ROZDZIAŁ I

WEKTORY

§ 1. Pojęcia podstawowe

1. Definicja wektora. Zasadniczym pojęciem, na którym opiera się współczesna geometria, jest wektor. Weźmy pod uwagę odcinek łączący dwa punkty P i Q. Odcinkowi temu możemy nadać *zwrot* od P do Q, uważając P za początek, a Q za koniec, lub zwrot od Q do P, uważając Q za początek, a P za koniec.

Odcinek z nadanym zwrotem nazywamy *wektorem*.

Z każdego odcinka mogą powstać dwa wektory przez nadanie mu jednego z dwóch możliwych zwrotów. Wektor o początku P i końcu Q oznaczamy przez PQ. Gdy nie zależy nam na zaznaczeniu początku i końca wektora, to oznaczamy wektory małymi literami frakturowymi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ itd.

Wprowadzimy jeszcze pojęcie *wektora zerowego*, tj. którego początek i koniec zlewają się w jeden punkt. Oznaczamy go przez $\mathfrak{o}$ lub PP, QQ itp.

Długość odcinka, z którego powstaje wektor, nazywamy *długością wektora*.

Długość wektora $\mathfrak{a}$ oznaczamy przez $|\mathfrak{a}|$, długość wektora PQ — przez $|PQ|$; w szczególności $|\mathfrak{o}|=0$.

Dwa wektory, różne od zerowych i powstające z odcinków równoległych, nazywamy *wektorami równoległymi* lub mającymi ten sam *kierunek*.

Wektory równoległe mogą mieć ten sam zwrot lub zwroty przeciwne.

Równoległość wektorów jest relacją między dwoma wektorami, która ma następujące własności:

1⁰ Wektor $\mathfrak{a}$ jest równoległy do wektora $\mathfrak{a}$ (zwrotność).

2⁰ Jeśli wektor $\mathfrak{a}$ jest równoległy do wektora $\mathfrak{b}$, to wektor $\mathfrak{b}$ jest równoległy do wektora $\mathfrak{a}$ (symetria).

3⁰ Jeśli wektor $\mathfrak{a}$ jest równoległy do wektora $\mathfrak{b}$ i wektor $\mathfrak{b}$ jest równoległy do wektora $\mathfrak{c}$, to wektor $\mathfrak{a}$ jest równoległy do wektora $\mathfrak{c}$ (przechodniość).

Podzielmy wszystkie wektory niezerowe na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy dwa wektory, gdy są one równoległe. Wówczas każde dwa wektory należące do jednej i tej samej klasy są równoległe, a należące do różnych klas — nierównoległe. Każde dwie różne klasy są zatem *rozłączne*, tj. nie mają elementów wspólnych.

Określiliśmy pojęcie wektorów o tym samym kierunku, natomiast nie określiliśmy dotychczas samego pojęcia kierunku. Ponieważ dwa wektory mające ten sam kierunek należą do tej samej klasy, więc określamy *kierunek wektora* jako klasę, do której ten wektor należy.

Wektorom zerowym nie nadajemy kierunku czyli nie uważamy ich za równoległe do jakiegokolwiek wektora niezerowego ani też między sobą.

Dwa wektory niezerowe $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nazywamy *równymi* i piszemy $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, gdy mają one tę samą długość, czyli gdy $|\mathfrak{a}|=|\mathfrak{b}|$, i zarazem ten sam kierunek oraz ten sam zwrot. Ponadto nazywamy równymi każde dwa wektory zerowe.

Łatwo sprawdzić, że równość wektorów ma następujące własności:

1⁰ $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ (zwrotność);

2⁰ gdy $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, to $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ (symetria);

3⁰ gdy $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, to $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$ (przechodniość).

Równość wektorów nie jest tożsamością wektorów: z tożsamości wynika równość, lecz nie na odwrót. Podobnie z równości odcinków nie wynika identyczność odcinków.

W niektórych rozumowaniach gra rolę nie położenie początku i końca wektora, lecz jedynie jego kierunek, zwrot i długość. Wtedy więc abstrahujemy od położenia wektora w przestrzeni: obojętne jest, który z równych wektorów bierzemy pod uwagę. W innych jednak przypadkach położenie początku i końca wektora ma ważne znaczenie.

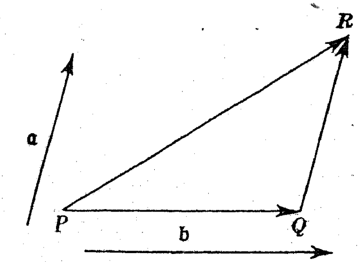
Nazwijmy wektory poprzednio zdefiniowane *wektorami umiejscowionymi*. Te wektory są więc wyznaczone przez podanie bądź początku i końca, bądź początku, długości, kierunku i zwrotu, bądź wreszcie końca, długości, kierunku i zwrotu.

Zaliczmy wektory umiejscowione do tej samej klasy, gdy są równe. Różne klasy są wtedy rozłączne. Klasa wektorów równych jest więc wyznaczona jedynie przez podanie długości, kierunku i zwrotu. W rozumowaniach, w których wchodzą w grę tylko trzy ostatnie własności wektorów, ale w których abstrahujemy od ich położenia w przestrzeni, możemy zamiast mówić o wektorach, mówić o ich klasach. Dlatego wprowadza się dla klasy wektorów równych nowy termin, nazywając ją *wektorem swobodnym*.

Wektor umiejscowiony wyznacza wektor swobodny, lecz nie na odwrót.

2. Dodawanie wektorów. Pojęcie wektora powstało w fizyce dla przedstawienia niektórych wielkości fizycznych, jak np. prędkość, przyśpieszenie, siła. W fizyce zostały określone pewne działania na wektorach, zwane dodawaniem wektorów, mnożeniem wektora przez liczbę i mnożeniem wektorów. Zaznajomimy się z nimi obecnie. Wprowadzenie tych pojęć do geometrii odegrało dużą rolę, przede wszystkim dzięki uproszczeniom pojęciowym i rachunkowym, jakie się przez to uzyskuje.

Niech będą dane dwa wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$. Wyprowadźmy z jakiegokolwiek punktu P (rys. 1) wektor $PQ=\mathfrak{a}$, a następnie zbudujmy wektor $QR=\mathfrak{b}$. *Sumą* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *wektorów* $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nazywamy wektor równy wektorowi PR. Konstrukcja ta jest oczywiście od wyboru punktu P niezależna w tym sensie, że jakkolwiek obierzemy punkt P w przestrzeni, to otrzymane wektory PR są równe.



Rys. 1

Równe wektory mają równe sumy, tzn. że jeśli $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}'$, to $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'$.

Twierdzenie to orzeka, że gdy dane są dwa wektory swobodne $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, to jakkolwiek wybierzemy wektor umiejscowiony PQ wyznaczający $\mathfrak{a}$, następnie wektor umiejscowiony QR wyznaczający $\mathfrak{b}$, wszystkie w ten sposób otrzymane wektory PR są równe, czyli wyznaczają ten sam wektor swobodny, który oznaczamy przez $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. Tym samym suma wektorów swobodnych jest wyznaczona jednoznacznie.

Natomiast suma wektorów umiejscowionych nie jest wyznaczona jednoznacznie: z jej określenia wynika tylko równość tych wszystkich wektorów umiejscowionych, które są sumami danych dwóch wektorów umiejscowionych.

Gdy $\mathfrak{b}$ jest wektorem zerowym, dostajemy

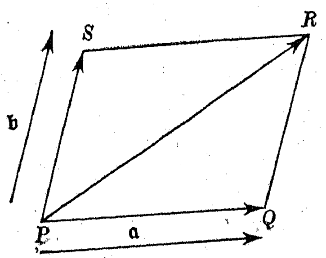
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{o}=\mathfrak{a}; \tag{1}$$

wówczas bowiem $\mathfrak{b}=QQ$ czyli (p. rys. 1) punkty Q i R są identyczne; jest więc $PR=PQ$.

Dodawanie wektorów jest przemienne, tzn. że

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}. \tag{2}$$

Dla dowodu wyprowadźmy z dowolnego punktu P wektory PQ i PS, równe odpowiednio wektorom $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ (rys. 2). Wówczas w myśl określenia sumy wektorów mamy:



Rys. 2

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=PQ+QR=PR,$$
$$\mathfrak{b}+\mathfrak{a}=PS+SR=PR,$$

skąd wynika (2).

Niech teraz dane będą trzy wektory $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c}$. Z dowolnego punktu P przestrzeni wyprowadźmy wektor $PQ=\mathfrak{a}$, następnie wektor $QR=\mathfrak{b}$ i wreszcie wektor $RS=\mathfrak{c}$. Wówczas (p. rys. 3):

$$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=PQ+(QR+RS)=PQ+QS=PS,$$
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=(PQ+QR)+RS=PR+RS=PS.$$

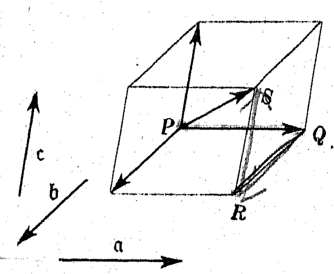
Wynika stąd, że *dodawanie wektorów jest łączne*, tzn. że

$$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}. \tag{3}$$

Wspólną wartość obu stron ostatniej równości oznaczamy przez $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$.

Sumę trzech wektorów nierównoległych do jednej płaszczyzny możemy skonstruować w sposób następujący:

Z punktu P wyprowadzamy wektory, równe odpowiednio wektorom $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c}$, a następnie budujemy równoległościan na tych trzech wektorach jako krawędziach (rys. 3). Przekątna równoległościanu przechodząca przez punkt P, której nadajemy taki zwrot, by punkt ten był jej początkiem, jest równa $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$.



Rys. 3

Definicję sumy wektorów możemy rozciągnąć na dowolną skończoną ilość składników. Gdy dane są wektory $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots,\mathfrak{m}$, to z punktu P prowadzimy wektor $PQ=\mathfrak{a}$, następnie wektor $QR=\mathfrak{b}$ itd., wreszcie wektor $UT=\mathfrak{m}$.

Wektor równy wektorowi PT nazywamy *sumą*

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots+\mathfrak{m}.$$

Z tej definicji wynika, że dla dowolnego układu punktów $P_1,P_2,\ldots,P_n$ jest

$$P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_{n-1}P_n=P_1P_n. \tag{4}$$

Dodawanie dowolnej ilości wektorów jest łączne i przemienne, tzn. że w sumie $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots+\mathfrak{m}$ możemy składniki w dowolny sposób ujmować w nawiasy i zmieniać ich porządek, nie zmieniając przez to ich sumy. Istotnie, w myśl (4) jest

$$P_1P_2+\ldots+P_{i-1}P_i+(P_iP_{i+1}+\ldots+P_{k-1}P_k)+P_kP_{k+1}+\ldots+P_{n-1}P_n=$$
$$=P_1P_2+\ldots+P_{i-1}P_i+P_iP_k+P_kP_{k+1}+\ldots+P_{n-1}P_n=P_1P_n,$$

$$P_1P_2+\ldots+P_{i-1}P_i+P_iP_{i+1}+\ldots+P_{k-1}P_k+P_kP_{k+1}+\ldots+P_{n-1}P_n=$$
$$=P_1P_n.$$

Dowiedliśmy zatem łączności. Z łączności zaś i z przemienności dodawania dla dwóch składników wynika przemienność dodawania dwóch sąsiednich składników sumy (bo możemy je ująć w nawias, zmienić porządek, a następnie opuścić nawias). Ale przez kolejne zamiany dwóch sąsiednich składników możemy przestawić każde dwa, skąd już wynika, że możemy nie zmieniając sumy przestawić dowolną ilość składników. Postępowanie to jest szczegółowo uzasadnione w algebrze (w teorii permutacji).

Oznaczmy przez $-\mathfrak{a}$ wektor mający tę samą długość i kierunek co wektor $\mathfrak{a}$, lecz przeciwny zwrot. Jasne jest, że

$$(-\mathfrak{a})+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+(-\mathfrak{a})=\mathfrak{o}. \tag{5}$$

Dla wektora PQ mamy więc

$$-PQ=QP.$$

Niech teraz $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ będą dowolnymi wektorami. Udowodnimy, że *równanie wektorowe*

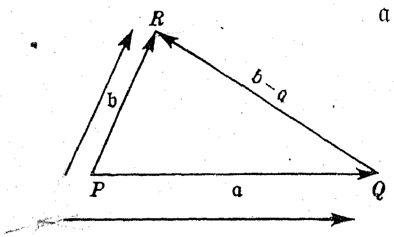
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b} \tag{6}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Istotnie, jeśli równanie (6) zachodzi dla pewnego wektora $\mathfrak{x}$, to dodając po obu stronach $-\mathfrak{a}$, otrzymujemy $-\mathfrak{a}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{x})=$ $=-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ czyli

$$\mathfrak{x}=-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}. \tag{7}$$

Dowiedliśmy więc, że równanie (6) ma co najwyżej jedno rozwiązanie, a mianowicie (7). Ponieważ przez bezpośrednie podstawienie (7) do (6) dostajemy



Rys. 4

$$\mathfrak{a}+(-\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=[\mathfrak{a}+(-\mathfrak{a})]+\mathfrak{b}=\mathfrak{o}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b},$$

więc twierdzenie zostało dowiedzione.

Wektor (7) oznaczamy również znakiem $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ i nazywamy *różnicą wektorów* $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a}$.

Różnica wektorów jest zatem określona przez równość

$$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})=\mathfrak{b}. \tag{8}$$

Jeśli z punktu P poprowadzimy wektory PQ i PR, równe odpowiednio wektorom $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, to $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=QR$ (rys. 4).

3. Mnożenie wektora przez liczbę. Określimy obecnie *mnożenie wektora* $\mathfrak{a}$ *przez liczbę rzeczywistą* m.

Jeśli $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$, to rozróżniamy trzy przypadki:

1° $m>0$; wówczas przez $m\cdot\mathfrak{a}$ oznaczamy wektor równoległy do $\mathfrak{a}$, którego długość jest równa $m\cdot|\mathfrak{a}|$ i który ma ten sam zwrot co $\mathfrak{a}$.

2° $m=0$; wówczas przyjmujemy $0\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$.

3° $m<0$; wówczas określamy $m\cdot\mathfrak{a}$ jako wektor równoległy do $\mathfrak{a}$ o długości $|m|\cdot|\mathfrak{a}|$, lecz o zwrocie przeciwnym do $\mathfrak{a}$; $|m|$ oznacza tu wartość bezwzględną liczby m.

Jeśli zaś $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$, to dla każdego m przyjmujemy $m\cdot\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$.

We wszystkich przypadkach jest zatem

$$|m\cdot\mathfrak{a}|=|m|\cdot|\mathfrak{a}|. \tag{9}$$

Na to, by dwa wektory niezerowe $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *były równoległe, potrzeba i wystarcza, żeby istniała liczba* $m\neq0$, *dla której*

$$\mathfrak{a}=m\cdot\mathfrak{b}. \tag{10}$$

Istotnie, jeśli zachodzi (10), to w myśl określenia mnożenia wektora przez liczbę wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są równoległe. Na odwrót, gdy wektory te są równoległe, to przyjmując $m=|\mathfrak{a}|/|\mathfrak{b}|$, gdy mają one ten sam zwrot, a $m=-|\mathfrak{a}|/|\mathfrak{b}|$, gdy mają zwrot przeciwny, otrzymujemy (10).

Z łatwością dowodzi się następujących twierdzeń, zachodzących dla dowolnych wektorów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ oraz dowolnych liczb m i n:

$$\begin{gathered}1\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a},\quad m\cdot(n\cdot\mathfrak{a})=(mn)\cdot\mathfrak{a},\qquad(-m)\cdot\mathfrak{a}=-m\cdot\mathfrak{a},\\ m\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=m\cdot\mathfrak{a}+m\cdot\mathfrak{b},\qquad(m+n)\cdot\mathfrak{a}=m\cdot\mathfrak{a}+n\cdot\mathfrak{a}.\end{gathered}\tag{11}$$

Ostatnie dwie z równości (11) dają się drogą indukcji uogólnić na dowolną liczbę składników.

§ 2. Kąty i rzuty

1. Oś. Niech będzie dana prosta p i wektor $\mathfrak{a}$ do niej równoległy. Możemy wówczas uporządkować punkty prostej p, uważając punkt P za wcześniejszy od punktu Q, jeśli wektor PQ ma ten sam zwrot co wektor $\mathfrak{a}$. Takie uporządkowanie punktów ma następujące dwie własności:

1° Gdy P jest wcześniejszy od Q, a Q wcześniejszy od R, to P jest wcześniejszy od R;

2° gdy P jest wcześniejszy od Q, to Q nie jest wcześniejszy od P.

Prostą uporządkowaną w powyższy sposób nazywamy *osią, mającą zwrot wektora* $\mathfrak{a}$.

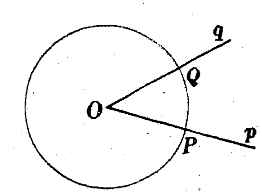
Jeśli wektor $\mathfrak{a}$ zastąpimy przez inny o tym samym kierunku i zwrocie, otrzymamy tę samą oś.

Ponieważ wektory równoległe do prostej mogą mieć tylko dwa przeciwne zwroty, więc z prostej można otrzymać tylko dwie osie (o przeciwnych zwrotach).

Podobnie jak dla wektorów, *osie* powstające z prostych równoległych nazywamy *równoległymi* lub mającymi ten sam *kierunek*.

Kierunek osi jest więc wyznaczony jedynie przez prostą, z której oś powstaje.

2. Kąty niezorientowane. Niech na płaszczyźnie będą dane dwie półproste p i p' o wspólnym początku O. Jak wiadomo z geometrii elementarnej, półproste te dzielą płaszczyznę na dwa obszary, zwane *kątami*.



Rys. 5

Nakreślmy koło o środku O i promieniu 1, przecinające półproste p i q w punktach P i Q (rys. 5).

Kąt jest wyznaczony przez wskazanie punktów P i Q oraz jednego z dwóch łuków na kole.

Miarą łukową kąta nazywa się długość tego łuku.

Jeśli przez φ oznaczymy miarę łukową jednego z dwóch kątów utworzonych przez półproste p i q, to miara drugiego jest równa $2\pi-\varphi$. W każdym więc razie dla miary jednego z dwóch kątów zachodzi nierówność

$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{1}$$

W geometrii elementarnej kąty nazywa się *równymi*, jeśli ich miary są równe, i tam też dowodzi się, że przez przesunięcie i obrót dokoła odpowiednio dobranego punktu płaszczyzny można równe kąty doprowadzić do położenia, w którym ich ramiona się pokrywają.

Niech teraz będą dane dwa wektory wychodzące z punktu O. Wektory te wyznaczają dwie półproste, których początkiem jest punkt O i które zawierają te wektory.

Kątem między wektorami nazywa się ten z dwóch kątów utworzonych przez te półproste, którego miara spełnia nierówność (1). Gdy zmieniamy długości wektorów nie zmieniając przy tym ich zwrotów (czyli gdy mnożymy wektory przez liczby dodatnie), to kąt między wektorami nie ulega zmianie.

Jeśli wektory nie mają wspólnego początku, to z dowolnego punktu O płaszczyzny wyprowadzamy wektory im równe. Kątem między pierwotnymi wektorami nazywamy kąt między wektorami wychodzącymi z punktu O. Kąt ten nie zależy od wyboru punktu O.

Wobec (1) dla kąta między wektorami zawsze zachodzi nierówność

$$\sin\varphi\geqslant 0. \tag{2}$$

Kątem między osiami (lub między wektorem a osią) nazywa się kąt między wektorami mającymi kierunek i zwrot tych osi.

Kąty w ten sposób określone nazywamy *kątami niezorientowanymi*, w przeciwieństwie do kątów zorientowanych (p. str. 9). Ponieważ na ogół będziemy mieli do czynienia z kątami niezorientowanymi, więc będziemy je dla wygody nazywali krótko *kątami*.

Kąt niezorientowany φ między wektorami jest wyznaczony przez podanie wartości $\cos\varphi$, dla każdej bowiem wartości a z przedziału $-1\leqslant a\leqslant 1$ równanie

$$\cos\varphi=a$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające nierówność (1).

3. Kąty zorientowane. Określenie kątów zorientowanych jest możliwe dzięki znanemu z geometrii elementarnej faktowi, że kołu leżącemu w ustalonej płaszczyźnie możemy nadać dwa różne obiegi. Wybierzmy jeden z dwóch obiegów i nazwijmy go dodatnim, drugi zaś — ujemnym. Weźmy pod uwagę jakikolwiek kąt o wierzchołku S w środku koła. Jest on wyznaczony przez wskazanie dwóch punktów P i Q na kole oraz łuku między nimi. Nadając łukowi dwa różne obiegi, otrzymujemy dwa różne *kąty zorientowane.*

W jednym z tych dwóch kątów ramię SP jest pierwszym, a ramię SQ drugim, w drugim zaś kącie — na odwrót.

Niech będzie dany kąt zorientowany, powstały z kąta niezorientowanego o mierze φ przez nadanie obiegu.

Jeśli obieg kąta zorientowanego jest dodatni, przypisujemy mu jako miarę każdą z liczb

$$\varphi+2k\pi,\quad\text{gdzie}\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{3}$$

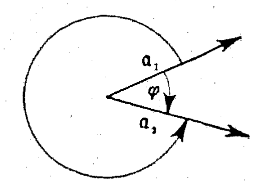
Jeśli zaś obieg kąta zorientowanego jest ujemny, przypisujemy mu jako miarę każdą z liczb

$$-\varphi+2k\pi,\quad\text{gdzie}\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{4}$$

Kąt zorientowany ma więc nieskończenie wiele miar, różniących się o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Niech jedna z miar kąta utworzonego przez wektory $\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_2$, mającego $\mathfrak{a}_1$ jako ramię pierwsze, będzie równa jednej z miar kąta utworzonego przez analogicznie uporządkowane wektory $\mathfrak{a}_1'$ i $\mathfrak{a}_2'$. Przez obrót doprowadźmy do pokrycia się ramion $\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_1'$. Wówczas ramiona $\mathfrak{a}_2$ i $\mathfrak{a}_2'$ również się pokryją.

A zatem, *gdy dwa kąty zorientowane mają tę samą miarę, możemy doprowadzić przez ruch ramiona jednego do pokrycia się z ramionami drugiego.*



Rys. 6

Nie znaczy to jednak, że kąty niezorientowane, z których tamte powstały, są sobie równe. Niech np. wektory nierównoległe $\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_2$ tworzą dwa kąty niezorientowane, z których jeden jest ostry, a drugi wypukły (rys. 6). Kąt niezorientowany ostry niech ma miarę φ. Kąt ten, po nadaniu mu obiegu ujemnego, ma miarę $-\varphi$. Kąt zaś wypukły, po nadaniu mu obiegu dodatniego, ma miarę $2\pi-\varphi$, a więc również jedną z jego miar jest $-\varphi$. Jednakże na podstawie poprzedniego twierdzenia miara kąta wyznacza wzajemne położenie ramion; przez podanie położenia jedneg ramienia i miary kąta zorientowanego jest wyznaczone ramię drugi

Na płaszczyźnie będziemy często wyznaczali kąty zorientowan za pomocą funkcyj trygonometrycznych, zwłaszcza funkcyj *cos nus* i *sinus*.

Żadna z tych funkcyj z osobna nie wyznacza kąta zorientowaneg

Jeśli bowiem

(5) $$\cos\varphi = a,$$

gdzie $a=\cos\varphi_0$ i $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$, to

(6) $$\varphi = \pm\varphi_0 + 2n\pi.$$

Podobnie dla sinusa.

Przez podanie prócz $\cos\varphi$ wartości $\sin\varphi$ kąt φ jest wyznaczon poza wielokrotnością 2π. Wartości $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ *razem* wyznaczaj więc kąty zorientowane.

Oznaczmy przez $\sphericalangle\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ miarę kąta zorientowanego, w któryr pierwszym ramieniem jest $\mathfrak{a}_1$, drugim zaś $\mathfrak{a}_2$. Oznaczenie to jes jednoznaczne, gdyż miara kąta wyznacza wzajemne położenie ra mion i na odwrót. Jeśli z punktu O wyprowadzimy trzy wektor $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ i $\mathfrak{a}_3$, to

(7) $$\sphericalangle\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \sphericalangle\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = \sphericalangle\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3.$$

Należy to rozumieć w ten sposób, że dla każdej z dwóch mia występujących w tym wzorze istnieje miara trzeciego kąta, dl której równość ta zachodzi.

4. Wartość wektora na osi. Niech będzie dana oś x i wekto $\mathfrak{a}$, na niej leżący. Wartością wektora $\mathfrak{a}$ na osi x nazywamy liczb $|\mathfrak{a}|$, gdy $\mathfrak{a}$ i x mają ten sam zwrot, liczbę zaś $-|\mathfrak{a}|$, gdy ich zwrot są przeciwne.

Gdy $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$, określamy wartość wektora $\mathfrak{a}$ na osi x jako równ liczbie 0.

Wartość wektora $\mathfrak{a}$ na osi x będziemy oznaczali przez $w_x(\mathfrak{a})$ albo krócej przez $w(\mathfrak{a})$, gdy nie ma wątpliwości, jaką osią się posłu gujemy.

Dla każdej liczby rzeczywistej m jest

(8) $$w(m\cdot\mathfrak{a}) = m\cdot w(\mathfrak{a}).$$

Równość ta wynika wprost z definicji wartości wektora.

Wartość sumy dwóch wektorów leżących na osi x jest równa sumie ich wartości:

(9) $$w_x(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = w_x(\mathfrak{a}) + w_x(\mathfrak{b}).$$

Jeśli oba wektory są zerowe, twierdzenie jest oczywiste. W przeciwnym razie niech np. $\mathfrak{b}\neq 0$. Z równoległości wektorów wynika istnienie liczby m, dla której $\mathfrak{b}=m\cdot\mathfrak{a}$, a więc

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + m\cdot\mathfrak{a} = (1+m)\cdot\mathfrak{a}.$$

Wobec (8) dostajemy stąd

$$w(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = w[(1+m)\cdot\mathfrak{a}] =$$
$$= (1+m)\cdot w(\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{a}) + m\cdot w(\mathfrak{a}) =$$
$$= w(\mathfrak{a}) + w(m\cdot\mathfrak{a}) = w(\mathfrak{a}) + w(\mathfrak{b}).$$

Znaczenie równości (9) dla budowy geometrii analitycznej zostało po raz pierwszy uwypuklone przez Chasles'a (czyta się: Szala), dlatego też w literaturze matematycznej nosi ona nazwę *twierdzenia Chasles'a*. Uogólnia się ono oczywiście na dowolną ilość składników:

(10) $$w_x(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots+\mathfrak{i}) = w_x(\mathfrak{a}) + w_x(\mathfrak{b}) + \ldots + w_x(\mathfrak{i}).$$

5. Rzut na prostą w przestrzeni. Wprowadzimy obecnie pojęcie rzutu równoległego do płaszczyzny. Niech dana będzie w przestrzeni dowolna płaszczyzna Π i nierównoległa do niej oś x. Przez jakikolwiek punkt P prowadzimy płaszczyznę równoległą do Π, którą oś x przebija w punkcie P_x (rys. 7).

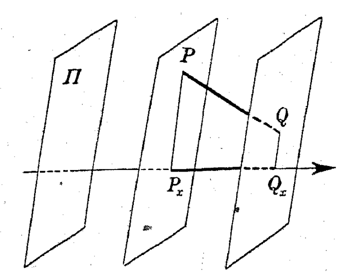
Punkt P_x nazywamy *rzutem punktu P na oś x, równoległym do Π*.

W przypadku, gdy płaszczyzna Π jest prostopadła do osi x, rzut ten nazywamy krótko *rzutem prostopadłym*.

Rzutem wektora PQ na oś x nazywa się wektor o początku P_x i końcu Q_x.

Rzut ten zatem składa się z rzutów punktów wektora PQ.

Rzut wektora $\mathfrak{a}$ na oś x oznaczać będziemy przez $\mathfrak{a}_x$.



Rys. 7

Jeśli dane są dwa wektory

$$\mathfrak{a} = PQ \quad \text{i} \quad \mathfrak{b} = QR,$$

to

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = PR.$$

Przechodząc do rzutów na oś x, otrzymujemy

$$\mathfrak{a}_x = P_x Q_x, \qquad \mathfrak{b}_x = Q_x R_x, \qquad \mathfrak{c}_x = P_x R_x.$$

Ponieważ w myśl określenia sumy dwóch wektorów jest

$$P_x Q_x + Q_x R_x = P_x R_x,$$

więc $\mathfrak{c}_x = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{b}_x$ czyli

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_x = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{b}_x. \tag{11}$$

Udowodniliśmy, że *rzut sumy dwóch wektorów jest równy sumie ich rzutów.*

Twierdzenie to jest oczywiście słuszne dla dowolnej skończonej ilości składników.

Łatwo dowodzi się również, że

$$(m \cdot \mathfrak{a})_x = m \cdot \mathfrak{a}_x; \tag{12}$$

w szczególności więc

$$(-\mathfrak{a})_x = -\mathfrak{a}_x.$$

Stąd i z (11) wynika, że

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})_x = \mathfrak{a}_x - \mathfrak{b}_x.$$

Z równości (11) i twierdzenia Chasles'a wynika, że

$$w[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_x] = w(\mathfrak{a}_x) + w(\mathfrak{b}_x), \tag{13}$$

czyli że *wartość rzutu sumy jest równa sumie wartości rzutów.*

Podobnie

$$w[(m\cdot\mathfrak{a})_x] = m \cdot w(\mathfrak{a}_x). \tag{14}$$

Twierdzenia (13) i (14) odegrają w dalszym ciągu specjalnie ważną rolę, gdyż wektory w przestrzeni będziemy wyznaczali za pomocą ich rzutów na odpowiednie osie. Najczęściej będziemy się posługiwali rzutem prostopadłym. Dlatego podamy obecnie wzory, służące do obliczania wartości rzutu prostopadłego.

Oznaczmy przez φ kąt, jaki tworzy wektor $\mathfrak{a}$ z osią x.

Udowodnimy, że *dla rzutu prostopadłego* jest zawsze

$$w(\mathfrak{a}_x) = |\mathfrak{a}| \cos\varphi. \tag{15}$$

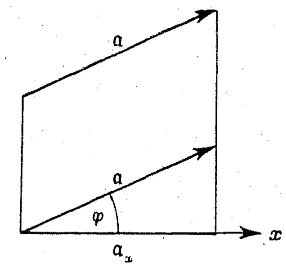
W dowodzie skorzystamy z tego, że równe wektory mają równe rzuty. Rozważymy trzy przypadki:

1° $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Wówczas $\mathfrak{a}_x$ ma zwrot zgodny z osią x (rys. 8). Prowadzimy wektor równy wektorowi $\mathfrak{a}$, o początku na osi x. Z trójkąta prostokątnego mamy

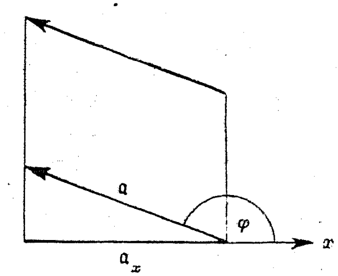
$$w(\mathfrak{a}_x) = |\mathfrak{a}_x| = |\mathfrak{a}| \cos\varphi.$$

2° $\varphi = \pi/2$. Wówczas

$$w(\mathfrak{a}_x) = 0 = |\mathfrak{a}| \cos \pi/2.$$



Rys. 8



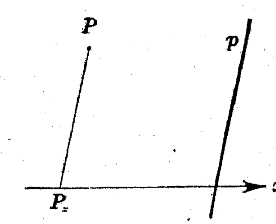
Rys. 9

3° $\pi/2 < \varphi \leqslant \pi$. Wówczas zwrot wektora $\mathfrak{a}_x$ jest przeciwny zwrotowi osi x (rys. 9), a więc

$$w(\mathfrak{a}_x) = -|\mathfrak{a}_x| = -|\mathfrak{a}| \cos(\pi-\varphi) = |\mathfrak{a}| \cos\varphi.$$

6. Rzut na prostą w płaszczyźnie. Obecnie ograniczymy się do jednej płaszczyzny i określimy *rzut na oś x, równoległy do prostej p.*

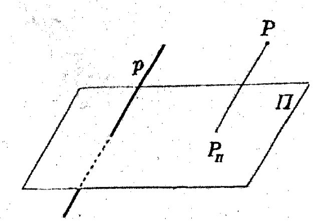
Rzutem punktu P na oś x (który nadal oznaczać będziemy przez P_x) nazywamy punkt przecięcia z osią x prostej równoległej do p i przechodzącej przez P (rys. 10). Równości (11)-(15) zachodzą również dla rzutów na prostą w płaszczyźnie.



Rys. 10

7. Rzut na płaszczyznę. Określimy jeszcze *rzut na płaszczyznę, równoległy do prostej.*

Niech będzie dana płaszczyzna Π i prosta p nierównoległa do Π. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą równoległą do p (rys. 11) i przebijającą Π w punkcie P_Π.



Rys. 11

Punkt P_Π nazywamy *rzutem punktu P na płaszczyznę Π, równoległym do prostej p.*

W przypadku, gdy prosta p jest prostopadła do Π, mówimy krótko o *rzucie prostopadłym*.

Podobnie jak dla rzutu na oś, *rzutem wektora* $\mathfrak{a}$ o początku P i końcu Q *na płaszczyznę* Π nazywamy wektor

$$\mathfrak{a}_\Pi = P_\Pi Q_\Pi.$$

Zachodzą równości:

$$(16)\qquad \begin{gathered} (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_\Pi = \mathfrak{a}_\Pi + \mathfrak{b}_\Pi, \qquad (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})_\Pi = \mathfrak{a}_\Pi - \mathfrak{b}_\Pi, \\ (m\cdot\mathfrak{a})_\Pi = m\cdot\mathfrak{a}_\Pi. \end{gathered}$$

Dowód np. pierwszej z nich prowadzimy tak samo jak dowód równości (11), zamieniając jedynie wskaźnik x na wskaźnik Π.

W stereometrii elementarnej *kątem między prostą a płaszczyzną* nazywa się najmniejszy z kątów, jakie ta prosta tworzy z prostymi leżącymi na płaszczyźnie. Tam też dowodzi się, że kąt ten jest równy kątowi między prostą a jej rzutem prostopadłym na płaszczyznę.

Kątem między wektorem a płaszczyzną nazywamy kąt φ, jaki tworzy z płaszczyzną prosta, na której leży wektor. Kąt ten spełnia nierówność

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Łatwo dowieść, że *dla rzutu prostopadłego jest zawsze*

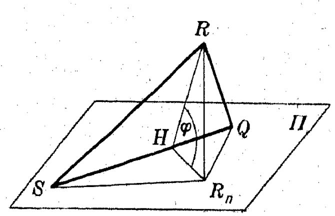
$$(17)\qquad |\mathfrak{a}_\Pi| = |\mathfrak{a}|\cos\varphi.$$

Udowodnimy obecnie twierdzenie następujące:

Jeśli na płaszczyźnie Π' leży wielobok o polu a', płaszczyzna Π tworzy z Π' kąt dwuścienny φ i a jest polem rzutu prostopadłego tego wieloboku na płaszczyznę Π, to

$$(18)\qquad a = a'\cos\varphi.$$

Rozróżnimy kilka przypadków:



Rys. 12

1^0 Wielobok na płaszczyźnie Π' jest trójkątem o jednym boku równoległym do Π. Ponieważ rzuty na płaszczyzny równoległe są przystające, więc możemy założyć, że jeden z boków, np. SQ, leży na płaszczyźnie Π. Wówczas wysokości poprowadzone z punktów R i R_Π do boku SQ (rys. 12) przecinają się

w jednym punkcie H i tworzą kąt φ. Ponieważ wysokość HR_Π jest rzutem wysokości HR, więc

$$(19)\qquad |HR_\Pi| = |HR|\cos\varphi.$$

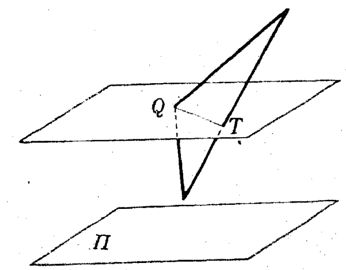
Oznaczając przez a i a' pola trójkątów SQR_Π i SQR, mamy

$$(20)\qquad a = {}^1/_2|SQ|\cdot|HR_\Pi|, \qquad a' = {}^1/_2|SQ|\cdot|HR|.$$

Wobec (19) dostajemy dla tego przypadku wzór (18).

2^0 Żaden z boków trójkąta nie jest równoległy do płaszczyzny Π. Oznaczmy przez Q ten z trzech wierzchołków (rys. 13), który nie jest ani najbardziej oddalony, ani najbliższy do Π. Wówczas płaszczyzna równoległa do Π i przechodząca przez Q przecina trójkąt wzdłuż cięciwy QT równoległej do Π. Cięciwa ta dzieli trójkąt na dwa trójkąty i każdy z nich spełnia założenie przypadku 1^0, dla którego twierdzenie zostało już udowodnione. Mamy więc dla powstałych trójkątów

$$a_1 = a_1'\cos\varphi, \qquad a_2 = a_2'\cos\varphi,$$



Rys. 13

a stąd

$$a = a_1 + a_2 = (a_1' + a_2')\cos\varphi = a'\cos\varphi.$$

W ten sposób dowód jest zakończony dla dowolnych trójkątów.

3^0 Niech teraz będzie dany na płaszczyźnie Π' wielobok dowolny. Daje się on podzielić odcinkami na skończoną ilość trójkątów o polach $a_1', a_2', a_3', \ldots, a_n'$. Stosując do każdego z nich wzór (18), otrzymujemy

$$a_j = a_j'\cos\varphi \qquad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n;$$

dodając otrzymane równości, dostajemy

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1' + a_2' + \ldots + a_n')\cos\varphi = a'\cos\varphi,$$

co było do okazania.

Z prawdziwości wzoru (18) dla dowolnych wieloboków płaskich wynika jego prawdziwość dla dowolnych obszarów płaskich ograniczonych. Obszary takie można bowiem aproksymować z dowolną dokładnością przez wieloboki, a następnie do wieloboków zastosować wzór (18) i przejść do granicy. Postępowanie to jest uzasadnione w analizie; wymaga ono ścisłej definicji pola obszaru ograniczonego krzywą, która nie jest linią łamaną, a definicję tę formułuje się zwykle za pomocą rachunku całkowego.

§ 3. Iloczyn skalarowy

Niech dane będą dwa wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$. Określimy pewną liczbę zwaną ich *iloczynem skalarowym*, którą będziemy oznaczali przez $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Jeśli mianowicie jeden z wektorów jest wektorem zerowym np. $\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$, to przyjmujemy, że

$$\mathfrak{a}\mathfrak{o}=0\,. \tag{1}$$

Jeśli zaś żaden z wektorów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nie jest zerowy i tworzą one kąt φ, to przyjmujemy, że

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|\cdot\cos\varphi. \tag{2}$$

Np. dla dwóch wektorów o długościach 1 i 2, tworzących kąt 60^0, jest $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=1$.

Iloczyn $\mathfrak{a}\mathfrak{a}$ oznaczamy przez $\mathfrak{a}^2$.

Zatem

$$\mathfrak{a}^2=|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{a}|\cdot\cos 0=|\mathfrak{a}|^2.$$

Na to, by dwa wektory niezerowe były równoległe i miały ten sam zwrot, potrzeba i wystarcza, żeby

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|\,;$$

na to zaś, by były one równoległe i miały zwroty przeciwne, potrzeba i wystarcza, żeby

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=-|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|\,.$$

Gdy $\mathfrak{a}\mathfrak{b}>0$, oba wektory są niezerowe i tworzą kąt ostry, gdy zaś $\mathfrak{a}\mathfrak{b}<0$, są one niezerowe i tworzą kąt rozwarty.

Na to, by dwa wektory niezerowe były prostopadłe, potrzeba i wystarcza, żeby ich iloczyn skalarowy był równy 0.

Wynika to wprost z określenia (2).

Iloczyn skalarowy jest przemienny, tj. nie zależy od porządku czynników:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}. \tag{3}$$

Gdy wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nie są zerowe, każdy z nich wyznacza pewną oś. Oznaczmy przez x oś wyznaczoną przez $\mathfrak{a}$, a przez y — oś wyznaczoną przez $\mathfrak{b}$. Rzuty prostopadłe $\mathfrak{a}_y$ i $\mathfrak{b}_x$ wektorów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ na osie y i x mają wartości na tych osiach (p. § 2 wzór (15), str. 12)

$$w_y(\mathfrak{a}_y)=|\mathfrak{a}|\cos\varphi,\qquad w_x(\mathfrak{b}_x)=|\mathfrak{b}|\cos\varphi.$$

Wobec (2) otrzymujemy stąd

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=|\mathfrak{a}|w_x(\mathfrak{b}_x) \tag{4}$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=|\mathfrak{b}|w_y(\mathfrak{a}_y). \tag{5}$$

Równość (4) zachodzi także wtedy, gdy $\mathfrak{a}$ nie jest, $\mathfrak{b}$ zaś jest wektorem zerowym. Widzimy więc, że iloczyn skalarowy dwóch wektorów niezerowych jest równy długości jednego wektora, pomnożonej przez wartość rzutu drugiego wektora na oś wyznaczoną przez wektor pierwszy.

Udowodnimy obecnie, że *dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych m i n oraz wektorów* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *zachodzi wzór*

$$(m\cdot\mathfrak{a})(n\cdot\mathfrak{b})=(mn)(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{6}$$

Gdy $\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$, twierdzenie jest oczywiste. Gdy $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$, rozróżniamy trzy przypadki:

1^0 $n=0$. Wówczas równość (6) zachodzi, bo obie strony są równe 0.

2^0 $n>0$. Wówczas wektory $\mathfrak{b}$ i $n\cdot\mathfrak{b}$ wyznaczają tę samą oś, a zatem

$$(m\cdot\mathfrak{a})\,(n\cdot\mathfrak{b})=w_y[(m\cdot\mathfrak{a})_y]\cdot|n\cdot\mathfrak{b}|=$$
$$=mw_y(\mathfrak{a}_y)\cdot n|\mathfrak{b}|=(mn)\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

3^0 $n<0$. Wówczas osie wyznaczone przez wektory $\mathfrak{b}$ i $n\cdot\mathfrak{b}$ mają zwroty przeciwne, a więc

$$(m\cdot\mathfrak{a})\,(n\cdot\mathfrak{b})=-w_y[(m\cdot\mathfrak{a})_y]\,|n\cdot\mathfrak{b}|=$$
$$=-m\,w_y(\mathfrak{a}_y)\cdot(-n)\,|\mathfrak{b}|=(mn)\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Udowodnimy jeszcze *prawo rozdzielności dodawania wektorowego względem mnożenia skalarowego*:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,. \tag{7}$$

Jeśli $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$, to obie strony są równe 0, a więc równość (7) zachodzi. Jeśli zaś $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$, to oznaczając przez x oś wyznaczoną przez $\mathfrak{a}$, mamy

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=|\mathfrak{a}|\cdot w_x[(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})_x]=$$
$$=|\mathfrak{a}|\cdot[w_x(\mathfrak{b}_x)+w_x(\mathfrak{c}_x)]=$$
$$=|\mathfrak{a}|\cdot w_x(\mathfrak{b}_x)+|\mathfrak{a}|\cdot w_x(\mathfrak{c}_x)=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c},$$

gdzie pierwszy i ostatni znak równości opiera się na definicji iloczynu skalarowego i wzorze dla rzutu prostopadłego (§ 2, wzór (15), str. 12), drugi — na równości (5), trzeci — na wzorze (13) z § 2, str. 12, a czwarty — na prawie rozdzielności dodawania względem mnożenia dla liczb rzeczywistych.

Prawo łączności dla mnożenia skalarowego nie zachodzi. Iloczyn $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ bowiem jest wektorem $\mathfrak{a}$, pomnożonym przez liczbę $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, a zatem jest na ogół wektorem równoległym do $\mathfrak{a}$ (mianowicie dla $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$ i $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\neq 0$). Natomiast iloczyn $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$ jest wektorem $\mathfrak{c}$, pomnożonym przez liczbę $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, a zatem jest na ogół nierównoległy do $\mathfrak{a}$. Wtedy więc

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\neq(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}.$$

Z udowodnionych własności (3), (6) i (7) wynika, że iloczynem skalarowym można rachować podobnie jak wielomianami pierwszego stopnia. Np.

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{a}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{b}=$$
$$=\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}^2=\mathfrak{a}^2+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}^2;$$

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{a}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{b}=$$
$$=\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}-\mathfrak{b}^2=\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2.$$

Równości

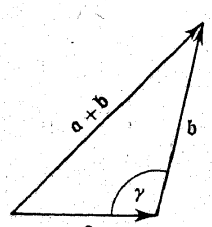
(8) $$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2=\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

możemy nadać inną postać. Niech

$$|\mathfrak{a}|=a,\qquad |\mathfrak{b}|=b,\qquad |\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|=c,$$

i niech φ będzie wartością kąta między $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$. Wówczas a, b i c są długościami trzech boków trójkąta, w którym naprzeciw boku o długości c leży kąt $\gamma=\pi-\varphi$ (rys. 14). Z (8) wynika, że

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos\varphi=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$



Rys. 14

Udowodniliśmy w ten sposób prostym rachunkiem algebraicznym *twierdzenie cosinusowe* dla trójkąta.

Podobnie, z równości

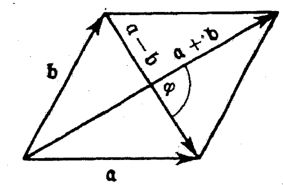
(9) $$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2$$

wnosimy, że jeśli d_1 i d_2 są długościami przekątnych równoległoboku, φ — kątem między nimi zawartym, b — długością boku przeciwległego do φ i a — długością pozostałego boku (rys. 15), to

$$d_1d_2\cos\varphi=a^2-b^2.$$

Z równości tej wynika, że na to, by równoległobok był rombem, potrzeba i wystarcza, żeby jego przekątne były prostopadłe.

Tak dzięki pojęciu iloczynu skalarowego dowody wielu twierdzeń, które wymagają bądź specjalnych konstrukcji, bądź dłuższych obliczeń, sprowadzają się do prostych rozumowań algebraicznych.



Rys. 15

Dla przykładu podamy jeszcze dowód twierdzenia, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

W tym celu oznaczmy przez S punkt przecięcia wysokości wychodzących z A i B (rys. 16). Ponieważ wektor SA jest prostopadły do wektora BC, a wektor SB do wektora AC, więc zachodzą równości

$$SA\cdot BC=0,\qquad SB\cdot AC=0$$

czyli

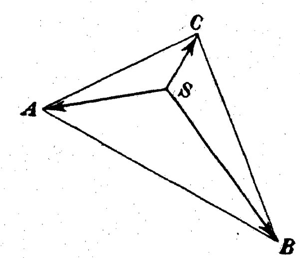
$$SA\cdot(BS+SC)=0,\qquad SB\cdot(AS+SC)=0;$$

odejmując je stronami, dostajemy wobec $SA\cdot BS=SB\cdot AS$

$$SA\cdot SC-SB\cdot SC=0$$

czyli

$$SC\cdot BA=0.$$



Rys. 16

Z ostatniej równości wynika prostopadłość wektorów SC i AB, c. b. d. o.

Uwaga. W określeniach tego rozdziału podstawową rolę gra pojęcie długości wektora. Zakładamy zatem, że dany jest odcinek jednostkowy o długości j, a długość każdego odcinka jest równa stosunkowi jego długości do j. Jeśli zmieniamy j, to zmienia się wartość długości i iloczynów skalarowych. Jeśli j zwiększamy k razy, to długość każdego odcinka zmniejsza się k razy, a iloczyn skalarowy k^2 razy.

———