorientowana z parą a'_1, a'_2 , to para a'_1, a'_2 jest zgodnie zorientowana z parą a_1, a_2 .

3^o *Przechodność*. Gdy para a_1, a_2 jest zgodnie zorientowana z parą a'_1, a'_2 i para a'_1, a'_2 jest zgodnie zorientowana z parą a''_1, a''_2 , to para a_1, a_2 jest zgodnie zorientowana z parą a''_1, a''_2 . Istotnie, z (4) i z nierówności

$$\begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a''_1 \\ a''_2 \end{vmatrix} > 0$$

wynika przez pomnożenie stronami, że

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a''_1 \\ a''_2 \end{vmatrix} > 0,$$

skąd

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a''_1 \\ a''_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Mozemy zatem podzielić wszystkie pary wektorów na dwie klasy o następujących własnościach:

1^o Pary wektorów tej samej klasy mają orientację zgodną,

2^o Pary wektorów różnych klas mają orientację niezgodną.

Ponieważ

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i \\ j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix},$$

wobec para a_1, a_2 jest zgodnie zorientowana z parą i, j wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Mówimy wówczas, że para a_1, a_2 jest *zgodnie zorientowana z układem osi współrzędnych*.

W analogiczny sposób rozciąga się pojęcie zgodnej orientacji na dwie pary osi.

Gdy a_1, a_2 i a'_1, a'_2 są parami wektorów nierównoległych,

$$a'_1 = a_1 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2, \quad a'_2 = a_2 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2.$$

Na to, by obie te pary były zgodnie zorientowane, potrzeba i wystarcza, żeby

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Jest to natychmiastowy wniosek z (6), gdy podstawić a_1 i $a_2 = j$.

Z określenia orientacji wynika, że *gdy wierzchołki P_1, P_2 i trójkąta uporządkujemy w ten sposób, by wektory $a_1 = P_1 P_2$ i $a_2 = P_1$ tworzyły parę zgodnie zorientowaną z układem osi współrzędnych*, we wzorach (16)-(19) z § 10 możemy opuścić znak wartości b względnej i dostajemy w szczególności

$$(7) \quad P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \sin \nu = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \nu.$$

Jeśli dane są dwie pary wektorów a_1, a_2 i a'_1, a'_2 oraz dwie pary wektorów jednostkowych e_1, e_2 i e'_1, e'_2 , mających ich kierunek i zwrot, to warunkiem koniecznym i dostatecznym, by pierw dwie pary wektorów były zgodnie zorientowane, jest, żeby o pary wektorów jednostkowych były zgodnie zorientowane.

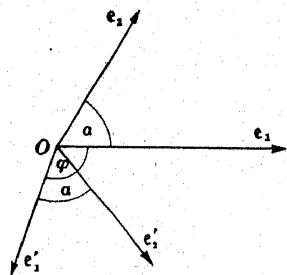
Wykażemy teraz, że przyjęta definicja zgodnej orientacji par wektorów odpowiada intuicji, wspomnianej na początku. Na podstawie stwierdzonej przed chwilą równoważności możemy w tym celu poprzestać na rozważaniu par wektorów jednostkowych.

Niech para wektorów e'_1, e'_2 powstanie z pary e_1, e_2 przez obrót wszystkich tych czterech wektorów o kąt φ dookoła wspólnego początku O .

Niech e_1 i e_2 tworzą kąt α (rys. 35)

Przyjmijmy oznaczenie

$$E = \begin{vmatrix} e_1 e'_1 & e_1 e'_2 \\ e_2 e'_1 & e_2 e'_2 \end{vmatrix}.$$



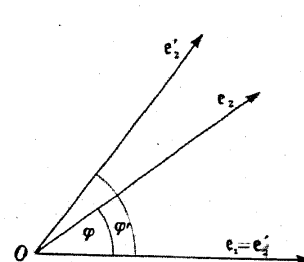
Rys. 35

Mamy więc

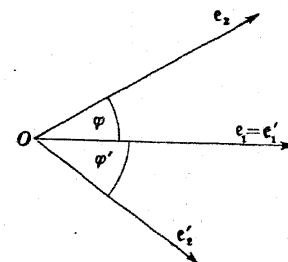
$$E = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \cos (\varphi + \alpha) \\ \cos (\varphi - \alpha) & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi - \cos (\varphi + \alpha) \cos (\varphi - \alpha) = \\ = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2\varphi + \cos 2\alpha] = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha > 0.$$

Na podstawie kryterium (5) widzimy więc, że *orientacja pary wektorów nie zmienia się przez obrót dookoła punktu*.

Niech teraz będą dane dwie pary wektorów jednostkowych e_1, e_2 i e'_1, e'_2 o wspólnym początku O . Obróćmy drugą parę dookoła O tak, by wektor e_1 pokrył się z e'_1 . Na podstawie poprzedniego twierdzenia para e'_1, e'_2 ma w obu położeniach tę samą orientację. Przez p oznaczmy prostą, na której leżą wektory e_1 i e'_1 . Mogą zajść dwa przypadki:



Rys. 36



Rys. 37

1^o Wektory e_2 i e'_2 leżą po jednej stronie prostej p (rys. 36). Wówczas

$$E = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi' \\ \cos \varphi & \cos (\varphi' - \varphi) \end{vmatrix} = \sin \varphi \sin \varphi' > 0,$$

a więc obie pary wektorów mają orientację zgodną.

2^o Wektory e_2 i e'_2 leżą po przeciwnych stronach prostej p (rys. 37). Wówczas

$$E = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi' \\ \cos \varphi & \cos (\varphi + \varphi') \end{vmatrix} = -\sin \varphi \sin \varphi' < 0,$$

a więc obie pary wektorów mają orientację niezgodną.

Jasne jest, że w pierwszym przypadku można przez obrót wektora e_2 dookoła punktu O (bez zmiany wektora e_1) doprowadzić

e_2 i e'_2 do pokrycia się, nie przechodząc przez położenie, w którym e_2 i e_1 leżą na jednej prostej, i że w drugim przypadku jest to niemożliwe. Tym samym zgodność przyjętej definicji z intuicją została sprawdzona.

Niech teraz będzie dany dowolnie na płaszczyźnie układ współrzędnych Oxy . Weźmy pod uwagę kąt zawarty między wektorami i i j , leżący w pierwszej ćwiartce. Kątowi temu nadajemy orientację taką, by i było jego ramieniem pierwszym, j zaś — drugim. W ten sposób wybraliśmy pewien obieg na kole, który nazywamy dodatnim.

Zatem *wybór układu współrzędnych wyznacza dodatnią orientację kątów w płaszczyźnie.*

Zamiast układu współrzędnych można też dla wyznaczenia orientacji kątów wziąć zorientowaną parę wektorów.

Uwaga. Również prostej można nadać dwie orientacje, mianowicie dwa jej zwroty.

2. Orientacja trójki wektorów w przestrzeni. Trójce uporządkowanej wektorów $a_i(a_i, b_i, c_i)$, gdzie $i=1, 2, 3$, przyporządkujemy wyznacznik

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Np.

$$\begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ze wzoru (11) z § 10, str. 48, wynika, że na to, by trzy wektory były równoległe do jednej płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wynika to również z warunku (8), § 5, str. 24, który jest równoważny układowi równań

$$(10) \quad \begin{aligned} la_1 + ma_2 + na_3 &= 0, \\ lb_1 + mb_2 + nb_3 &= 0, \\ lc_1 + mc_2 + nc_3 &= 0, \end{aligned} \quad \text{gdzie } |l| + |m| + |n| > 0.$$

Jeśli bowiem zachodzą równania (10), to wyznacznik tego układu równań jednorodnych o niewiadomych l, m, n znika, czyli zachodzi równość (9). Na odwrót, gdy zachodzi równość (9), to istnieją liczby l, m, n spełniające równania (10).

Jeśli dla trójki uporządkowanej wektorów wyznacznik (8) jest różny od 0, to przez przedstawienie dwóch wektorów zmienia on znak. Trzy wektory możemy uporządkować 6 różnymi sposobami. Dla 3 z tych sposobów wyznacznik (8) jest dodatni, a dla pozostałych 3 — ujemny.

Dwie trójki uporządkowane wektorów a_1, a_2, a_3 i a'_1, a'_2, a'_3 nazywamy *jednakowo zorientowanymi*, gdy

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Tak jak na płaszczyźnie, dowodzi się, że warunek (11) jest równoważny nierówności

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{vmatrix} > 0.$$

A więc: *orientacja zgodna dwóch trójek wektorów, mimo że określona za pomocą ich składowych, jest własnością geometryczną (niezależną od układu współrzędnych).*

W ten sam sposób jak na płaszczyźnie, dowodzi się dalej, że i w przestrzeni trójki uporządkowane wektorów dzielą się na dwie rozłączne klasy; trójki jednej i tej samej klasy są zorientowane zgodnie, różnych zaś klas — niezgodnie.

Na to, by trójka uporządkowana wektorów miała tę samą orientację co układ osi współrzędnych, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(13) \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Uwagi. 1. Jeśli wierzchołki P_1, P_2, P_3 i P_4 czworościanu uporządkujemy w ten sposób, by trójka uporządkowana wektorów

$$a_1 = P_1 P_2, \quad a_2 = P_1 P_3, \quad a_3 = P_1 P_4$$

była zgodnie zorientowana z układem osi współrzędnych, to we wzorach (11), (12) i (14) z § 10 możemy opuścić znak wartości bezwzględnej i dostajemy w szczególności

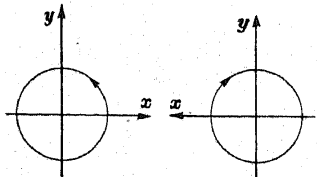
$$(14) \quad V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \sqrt{g} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{g}.$$

2. Podobnie jak na płaszczyźnie, prawdziwe jest i w przestrzeni twierdzenie:

Jeśli dwie trójki uporządkowane wektorów są zorientowane zgodnie, to można w sposób ciągły przekształcić jedną trójkę w drugą tak, że w żadnym położeniu pośrednim trzy wektory tej trójki nie są równoległe do jednej płaszczyzny. Jeśli zaś dwie trójki uporządkowane wektorów są zorientowane niezgodnie, to w każdym przekształceniu ciągłym jednej trójki w drugą istnieje położenie pośrednie, w którym wektory tej trójki są równoległe do jednej płaszczyzny.

3. Istnieją dwie orientacje pary wektorów na płaszczyźnie, a trójki wektorów w przestrzeni. Natomiast orientacja pary wektorów w przestrzeni istnieje tylko jedna, bo w przestrzeni każdą parę uporządkowaną wektorów można przeprowadzić w każdą inną bez przechodzenia przez położenie równoległości wektorów tej pary. Np. przez obrót w przestrzeni jednego z dwóch wektorów prostopadłych dookoła drugiego o kąt 180° , przeprowadzamy układ tych dwu wektorów w nowy układ, mający na płaszczyźnie orientację przeciwną.

4. Dwie możliwe orientacje prostej określone są przez jej dwa możliwe zwroty (p. uwagę na str. 56). Gdy prostą kreślimy poziomo, to zwykle zwroty określamy jako *prawy* lub *lewy*; jeśli zaś pionowo, to zwrotom jej nadajemy nazwę *w górę* lub *w dół*. Zwroty *prawy*, a także *w górę*, uważamy zwykle za dodatnie.



Rys. 38

Dwa różne obiegi na płaszczyźnie i — w związku z tym — dwie różne orientacje par wektorów określa się zwykle przez obieg *wskazówek zegara*, uważając go najczęściej za ujemny, a przeciwny — za dodatni (rys. 38).

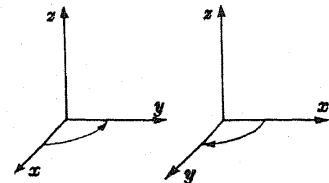
W przestrzeni natomiast rozróżnia się oba rodzaje układów zorientowa-

nych, zwane *prawoskrętnym* (rys. 39) i *lewoskrętnym* (rys. 40), przez skręt śruby.

Nadanie zwrotów osiom x i y wyznacza w płaszczyźnie Oxy obieg dodatni (p. str. 56). Jeśli śruba, której osią jest oś z , wkręcana obiegem dodatnim, posuwa się zgodnie ze zwrotem dodatnim osi z , to układ nazywa się *prawoskrętnym*, w przeciwnym razie — *lewoskrętnym*.

Tak więc do określenia orientacji na prostej użyliśmy pojęć *lewy* i *prawy*, na płaszczyźnie orientacja została określona przez pojęcie *obiegu wskazówek zegara*, w przestrzeni przez pojęcie *skrętu śruby*. Są to pojęcia, które wytworzyły się ze znajomości pewnych przedmiotów, napotykanych w życiu codziennym, i ich położenia względem nas. Toteż w żadnej parze tych pojęć nie można odróżnić jednego z nich od drugiego bez uwzględnienia danych zmysłowych. Metodą współrzędnych, czy też metodą aksjomatyczną możemy stwierdzić tylko istnienie dwóch różnych orientacji oraz ich zgodność lub niezgodność. Nie możemy jednak wprowadzić żadnej z dwóch orientacji osobno.

Uwydatnia się to jeszcze silniej w przestrzeni czterowymiarowej, w której nie kieruje nami intuicja życia codziennego. Wskutek tego nie możemy w niej wyróżnić żadnej z obu orientacji odwołaniem się do jakiegoś przedmiotu dostępnego naszemu zmysłowi. Podobnie w geometrii płaskiej nie możemy wyróżnić orientacji przestrzennych; tak np. rysunek 39 może być rzutem układu $Oxyz$ zarówno lewo- jak prawoskrętnego, zależnie od tego, czy oś Ox jest zwrócona nad czy pod kartkę papieru.



Rys. 39

Rys. 40

§ 12. O kierunkach

1. **Stosunki.** Układy liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ nazywają się *proporcjonalne*, gdy są spełnione dwa warunki:

1° w żadnym z tych dwu układów nie znikają równocześnie wszystkie liczby,

2° istnieje taka stała k , że

$$(1) \quad a_1 = kb_1, \quad a_2 = kb_2, \quad \dots, \quad a_n = kb_n.$$

Piszemy to w postaci

$$(2) \quad a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$$

i mówimy, że *stosunek* $a_1 : a_2 : \dots : a_n$ jest równy *stosunkowi* $b_1 : b_2 : \dots : b_n$.

Równość stosunków jest przechodnia: jeżeli

$$(3) \quad a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n \quad \text{i} \quad b_1 : b_2 : \dots : b_n = c_1 : c_2 : \dots : c_n,$$

to

$$(4) \quad a_1 : a_2 : \dots : a_n = c_1 : c_2 : \dots : c_n.$$

Pierwsza bowiem z równości (3) jest równoważna równościom (1), druga zaś — równościom

$$b_1 = lc_1, \quad b_2 = lc_2, \quad \dots, \quad b_n = lc_n,$$

skąd

$$a_1 = klc_1, \quad a_2 = klc_2, \quad \dots, \quad a_n = klc_n,$$

a stąd wynika (4).

Na to, by zachodziła równość stosunków (2), potrzeba i wystarcza, żeby

1° liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ jak również liczby $b_1, b_2, \dots, b_n$ nie znikły równocześnie,

2° rząd macierzy

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

był równy 1.

Istotnie, gdy zachodzi (1), to dla każdego minora 2-go stopnia macierzy (5) mamy

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kb_i & kb_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} b_i & b_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = 0.$$

Na odwrót, niech znika każdy minor 2-go stopnia macierzy (5). Niech np. b_1 będzie nieznikającym elementem drugiego wiersza. Wtedy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_i \\ b_1 & b_i \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

czyli

$$a_i = \frac{a_1}{b_1} b_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Biorąc $k = a_1/b_1$, otrzymujemy (1), c. b. d. o.

2. Kierunki. Jak wiemy z § 1 (p. str. 6) — na to, by wektory a i b miały ten sam kierunek (były równoległe), potrzeba i wystarcza, żeby istniała liczba k , dla której

$$(6) \quad a = k \cdot b.$$

Wprowadźmy obecnie w przestrzeni współrzędne zwyczajne i kowariantne obu wektorów. Wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości obu wektorów jest każda z równości:

$$(7) \quad a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3,$$

$$(8) \quad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2.$$

Konieczność tego warunku wynika stąd, że jeśli zachodzi (6), to przechodząc do składowych zwyczajnych, otrzymujemy

$$(9) \quad a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad c_1 = kc_2,$$

czyli (7), a stąd na mocy równości (29) z § 9, str. 44, wynika, że

$$(10) \quad A_1 = kA_2, \quad B_1 = kB_2, \quad C_1 = kC_2,$$

czyli (8).

Na odwrót, niech zachodzi (7). Wówczas z równości

$$a = a_1 \cdot i + b_1 \cdot j + c_1 \cdot k, \quad b = a_2 \cdot i + b_2 \cdot j + c_2 \cdot k$$

wynika (6). Jeśli zaś zachodzi (10), to przez odwrócenie równości (29) z § 9, str. 44, dostajemy (9), stąd zaś (6).

Podobnie na płaszczyźnie, warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości wektorów jest każda z równości:

$$(11) \quad a_1 : b_1 = a_2 : b_2,$$

$$(12) \quad A_1 : B_1 = A_2 : B_2.$$

Wektory równoległe nazwaliśmy także wektorami mającymi ten sam kierunek. Kierunek jest więc wyznaczony przez prostą niezależnie od zwrotu. Wynika stąd, że *kierunek jest określony stosunkiem składowych jakiegokolwiek wektora do niego równoległego.*

Zatem w przestrzeni kierunek jest wyznaczony przez stosunek trzech liczb, a na płaszczyźnie przez stosunek dwóch liczb.

PRZYKŁADY. 1. W układzie prostokątnym współrzędnych są dane dwie proste p i q o kierunkach $2:1:2$ i $6:3:2$. Znaleźć kierunek dwusiecznej kąta między nimi.

Na prostej p leży wektor $a = [2, 1, 2]$, na prostej zaś q — wektor $b = [6, 3, 2]$. Proste te tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych.

Dwusieczna jednej pary kątów jest dwusieczną kąta między a i b , a dwusieczna drugiej pary jest dwusieczną kąta między a i $-b$. Ponieważ wektory a i b mają cosinusy kierunkowe

$$\alpha_x = \frac{2}{3}, \quad \alpha_y = \frac{1}{3}, \quad \alpha_z = \frac{2}{3},$$

$$\beta_x = \frac{6}{7}, \quad \beta_y = \frac{3}{7}, \quad \beta_z = \frac{2}{7},$$

więc pierwsza dwusieczna ma cosinusy kierunkowe (p. wzory (20) z § 8, str. 39) proporcjonalne do liczb

$$\alpha_x + \beta_x = \frac{32}{21}, \quad \alpha_y + \beta_y = \frac{16}{21}, \quad \alpha_z + \beta_z = \frac{20}{21},$$

a zatem jest wyznaczona przez stosunek 8:4:5. Druga zaś dwusieczna ma cosinusy proporcjonalne do liczb

$$\alpha_x - \beta_x = -\frac{4}{21}, \quad \alpha_y - \beta_y = -\frac{2}{21}, \quad \alpha_z - \beta_z = \frac{8}{21},$$

a zatem jest wyznaczona przez stosunek 2:1:-4.

2. Dwie nierównoległe proste p i q mają (w układzie współrzędnych prostokątnym lub ukośnokątnym) kierunki $a_1:b_1:c_1$ i $a_2:b_2:c_2$. Wyznaczyć kierunek prostej prostopadłej do p i q .

Oznaczmy stosunek określający kierunek tej prostopadłej przez $A:B:C$, gdzie A, B i C są składowymi kowariantnymi. Zatem

$$(13) \quad \begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C &= 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ proste a i b nie są równoległe, więc nie znikają równocześnie wyznaczniki drugiego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Niech np. pierwszy z nich będzie różny od zera. Przyjmując za C dowolną wartość, a następnie przenosząc na drugą stronę, otrzymujemy

$$A = -C \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad B = -C \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

czyli

$$(14) \quad A:B:C = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Taki jest wzór dla kierunku prostopadłego do dwóch danych kierunków.

3. Kierunki na płaszczyźnie. Na płaszczyźnie kierunek jest wyznaczony przez stosunek $a:b$ składowych dowolnego wektora o tym kierunku. Dla kierunku osi Oy jest $a=0$, czyli kierunek ten jest wyznaczony przez stosunek $a:b=0:1$. Dla pozostałych kierunków jest $a \neq 0$, a ponieważ wówczas

$$a:b = 1:\frac{b}{a},$$

więc stosunek $a:b$ jest wyznaczony przez liczbę b/a . W ten sposób każdemu kierunkowi nierównoległemu do osi Oy jest przyporządkowana pewna liczba i na odwrót. Liczbę

$$m = b/a$$

nazywamy *współczynnikiem kierunkowym* (wektora, osi, prostej, kierunku).

W układzie prostokątnym współrzędnych można nadać temu współczynnikowi prostą interpretację geometryczną. Niech prosta p będzie nierównoległa do osi Oy . Przez nadanie zwrotu możemy z niej utworzyć dwie osie. Oznaczmy przez φ_1 miarę kąta między jedną z tych osi a osią Ox , zorientowanego dodatnio i liczonego od osi Ox . Wszystkie inne miary tego kąta wynoszą

$$\varphi = \varphi_1 + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Miary kątów między osią utworzoną z prostej p przez nadanie jej zwrotu przeciwnego, a osią Ox wynoszą

$$\psi = \pi + \varphi_1 + 2k\pi \quad \text{gdzie } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Jest więc

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi.$$

Widzimy, że tangens kąta zorientowanego dodatnio, liczonego od osi Ox do osi utworzonej z prostej p , nie zależy od zwrotu nadanego tej prostej. Ten tangens zatem wyznacza kierunek prostej p , gdy jest ona nierównoległa do osi Oy . Udowodnimy, że jest on równy współczynnikowi kierunkowemu prostej.

W tym celu wystarczy obrać wektor na danej prostej tak, by było $b > 0$. Mogą zajść dwa przypadki:

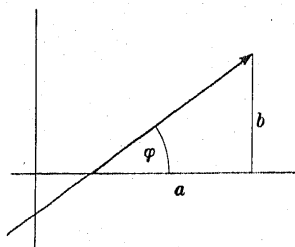
1° $a > 0$. Wówczas kąt φ jest ostry (rys. 41) i — jak widać bezpośrednio z rysunku —

$$(15) \quad \operatorname{tg} \varphi = b/a.$$

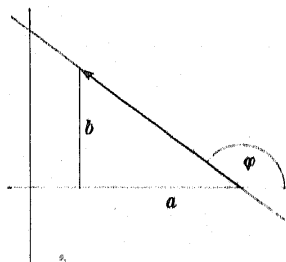
2° $a < 0$. Wówczas kąt φ jest rozwarty (rys. 42) i — jak widać bezpośrednio z rysunku —

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -b/a,$$

skąd znowu wynika (15).



Rys. 41



Rys. 42

W szczególności, prosta przechodząca przez dwa różne punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ ma współczynnik kierunkowy

$$(16) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

gdyż wektor P_1P_2 ma składowe $a = x_2 - x_1$ i $b = y_2 - y_1$.

Niech teraz w płaszczyźnie będą dane dwie przecinające się proste. Tworzą one cztery kąty (dwie pary kątów wierzchołkowych). Weźmy pod uwagę jeden z nich i nadajmy mu orientację dodatnią. Oznaczmy jego miarę przez φ , miarę kąta (zorientowanego dodatnio i liczonego od osi Ox) utworzonego przez pierwsze jego ramię z osią Ox — przez φ_1 , a miarę analogicznego kąta dla drugiego ramienia — przez φ_2 . Wówczas

$$(17) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = m_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = m_2,$$

gdzie m_1 i m_2 są współczynnikami kierunkowymi. Na mocy wzoru (7) z § 2, str. 10, mamy $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, a więc

$$(18) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Wzór (18) pozwala obliczyć kąt między prostymi, gdy znane są współczynniki kierunkowe jego ramion.

W szczególności wynika stąd warunek prostopadłości kierunków o współczynnikach m_1 i m_2 :

$$(19) \quad m_1 = -1/m_2.$$

§ 13. Inne układy współrzędnych

Współrzędne prostokątne i — ogólnie — współrzędne ukośnokątne nazywamy *kartezjańskimi* od nazwiska Descartes'a*. Podamy teraz przykłady innych rodzajów współrzędnych.

1. **Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie.** Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie dowolny punkt O i dowolną oś Ox przechodzącą przez O (rys. 43). Nadajmy płaszczyźnie orientację, przez co ustalony zostanie dodatni obieg kątów (p. str. 9).

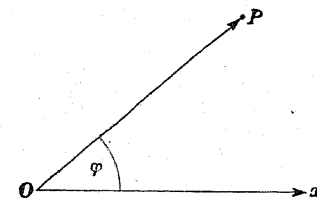
Punkt O nazywamy *biegunem*, a oś Ox — *osią biegunową*.

Gdy dany jest punkt P różny od punktu O , to niech

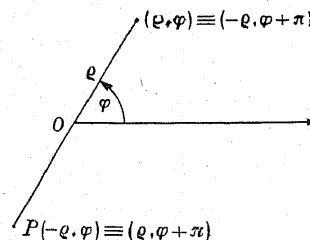
$$\varrho = |OP|.$$

Przez φ oznaczamy miarę kąta między wektorem OP a osią Ox , liczonego w obiegu dodatnim od osi Ox do wektora. Miara φ przybiera nieskończenie wiele wartości, różniących się między sobą o $2k\pi$, gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Każdemu punktowi P , różnemu od bieguna O , odpowiada więc nieskończenie wiele par ϱ, φ , różniących się tylko drugim wyrazem; pierwszy wyraz, czyli ϱ , jest dodatni.

Rozszerzamy to przyporządkowanie, dopuszczając również pary, dla których $\varrho < 0$. Parę ϱ, φ , dla której $\varrho < 0$, przyporządkujemy punktowi P , który powstaje w sposób następujący (p. rys. 44): kreślimy z bieguna O półprostą, two-



Rys. 43



Rys. 44

* René Descartes, po łacinie Cartesius, matematyk i filozof francuski (1596-1650), twórca geometrii analitycznej.

rzającą z osią Ox kąt φ i na przedłużeniu tej półprostej poza punkt O odcinamy wektor OP o długości $|\varrho|$. W myśl tego określenia parom ϱ, φ i $-\varrho, \varphi + \pi$ odpowiada ten sam punkt.

Biegunowi O przyporządkujemy pary $0, \varphi$, gdzie φ jest liczbą dowolną.

W ten sposób każdemu punktowi odpowiada nieskończenie wiele par, każdej zaś parze dokładnie jeden punkt.

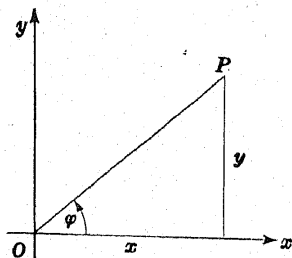
Liczby ϱ i φ , przyporządkowane punktowi P , nazywamy jego współrzędnymi biegunowymi, punkt zaś P oznaczamy również przez $P(\varrho, \varphi)$ lub przez (ϱ, φ) .

Np. punkty, dla których $\varrho = 1$, leżą na kole o promieniu 1 i środku O . To samo dotyczy punktów, dla których $\varrho = -1$. Punkty, dla których $\varphi = \alpha$, leżą na prostej, tworzącej z osią Ox kąt α , i na odwrót, do każdego takiego punktu można znaleźć taką parę współrzędnych ϱ, φ , by $\varphi = \alpha$.

Jeśli w układzie współrzędnych biegunowych zmienimy obieg dodatniego liczenia kątów, to dostaniemy układ różny od poprzedniego. Współrzędna kątowa φ danego punktu będzie w nim miała znak przeciwny.

Utwórzmy obecnie układ prostokątny o początku w biegunie O i o osi Ox , identycznej z osią biegunową. Osi Oy nadajmy taki zwrot, by w układach prostokątnym i biegunowym był ten sam dodatni obieg kątów. Niech x i y będą współrzędnymi kartezjańskimi punktu P , a ϱ, φ — którąkolwiek z par współrzędnych biegunowych tegoż punktu. Udowodnimy, że

$$(1) \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$



Rys. 45

Istotnie, jeśli $\varrho \geq 0$, to wzory (1) wynikają wprost z definicji funkcji cosinus i sinus (p. rys. 45).

Jeśli zaś $\varrho < 0$, to punkt P jest identyczny z punktem (ϱ_1, ψ) , dla którego

$$\varrho_1 = |\varrho|, \quad \psi = \varphi + \pi.$$

Ponieważ $\varrho_1 = |\varrho| > 0$, więc na podstawie poprzedniego przypadku otrzymujemy

$$x = \varrho_1 \cos \psi = |\varrho| \cos(\varphi + \pi) = -|\varrho| \cos \varphi = \varrho \cos \varphi$$

i podobną równość dla y , c. b. d. o.

Wzory (1) wyrażają współrzędne kartezjańskie przez biegunowe. By otrzymać wzory wyrażające współrzędne biegunowe przez kartezjańskie, podnieśmy do kwadratu równości (1) i dodajmy je stronami. Otrzymujemy

$$(2) \quad \varrho = \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

a stąd dalej

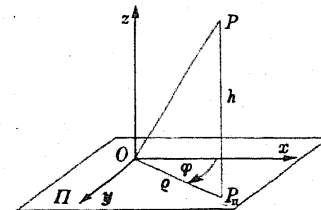
$$(3) \quad \cos \varphi = x/\varrho, \quad \sin \varphi = y/\varrho.$$

Z (3) wynika równość często stosowana

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x.$$

Oczywiście, $\operatorname{tg} \varphi$ jest współczynnikiem kierunkowym wektora OP .

2. Współrzędne cylindryczne w przestrzeni. Niech będzie dany na płaszczyźnie Π układ współrzędnych biegunowych. Niech P będzie dowolnym punktem przestrzeni, P_{Π} jego rzutem prostopadłym na Π (rys. 46), a ϱ i φ — współrzędnymi biegunowymi punktu P_{Π} w płaszczyźnie Π . Oznaczmy przez h odległość punktu P od płaszczyzny Π , liczoną dodatnio dla punktów leżących po jednej stronie tej płaszczyzny, a ujemnie — po drugiej.



Rys. 46

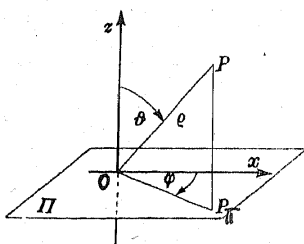
Liczby ϱ , φ i h nazywamy współrzędnymi cylindrycznymi (czyli walcowymi) punktu P .

Np. punkty dla których $\varrho = a > 0$, wypełniają walec obrotowy o promieniu a i o osi przechodzącej przez O prostopadle do płaszczyzny Π . Punkty, dla których $h = a$, leżą w płaszczyźnie równoległej do Π . Punkty, dla których $\varphi = \alpha$, wypełniają płaszczyznę prostopadłą do Π .

Wprowadźmy w przestrzeni układ współrzędnych prostokątnych $Oxyz$, biorąc biegun za O , Π za płaszczyznę Oxy , oś biegunową na Π za oś Ox , oś Oy prostopadłą do Ox tak, by tworzyła z osią Ox kąt, który w obiegu dodatnim ma miarę $\pi/2$, wreszcie oś Oz prostopadłą do Π i zwróconą w stronę tej półprzestrzeni, w której $h > 0$. Wówczas — jak łatwo widzieć — między współrzędnymi w układzie kartezjańskim $Oxyz$ a współrzędnymi w układzie cylindrycznym $O\rho\varphi h$ zachodzą związki

$$(5) \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = h.$$

3. Współrzędne sferyczne w przestrzeni. Częściej niż cylindryczne, używane są w przestrzeni współrzędne sferyczne (czyli kuliste).



Rys. 47

Weźmy dowolną płaszczyznę Π , na niej układ biegunowy (rys. 47); następnie przez O poprowadźmy oś Oz prostopadłą do Π o zwrocie dowolnym.

Niech P będzie jakimkolwiek punktem przestrzeni różnym od O i niech $\rho = |OP|$.

Oznaczmy przez φ miarę kąta (zorientowanego) zawartego między osią Ox a wektorem OP_{Π} i liczonego w obiegu dodatnim od osi Ox , a przez θ — kąt

leżący w granicach 0 i π , liczony od osi Oz do wektora OP . W ten sposób każdemu punktowi odpowiada nieskończenie wiele trójek liczb ρ, φ, θ . Dla dwóch trójek $\rho_1, \varphi_1, \theta_1$ i $\rho_2, \varphi_2, \theta_2$, odpowiadających temu samemu punktowi, jest

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \text{gdzie } k = 0, \pm 1, \dots$$

W powyższym przyporządkowaniu jest $\rho \geq 0$. Każdej trójce ρ, φ, θ , gdzie $\rho > 0$, odpowiada dokładnie jeden punkt; oznaczamy go także przez $P(\rho, \varphi, \theta)$ lub wprost przez (ρ, φ, θ) .

Dopuszczamy jeszcze trójki ρ, φ, θ , dla których $\rho < 0$. Trójki te przyporządkujemy punktowi $P(-\rho, \varphi + \pi, \pi - \theta)$. Punkt P powstaje przez wykreślenie półprostej tworzącej z osią Oz kąt θ , której rzut na Π tworzy z osią Ox kąt φ , a następnie przez odcięcie na przedłużeniu tej półprostej wektora OP o długości $|\rho|$.

Wszystkie trójki $0, \varphi, \theta$ przyporządkowujemy punktowi O .

W ten sposób określone trójki ρ, φ, θ nazywamy *współrzędnymi sferycznymi* lub *kulistymi* punktu w przestrzeni.

Np. punkty, dla których $\rho = a > 0$, leżą na powierzchni kuli o środku O i promieniu a ; na odwrót, dla każdego punktu tej kuli jest $\rho = \pm a$. Punkty, dla których $\varphi = a$, leżą na płaszczyźnie przecinającej płaszczyznę Π wzdłuż prostej, tworzącej z osią Ox kąt a i przechodzącej przez oś Oz . Punkty, dla których $\theta = a$, leżą na połoźnicy stożka, o ile $a \neq \pi/2$, a na płaszczyźnie Π , gdy $a = \pi/2$.

Wprowadźmy teraz układ prostokątny współrzędnych $Oxyz$, którego początkiem jest biegun O , płaszczyzną Oxy płaszczyznę Π , a osią Oy prosta przez O tworząca z osią x kąt $\pi/2$ liczony w obiegu

dodatnim. Wówczas między współzrędnymi sferycznymi a kartezjańskimi tego samego punktu zachodzą związki:

$$(6) \quad x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Istotnie, niech punkt $P(\rho, \varphi, \theta)$, gdzie $\rho \geq 0$, ma współrzędne prostokątne x, y, z . Dla długości wektora OP_{Π} , który jest rzutem wektora OP na Π , otrzymujemy zatem

$$(7) \quad |OP_{\Pi}| = \rho \cos(\pi/2 - \theta) = \rho \sin \theta.$$

Z drugiej strony, rzut punktów P_{Π} i P na oś Ox jest ten sam; podobnie rzut na oś Oy . Zatem

$$x = |OP_{\Pi}| \cos \varphi, \quad y = |OP_{\Pi}| \sin \varphi,$$

a stąd wobec (7) dostajemy dwie pierwsze z równości (6). Trzecia równość jest oczywista.

W przypadku $\rho < 0$ mamy

$$(\rho, \varphi, \theta) = (-\rho, \varphi + \pi, \pi - \theta).$$

Po prawej stronie jest $-\rho > 0$, więc można stosować wzory (6), a tym samym

$$x = -\rho \cos(\varphi + \pi) \sin(\pi - \theta) = \rho \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = -\rho \sin(\varphi + \pi) \sin(\pi - \theta) = \rho \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = -\rho \cos(\pi - \theta) = \rho \cos \theta.$$

Współrzędne sferyczne są szczególnie często używane w astronomii i geografii. Występuje tam drobna zmiana, gdyż kąt θ jest liczony nie od osi Oz , lecz od płaszczyzny Π , dodatnio w jednej półprzestrzeni, a ujemnie w drugiej. Liczony w ten sposób, nosi on nazwę *szerokości geograficznej*, a kąt φ nazywa się *długością geograficzną*. Szerokość geograficzna zmienia się od $-\pi/2$ do $\pi/2$, osiągając skrajne wartości w biegunach.