



$$(Ax+By)dx - (Cx+Dy)dy = 0,$$

$$[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(A+H)x+2(B+K)y+2(H+L)]dx +$$

$$+[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(B+H)x+2(C+K)y+2(K+L)]dy = 0,$$

gdzie A, B, C, H, K i L są stałymi.

60. Znaleźć warunki, przy których równanie $Pdx+Qdy=0$ ma czynnik całkujący kształtu

$$N(ax+by), \quad N(x^2+y^2), \quad N\left(\frac{ax+\beta y}{\gamma x+\delta y}\right).$$

61. Wykazać, że na to, aby równanie $dy/dx=f(x, y)$, gdzie $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w pewnym obszarze T , miało czynnik całkujący zależny tylko od x , potrzeba i wystarcza, żeby funkcja $f(x, y)$ była funkcją liniową zmiennej y .

62. Wykazać, że jeżeli funkcje P i Q spełniają w danym obszarze jednopójnym T równania Cauchy-Riemanna (p. ust. 5, str. 11) i jeśli nie znikają one jednocześnie w żadnym punkcie tego obszaru, to funkcja

$$\frac{1}{P^2+Q^2}$$

jest czynnikiem całkującym równania $Pdx+Qdy=0$, rozważanego w tym obszarze.

ROZDZIAŁ IV

OGÓLNE RÓWNANIE UWIKŁANE PIERWSZEGO RZĘDU

§ 30. Twierdzenia egzystencjonalne odnoszące się do równania

$$F(x, y, y')=0$$

104. Przechodzimy do rozpatrzenia najogólniejszego równania różniczkowego pierwszego rzędu, tj. równania o postaci uwikłanej

$$(1) \quad F(x, y, y')=0,$$

przy założeniu, że funkcja $F(x, y, p)$ jest klasy C^1 w pewnym obszarze przestrzennym V zmiennych x, y i p . Niekiedy będziemy o funkcji F czynili założenia dalej idące, tak że założenie uczynione obecnie należy uważać za minimalne.

Od razu nasuwa się myśl, aby przez rozwiązanie względem y' sprowadzić teorię równania (1) do teorii równania w postaci normalnej $y'=f(x, y)$. Istotnie, myśl ta doprowadzi nas do podstawowych twierdzeń odnoszących się do równania (1), ale zanim do tego przystąpimy, wprowadzimy pewne uogólnienia dotychczas używanych pojęć.

105. Punkt (x, y, p) obszaru V argumentów funkcji F będziemy nazywali *elementem liniowym*, odpowiedni zaś punkt płaszczyzny (x, y) — *podkładem* tego elementu. Wspomniany element liniowy interpretujemy geometrycznie obierając dowolną, ale ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$ i tworząc w punkcie (x, y) płaszczyzny odcinek o długości ε , o początku w tym punkcie i o spadku p .

Jeżeli dla elementu (x_0, y_0, p_0) obszaru V zachodzi równość

$$(2) \quad F(x_0, y_0, p_0)=0,$$

to element ten będziemy nazywali *elementem całkowym równania* (1) pozostając w zgodzie z odpowiednim pojęciem wprowadzonym w ustępie 23, str. 33, dla równania w postaci normalnej.

Jeżeli przy tym dla elementu całkowego (x_0, y_0, p_0) równania (1) spełniona jest nierówność

$$(3) \quad F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0,$$

to element ten będziemy nazywali *elementem całkowym regularnym równania* (1), w przeciwnym zaś przypadku, tj. gdy zachodzi równość

$$(4) \quad F'_p(x_0, y_0, p_0) = 0,$$

będziemy mówili o *elementie całkowym nieregularnym*.

Oczywiście może zająć przypadek, że dla danego równania różniczkowego wszystkie elementy całkowite są regularne, co będzie miało miejsce np. w przypadku równania o postaci normalnej kształtu

$$F(x, y, y') = y' - f(x, y) = 0;$$

może też zająć przypadek wręcz odwrotny, tj. taki, że wszystkie elementy całkowite są nieregularne, co, jak widać, ma miejsce z pewnością np. dla równania

$$F(x, y, y') = [y' - f(x, y)]^2 = 0.$$

Element całkowity nieregularny (x_0, y_0, p_0) równania (1) będziemy nazywali *osobliwym*, jeżeli jest on punktem skupienia elementów regularnych o podkładach różnych od punktu (x_0, y_0) .

106. Niech

$$(5) \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

będą równaniami parametrycznymi jakiegoś łuku regularnego L , gdzie parametr t zmienia się w przedziale $[t_1, t_2]$. Niech będzie określona w tym przedziale pewna funkcja ciągła $p(t)$. Układ trzech funkcji

$$(6) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad p = p(t)$$

możemy interpretować geometrycznie jako wspomniany łuk L , w którego wszystkich punktach $(x(t), y(t))$ uciepione są początki pewnych odcinków o długości ε i o spadku $p(t)$.

Odcinki rozważane nie będą na ogół styczne do łuku L w punktach swego zaczepienia. Na to, żeby dla danego t styczność taka zachodziła, potrzeba oczywiście i wystarcza, aby było

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = p(t),$$

a więc także

$$(7) \quad y'(t) = p(t)x'(t).$$

Jeżeli funkcje (6) spełniają w przedziale $[t_1, t_2]$ związek (7), to układ ich będziemy nazywali *wstęgą elementów liniowych równania* (1), a układ (5) — *podkładem tej wstęgi*. Związek (7) nazywamy jednocześnie *związkiem Pfaffa*.

Geometrycznie wstęga przedstawia łuk regularny, w którego każdym punkcie uciepiony jest odcinek styczny o stałej długości ε .

Jeżeli wstęga (6) składa się z elementów całkowych równania (1), tzn., jeżeli w przedziale $[t_1, t_2]$ zachodzi wzór

$$F[x(t), y(t), p(t)] = 0,$$

to wstęgę tę nazywamy *rozwiązaniem szczególnym równania* (1).

Porównując tę definicję z definicją rozwiązania $y = \varphi(x)$ równania (1), przyjętą w ustępie 15, str. 19, widzimy, że z każdego rozwiązania w dawnym sensie otrzymujemy bezpośrednio rozwiązanie w sensie obecnym, jeżeli przyjmujemy

$$(8) \quad x = t, \quad y = \varphi(t), \quad p = \varphi'(t).$$

Z drugiej strony, jeżeli układ (6) jest rozwiązaniem równania (1) w sensie obecnym, to ze związku (7) i z założenia regularności łuku (5) wynika, że pochodna $x'(t)$ nie znika w żadnym punkcie przedziału $[t_1, t_2]$, czyli że ma ona w tym przedziale stały znak i wobec tego funkcja $x = x(t)$ jest w tym przedziale ściśle monotoniczna. Pozwala to wyrazić parametr t jako funkcję współrzędnej x , w następstwie zaś współrzędną y jako funkcję zmiennej x w postaci

$$(9) \quad y = \varphi(x).$$

Jak widać, otrzymana w ten sposób funkcja (9) jest teraz rozwiązaniem równania (1) w sensie podanym w ustępie 15, str. 19.

Między rozwiązaniami typu (6) i typu (9) równania (1) istnieje więc odpowiedniość polegająca na tym, że każdemu rozwiązaniu (6) odpowiada otrzymane w wyżej podany sposób rozwiązanie (9) i odwrotnie, każde rozwiązanie postaci (9) daje poprzez wzory (8) odpowiednie rozwiązanie (6).

Jeżeli ponadto rozwiązania postaci (6) prowadzące po opisanym przekształceniu do tej samej funkcji (9) będziemy uważali za *identyczne*, to — jak łatwo sprawdzić — wspomniana odpowiedniość będzie dla klas wszystkich różnych rozwiązań typów (6) i (9) odpowiedniością wzajemnie jednoznaczną.

Na podstawie powyższych wniosków zagadnienia związane z rozwiązywaniem równania (1) w sensie podanym w ustępie 15, str. 19 dają się na ogół sprowadzić do równoważnych zagadnień związanych z rozwiązywaniem tegoż równania w sensie wyznaczania odnośnych funkcji (6), co w wielu przypadkach znacznie ułatwia badanie równania (1).

Zauważmy jeszcze, że w dalszym ciągu przez termin *rozwiązanie* będziemy rozumieli często albo układ dwóch pierwszych funkcji (6), albo odpowiednią funkcję (9), pomijając dającą się za ich pomocą wyznaczyć funkcję p lub funkcje x i p .

Jeżeli równania (6) określają rozwiązanie równania (1), to każdy taki element całkowity (x_0, y_0, p_0) , że $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ i $p_0 = p(t_0)$, gdzie t_0 jest wartością z przedziału $[t_1, t_2]$, nazywamy *przynależnym do tego rozwiązania* lub powiadamy, że rozwiązanie (6) *przechodzi przez ten element*.

Rozwiązanie, do którego przynależą wyłącznie elementy regularne nazywamy *regularnym*, jeżeli zaś wszystkie elementy przynależne do danego rozwiązania są osobliwe, to będziemy mówili o *rozwiązaniu osobliwym*.

Oczywiście, przyjęte definicje nie wykluczają rozwiązań, które nie są ani regularne, ani osobliwe.

Będziemy mówili, że przez punkt (x_0, y_0, p_0) obszaru V przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (1) lub że w tym punkcie ma miejsce jednoznaczność rozwiązania dla równania (1), jeżeli istnieje co najmniej jedno rozwiązanie przechodzące przez ten punkt oraz jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x_0 , że każde dwa rozwiązania równania (1) typu (9) postaci $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$, przechodzące przez ten punkt, tzn. takie, że $\varphi_1(x_0) = p_0$ i $\varphi_2(x_0) = p_0$, spełniają związek $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ w tej części wspomnianego otoczenia, w której oba są jednocześnie określone (p. ust. 52, str. 73).

107. Niech T będzie rzutem obszaru V (p. ust. 104, str. 147) na płaszczyznę zmiennych x i y . Jak łatwo stwierdzić T jest także obszarem.

Zakładając, że punkt (x_0, y_0) leży w obszarze T , weźmy pod uwagę równanie

$$(10) \quad F(x_0, y_0, p) = 0$$

i oznaczmy przez $Z(x_0, y_0)$ zbiór wszystkich takich wartości p , dla których zachodzi równość (10).

Zbiór $Z(x_0, y_0)$ może być oczywiście pusty. Jeżeli tak jest, to punkt (x_0, y_0) nie jest podkładem żadnego elementu całkowego równania (1).

Jeżeli zbiór $Z(x_0, y_0)$ nie jest pusty, to równanie (8) może mieć albo skończoną liczbę k pierwiastków, albo też pierwiastków tych może być nieskończenie wiele. W pierwszym przypadku powiemy, że punkt (x_0, y_0) jest k -krotnym podkładem elementów całkowych równania (1), w drugim przypadku będziemy mówili o *krotności nieskończenie wielkiej tego punktu*.

PRZYKŁAD 70. Rozpatrzmy równanie

$$(11) \quad a(x, y) + 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + c(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Równanie to, zwane często *równaniem pierwszego rzędu i drugiego stopnia*, zasługuje na szczególną uwagę z tego powodu, że występuje często w geometrii różniczkowej powierzchni, przy poszukiwaniu linii krzywiznowych lub linii asymptotycznych danej powierzchni.

Załóżmy, że funkcje $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ i $c = c(x, y)$ są klasy C^1 w pewnym obszarze płaskim T i że nie znikają one jednocześnie w żadnym punkcie tego obszaru. Oznaczając przez $\Delta = \Delta(x, y)$ wyróżnik $b^2 - ac$ równania (11), możemy podzielić punkty obszaru T na trzy podzbiory T_0 , T_1 i T_2 , zależnie od tego, czy $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ i $\Delta > 0$. Jest jasne, że

punkty zbioru T_2 mają krotność dwa lub jeden zależnie od tego, czy $c \neq 0$, czy też $c = 0$, punkty zbioru T_1 — krotność jeden, punkty zaś T_0 — krotność 0, tzn. nie są one podkładami elementów całkowych równania (11). Gdyby założyć, że w pewnych punktach funkcje a , b i c są jednocześnie równe zeru, to punktom tym należałoby przypisać oczywiście krotność nieskończenie wielką.

108. Zakładając, że element całkowity (x_0, y_0, p_0) jest dla równania (1) regularny, tzn., że zachodzą wzory (2) i (3), możemy zastąpić równanie (1) w pewnym dostatecznie małym otoczeniu tego elementu równoważnym równaniem o postaci normalnej

$$(12) \quad p = f(x, y), \quad p = y',$$

gdzie funkcja $f(x, y)$ jest w tym otoczeniu klasy C^1 ; równanie (12) otrzymujemy rozwiązując w stosownym otoczeniu równanie (1) względem p .

Ponieważ dla równania (12) zachodzą wszystkie warunki stosowności twierdzenia Cauchy'ego, w myśl którego istnieje tylko jedno rozwiązanie $y = \varphi(x)$ tego równania spełniające warunek $y_0 = \varphi(x_0)$ i ponieważ jest oczywiście $p_0 = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$, więc, jak widać, zachodzi

Twierdzenie (o istnieniu rozwiązania równania $F(x, y, y') = 0$). Jeżeli element liniowy (x_0, y_0, p_0) jest regularnym elementem całkowym równania (1), to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego równania przechodzące przez ten element.

109. Załóżmy teraz, że punkt (x_0, y_0) leży w obszarze T i że jego krotność jako podkładu elementów całkowych równania (1) jest dodatnia (skończona albo nieskończona). Wówczas zbiór $Z(x_0, y_0)$ takich wartości p , że (x_0, y_0, p) jest elementem całkowym, jest niepusty i zawiera skończenie albo nieskończenie wiele liczb. Na ogół jedne z tych elementów będą regularne, inne nieregularne; nie są też wyłączone wypadki skrajne, że albo wszystkie elementy są regularne, albo wszystkie nieregularne. Oznaczmy przez $Z^*(x_0, y_0)$ ten podzbiór zbioru $Z(x_0, y_0)$, który zawiera wszystkie takie wartości p , że element (x_0, y_0, p) jest regularny. Załóżmy, że zbiór $Z^*(x_0, y_0)$ nie jest pusty. Wtedy dla każdej liczby p tego zbioru istnieje, według dowiedzionego twierdzenia, dokładnie jedno rozwiązanie równania (1) zawierające element (x_0, y_0, p) .

Tym samym otrzymujemy następujące

Twierdzenie. Jeżeli punkt (x_0, y_0) jest podkładem wyłącznie elementów regularnych równania (1), to przez punkt ten przechodzi tyle łuków, z których każdy jest podkładem rozwiązania równania (1), ile jest różnych elementów całkowych o podkładzie (x_0, y_0) w tym sensie, że każdy łuk będący podkładem jakiegoś rozwiązania równania (1), przechodzący przez punkt (x_0, y_0) jest — wzięty w pewnym dostatecznie małym otoczeniu tego punktu — częścią w znaczeniu ustępu 60, str. 87, jednego z opisanych łuków.

110. Na zakończenie wprowadzimy pojęcie całki równania (1). Powiadamy, że funkcja

$$\Phi(x, y, C)$$

klasy C^1 w pewnym obszarze zmiennych x, y i C jest *całką równania* (1), jeżeli traktowana jako funkcja zmiennych x i y nie redukuje się do stałej dla żadnej wartości C w otoczeniu żadnego punktu tego obszaru oraz jeżeli dla każdego rozwiązania równania (1) w postaci (6) istnieje taka wartość C , że stale

$$\Phi[x(t), y(t), C] = 0.$$

Widzimy, że określone w ustępie 61, str. 88, pojęcie całki zastosowane do równania o postaci normalnej stanowi szczególny przypadek pojęcia wprowadzonego obecnie. Jeżeli bowiem $U(x, y)$ jest całką równania o postaci normalnej, to różnica $U(x, y) - C = \Phi(x, y, C)$ jest całką tego samego równania w sensie ostatniej definicji.

ZADANIA. 63. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'^2 + xy y'(x-1) - x^2 y^2 = 0.$$

64. Wyznaczyć linie asymptotyczne na elipsoidzie, na hiperboloidzie jednopowłokowej i dwupowłokowej, na walcu eliptycznym, na powierzchni trzeciego stopnia o równaniu

$$z = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky + 1.$$

§ 31. Równania $x=\lambda(y')$ i $y=\mu(y')$.

111. Rozważmy równanie postaci

$$(1) \quad x = \lambda(y').$$

Efektywne całkowanie tego równania, prowadzi na ogół poprzez rozwiązanie go względem y' do jednego lub więcej równań postaci $y' = f(x)$, które były omawiane w ustępie 65, str. 93. Często jednak zdarza się, że rozwiązanie równania (1) względem y' przedstawia znaczniejsze trudności rachunkowe. Zobaczymy, że przy pewnych założeniach można znaleźć rozwiązanie równania (1) w postaci parametrycznej na innej drodze omijając wspomniane trudności.

Założmy, że występująca po prawej stronie równania (1) funkcja $\lambda(p)$ jest ściśle monotoniczna i klasy C^1 w pewnym przedziale otwartym (P_1, P_2) i że $\lambda'(p) \neq 0$ oraz oznaczmy przez X_1 i X_2 kres dolny i kres górny wartości tej funkcji nie wykluczając przypadku $X_1 = -\infty$ lub $X_2 = \infty$.

Celem znalezienia metody całkowania równania (1) weźmy chwilowo pod uwagę funkcję odwrotną $p = f(x)$, która jest jednoznacznie określona i ciągła w przedziale (X_1, X_2) . Równanie

$$(2) \quad y' = f(x)$$

jest więc całkowicie równoważne równaniu (1) i stosując wyniki uzyskane w ustępie 65, str. 93, możemy powiedzieć, że przez każdy punkt (x_0, y_0) obszaru nieograniczonego

$$X_1 < x < X_2, \quad -\infty < y < \infty$$

przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie

$$(3) \quad y = \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

równania (1). Wykonajmy pod całką zamianę zmiennych postaci $s = \lambda(\tau)$. Oznaczając wartości τ odpowiadające wartościom x_0 i x przez p_0 i p , otrzymamy

$$y = \varphi[\lambda(p)] = y_0 + \int_{p_0}^p f[\lambda(\tau)] \lambda'(\tau) d\tau,$$

a ponieważ $f[\lambda(\tau)] = \tau$, gdyż f i λ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, więc ostatni związek przybiera postać

$$(4) \quad y = y(p) = y_0 + \int_{p_0}^p \tau \lambda'(\tau) d\tau.$$

Zatem wzór (4) i wzór

$$(4') \quad x = \lambda(p)$$

przedstawiają łącznie rozwiązanie równania (1) w postaci parametrycznej odpowiadające rozwiązaniu (3) i, jak widać, wyznaczenie tego rozwiązania w postaci (4)-(4') nie wymaga uprzedniego przejścia do postaci (2).

PRZYKŁAD 71. Równanie $x - y' + \frac{1}{2} \sin y' = 0$ całkujemy przyjmując $y' = p$. Mamy stąd $x = p - \frac{1}{2} \sin p = \lambda(p)$ i $\lambda'(p) = 1 - \frac{1}{2} \cos p$. Zatem rozwiązanie przechodzące przez dowolny punkt (x_0, y_0, p_0) , gdzie $x_0 = p_0 - \frac{1}{2} \sin p_0$, ma postać

$$x = p - \frac{1}{2} \sin p,$$

$$y = y_0 + \int_{p_0}^p \left(\tau - \frac{1}{2} \tau \cos \tau \right) d\tau = y_0 + \left[\frac{1}{2} (\tau^2 - \tau \sin \tau - \cos \tau) \right]_{p_0}^p,$$

gdzie p może się zmieniać dowolnie.

112. W podobny sposób rozwiązujemy równanie

$$(5) \quad y = \mu(y').$$

Zakładamy jak poprzednio, że funkcja $\mu(p)$ jest ściśle monotoniczna i klasy C^1 w przedziale otwartym (P_1, P_2) oraz że $\mu'(p) \neq 0$. Ponadto przyjmujemy, że przedział (P_1, P_2) nie zawiera liczby 0. Oznaczmy przez Y_1 i Y_2 kres dolny i kres górny wartości funkcji $\mu(p)$ i weźmy pod uwagę

funkcję odwrotną $p=g(y)$, która jest w przedziale (Y_1, Y_2) jednoznacznie określona, ciągła i różna od zera. Wówczas równanie

$$(6) \quad y' = g(y)$$

jest równoważne równaniu (5) i można tu zastosować wyniki ustępu 66, str. 94, w myśl których przez każdy punkt (x_0, y_0) obszaru nieograniczonego

$$-\infty < x < \infty, \quad Y_1 < y < Y_2$$

przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (6) określone równością

$$(7) \quad x = \psi(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}.$$

Wykonując pod całką podstawienie $t=\mu(\tau)$ i oznaczając wartości τ odpowiadające liczbom y_0 i y przez p_0 i p oraz biorąc pod uwagę związek $g[\mu(\tau)]=\tau$, otrzymujemy

$$x = x(p) = x_0 + \int_{p_0}^p \frac{\mu'(\tau)}{\tau} d\tau,$$

co łącznie ze wzorem

$$y = g(p)$$

daje rozwiązanie równania (5) w postaci parametrycznej odpowiadające rozwiązaniu (7).

PRZYKŁAD 72. Równanie $y+y'^2-\ln y'=0$ całkujemy, przyjmując $y'=p$ i $\mu(p)=-p^2+\ln p$. Stąd $\mu'(p)=-2p+1/p$, co łącznie z poprzednim daje rozwiązanie przechodzące przez dowolny punkt (x_0, y_0, p_0) , gdzie $y_0=-p_0^2+\ln p_0$, w postaci

$$x = x_0 + \int_{p_0}^p \left(-2 + \frac{1}{\tau^2} \right) d\tau = x_0 + \left[-2\tau - \frac{1}{\tau} \right]_{p_0}^p,$$

$$y = -p^2 + \ln p.$$

Zmienna p może tu przebiegać przedziały $(0, \sqrt{2}/2)$ i $(\sqrt{2}/2, \infty)$.

ZADANIA. 65. Scałkować następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} x-y'+e^{y'} &= 0, & y+y'e^{y'}-e^{y'} &= 0, \\ x-y'+\ln y' &= 0, & y+3y'+y'^3 &= 0, \\ 2x^2+3xy'+x\cos y'+y'^2-\cos^2 y' &= 0, & y-y'-y'^2 &= 0. \end{aligned}$$

66. Scałkować równanie

$$2xy(1-y')^2 - (xy'-y)^2 = 0.$$

Stwierdzić, że jego całka ma przy odpowiednich zastrzeżeniach postać

$$\left[(x-y) \left(\frac{\sqrt{x+Vy}}{\sqrt{x-Vy}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - C \right] \left[(x-y) \left(\frac{\sqrt{x-Vy}}{\sqrt{x+Vy}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - C \right] = 0.$$

67. Scałkować równanie

$$y^2(y'-1) - (2-y')^2 = 0.$$

§ 32. Równanie Clairauta

113. Równaniem różniczkowym Clairauta nazywamy równanie postaci

$$(1) \quad y = xy' + f(y'),$$

gdzie $f(p)$ jest funkcją określoną w jakimś przedziale (P_1, P_2) , o której zakładamy, że jest ona klasy C^2 i że

$$(1') \quad f'(p) \neq 0.$$

Zbadamy najpierw elementy całkowite równania (1). Przyjmując, że

$$(2) \quad F(x, y, p) = xp + f(p) - y,$$

oznaczymy przez Z zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których krotność, jako podkładów elementów całkowitych równania (1), jest dodatnia. Punkt (x_0, y_0) należy wtedy i tylko wtedy do zbioru Z , jeżeli równanie

$$(3) \quad F(x_0, y_0, p) = x_0 p + f(p) - y_0 = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie względem p , a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt (x_0, y_0) leży na którymś z odcinków należących do rodziny odcinków przedstawionych wzorem

$$(4) \quad y = Cx + f(C),$$

gdzie C zmienia się w przedziale (P_1, P_2) , a x w przedziale dowolnym $[X_1, X_2]$.

Ponadto z równania

$$F'_p(x_0, y_0, p) = x_0 + f'(p)$$

i z monotoniczności funkcji $f'(p)$ wynika, że funkcja $F'_p(x_0, y_0, p)$ rozpatrywana w przedziale (P_1, P_2) jako funkcja zmiennej p znika co najwyżej raz w rozważanym przedziale i że wobec tego równanie (3) ma w tym przedziale co najwyżej dwa rozwiązania. Mamy więc następujące

Twierdzenie. Zbiór tych punktów płaszczyzny, które jako podkłady elementów całkowitych równania (1) mają krotność większą od zera, jest identyczny ze zbiorem punktów leżących na odcinkach rodziny (4); krotność każdego z tych punktów wynosi co najwyżej dwa.

Przejdźmy do zbadania regularności elementów całkowitych. Aby wyznaczyć elementy nieregularne, należy do równania (3) dołączyć równanie

$$(5) \quad F'_p(x_0, y_0, p) = x_0 + f'(p) = 0$$

i rozpatrywać trójki liczb czyniące zadość obu tym równaniom. Jest oczywiste, że zbiór tych wszystkich elementów tworzy łuk określony przez równania

$$(6) \quad x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t), \quad p = t,$$

gdzie t zmienia się w przedziale (P_1, P_2) . Pierwsze dwa z tych równań określają pewien łuk regularny Z położony w płaszczyźnie xy , którego wszystkie punkty należą oczywiście do zbioru Z . Łatwo sprawdzić, że każdy punkt łuku Z jest podkładem dokładnie jednego elementu całkowego równania (1), czyli ma krotność równą jedności. Na koniec każdy z elementów (6) jest elementem osobliwym równania (1). Istotnie, niech (x_0, y_0, p_0) będzie jednym z takich elementów i niech α będzie dowolną liczbą różną od zera. Ponieważ $x_0 + f'(p_0) = 0$, więc $x_0 + \alpha + f'(p_0) \neq 0$ i tym samym element całkowity postaci $(x_0 + \alpha, p_0(x_0 + \alpha) + f(p_0), p_0)$ jest regularny. Z uwagi na dowolność α wnosimy stąd natychmiast, że obrany element (x_0, y_0, p_0) jest osobliwy, c. b. d. o.

Otrzymujemy więc następujące

Twierdzenie. Wszystkie osobliwe elementy całkowite równania (1) określone są wzorami (6) dla wartości t branych z przedziału (P_1, P_2) ; podkład każdego z nich ma krotność jeden.

Uwaga. Z jednoznacznej zależności współrzędnych podkładu elementu całkowego osobliwego od jego współrzędnej $p=t$ wynika natychmiast, że różnym podkładom odpowiadać muszą różne wartości p lub, co na jedno wychodzi, że dla każdego z dwóch elementów całkowych osobliwych (6) postaci (x_i, y_i, p_i) , $i=1, 2$, relacja

$$p_1 = p_2$$

pociąga za sobą relacje

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

114. Różniczkując (4) względem x mamy $y' = C$; wartość ta wstawiona do związku (4) daje równość (1). Otrzymujemy więc

Twierdzenie. Rodzina funkcji postaci (4) przedstawia klasę rozwiązań równania Clairauta. Rodzinę tę otrzymujemy przyjmując w równaniu różniczkowym (1) zamiast y' dowolną stałą C z przedziału (P_1, P_2) i przyjmując dowolny przedział $[X_1, X_2]$ jako zakres zmienności argumentu x .

Rozwiązania opisanej klasy i wszystkie z nimi identyczne będziemy nazywali w dalszym ciągu rozwiązaniami typu (4).

Badając łuk Z w dowolnym przedziale $[t_1^*, t_2^*]$ zawartym w przedziale (P_1, P_2) dostrzegamy, że

$$(7) \quad y' = px', \quad x \neq 0.$$

Funkcje (6) spełniają więc równania (1) i (7), co daje

Twierdzenie. Równanie Clairauta (1) ma klasę rozwiązań osobliwych, danych wzorami (6), w których parametr t przebiegać może dowolny przedział $[t_1^*, t_2^*]$ zawarty w przedziale (P_1, P_2) .

Rozwiązania powyższej klasy i wszystkie z nimi identyczne będziemy nazywali w dalszym ciągu rozwiązaniami typu (6).

Dla uzupełnienia tych rozważań udowodnimy jeszcze

Twierdzenie. Dla każdego rozwiązania równania (1) postaci

$$(8) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad p = p(t),$$

określonego w pewnym przedziale $[T_1, T_2]$ można podzielić ten przedział na trzy podprzedziały $[T_1, T_1^*]$, $[T_1^*, T_2^*]$ i $[T_2^*, T_2]$, w których rozwiązanie (8) jest odpowiednio identyczne z pewnym rozwiązaniem typu (4), z pewnym rozwiązaniem typu (6) i wreszcie z pewnym rozwiązaniem typu (4); niektóre z tych przedziałów mogą być puste.

*Dowód.** Rozróżniamy dwa przypadki zależnie od tego, czy do rozwiązania (8) przynależą wyłącznie elementy całkowite regularne, czy też nie (p. ust. 106, str. 149).

W przypadku pierwszym jest stale

$$(9) \quad F[x(t), y(t), p(t)] = 0, \quad F'_p[x(t), y(t), p(t)] \neq 0$$

i ponieważ funkcja (2) oraz dwie pierwsze funkcje (8) są klasy C^1 , więc i trzecia z funkcji (8), traktowana jako gałąź funkcji uwiklanej w pierwszej z tożsamości (9) jest klasy C^1 . Różniczkując cytowaną tożsamość dostajemy, uwzględniając związek Pfaffa

$$\frac{d}{dt} F[x(t), y(t), p(t)] = \{x(t) + f[p(t)]\} = F'_p[x(t), y(t), p(t)] p'(t) = 0;$$

tym samym, wobec drugiej z relacji (9) jest stale $p'(t) = 0$ i co za tym idzie, $p(t) = C$, $y'(t) = Cx'(t)$, $y(t) = Cx(t) + D$, ponieważ zaś wstęga (8) jest rozwiązaniem równania (1), więc musi być $P_1 < C < P_2$ i $D = f(C)$, co daje ostatecznie związek

$$y(t) = Cx(t) + f(C);$$

stąd wynika od razu, że w rozważanym przypadku rozwiązanie (8) jest w całym przedziale $[T_1, T_2]$ typu (4) i przyjmując $[T_1^*, T_2^*] = [T_1, T_2]$, przedziały zaś pozostałe $[T_1, T_1^*]$ i $[T_2^*, T_2]$ za puste, można uważać twierdzenie za udowodnione.

W przypadku drugim oznaczamy odpowiednio przez $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ kres dolny i górny takich wartości parametru t , dla których odnośny punkt (8) jest elementem całkowym nieregularnym (osobliwym) równania (1).

Jeżeli $\bar{T}_1 = \bar{T}_2$, to prawdziwość twierdzenia wynika natychmiast z rozważania dla pierwszego przypadku, zgodnie z którym rozwiązanie (8) jest w przedziałach nie zawierających punktu $t = \bar{T}_1 = \bar{T}_2$, a więc i w całym przedziale $[T_1, T_2]$ rozwiązaniem typu (4).

Jeżeli $\bar{T}_1 \neq \bar{T}_2$, to okażemy, że dla każdej wartości t z przedziału $(\bar{T}_1, \bar{T}_2)$ punkt (8) jest elementem całkowym osobliwym równania (1), tzn., że

$$(9') \quad F'_p[x(t), y(t), p(t)] = x(t) + f'[p(t)] = 0, \quad \bar{T}_1 < t < \bar{T}_2.$$

*) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Lipsk 1930, str. 103-106.

Istotnie, w przeciwnym razie istniałby, uwzględniając określenie kresów $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$, taki przedział zamknięty $\langle \bar{T}_1, \bar{T}_2 \rangle$, zawarty w przedziale $[T_1, T_2]$, że

$$\bar{T}_1 \leq \bar{T}_1 < \bar{T}_2 \leq \bar{T}_2, \quad F'_p[x(t), y(t), p(t)] \neq 0, \quad \bar{T}_1 < t < \bar{T}_2$$

oraz

$$F'_p[x(t), y(t), p(t)] = 0, \quad t = \bar{T}_1, \quad t = \bar{T}_2;$$

stąd natychmiast wynikałoby na podstawie rozważań dla pierwszego przypadku, że w rozważanym przedziale dwie pierwsze funkcje (8) spełniają związek

$$y(t) = Cx(t) + f(C), \quad P_1 < C < P_2$$

i co za tym idzie, punkty płaszczyzny xy

$$(x(\bar{T}_1), y(\bar{T}_1)), \quad (x(\bar{T}_2), y(\bar{T}_2)),$$

są w szczególności podkładami elementów całkowitych osobliwych o tej samej współrzędnej $p=C$; jest to jednak niemożliwe, bowiem $x(\bar{T}_1) \neq x(\bar{T}_2)$ (p. uwaga, str. 156); zatem zachodzić musi (9').

Ostatecznie, przyjmując za $[T_1^*, T_2^*]$ największy z przedziałów $[\bar{T}_1, \bar{T}_2]$ zawartych w $[T_1, T_2]$ mamy dla rozwiązania (8) na podstawie (9') i (1), w przedziale $[T_1^*, T_2^*]$, równości

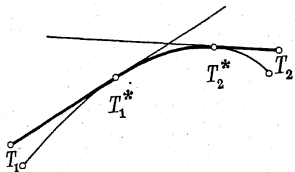
$$x=x(t)=-f'[p(t)], \quad y=y(t)=-p(t)f'[p(t)]+f[p(t)], \quad p=p(t).$$

Uwzględniając, że na zasadzie pierwszej z tych równości i ścisłej monotoniczności funkcji $f'(t)$ funkcja $p=p(t)$ jest ściśle monotoniczną funkcją klasy C^1 zmiennej t i co za tym idzie istnieje funkcja odwrotna klasy C^1 postaci $t=t(p)$, sprawdzamy z łatwością, że w przedziale $[T_1^*, T_2^*]$ rozwiązanie (8) jest typu (6).

Następnie, w myśl określenia liczb T_1^* i T_2^* , widzimy od razu, że w przedziałach $[T_1, T_1^*]$ i $[T_2^*, T_2]$, stanowiących uzupełnienie przedziału $[T_1^*, T_2^*]$ do $[T_1, T_2]$, o ile nie są one puste, rozwiązanie (8) jest typu (4).

Zatem dowód twierdzenia w drugim przypadku jest zakończony.

Ujmując rzecz geometrycznie, podkład dowolnego rozwiązania (8) składa się w przedziałach skrajnych $[T_1, T_1^*]$ i $[T_2^*, T_2]$ z odcinków linii prostych należących do rodziny (4). W przedziale wewnętrznym $[T_1^*, T_2^*]$ podkład rozwiązania (8) jest częścią łuku $\mathcal{L}$. Wreszcie w punktach odpowiadających wartościom T_1^* i T_2^* wspomniane odcinki są oczywiście styczne do łuku $\mathcal{L}$ (p. rys. 14). Zauważmy na koniec, że ze wzorów (4) i (6)



Rys. 14

wynika natychmiast, że każda prosta (4), traktowana jako odcinek o zakresie $(-\infty, \infty)$ zmiennej x , ma z łukiem $\mathcal{L}$ jeden i tylko jeden punkt wspólny o współrzędnych

$$x=-f'(C), \quad y=f(C)-Cf'(C)$$

i że jest ona w tym punkcie styczna do łuku $\mathcal{L}$.

Innymi słowy, rodzina prostych (4) jest rodziną wszystkich prostych stycznych do łuku $\mathcal{L}$.

PRZYKŁAD 73. Scałkować równanie $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$. Przyjmując $y'=C$, otrzymujemy rozwiązanie odcinkowe $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$, gdzie x przebiega dowolny przedział $[X_1, X_2]$, różniczkując zaś prawą stronę równania względem $y'=p$ otrzymujemy równania parametryczne rozwiązania osobliwego w postaci

$$x=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad p=t$$

lub w postaci równoważnej

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

Rozwiązanie osobliwe przedstawia, jak widać, górną część okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i o promieniu równym jedności. Rozwiązania prostoliniowe są styczne do tego półokręgu.

PRZYKŁAD 74. Niech M będzie punktem łuku $y=y(x)$ klasy C^1 , niech będzie $y'=y'(x) \neq 0$ i niech A i B będą punktami przecięcia się stycznej do tego łuku w punkcie M z obu osiami układu współrzędnych. Wyznaczyć takie łuki, aby iloczyn $OA \cdot OB$ był stałą różną od zera.

Styczna do szukanego łuku $y=y(x)$ ma równanie $Y-y=y'(X-x)$, stąd zaś punkty A i B mają współrzędne $((xy'-y)/y', 0)$ i $(0, y-xy')$. Powinno więc być

$$\frac{xy'-y}{y'}(y-xy')=a,$$

gdzie a jest daną liczbą stałą. Otrzymujemy więc równanie różniczkowe

$$(y-xy')^2+ay'=0,$$

po rozwiązaniu zaś względem y — równanie Clairauta

$$y=xy'+\varepsilon\sqrt{-ay'},$$

gdzie $\varepsilon=\pm 1$. Zastosowanie wzorów (4) i (6) daje rozwiązania odcinkowe

$$y=Cx+\varepsilon\sqrt{-aC},$$

gdzie $aC < 0$, x zaś przebiega dowolny przedział $[X_1, X_2]$ i rozwiązanie osobliwe postaci

$$x = \frac{\varepsilon a}{2\sqrt{-at}}, \quad y = \frac{\varepsilon\sqrt{-at}}{2}, \quad p = t,$$

gdzie $ta < 0$, lub postaci równoważnej

$$xy = \frac{a}{4},$$

gdzie x przebiega przedział $(0, \infty)$ lub $(-\infty, 0)$, zależnie od znaku ε .

H15. Można uzyskać rezultat odwrotny do wniosku sformułowanego ostatnio w związku z geometryczną interpretacją rozwiązań równania Clairauta.

Niech $y = g(x)$ będzie funkcją klasy C^2 w jakimś przedziale (x_1, x_2) i niech $g''(x) \neq 0$. Równaniem rodziny stycznych do tego łuku jest

$$(10) \quad Y - g(x) = g'(x)(X - x);$$

gdzie przez X i Y oznaczyliśmy współrzędne punktu bieżącego stycznej poprowadzonej przez punkt $(x, g(x))$. Zmienna x gra oczywiście w równaniu (10) rolę parametru i dlatego dla większej jasności zastąpimy ją literą C . Równanie rodziny stycznych przybiera teraz postać

$$(11) \quad \Phi(X, Y, C) = Y - g(C) - g'(C)(X - C) = 0.$$

Szukając równania różniczkowego, któremu proste (11) czynią zadość, różniczkujemy równość (11) względem X i otrzymujemy $p - g'(C) = 0$, gdzie $p = Y'$, a stąd $p = g'(C)$. Ponieważ przy przyjętych założeniach funkcja $g'(C)$ jest ściśle monotoniczna, więc z ostatniej równości można w sposób jednoznaczny określić C jako funkcję zmiennej p klasy C^1

$$(12) \quad C = \Psi(p)$$

w odpowiednim przedziale zmienności p . Wstawiając $p = g'(C)$ i związek (12) do (11), otrzymujemy

$$Y - g[\Psi(p)] - p[X - \Psi(p)] = 0,$$

a stąd

$$Y = Xp + g[\Psi(p)] + p\Psi(p)$$

czyli

$$Y = XY' + g[\Psi(Y')] + Y'\Psi(Y').$$

Jest to równanie różniczkowe Clairauta, któremu czynią zadość proste rodziny (10) lub (11); pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że funkcja $y = g(x)$ wyznacza rozwiązania osobliwe tego równania.



ZADANIA. 68. Scałkować i przedyskutować następujące równania różniczkowe:

$$y = xp + p^2, \quad y = xp + \cos p, \quad y = xp + e^p, \quad xp^2 - yp = 1.$$

Oznaczamy oczywiście y' przez p .

69. W płaszczyźnie xy obrano dwa stałe punkty F_1 i F_2 oraz łuk klasy C^1 o równaniu $y = y(x)$. Prowadzimy w punkcie M styczną do tego łuku i oznaczamy przez δ_1 i δ_2 odległości punktów F_1 i F_2 od wspomnianej stycznej. Wyznaczyć takie łuki $y = y(x)$, aby iloczyn $\delta_1 \delta_2$ był równy stałej liczbie b . Otrzymujemy tu równanie Clairauta, którego rozwiązaniem osobliwym jest elipsa lub hiperbola, zależnie od znaku liczby b .

§ 33. Równanie d'Alemberta

H16. Powyższą nazwą oznaczamy równanie postaci

$$(1) \quad y = A(y')x + B(y'),$$

gdzie $A(p)$ i $B(p)$ są pewnymi funkcjami klasy C^1 określonymi w jakimś przedziale (P_1, P_2) .

Zbadamy tutaj rozwiązania równania (1) ograniczając się do obszaru V zmiennych x, y i p , składającego się wyłącznie z elementów regularnych równania, więcej nawet — do takiego obszaru, że są w nim stałe spełnione następujące nierówności

$$(2) \quad A'(p)x + B'(p) \neq 0$$

$$(3) \quad A(p) \neq p.$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie. Przy wymienionych wyżej założeniach równanie (1) jest efektywnie rozwiązywalne metodą sprowadzenia go do pewnego równania liniowego.

Dowód. Niech funkcje

$$(4) \quad x = x, \quad y = \varphi(x), \quad p = y' = \varphi'(x)$$

będą jakimkolwiek rozwiązaniem równania (1) określonym w pewnym przedziale $[X_1, X_2]$. Wstawiając funkcje (4) do równania (1) i różniczkując obie strony względem x otrzymujemy po łatwym rachunku uwzględniając (2) i (3)

$$(5) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - A(p)}{A'(p)x + B'(p)} \neq 0,$$

co wskazuje, że p jest funkcją ściśle monotoniczną zmiennej x i że wobec tego istnieje funkcja odwrotna $x = x(p)$ określona i klasy C^1 w odpowied-

nim przedziale (P_1, P_2) zmienności argumentu p . Stąd stwierdzamy z łatwością, że układ funkcji zmiennej p

$$(6) \quad x=x(p), \quad y=y(p)=A(p)x(p)+B(p), \quad p=p,$$

rozważanych w przedziale $[P_1, P_2]$, jest rozwiązaniem równania (1) identycznym z rozwiązaniem (4).

Uwzględniając, że

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}$$

otrzymujemy z (5) dla funkcji $x=x(p)$ równanie liniowe

$$(7) \quad \frac{dx}{dp} = \frac{A'(p)}{p-A(p)}x + \frac{B'(p)}{p-A(p)}.$$

Widzimy więc, że każde rozwiązanie (4) równania (1) jest identyczne z pewnym rozwiązaniem (6) tego równania, gdzie pierwsza z występujących w (6) funkcji spełnia równanie liniowe (7).

Nie trudno sprawdzić, że jest również odwrotnie. Każdy bowiem układ funkcji (6), w którym pierwsza z występujących funkcji czyni zadość równaniu (7), jest rozwiązaniem równania (1), jeśli tylko punkty o współrzędnych (6) należą do V .

Zatem równanie (1) na mocy związków (6) jest równoważne równaniu (7). Ponieważ równanie (7) jest, jak widać, efektywnie rozwiązywalne, więc to samo dotyczy równania (1), c. b. d. o.

PRZYKŁAD 75. Rozważmy równanie

$$(8) \quad y = xy'^2 + \frac{1}{2}y'^2$$

w obszarach zmiennych x, y i p nie zawierających płaszczyzn $p=0, p=1$ i $x=-\frac{1}{2}$, np. w obszarze $0 < p < 1, -\frac{1}{2} < x < \infty$.

Stosując udowodnione twierdzenie tworzymy równanie liniowe

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2}{1-p}x + \frac{1}{1-p}.$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$(9) \quad x = x(p) = \frac{D+p-\frac{1}{2}p^2}{(p-1)^2}, \quad p=p,$$

gdzie D jest stałą dowolną większą od $-\frac{1}{2}$ (aby zagwarantować warunek $x > -\frac{1}{2}$). Stąd otrzymujemy wszystkie rozwiązania równania (8) przebiegające w rozważanym obszarze w postaci układu złożonego z funkcji (9) i z funkcji

$$y = y(p) = \frac{p^2(2D+1)}{2(p-1)^2}, \quad p=p.$$

§ 34. Przekształcanie równania $F(x, y, y')=0$ za pomocą metody różniczkowania

117. Rozważmy ogólne równanie

$$(1) \quad F(x, y, y')=0$$

przy założeniu, że funkcja $F(x, y, p)$ jest określona i klasy C^1 w pewnym obszarze V , że zachodzą w tym obszarze stałe nierówności

$$F'_x(x, y, p) + F'_y(x, y, p)p \neq 0, \quad F'_p(x, y, p) \neq 0$$

i że równanie (1) jest wyraźnie rozwiązywalne względem y lub x .

Niech funkcje

$$(2) \quad x=x, \quad y=\varphi(x), \quad p=\varphi'(x)=y'$$

będą dowolnym rozwiązaniem równania (1) określonym w pewnym przedziale (X_1, X_2) zmiennej x . Wstawiając funkcje (2) do równania (1) i różniczkując obie strony względem x otrzymamy jak w ustępie 116, str. 161

$$(3) \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{F'_x(x, y, p) + F'_y(x, y, p)p}{F'_p(x, y, p)} \neq 0,$$

co pozwala wyrazić dwie pierwsze z funkcji (2) jako funkcje trzeciej z nich. Dostajemy w ten sposób układ funkcji

$$x=x(p), \quad y=y(p)=\varphi[x(p)], \quad p=p,$$

który jest rozwiązaniem równania (1) identycznym z rozwiązaniem (2).

Wobec (3) jest tutaj

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= -\frac{F'_p(x, y, p)}{F'_x(x, y, p) + F'_y(x, y, p)p}, \\ \frac{dy}{dp} &= \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dp} = -\frac{pF'_p(x, y, p)}{F'_x(x, y, p) + F'_y(x, y, p)p}. \end{aligned}$$

Założyliśmy, że równanie (1) jest rozwiązywalne względem jednej ze zmiennych x lub y tzn., że w obszarze V jest stałe

$$(5) \quad F(x, y, p) = y - f(x, p) \quad \text{lub} \quad F(x, y, p) = x - g(y, p),$$

gdzie funkcje $f(x, p)$ lub $g(y, p)$ są klasy C^1 w odpowiednich obszarach zmienności swych argumentów.

Gdy spełniona jest pierwsza z równości (5), wówczas pierwszy ze związków (4) jest równaniem różniczkowym o postaci normalnej

$$(6) \quad \frac{dx}{dp} = \frac{f'_p(x, p)}{-f'_x(x, p) + p},$$

które łącznie ze związkami

$$(6') \quad y=f(x, p)$$

jest równoważne z równaniem (1).

W przypadku drugiej z równości (5) drugi ze związków (4) daje analogiczne równanie w postaci normalnej

$$(7) \quad \frac{dy}{dp} = \frac{pg'_p(y, p)}{1 - g'_y(y, p)p},$$

równoważne wraz ze związkiem

$$(7') \quad x=g(y, p)$$

rownaniu (1).

Reasumując otrzymujemy

Twierdzenie. Przy wymienionych na początku założeniach można zastąpić równanie (1) równoważnym równaniem o postaci normalnej (6) lub (7) i związkiem (6') lub (7').

PRZYKŁAD 76. Dla równania $y=x^2+p^2$ rozważanego np. w obszarze zmiennych $p/2 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < p < \infty$, równanie (6) przybiera postać $dx/dp = 2p/(p-2x)$. Jest to równanie jednorodne, które całkujemy podstawiając $x=pu$, gdzie u jest nową funkcją niewiadomą.

ZADANIA. 70. Scałkować równanie różniczkowe

$$x=p^2+y^2.$$

71. Sprawdzić, że dla równania d'Alemberta metoda omówiona ostatnio pokrywa się z metodą omówioną w ustępie 116, str. 161, natomiast zawodzi ona w przypadku równania Clairauta.

§ 35. Pojęcie przekształcenia stycznościowego Transformacja Legendre'a i jej zastosowanie do całkowania równań różniczkowych

118. Zamiana zmiennych w równaniu różniczkowym, omówiona w ustępie 73, str. 106, opierała się w istocie rzeczy na przyporządkowywaniu w sposób wzajemnie jednoznaczny punktom (x, y) należącym do jakiegoś obszaru płaskiego t , punktów (X, Y) należących do odpowiedniego obszaru T za pomocą układu funkcji klasy C^1

$$(1) \quad X=g(x, y), \quad Y=h(x, y)$$

o nieznikającym jacobianie.

Przekształcenia tego rodzaju noszą nazwę *punktowych* i mogą być uważane za szczególny przypadek tzw. *przekształceń stycznościowych*, w których elementom liniowym (x, y, p) przyporządkowuje się elementy liniowe (X, Y, P) .

Niechaj będzie dany układ trzech funkcji

$$(2) \quad X=g(x, y, p), \quad Y=h(x, y, p), \quad P=k(x, y, p),$$

o których — żeby ograniczyć się do możliwie prostego przypadku — zakładamy, że ustalają wzajemnie jednoznaczność między wszystkimi punktami (x, y, p) i (X, Y, P) pewnych obszarów przestrzennych v i V . Przyjmijmy, że funkcje g, h i k są klasy C^1 i że jacobian

$$(3) \quad \frac{D(g, h, k)}{D(x, y, p)} \neq 0.$$

Przekształcenie określone wzorami (2) możemy traktować jako przekształcenie pewnych elementów liniowych (x, y, p) o podkładach (x, y) , leżących w płaszczyźnie zmiennych xy , na odpowiednie elementy liniowe (X, Y, P) o podkładach (X, Y) , leżących w płaszczyźnie zmiennych XY i ten właśnie sposób pojmowania przekształcenia (2) będziemy tu mieli na uwadze.

Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę elementów liniowych należących do obszaru v postaci

$$(4) \quad x=x(t), \quad y=y(t), \quad p=p(t)$$

zakładając, że funkcje $x(t)$, $y(t)$ i $p(t)$ są klasy C^1 w jakimś przedziale $[a, b]$. Wzory (2) przekształcają tę rodzinę na jednoparametrową rodzinę elementów liniowych należących do obszaru V , postaci

$$(5) \quad \begin{aligned} X &= g[x(t), y(t), p(t)] = X(t), \\ Y &= h[x(t), y(t), p(t)] = Y(t), \\ P &= k[x(t), y(t), p(t)] = P(t), \end{aligned}$$

gdzie funkcje $X(t)$, $Y(t)$, $P(t)$ są w przedziale $[a, b]$ również klasy C^1 .

Należy tu zwrócić od razu uwagę na jedno. Załóżmy mianowicie, że

$$(6) \quad x'^2 + y'^2 > 0.$$

Otóż z założenia tego wcale nie wynika, że musi być konieczne także

$$X'^2 + Y'^2 > 0.$$

Istotnie, nierówność (6) nie wyklucza wcale równości

$$X' = g'_x x' + g'_y y' + g'_p p' = 0, \quad Y' = h'_x x' + h'_y y' + h'_p p' = 0,$$

czy to dla pewnych wartości t , czy też nawet identycznie w całym przedziale $[a, b]$. Wynika stąd, że nie jest wykluczony przypadek, w którym podkładem rodziny elementów liniowych (4) jest łuk regularny, podczas gdy podkład rodziny elementów przekształconych (5) nie jest łukiem regularnym, a nawet redukuje się do jednego punktu.

119. Załóżmy teraz, że zbiór elementów liniowych (4) jest ich wstęgą (p. ust. 106, str. 148), czyli że spełniony jest związek Pfaffa

$$(7) \quad y' - px' = 0$$

w odpowiednim przedziale $[a, b]$.

Ponieważ

$$(8) \quad Y' - PX' = (h'_x - kg'_x)x' + (h'_y - kg'_y)y' + (h'_p - kg'_p)p',$$

więc elementy przekształcone na ogół nie będą spełniały analogicznego związku Pfaffa, chyba, że uczynimy jakieś specjalne założenia o funkcjach g, h i k . Otóż okazało się, że dla teorii równań różniczkowych pierwszorzędą rolę grają takie przekształcenia elementów liniowych, przy których trójki funkcji (4) spełniających związek Pfaffa (7) przechodzą w trójki funkcji (5) również spełniających związek Pfaffa.

Zanim przejdziemy do dalszego ciągu, zauważmy, że konieczne jest zmodyfikowanie pojęcia wstęgi elementów liniowych (4) przez wprowadzenie dodatkowego warunku, aby funkcja $p(t)$ była w przedziale $[a, b]$ klasy C^1 . Jednocześnie usuniemy warunek (6) dla podkładu wstęgi, tak że dopuścimy wyraźnie jako wstęgi elementów liniowych takie układy (4), dla których podkładem jest np. stały punkt.

Powiadamy, że przekształcenie (2) jest *przekształceniem stycznościowym*, jeżeli przy założeniach przyjętych w ustępie 118, str. 165, posiada ono tę własność, że każdą wstęgę elementów liniowych (4) w zmodyfikowanym sensie przekształca na analogiczną wstęgę elementów liniowych (5), innymi słowy, że związek

$$(9) \quad y' = px'$$

pociąga za sobą związek

$$(10) \quad Y' = PX'.$$

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Na to, żeby przy założeniach przyjętych w ustępie 118, str. 165, związki (2) określały przekształcenie stycznościowe, potrzeba i wystarczy, aby w obszarze v zmiennych x, y i p spełnione były tożsamościowo związki*

$$(11) \quad h'_p - kg'_p = 0, \quad (h'_x - kg'_x) + (h'_y - kg'_y)p = 0.$$

Dowód. Podany warunek jest wystarczający. Załóżmy bowiem, że związki (11) są spełnione i oznaczmy

$$(h'_y - kg'_y) = \varrho,$$

co pociąga za sobą w myśl (11) równość

$$h'_x - kg'_x = -\varrho p.$$

Wówczas związek (8) przybiera postać

$$(12) \quad Y' - PX' = \varrho(y' - px'),$$

z której wynika, że równość (9) pociąga za sobą równość (10).

Podany warunek jest konieczny. Załóżmy bowiem, że przekształcenie (2) jest stycznościowe i obierzmy dowolny punkt (x, y, p) obszaru v i weźmy pod uwagę wstęgę postaci

$$x(t) = x + \lambda t, \quad y(t) = y + p\lambda t + \frac{1}{2}\lambda\mu t^2, \quad p(t) = p + \mu t,$$

gdzie parametr t przebiega pewne dostatecznie małe otoczenie punktu $t=0$, a λ i μ mają dowolne wartości. Ponieważ równość (10) zachodzi i dla tej wstęgi, więc z (8) wynika, przy $t=0$, równość

$$(13) \quad Y' - PX' = [(h'_x - kg'_x) + (h'_y - kg'_y)p]\lambda + (h'_p - kg'_p)\mu = 0,$$

co wobec dowolności liczb x, y i p oraz λ i μ daje natychmiast związki (11).

W świetle tego twierdzenia staje się widoczne, w jakim sensie przekształcenie punktowe można uważać za szczególny przypadek przekształceń stycznościowych. Mając mianowicie przekształcenie punktowe (1) wystarczy przyjąć w zbiorze v

$$g(x, y, p) = g(x, y), \quad h(x, y, p) = h(x, y)$$

i dobrać funkcję $k(x, y, p)$ spełniającą tożsamościowo drugi ze związków (11), aby otrzymać przekształcenie stycznościowe.

120. Pozostawiając czytelnikowi łatwy dowód twierdzenia, że *przekształcenie odwrotne do danego przekształcenia stycznościowego jest również przekształceniem stycznościowym*, przejdźmy do zastosowania takich przekształceń do teorii równań różniczkowych.

Niech

$$(14) \quad F(x, y, y') = 0$$

będzie danym równaniem różniczkowym i niechaj dla prostoty funkcja $F(x, y, p)$ będzie klasy C^1 w pewnym obszarze v zmiennych x, y i p . Zakładając, że wzory (2) określają przekształcenie stycznościowe, weźmy pod uwagę przekształcenie odwrotne do danego w odpowiednim obszarze V

$$x = \chi(X, Y, P) \quad y = \psi(X, Y, P) \quad p = \pi(X, Y, P),$$

i oznaczmy

$$(15) \quad \Phi(X, Y, P) = F[\chi(X, Y, P), \psi(X, Y, P), \pi(X, Y, P)].$$

Niech wzory (4) określają wstęgę elementów liniowych równania (14), wzdłuż której jest spełniony warunek $x'(t) \neq 0$. Załóżmy ponadto, że dla wstęgi przekształconej (5) spełniona jest też nierówność $X'(t) \neq 0$.

Wówczas ze związków $x=x(t)$ i $X=X(t)$ można wyznaczyć t jako jednoznacznie funkcję zmiennych x i X

$$t=t(x), \quad t=T(X)$$

i oznaczając

$$\bar{y}=\bar{y}(x)=y[t(x)], \quad \bar{Y}=\bar{Y}(x)=Y[T(X)]$$

mamy, jak widać,

$$\bar{y}'=\frac{d\bar{y}}{dx}=\frac{y'}{x'}, \quad \bar{Y}'=\frac{d\bar{Y}}{dX}=\frac{Y'}{X'},$$

a ponieważ związki Pfaffa są spełnione, więc mamy także

$$\bar{y}'=p, \quad \bar{Y}'=P.$$

Stąd wobec (15) otrzymujemy natychmiast

$$\Phi[X, \bar{Y}, \bar{Y}']=\Phi(X, Y, P)=F(x, y, p)=F(x, \bar{y}, \bar{y}')=0.$$

Z powyższego wynika, że jeżeli wstęga (4) jest rozwiązaniem równania (14), to wstęga przekształcona (5) jest rozwiązaniem równania

$$(16) \quad \Phi(X, Y, Y')=0$$

i oczywiście na odwrót, tak że przy wprowadzonych zastrzeżeniach co do funkcji $x(t)$ i $X(t)$ można traktować równania (14) i (16) jako równoważne.

121. Jako zastosowanie wyprowadzimy tzw. transformację Legendre'a równania (14), ograniczając się do obszaru V zmiennych x, y i p , w którym zachodzą nierówności

$$F_x(x, y, p)+F_y(x, y, p)p \neq 0, \quad F'_p(x, y, p) \neq 0.$$

Na podstawie rozumowania z ustępu 117, str. 163, dla każdego rozwiązania równania (14)

$$(17) \quad x=x, \quad y=\varphi(x), \quad p=\varphi'(x)=y'$$

zachodzi nierówność $dp/dx \neq 0$.

Biorąc teraz przekształcenie

$$(18) \quad X=p, \quad Y=px-y, \quad P=x,$$

które jest, jak łatwo sprawdzić, przekształceniem stycznościowym, stwierdzamy, że wstęga (17) i jej przekształcenie według wzorów (18)

$$X=\varphi'(x), \quad Y=\varphi'(x)x-\varphi(x), \quad P=x$$

spełniają wymienione w ustępie 120, str. 167, warunki wystarczające na to, aby równania (14) i (16) były równoważne. Stąd, tworząc przekształcenie odwrotne do (18) kształtu

$$(19) \quad x=P, \quad y=PX-Y, \quad p=X$$

i podstawiając prawe strony wzorów (19) do równania (14), otrzymujemy równoważne z nim równanie

$$(20) \quad F(Y', Y'X-Y, X)=0$$

będące zapowiedzianą transformacją Legendre'a. Rezultat ten może być zresztą dowiedziony niezależnie od wyników uzyskanych w ustępie 120, str. 168, w sposób następujący.

Wychodząc z rozwiązania (17) obieramy pochodną p jako nową zmienną niezależną X , wyrażamy dwie pierwsze funkcje występujące w tym rozwiązaniu jako funkcje tej zmiennej $x=x(X)$, $y=y(X)=\varphi[x(X)]$ i wprowadzamy zamiast y nową funkcję niewiadomą Y za pomocą podstawienia

$$(21) \quad Y=Y(X)=xX-y=x(X)X-y(X).$$

Ze wzoru tego wynika, że istnieje pochodna

$$P=Y'=Y'(X)=x'(X)X+x(X)-\varphi'[x(X)]x'(X)=x'(X)X+x(X)-Xx'(X)=x(X)=x;$$

stąd wobec (21) dostajemy równość

$$y=xX-Y=Y'X-Y.$$

Jeśli więc w równaniu (14) wprowadzimy pochodną y' jako nową zmienną niezależną X i równocześnie zamiast y jako nową funkcję niewiadomą Y weźmiemy wyrażenie $xX-y$, a zamiast x — pochodną $P=Y'$, to otrzymamy równanie (20) równoważne, jak łatwo sprawdzić, równaniu (14).

PRZYKŁAD 77. Scałkować równanie $(y-y'x)^2+y'y=0$ w obszarach zmiennych x, y i p , w których spełnione są nierówności

$$(22) \quad p \neq 0, \quad 2px^2-2yx+y \neq 0.$$

W powyższych obszarach można stosować do rozpatrywanego równania transformację Legendre'a, co po łatwym rachunku prowadzi do równania jednorodnego $Y'=Y/X-(Y/X)^2$. Podstawiając $Y/X=u$ otrzymujemy równanie o rozdzielonych zmiennych $u'=-u^2/X$ i jest, jak łatwo sprawdzić, $u \neq 0$. Stąd dostajemy każde rozwiązanie ostatniego równania w postaci $u=1/\ln CX$, gdzie C jest pewną stałą różną od zera i wobec tego $Y=X/\ln CX$, $P=1/\ln CX-1/\ln^2 CX$. Wracając teraz do równania początkowego otrzymujemy jego rozwiązanie w formie parametrycznej

$$x=\frac{1}{\ln Cp}-\frac{1}{\ln^2 Cp}, \quad y=-\frac{p}{\ln^2 Cp}, \quad p=p.$$

Wstawiając otrzymane rozwiązanie do nierówności (22) uzyskujemy z kolei warunki zmienności p w zależności od wyboru stałej dowolnej C

$$p \neq 0, \quad \frac{p}{\ln^2 Cp} - \frac{2p}{\ln^3 Cp} \neq 0, \quad Cp \neq 1$$

czyli

$$0 < p < \frac{1}{C} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{C} < p < \frac{e^2}{C} \quad \text{lub} \quad \frac{e^2}{C} < p < \infty \quad \text{przy} \quad C > 0,$$

$$\frac{1}{C} < p < 0 \quad \text{lub} \quad \frac{e^2}{C} < p < \frac{1}{C} \quad \text{lub} \quad -\infty < p < \frac{e^2}{C} \quad \text{przy} \quad C < 0.$$

ZADANIA. 72. Scałkować za pomocą transformacji Legendre'a następujące równania różniczkowe:

$$(y - px)p = cy, \quad (y - px)^2 + 2p(y - px) + px = 0, \quad (y - px)e^p + x = 0.$$

73. Zastosować przekształcenie Legendre'a do równania d'Alemberta i opierając się na uzyskanym wyniku podać nową metodę jego całkowania.