

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXV

WŁADYSŁAW NIKLIBORC

RÓWNANIA
RÓŻNICZKOWE

CZEŚĆ I

DO DRUKU OPRACOWAŁ

ZYGMUNT CHARZYŃSKI

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

W A R S Z A W A — W R O C Ł A W 1951

02333

COPYRIGHT 1951, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
 WARSZAWA (POLAND) WROCLAW
 ŚNIADECKICH 8 ŚWIERCZEWSKIEGO 19

ALL RIGHTS RESERVED

NO PART OF THIS BOOK MAY BE TRANSLATED OR
 REPRODUCED IN ANY FORM, BY MIMEOGRAPH
 OR ANY OTHER MEANS, WITHOUT PERMISSION IN
 WRITING FROM THE PUBLISHERS.



PRINTED IN POLAND

6.11.51
 Docu ks

Rękopis otrzymano 5. X. 1950 r. Nakład 3.000 egz.
 Stron IV + 176. Druk ukończono w sierpniu 1951 r. Papier druk. mat. 70 g 70 × 100 cm.
 ZAM. 700/50 — Drukarnia Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego we Wrocławiu — F-1-59058.

PRZEDMOWA

Książka niniejsza jest opracowaniem niedokończonego rękopisu Teorii Równań Różniczkowych, pozostałego po śp. profesorze Władysławie Nikliborcu, zmarłym w kwiecie swej twórczości 1 marca 1948 roku w Warszawie.

Dzieło to było zakrojone na wielką skalę; śmierć autora przerwała jego pisanie. Pozostał jedynie fragment początkowy, zawierający sporo materiału przygotowawczego do dalszych rozdziałów, a stosunkowo mało właściwej teorii równań różniczkowych.

Chcąc uzyskać pewną całość, skróciłem bądź opuściłem znaczną część materiału przygotowawczego i dołączyłem parę uzupełnień, a mianowicie: równanie o zmiennych rozdzielonych II, istnienie rozwiązania górnego i dolnego, postać ogólną rozwiązań równania Clairauta i wreszcie, wspólnie z profesorem Tadeuszem Ważewskim, istnienie rozwiązań integralnych równania normalnego pierwszego rzędu.

Książka utrzymana jest w stylu matematyki klasycznej; prostota wyśłowień i obfitość przykładów czynią ją przydatną dydaktycznie. Do rozumienia jej wystarcza znajomość analizy elementarnej.

Treść jest skromna: obejmuje tylko równanie zwyczajne pierwszego rzędu o jednej funkcji niewiadomej. Celowo zostały opuszczone rozważania dotyczące zależności rozwiązań od wartości początkowych i od parametrów. Rozważania te właściwiej jest ujmować ogólnie, od razu dla układów równań różniczkowych.

Wdzięczny jestem Komitetowi Redakcyjnemu „Monografii Matematycznych” za powierzenie mi opracowania tej książki. Dało mi to możliwość uczcić włożoną w nią pracą drogą mi pamięć Władysława Nikliborca, wybitnego matematyka polskiego, a mego znakomitego Nauczyciela.

Dziękuję za cenną pomoc przy opracowaniu książki Marcelemu Starkowi, który udzielił mi wielu rad i wskazówek oraz Julianowi Panzowi, za redakcję techniczną. Dziękuję także Włodzimierzowi Krysiemu i Janowi Słowikowskiemu za ich udział w przygotowaniu rękopisu i poprawianiu korekt.

Łódź, 6 lipca 1951 r.

Zygmunt Charzyński

Wstawiając otrzymane rozwiązanie do nierówności (22) uzyskujemy z kolei warunki zmienności p w zależności od wyboru stałej dowolnej C

$$p \neq 0, \quad \frac{p}{\ln^2 Cp} - \frac{2p}{\ln^2 Cp} \neq 0, \quad Cp \neq 1$$

czyli

$$0 < p < \frac{1}{C} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{C} < p < \frac{e^2}{C} \quad \text{lub} \quad \frac{e^2}{C} < p < \infty \quad \text{przy} \quad C > 0,$$

$$\frac{1}{C} < p < 0 \quad \text{lub} \quad \frac{e^2}{C} < p < \frac{1}{C} \quad \text{lub} \quad -\infty < p < \frac{e^2}{C} \quad \text{przy} \quad C < 0.$$

ZADANIA. 72. Scałkować za pomocą transformacji Legendre'a następujące równania różniczkowe:

$$(y - px)p = cy, \quad (y - px)^2 + 2p(y - px) + px = 0, \quad (y - px)e^p + x = 0.$$

73. Zastosować przekształcenie Legendre'a do równania d'Alemberta i opierając się na uzyskanym wyniku podać nową metodę jego całkowania.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę.

Arzeli twierdzenie 50.

Bernoulliego równanie 121.

Boole'a równanie 133.

Brzeg (ograniczenie) zbioru 15.

Brzegowy (graniczny) punkt zbioru 14.

Całka równania różniczkowego 88, 152.

Całkowanie równania różniczkowego 91.

Całkowe luki 20, równanie 39, -y element 33, 147.

Cauchy'ego twierdzenie 38, 45, - warunek 24, 25, 85, - zagadnienie 24.

Cauchy-Peano twierdzenie 52, 58, 63.

Charakterystyczne równanie 126.

Ciąg ograniczony 14, - zbieżny 14, -u granica 14.

Clairauta równanie 155.

Część rozwiązania 87.

Czynnik całkujący 136, -a całkującego równanie 137.

D'Alemberta równanie 161.

Dolne rozwiązanie 69.

Dziedzina (obszar zamknięty) 16, - spójna 16.

Efektywne rozwiązywanie równania różniczkowego 91.

Element całkowy 33, 147, - nieregularny 148, - osobliwy 148, - przynależny do rozwiązania 149, - regularny 148.

Element liniowy 147.

Eulera równanie 103.

Funkcja jednorodna 112, - pierwotna równania zupełnego 92, -e równocześnie 49, -e wspólnie ograniczone 48, -i klasa 18.

Granica ciągu 14.

Graniczny (brzegowy) punkt zbioru 14.

Górne rozwiązanie 69.

Hiperplaszczyna 17.

Hipersfery wnętrza 17.

Integralne rozwiązanie 64.

Integralnie identyczne rozwiązanie 73, - różne rozwiązania 73.

Izoklina 33.

Jacobiego równanie 125.

Jednostny zbiór 17.

Jednorodna funkcja 112, -e równanie różniczkowe 109.

Jednostronna identyczność rozwiązania 73.

Jednoznaczność rozwiązania 73, 87, 150, -i kryterium 76.

Kierunkowe pole 33.

Klasa funkcji 18.

Kontinuum 16.

Końce łuku 15.

Krotny podkład elementów całkowych 150.

Kryterium jednoznaczności 76, - Kamkego 75, - Nagumo 74, - Osgoda 76.

Krzywa regularna klasy C^m 18, - zamknięta 15.

Legendre'a transformacja 168.

Liapunowa twierdzenie 121.

Liniowe równanie różniczkowe 115, - jednorodne równanie różniczkowe 116, -y element 147.

Lipschitza stała 36, - warunek 36.

Lokalnie identyczne rozwiązania 73, - różne rozwiązania 73.

Lamana uogólniona 52, - zwyczajna 52.

Łącuch epsilonowy (s-łańcuch) 16.

Łuk pojedynczy 17, - regularny 18, - zwykły 15, -i całkowe 20, -u końce 15, -u równania parametryczne 15.

Majoranta zbieżna 42.

Metoda kolejnych przybliżeń 38, - za-

miany zmiennych 106, — uzmiennienia stałych 116.

Nagumo kryterium 74.
Nieograniczony zbiór 14.
Nieregularny element całkowy 148.
Normalna postać równania różniczkowego 21, — postać układu równań różniczkowych 12, -y obszar 68.

Obszar 16, — normalny 68, — zamknięty (dziedzina) 16.
Odległość punktów 13, 17, — zbiorów 14.
Ograniczenie (brzeg) zbioru 15.
Ograniczony ciąg 14, — zbiór 14.
Ogólne rozwiązanie 90.
Osgooda kryterium 76.
Osiągalny punkt 68.
Osobliwe punkty 86, — rozwiązanie 150, -y element całkowy 148.
Otoczenie punktu 14, 17.
Otwarty zbiór 15.

Parametr 15, -y równania różniczkowego 4.
Parametryczne równania łuku 15.
Pjaffa związek 148.
Pierwotna funkcja równania zupełnego 92.
Początkowy warunek 24, 25, 85.
Podkład elementu całkowego 33, — elementu liniowego 147, — krotny elementów całkowych 150, — wstęgi elementów liniowych 148.
Pojedynczy łuk 17.
Pole kierunkowe 33.
Postać normalna równania różniczkowego 21, — normalna układu równań różniczkowych 12, — uwikłana równania różniczkowego 147.
Przedstawienie zwyczajne (wyraźne) łuku 18.
Przedział 15.
Przekształcenie punktowe 164, — stycznościowe 164, 166.
Punkt graniczny (brzegowy) 14, — osiągalny 68, — rozgałęzienia 73, — skupienia 14, — wewnętrzny 14, — zewnętrzny 14, — ów odległość 13, 17, -u otoczenie 14, 17, -y osobliwe 86.

Rachunek granic 80.
Regularna krzywa klasy C^m 18, -y element całkowy 148, -y łuk klasy C^m 18.
Rozłączne zbiory 16.
Rozwiązania równania różniczkowego identyczne 73, — jednoznaczność 73, 87, 150, — różne 73.
Rozwiązanie równania różniczkowego dolne 69, — górne 69, — integralne 64, — ogólne 90, — osobliwe 150, — regularne 150, — szczególne 19, 85, 149, — wyraźne 86.

Rozwiązanie układu równań różniczkowych 19.

Równanie całkowe 39, — charakterystyczne 126, — czynnika całkującego 137, — o pochodnych cząstkowych 89, — struny drgającej 6, -a parametryczne łuku 15, -a różniczkowego parametry 4, -a różniczkowego rzęd 4, -a różniczkowego współczynnik 115, -a różniczkowego wyraz wolny 115, -a zupełnego funkcja pierwotna 92.

Równanie różniczkowe 1, — d'Alemberta 161, — Bernoulliego 121, — Boole'a 133, — Clairauta 155, — Eulera 103, — Jacobiego 125, — jednorodne 109, — liniowe 115, — liniowe jednorodne 116, — o pochodnych cząstkowych 5, — o rozdzielonych zmiennych 96, 98, — pierwszego rzędu i drugiego stopnia 150, — Riccatiego ogólne 127, — Riccatiego specjalne 128, — zależne od parametrów 4, — zwyczajne 4, — zupełne 92.

Równościowe funkcje 49.
Rząd równania różniczkowego 4, — układu równań różniczkowych 11.

Spójna dziedzina 16, -y zbiór 16.
Stala Lipschitza 36.
Stycznościowe przekształcenie 164, 166.
Szczególne rozwiązanie 19, 85, 149.

Trajektoria 30.
Transformacja Legendre'a 168.
Twierdzenie Arzeli 50, — Cauchy'ego 38, 45, — Cauchy-Peano 52, 58, 63, — Liapunowa 121.

Układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych 11, — o postaci normalnej 12, — zwyczajnych 11.
Uwikłana postać równania różniczkowego 147.
Uogólniona łamana 52.

Warunek Lipschitza 36, — początkowy (Cauchy'ego) 24, 25, 85.
Wewnętrzny punkt 14.
Wnętrze hipersfery 17.
Wspólnie ograniczone funkcje 48.
Współczynnik równania różniczkowego 115.
Wstęga elementów liniowych 148.
Wyraz wolny równania 115.
Wyraźne (zwyczajne) przedstawienie łuku 18, — rozwiązanie 86.

Zagadnienie (zadanie) Cauchy'ego 24.
Zamknięta krzywa 15, -y obszar (dziedzina) 16.
Zewnętrzny punkt 14.

Zbiór jednolity 42, -y ciąg 14.
Zbiór jednolity 17, — nieograniczony 14, — ograniczony 14, — otwarty 15, — spójny 16, — zamknięty 14, — ów odległość 14, -u brzeg (ograniczenie) 15, -u punkt graniczny (brzegowy) 14, -u punkt skupienia 14, -u punkt we-

wewnętrzny 14, -u punkt zewnętrzny 14, -y rozłączne 16.
Zupełne równanie 92.
Związek Pfaffa 148.
Zwyczajna łamana 52, -e (wyraźne) przedstawienie łuku 18, -e równanie 4.
Zwycię łuk 15.

SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby oznaczają stronicę.

Arzelà 50.	Legendre 163, 168. Liapunow 121. Lindelöf 80. Liouville 136. Lipschitz 36, 37, 51.
Bernoulli 119, 121. Boole 133.	
Cauchy 11, 24, 25, 34, 38, 45, 51, 58, 63, 80, 85. Clairaut 155.	Nagumo 74.
D'Alembert 161.	Osgood 76.
Euler 102, 103.	Peano 51, 52, 58, 63. Pfaff 148. Picard 38.
Frenet 8.	Riccati 127, 128. Riemann 11.
Goursat 83, 103, 144.	
Hort 2.	Saks 11, 16. Stieglów 124.
Jacobi 124, 125.	Zawidzki 96. Zygmund 11, 16.
Kamke 35, 75, 76.	

SPIS RZECZY

PRZEDMOWA	Str. III
ROZDZIAŁ I. WIADOMOŚCI WSTĘPNE O RÓWNANIACH RÓZNICZKOWYCH.	
§ 1. Przykłady i klasyfikacja równań różniczkowych	1
§ 2. Układy równań różniczkowych	7
§ 3. Zbiory punktów, łuki, obszary na płaszczyźnie i w przestrzeni n -wymiarowej	13
§ 4. Ogólne uwagi o równaniach różniczkowych zwyczajnych	18
§ 5. Tworzenie równania $y' = f(x, y)$ i zagadnienie trajektorii	27
§ 6. Interpretacja geometryczna równania $y' = f(x, y)$ oraz przybliżona metoda graficzna jego całkowania	32
ROZDZIAŁ II. TWIERDZENIE CAUCHY'EGO O ISTNIENIU ROZWIĄZANIA RÓWNANIA $y' = f(x, y)$.	
§ 7. Dowód istnienia rozwiązania metodą kolejnych przybliżeń	36
§ 8. Funkcje równościągłe. Twierdzenie Arzeli	48
§ 9. Dowód istnienia rozwiązania metodą linii łamanych. Twierdzenie Cauchy-Peano	51
§ 10. Integralne rozwiązanie zadania Cauchy'ego	58
§ 11. Pęk rozwiązań równania $y' = f(x, y)$, przechodzących przez jeden punkt	66
§ 12. Zagadnienie jednoznaczności rozwiązania równania $y' = f(x, y)$	72
§ 13. Przybliżona metoda rachunkowa całkowania równania $y' = f(x, y)$ oparta na metodzie linii łamanych	77
§ 14. Metoda granic Cauchy'ego	79
§ 15. Równanie postaci $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$	85
ROZDZIAŁ III. EFEKTYWNE ROZWIĄZYWANIE PEWNYCH TYPÓW RÓWNAŃ RÓZNICZKOWYCH.	
§ 16. Równanie zupełne	91
§ 17. Równanie postaci $y' = f(x)$ i $y' = g(y)$	93
§ 18. Równanie o zmiennych rozdzielonych, I	96
§ 19. Równanie o zmiennych rozdzielonych, II	98
§ 20. Równanie Eulera	102
§ 21. Zamiana zmiennych w równaniu różniczkowym	105
§ 22. Równanie różniczkowe jednorodne	109
§ 23. Równanie postaci $y' = h\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$	113
§ 24. Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu	115
§ 25. Równanie Bernoulliego	121

	Str.
§ 26. Równanie Jacobiego	124
§ 27. Ogólne równanie Riccatiego	124
§ 28. Równanie Boole'a i równanie Riccatiego specjalne	124
§ 29. Teoria czynnika całkującego	136
 ROZDZIAŁ IV. OGÓLNE RÓWNANIE UWIKŁANE PIERWSZEGO RZĘDU.	
§ 30. Twierdzenia egzystencjonalne odnoszące się do równania $F(x, y, y') = 0$	147
§ 31. Równania $x = \lambda(y')$ i $y = \mu(y')$	152
§ 32. Równanie Clairauta	155
§ 33. Równanie d'Alemberta	161
§ 34. Przekształcenie równania $F(x, y, y') = 0$ za pomocą metody różniczkowania	163
§ 35. Pojęcie przekształcenia stycznościowego. Transformacja Legendre'a i jej zastosowanie do całkowania równań różniczkowych	164
SKOROWIDZ NAZW	171
SKOROWIDZ NAZWISK	174