

Prócz tego, jak widać z (12), warunek (9) zachodzący dla funkcji U i dla dowolnego rozwiązania (2) równania (1) pociąga za sobą analogiczny warunek dla tegoż rozwiązania i funkcji V . Zatem V jest całką równania (1).

PRZYKŁAD 44. W przykładzie 43 widzieliśmy, że funkcja $x^2/2 + 1/y$ jest całką równania $xy^2 dx - dy = 0$. Wobec tego funkcje takie, jak np. $(x^2/2 + 1/y)^2$, $y/(x^2y + 2)$ itp. są również całkami tego równania.

Na zakończenie wprowadzimy jeszcze dla równania (1), przy początkowych założeniach, następujące pojęcie: układ funkcji

$$(13) \quad x = x(t, C), \quad y = y(t, C),$$

określonych i będących klasy C^1 w pewnym obszarze zmiennych t i C nazywamy *rozwiązaniem ogólnym równania* (1), jeżeli układ ten, traktowany przy dowolnej, chwilowo ustalonej wartości zmiennej C , jako układ funkcji zależnych tylko od jednej zmiennej t , przedstawia, przy wszystkich wartościach C , dokładnie wszystkie rozwiązania równania (1). Znaczy to, że dla każdego rozwiązania równania (1) istnieje taka dopuszczalna wartość C i taki dopuszczalny przedział zmienności t , że układ (13) przy ustalonym C jest w tym przedziale identyczny z rozważanym rozwiązaniem. Na odwrót, przy każdej chwilowo ustalonej dopuszczalnej wartości C i dopuszczalnym przedziale zmienności t , układ (13) jest pewnym rozwiązaniem równania (1). Termin „dopuszczalny” oznacza tu, że należy brać pod uwagę takie wartości C i takie odpowiednie przedziały zmienności t , dla których wyrażenia (13) nie tracą sensu.

ZADANIE 21. Znaleźć całki następujących równań różniczkowych:

$$3ydx + 2xdy = 0, \quad aydx + (x^2 + b)dy = 0, \quad dy - \sin^2 x dx = 0.$$

ROZDZIAŁ III

EFEKTYWNE ROZWIĄZYWANIE PEWNYCH TYPÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

§ 16. Równanie zupełne

63. Przez *efektywne rozwiązywanie*, czyli inaczej *całkowanie równania różniczkowego*, rozumiemy, zależnie od przykładu, znalezienie w postaci elementarnej bądź wszystkich jego rozwiązań np. w formie rozwiązania ogólnego, bądź całki tego równania, bądź wreszcie jakiegos rozwiązania szczególnego.

Efektywne rozwiązywanie równania różniczkowego jest zagadnieniem bardzo ważnym zarówno w matematyce, jak i mechanice, fizyce, astronomii, naukach przyrodniczych, technicznych i innych. Należy podkreślić, że wyznaczenie takiego rozwiązania na drodze elementarnej i wyrażenie go np. za pomocą funkcji elementarnych jest możliwe tylko w nielicznych przypadkach, natomiast w większości przypadków uciekać się trzeba do metod przybliżonych lub graficznych. Jeżeli całkowanie równania można sprowadzić do zadania, którym zajmuje się rachunek całkowy lub jakiś inny dział matematyki, np. elementarniejsze działy algebry, to zadanie uważa się z punktu widzenia teorii równań różniczkowych za efektywnie rozwiązane. W rozdziale obecnym zajmujemy się najważniejszymi typami tych równań różniczkowych, które mogą być efektywnie rozwiązane.

W napotykanym przykładach będziemy stosowali często metodę, polegającą na przeprowadzaniu czysto formalnych rachunków bez analizowania założeń, przy których są one wykonalne, oraz na późniejszym sprawdzeniu, w jakim stopniu otrzymane wyniki są kompletne i czynią zadość warunkom zagadnienia.

W wielu przykładach i zadaniach późniejsze sprawdzenie, analiza założeń i inne uzupełnienia pozostawione będą milcząco, jako ćwiczenie, czytelnikowi.

64. Wróćmy, przy założeniach sformułowanych w ust. 60, str. 85 do równania

$$(1) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Jeżeli w obszarze T istnieje taka funkcja dwóch zmiennych klasy C^1

$$(2) \quad F(x, y),$$

że w obszarze tym jest stałe

$$(3) \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y),$$

to równanie (1) nazywamy *zupełnym*, funkcję zaś (2) — *funkcją pierwotną równania* (1).

Jeżeli istnieją funkcje pierwotne (2), to wszystkie one wyrażają się, w zależności od funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, znanym wzorem

$$(4) \quad F(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

z dokładnością do stałej dowolnej; wypisaną całkę należy rozumieć jako całkę krzywoliniową wziętą np. wzdłuż jakiegokolwiek łamanej łączącej w obszarze T dowolny lecz chwilowo ustalony punkt (x_0, y_0) z punktem zmiennym (x, y) .

W szczególności, jeżeli obszar T jest wnętrzem prostokąta, to jako łamaną można wziąć odcinki łączące punkty (x_0, y_0) i (x, y_0) oraz (x, y_0) i (x, y) , co daje natychmiast równość

$$(5) \quad F(x, y) = C + \int_{x_0}^x P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt,$$

gdzie całki należy już rozumieć w sensie zwykłym.

Jeżeli przyjęty wyżej obszar T jest jednospójny i jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w tym obszarze, to na podstawie twierdzenia znanego z rachunku różniczkowego i całkowego warunek konieczny i dostateczny istnienia funkcji pierwotnej równania (1) wyraża się identycznością w T postaci

$$(6) \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Widoczne jest, że dla dowolnego rozwiązania

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

równania (1) zachodzi identyczność

$$(7) \quad F[x(t), y(t)] = C,$$

którą sprawdzamy różniczkując ją względem t oraz korzystając z równań (3) i z definicji rozwiązania podanej w ustępie 60, str. 85.

Stąd wnioskujemy bezpośrednio, że jeśli funkcja pierwotna (2) nie redukuje się do stałej w żadnym otoczeniu żadnego punktu obszaru T , to funkcja ta jest całką równania (1).

Podane wnioski pozwalają w większości przypadków rozstrzygnąć, czy dane równanie (1) jest zupełne, wyznaczyć jego funkcję pierwotną, i — co się zwykle z tym łączy — jego całkę.

Na zakończenie zauważmy, że w świetle wskazań zawartych w ustępie 63, str. 91, należy uważać równanie różniczkowe zupełne za rozwiązywalne efektywnie z punktu widzenia teorii równań różniczkowych.

PRZYKŁAD 45. Równanie $(y+2)dx + (x-1)dy = 0$ jest zupełne, a jego funkcją pierwotną jest $xy + 2x - y$ i tym samym całką tego równania jest także $xy + 2x - y$.

PRZYKŁAD 46. Znaleźć rozwiązanie szczególne $y=\varphi(x)$ równania

$$(2x-3y)dx + (-3x+4y)dy = 0$$

spełniające warunek początkowy $\varphi(2)=1$.

Równanie jest zupełne, a jego funkcja pierwotna ma postać $x^2 - 3xy + 2y^2$. Wobec tego rozwiązanie $y=\varphi(x)$ powinno spełniać równość $x^2 - 3xy + 2y^2 = C$. Z warunku początkowego: $C = 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = 0$. Zatem rozwiązaniem szczególnym równania należy wyznaczyć ze związku $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$. Otrzymujemy $y=x$ i $y=x/2$. Pierwsza z otrzymanych funkcji nie czyni zadość warunkowi początkowemu; żądanym rozwiązaniem jest druga z nich.

ZADANIE 22. Scałkować następujące równania różniczkowe:

$$2x dx + y dy = 0, \quad (3x^2 - ay) dx + (3y^2 - ax) dy = 0, \\ \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{y dx - x dy}{x^2+y^2} = 0, \quad \left[\frac{2x}{y} - \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right] dx + \left[\frac{2y}{x} - \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right] dy = 0.$$

§ 17. Równanie postaci $y'=f(x)$ i $y'=g(y)$

65. Równanie

$$(1) \quad y' = f(x)$$

należy w gruncie rzeczy do rachunku całkowego, może być jednak traktowane także jako szczególny przypadek równania zupełnego. Funkcja $f(x)$ jest tu funkcją daną, o której zakładamy, że jest ciągłą w jakimś przedziale skończonym lub nieskończonym (a, b) .

Rachunek całkowity pozwala od razu napisać rozwiązanie ogólne tego równania np. w postaci wzoru

$$(2) \quad y = C + \int_{\xi}^x f(s) ds,$$

gdzie ξ jest dowolnie wybraną, ustaloną liczbą przedziału (a, b) , C zaś — zupełnie dowolną liczbą.

Natomiast wzór

$$y - \int_{\xi}^x f(s) ds = U(x, y)$$

daje całkę równania (1).

Dla równania (1) można też rozwiązać zadanie Cauchy'ego, tzn. podać rozwiązanie szczególnie $y = \varphi(x)$ spełniające warunek początkowy $\varphi(x_0) = y_0$, gdzie x_0 jest wzięte z przedziału (a, b) , y_0 zaś jest liczbą zupełnie dowolną. Należy w tym celu nadać stałej C występującej w (2) stosowną wartość C_0 , mianowicie wartość

$$C_0 = y_0 - \int_{\xi}^{x_0} f(s) ds,$$

przez co szukane rozwiązanie szczególne przybierze postać

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

Uwaga. Izoklinami (p. ust. 24, str. 33) równania (1) są linie proste równoległe do osi y . Łuki całkowite równania są przystające i różnią się jedynie przesunięciem w kierunku osi y .

PRZYKŁAD 47. Wyznaczyć rozwiązanie szczególne $y = \varphi(x)$ równania $dy/dx = 2x + 1$, spełniające warunek początkowy $\varphi(1) = 2$. Rozwiązanie ogólne ma tu postać $y = x^2 + x + C$. Wstawiając wartości 1 i 2 za x i y otrzymamy potrzebną wartość C , mianowicie 0. Szukanym rozwiązaniem szczególnym jest więc funkcja $y = \varphi(x) = x^2 + x$.

66. Zakładamy, że w równaniu

$$(3) \quad y' = g(y)$$

funkcja $g(y)$ jest ciągła i różna od zera w pewnym przedziale skończonym lub nieskończonym (c, d) .

W tym przypadku pochodna funkcji niewiadomej $y = y(x)$ spełniającej (3) ma na podstawie (3) stały znak, czyli funkcja ta jest ściśle monotoniczna i wobec tego istnieje funkcja do niej odwrotna i różniczkowalna

$$(4) \quad x = x(y).$$

Wprowadzając tę funkcję, jako niewiadomą, do równania (3) otrzymujemy, wobec oczywistej równości

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'},$$

równanie

$$x' = \frac{1}{g(y)}$$

równoważne równaniu (3). Równanie to jest typu zbadanego przedtem w ustępie 65. Po wyznaczeniu rozwiązań (4) tego równania otrzymujemy rozwiązania równania (3) przez wyznaczenie funkcji odwrotnej do (4).

Uwaga. W wielu przypadkach zadowalamy się rozwiązaniami w postaci $x = \varphi(y)$. Przejście do postaci $y = \varphi(x)$ wykonujemy tylko wtedy, jeżeli mamy specjalne ku temu powody.

PRZYKŁAD 48. Ostyganie ciała. Ciało oziębiające się traci ciepło na rzecz swego otoczenia. Przyjmując, że podczas tego zjawiska temperatura ϑ_0 otoczenia nie ulega zmianie, co zachodzi z dużym przybliżeniem, jeżeli ciało jest małe w stosunku do otoczenia oraz że temperatura ciała jest stale wyższa od ϑ_0 , oznaczmy przez $\vartheta = \vartheta(t)$ temperaturę ciała w zależności od czasu t , przez m — masę właściwą, a przez c — ciepło właściwe ciała stygnącego. W myśl prawa Newtona prędkość utraty ciepła jest proporcjonalna do różnicy temperatur w danej chwili, tzn.

$$-mc \frac{d\vartheta}{dt} = h[\vartheta(t) - \vartheta_0],$$

gdzie h jest współczynnikiem proporcjonalności, zależnym od warunków fizycznych ciała.

Jest to równanie różniczkowe typu (3).

Całkujemy więc w sposób poprzednio omówiony równanie

$$\frac{dt}{d\vartheta} = -\frac{mc}{h} \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0}$$

i otrzymujemy jego rozwiązanie ogólne w postaci

$$t = -\frac{mc}{h} \ln(\vartheta - \vartheta_0) + C.$$

Wyznaczając stąd ϑ dostajemy

$$(5) \quad \vartheta = \vartheta_0 + D e^{-\frac{ht}{mc}},$$

gdzie t może się zmieniać w przedziale $(-\infty, \infty)$, zaś $D > 0$.

Żeby teraz rozwiązać postawione zadanie fizyczne należy wyznaczyć stałą D z warunku początkowego polegającego na tym, że dla początkowego czasu t_0 temperatura ciała stygnącego jest znana i wynosi np. Θ_0 . Wtedy musi być

$$\Theta_0 = \vartheta_0 + D e^{-\frac{ht_0}{mc}},$$

a więc obliczając stąd D i wstawiając do (5) dostajemy

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + (\Theta_0 - \vartheta_0) e^{-\frac{h}{mc}(t - t_0)}.$$

Widać, że jeżeli $t \rightarrow \infty$, to $\vartheta(t) \rightarrow \vartheta_0$, czyli temperatura ciała stygnącego, pozostając stale wyższą od temperatury otoczenia, zmierza asymptotycznie do tej ostatniej.

PRZYKŁAD 49. W przykładzie 3 ułożyliśmy równanie różniczkowe $dx/dt = k(a-x)$, $x < a$, wyrażające prędkość inwersji cukru trzcinowego. Ogólniej, równanie to występuje przy badaniu prędkości tzw. reakcji jednorodninowych, w których bierze udział tylko jedna substancja A przechodząca w substancję A' . Aby wyznaczyć funkcję $x(t)$ całkujemy równanie równoważne $k dt/dx = 1/(a-x)$ i otrzymujemy rozwiązanie ogólne w postaci $kt = C - \ln(a-x)$. Stałą C wyznaczamy z warunku początkowego, orzekającego, że np. dla $t=0$ jest $x=x_0$, tzn., że w momencie początkowym już ilość x_0 substancji A uległa przemianom na substancję A' . Otrzymujemy więc $C = \ln(a-x_0)$ i następnie $kt = \ln[(a-x_0)/(a-x)]$. Stąd znajdujemy $x = a + (x_0 - a)e^{-kt}$, gdy zaś przyjmiemy, że $x_0 = 0$, otrzymamy $x = a(1 - e^{-kt})$.

ZADANIE 23. Prędkość reakcji dwudrobinowej wyraża się wzorem

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

gdzie a , b i k są stałymi. Znaleźć rozwiązanie $x(t)$ spełniające warunek początkowy $x(0)=0$.

Rozwiązać podobne zadanie dla reakcji trójdrobinowej, gdzie występuje równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)(c-x)^*.$$

§ 18. Równanie o zmiennych rozdzielonych, I

67. Równanie

$$(1) \quad P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

gdzie $P(x)$ i $Q(y)$ są funkcjami ciągłymi w pewnych przedziałach skończonych lub nieskończonych (A, B) i (C, D) , jest szczególnym przypadkiem równania zupełnego, rozważanego w ustępie 64, str. 91.

Jego funkcją pierwotną jest, jak widać, każda funkcja postaci

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy.$$

Z łatwo zrozumiałych przyczyn równanie to nosi nazwę *równania o rozdzielonych zmiennych*.

*) P. J. Zawidzki, *Kinetyka chemiczna*, Warszawa 1931. W książce tej można znaleźć wielką ilość równań różniczkowych występujących przy badaniu prędkości reakcji chemicznych.

Przechodząc do efektywnego rozwiązania równania (1) zauważmy najpierw, że równanie to ma sens w prostokącie T określonym nierównościami

$$A < x < B, \quad C < y < D.$$

Zakładając teraz, że układ funkcji

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

jest dowolnym rozwiązaniem równania (1) przebiegającym w prostokącie T i stosując wzory (5) i (7) z ustępu 64, str. 92, otrzymujemy równość wiążącą x i y postaci

$$(2) \quad \int_{x_0}^x P(s)ds + \int_{y_0}^y Q(t)dt = C,$$

gdzie $M_0 = (x_0, y_0)$ jest dowolnym, chwilowo ustalonym punktem prostokąta T . W szczególności dla rozwiązania przechodzącego przez punkt M_0 otrzymany związek (2) przyjmuje, po przeniesieniu wyrazu, postać

$$(3) \quad \int_{y_0}^y Q(t)dt = - \int_{x_0}^x P(s)ds,$$

pozwalającą — jeżeli M_0 nie jest punktem osobliwym równania (1) — przedstawić jednoznacznie rozważane rozwiązanie równania (1) przebiegające w pewnym otoczeniu punktu M_0 w formie $y=\varphi(x)$ lub $x=x(y)$. Stąd łatwo wnosimy (p. ust. 60, str. 87), że w punktach nieosobliwych równania (1) ma miejsce jednoznaczność rozwiązania.

PRZYKŁAD 50. Scałkować równanie $x dx + y dy = 0$.

Zmienne są rozdzielone i można zastosować wzór (2). Całkując i przyjmując $x_0=y_0=0$ otrzymujemy

$$\int_0^x s ds + \int_0^y t dt = \frac{C}{2}$$

czyli

$$x^2 + y^2 = C.$$

Rozwiązania przebiegają więc po okręgach o środku w punkcie $(0, 0)$, który jest dla równania punktem osobliwym; przez punkt ten nie przechodzi żadne rozwiązanie.

PRZYKŁAD 51. Znaleźć trajektorie ortogonalne rodziny elips podobnych.

W stosownym układzie współrzędnych równania elips tej rodziny mają postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C.$$

Równaniem różniczkowym tej rodziny jest więc $x dx/a^2 + y dy/b^2 = 0$. Wobec tego równanie różniczkowe trajektorii ortogonalnych ma postać $a^2 y dx - b^2 x dy = 0$ czyli, dla $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $a^2 dx/x - b^2 dy/y = 0$. Całkując mamy $a^2 \ln|x| - b^2 \ln|y| = \gamma$, a stąd $|y|^{b^2}/|x|^{a^2} = \Gamma$, gdzie Γ jest stałą całkowania. Jeżeli $a=b$, to mamy linie proste przechodzące przez początek układu.

PRZYKŁAD 52. Scałkujmy równanie $Q = 2\pi kxy dy/dx$, ($x > 0$, $y > 0$), które napotkaliśmy w przykładzie 4 przy omawianiu kształtu zwierciadła wody w otoczeniu studni. Rozdzielając zmienne otrzymujemy $Q dx/x - 2\pi kxy dy = 0$, skąd całkując otrzymujemy

$$Q \int \frac{dx}{x} - 2\pi k \int y dy = C,$$

a stąd

$$Q \ln x - \pi k y^2 = C.$$

Jest to całka rozważanego równania. Jeżeli teraz głębokość wody w studni oznaczmy przez h , a promień przekroju studni przez r , to dla $x=r$ będzie $y=h$ czyli

$$C = Q \ln r - \pi k h^2.$$

Zwierciadło wody w otoczeniu studni jest więc określone równaniem

$$Q \ln x - \pi k y^2 = Q \ln r - \pi k h^2,$$

z którego otrzymujemy

$$\ln \frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q} (y^2 - h^2) \quad \text{lub} \quad y = \sqrt{h^2 + \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{x}{r}}.$$

§ 19. Równanie o zmiennych rozdzielonych, II

68. Równania rozważane w § 17 są szczególnymi przypadkami równania postaci

$$(1) \quad y' = f(x)g(y),$$

noszącego także nazwę *równania o rozdzielonych zmiennych*. O funkcjach $f(x)$ i $g(y)$ zakładamy tu, że są one ciągłe w pewnych przedziałach skończonych lub nieskończonych (A, B) i (C, D) i że niekoniecznie są one różne od zera.

Ogół rozwiązań powyższego równania nie da się opisać w żaden prosty i dokładny sposób ze względu na nieograniczoną ilość możliwych przypadków; poprzestaniemy więc na pobieżnym scharakteryzowaniu tych rozwiązań w oparciu o pojęcie rozwiązań integralnych oraz o specjalne własności równania (1).

Założmy, że funkcja $g(y)$ jest w pewnym przedziale (c, d) zawartym w (C, D) różna od zera. Ograniczając się do rozpatrywania równania (1) w prostokącie T_0 określonym nierównościami

$$A < x < B, \quad c < y < d$$

możemy udowodnić następujące

Twierdzenie. Każde rozwiązanie integralne y równania (1) przebiegające w T_0 i przechodzące przez dany punkt $M_0 = (x_0, y_0)$ tego prostokąta jest określone wzorem

$$(2) \quad \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(s) ds,$$

gdzie x przebiega najszerszy przedział (a, β) zawarty w (A, B) , zawierający x_0 i taki, że zachodzą w nim nierówności

$$\inf_{c < y < d} \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} < \int_{x_0}^x f(s) ds < \sup_{c < y < d} \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}.$$

Dowód. Zastępując (1) równoważnym równaniem

$$f(x) dx - \frac{dy}{g(y)} = 0$$

i stosując wzór (2) z ustępu 67, str. 97, widzimy natychmiast, że każde rozwiązanie przechodzące przez punkt M_0 spełnia związek (2) i istnieje co najwyżej w przedziale (a, β) . Przedział ten odpowiada tym samym rozwiązaniom integralnemu, wyznaczonemu przez (2).

Oznaczmy przez

$$(3) \quad (c_k, d_k), \quad k=1, 2, \dots$$

ciąg skończony lub nieskończony przedziałów rozłącznych, zawartych w (C, D) , w których i wyłącznie w których funkcja $g(y)$ jest różna od zera. W oparciu o ciągłość funkcji $g(y)$ nietrudno jest wykazać, że istnieje jeden i tylko jeden taki ciąg; w punktach końcowych przedziałów funkcja $g(y)$ oczywiście znika, o ile punkty te nie pokrywają się z punktami C lub D .

W dalszym ciągu rozważmy prostokąt T określony nierównościami

$$A < x < B, \quad C < y < D,$$

w którym dana jest prawa strona równania (1). W prostokącie tym możemy wyróżnić zawarty w nim ciąg prostokątów rozłącznych T_k określonych odpowiadającymi przedziałom (3) nierównościami

$$A < x < B, \quad c_k < y < d_k, \quad k=1, 2, \dots$$

Powyższa konstrukcja pozwala, w połączeniu z udowodnionym twierdzeniem oraz z ogólnymi twierdzeniami o istnieniu i własnościach

rozwiązań integralnych, scharakteryzować częściowo ogół rozwiązań równania (1).

Jeśli y jest jakimkolwiek rozwiązaniem integralnym równania (1), przebiegającym w prostokącie T od brzegu do brzegu, to każda część tego rozwiązania przebiegająca w którymś z prostokątów T_k przebiega w nim także od brzegu do brzegu i jest określona równością (2), gdzie za M_0 można przyjąć dowolny punkt odpowiedniej części rozwiązania.

Innymi słowy: każde rozwiązanie integralne równania (1) składać się może między innymi z części określonych równaniami typu (2).

Załóżmy teraz, że w danym punkcie $M_0=(x_0, y_0)$ obszaru jest $g(y_0)=0$. Widać od razu, że przez ten punkt przechodzi rozwiązanie integralne będące stałą $y=y_0$. Mamy więc uzupełnienie wniosków poprzednich: rozwiązanie równania (1) składać się może także z części będących odcinkami lub półprostymi równoległymi do osi x .

Powyższa dwójność części rozwiązania stanowi właśnie główną przeszkodę dla możliwości opisanego ogółu rozwiązań jednolitymi wzorami, zwłaszcza jeżeli jest nieskończenie wiele przedziałów (3) i jeżeli przez niektóre punkty prostokąta przechodzić może więcej niż jedno rozwiązanie.

Trudności te usuwa natychmiast założenie jednoznaczności rozwiązań integralnych w prostokącie T , gdyż w tym przypadku rozwiązania są wyłącznie albo pierwszego, albo drugiego z podanych typów.

Jeżeli bowiem rozwiązanie integralne $y=\varphi(x)$ przechodzi przez jakiś punkt któregoś z prostokątów T_k , to musi ono przebiegać całkowicie w tym prostokącie, czyli być typu (2), w przeciwnym bowiem razie musiałoby być dla pewnego x z przedziału (A, B) $\varphi(x)=c_k$ lub $\varphi(x)=d_k$, i przez punkt $P=(x, c_k)$ lub $P=(x, d_k)$ przechodziłyby dwa różne rozwiązania — jedno rozważane, a drugie w postaci stałej $y=c_k$ lub $y=d_k$, wbrew założonej jednoznaczności. Podobnie, przez każdy punkt spoza wszystkich prostokątów T_k przechodzi w myśl jednoznaczności wyłącznie rozwiązanie drugiego typu w postaci stałej.

Warunek konieczny i dostateczny jednoznaczności wyraża następujące

Twierdzenie. *Na to, aby przez każdy punkt prostokąta T przechodziło dokładnie jedno rozwiązanie integralne równania (1), potrzeba i wystarczy, aby było albo stale $f(x)=0$, albo $g(y)\neq 0$, albo też aby były rozbieżne wszystkie całki postaci*

$$(4) \quad \int_{c_k}^y \frac{dt}{g(t)} \quad \text{dla} \quad c_k \neq C, \quad \int_{d_k}^y \frac{dt}{g(t)} \quad \text{dla} \quad d_k \neq D, \quad k=1, 2, \dots,$$

gdzie y jest dowolnym punktem przedziału (c_k, d_k) .

Dowód. Wykażemy, że podany warunek jest konieczny. Istotnie, zakładając, że 1° zachodzi jednoznaczność, 2° dla $x=\xi$ jest $f(\xi)\neq 0$,

3° funkcja $g(y)$ nie jest stale różna od zera i 4° dla pewnego k jest zbieżna np. pierwsza z całek (4) i przyjmując w (2) $x_0=\xi$, $y_0=c_k$, otrzymujemy natychmiast pewne rozwiązanie równania (1) określone w jakimś otoczeniu lewo- lub prawostronnym punktu ξ przechodzące przez punkt $P=(\xi, c_k)$ i różne od rozwiązania $y=c_k$ przechodzącego także przez punkt P , wbrew założonej jednoznaczności. Dowód przy założeniu zbieżności drugiej z całek (4) jest analogiczny.

Wykażemy teraz, że wymieniony warunek jest dostateczny. Zakładając, że warunek ten jest spełniony zauważmy najpierw, że jeśli punkt $P^*=(x^*, y^*)$ należy do któregoś z prostokątów T_k , to każde rozwiązanie integralne $y=\varphi(x)$ równania (1) przechodzące przez ten punkt przebiega całkowicie w T_k . Rzeczywiście, niech (α, β) będzie przedziałem, w którym istnieje rozważane rozwiązanie y i niech (α_1, β_1) będzie najszerszym przedziałem zawierającym punkt x^* , w którym rozwiązanie to przebiega w T_k .

Na podstawie poprzednich twierdzeń widzimy, że rozwiązanie to spełnia wzór (2). Stąd, przypuszczając, że $\alpha_1 > \alpha$ widzimy, że prawa strona równości (2) jest ograniczona w przedziale zamkniętym (α_1, x^*) i wobec tego rozważane w tym przedziale rozwiązanie y występujące po lewej stronie tej równości musi przebiegać wewnątrz T_k , bądź z uwagi na założoną rozbieżność całek (4) w przypadku, gdy $c_k \neq C$ lub $d_k \neq D$, bądź z przyczyn oczywistych w przypadku, gdy $c_k = C$ lub $d_k = D$. W tym jednak przypadku rozwiązanie y przebiega jeszcze wewnątrz T_k także w pewnym dostatecznie małym otoczeniu lewostronnym punktu α_1 , wbrew określeniu tego punktu. Zatem musi być $\alpha_1 = \alpha$ i analogicznie $\beta_1 = \beta$.

Niech teraz $y=\varphi(x)$ i $y=\psi(x)$ będą dwoma jakimikolwiek rozwiązaniami integralnymi równania (1) przechodzącymi przez dany dowolny punkt $M_0=(x_0, y_0)$. Jeżeli jest stale $\varphi'(x)=0$ i $\psi'(x)=0$, to rozwiązania te jako stałe i przechodzące przez wspólny punkt M_0 są identyczne. Jeżeli zaś dla pewnego $x=x^*$ jest $\varphi'(x^*)\neq 0$ (rozumowanie dla $\psi'(x^*)\neq 0$ jest symetryczne), to przyjmując $y^*=\varphi(x^*)$ mamy, w myśl równania (1), także $g(y^*)\neq 0$, a więc punkt $P^*=(x^*, y^*)$ należy do któregoś z prostokątów T_k . Wówczas rozwiązanie $\varphi(x)$ przebiega całkowicie w T_k i punkt M_0 także należy do T_k , a więc i rozwiązanie $\psi(x)$ musi przebiegać w T_k . Ponieważ jednak przez każdy punkt T_k przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorem (2), więc $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ muszą być identyczne, c. b. d. o.

ZADANIA. 24. Scałkować następujące równania:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = (1+x)(1-y), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{e^{x+y}},$$

$$(y + \sqrt{1+y^2})dx - (x + \sqrt{1+x^2})dy = 0, \quad x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$$

25. Znaleźć łuk $y=\varphi(x)$, dla którego długość stycznej (tzn. długość odcinka, którego końcami są: punkt styczności oraz punkt przecięcia stycznej z osią x) jest wielkością stałą.

26. Znaleźć łuki, dla których długość normalnej (określenie analogiczne do użytego w zadaniu poprzednim) jest wielkością stałą.

27. Wyznaczyć takie łuki $r=r(\varphi)$ we współrzędnych biegunowych, że kąt α między styczną a osią biegunową wynosi $n\varphi$.

28. Przy oznaczeniach zadania poprzedniego znaleźć łuki, dla których kąt $\alpha+\varphi$ ma wartość stałą.

29. Wyznaczyć tor punktu poruszającego się w płaszczyźnie w taki sposób, że wektor prędkości jest w każdym punkcie prostopadły do promienia wodzącego, łączącego punkt ruchomy z punktem stałym.

§ 20. Równanie Eulera

69. Rozpatrzmy najpierw równanie o rozdzielonych zmiennych

$$(1) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1.$$

Możemy natychmiast napisać jego całkę w postaci

$$\arcsin x + \arcsin y = C,$$

w której występują funkcje przestępne. Jednak można też podać całkę tego równania wyrażającą się przez funkcje algebraiczne. W tym celu pomnożmy równanie (1) stronami przez

$$(2) \quad \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy.$$

Równanie (1) przybierze wtedy postać

$$(3) \quad \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx + \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy = 0,$$

i łatwo można stwierdzić, że współczynniki przy dx i dy w równaniu (3) są pochodnymi cząstkowymi funkcji

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

tak że całka równania (3), a więc i równania (1), ma postać algebraiczną

$$(4) \quad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C.$$

Wynik jaki otrzymaliśmy jest bardzo interesujący z tego względu, że bezpośrednie całkowanie doprowadziło nas do całki wyrażającej się przez funkcje przestępne, podczas gdy później okazało się, że równanie (1) ma całkę (4) wyrażającą się przez funkcje o wiele prostsze. Obie te całki są zresztą od siebie zależne, w sensie pojęcia zależności funkcji w analizie.

70. Euler uogólnił poprzedni przykład na przypadek równania

$$(5) \quad \frac{dx}{\sqrt{w(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{w(y)}} = 0,$$

gdzie $w(z)$ jest wielomianem stopnia czwartego postaci

$$(6) \quad w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4.$$

Równanie (5) stało się następnie punktem wyjścia dla rozwoju teorii funkcji eliptycznych i stąd jego wielkie znaczenie dla matematyki.

Całka nieoznaczona $\int [w(z)]^{-1/2} dz$, gdzie $w(z)$ jest określone wzorem (6), nie da się wyrazić przez skończoną ilość funkcji elementarnych i należy do tzw. całek eliptycznych, a zatem bezpośrednie całkowanie równania (5) dałoby nam całkę tego równania w postaci przestępnej. Euler wykazał jednak, że i w tym przypadku istnieje całka algebraiczna równania (5).

Rozważymy to zagadnienie zakładając, że funkcja (6) ma postać

$$w(z) = (1-z^2)(1-k^2 z^2),$$

gdzie k jest stałą zawartą między 0 i 1, do czego zawsze można doprowadzić przez proste przekształcenie. Więcej szczegółów znajdzie czytelnik w kursie analizy Goursata, gdzie równanie Eulera jest obszernie omówione *).

Mysł całkowania równania

$$(7) \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} = 0$$

polega na szukaniu rozwiązania w takiej postaci parametrycznej

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

aby

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}, \quad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}.$$

Przy założeniu, że zachodzi (8), obliczmy wyrażenie

$$\frac{x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left[x \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - y \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]}.$$

Różniczkując najpierw (8) otrzymujemy

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} [-2x(1-k^2 x^2) - 2k^2 x(1-x^2)],$$

*) E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, quatrième éd., Paris 1924, str. 336-343.

skąd wobec (8) otrzymujemy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x(1+k^2-2k^2x^2)$$

i podobnie

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y(1+k^2-2k^2y^2);$$

zatem

$$(9) \quad x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = -2k^2xy(x^2-y^2).$$

Ponieważ

$$\left(x \frac{dy}{dt}\right)^2 = x^2(1-k^2y^2-y^2+k^2y^4), \quad \left(y \frac{dx}{dt}\right)^2 = y^2(1-k^2x^2-x^2+k^2x^4),$$

więc

$$(10) \quad \left(x \frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(y \frac{dx}{dt}\right)^2 = x^2(1+k^2y^4) - y^2(1+k^2x^4) = (x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2).$$

Z (9) i (10) wynika, że jeśli funkcje $x(t)$ i $y(t)$ spełniają równania (8), to spełniają też równanie

$$(11) \quad \frac{x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(x \frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(y \frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{-2k^2xy}{1-k^2x^2y^2}.$$

Mnożąc obie strony równania (11) przez $xy \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$ otrzymamy równanie

$$\frac{x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}}{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}} = \frac{-2k^2xy \left(x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2},$$

w którym liczniki obu ułamków są pochodnymi odpowiednich mianowników. Możemy więc napisać równość

$$\frac{d}{dt} \ln \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \ln(1-k^2x^2y^2),$$

a stąd, całkując, otrzymujemy

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C(1-k^2x^2y^2).$$

Wstawiając więc wartości (8) otrzymujemy całkę równania Eulera (7)

$$(12) \quad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = C,$$

co można sprawdzić łatwym rachunkiem.

ZADANIE 30. Widzieliśmy, że równanie $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$ ma dwie całki $u(x,y) = \arcsin x + \arcsin y$ i $U(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$. Znaleźć taką funkcję $F(C)$, aby było stałe $U(x,y) = F[u(x,y)]$.

§ 21. Zamiana zmiennych w równaniu różniczkowym

71. Zdarza się często, że równanie różniczkowe, nie będąc typu omówionego w poprzednich paragrafach, daje się za pomocą stosownych przekształceń zastąpić równaniem równoważnym omówionego już typu i może być tym samym uważane za efektywnie rozwiązywalne.

Obecnie omówimy dwa główne sposoby takiego przekształcania równań, a mianowicie metodę zamiany zmiennych i metodę czynnika całkującego. Trzeci sposób, metodę przekształceń stycznościowych i jej szczególnie przypadek — całkowanie przez różniczkowanie podamy w rozdziale IV, §§ 34 i 35.

72. Załóżmy, że funkcje $X(\xi, \eta)$, $Y(\xi, \eta)$, klasy C^1 w pewnym obszarze Ω zmiennych ξ i η , o nieznikającym w Ω jakobianie

$$(1) \quad \frac{D(X, Y)}{D(\xi, \eta)} \neq 0,$$

ustalają wzajemnie jednoznaczne przekształcenie

$$(2) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta)$$

obszaru Ω na pewien obszar T w płaszczyźnie zmiennych x i y , funkcje zaś

$$(3) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

określają odpowiednie przekształcenie odwrotne do (2) w obszarze T . Z przyjętych założeń wynika, że funkcje (3) są w T klasy C^1 oraz że

$$(4) \quad \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0.$$

Rozpatrzmy dowolny układ funkcji klasy C^1

$$(5) \quad \xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t),$$

gdzie t zmienia się w przedziale $[t_1, t_2]$, taki, że dla każdego t punkt (5) należy do Ω . Układowi temu odpowiada na mocy (2) układ

$$(6) \quad x = X(\xi, \eta) = X[\xi(t), \eta(t)] = x(t), \quad y = Y(\xi, \eta) = Y[\xi(t), \eta(t)] = y(t),$$

oraz równania

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}.$$

Wobec (1) z ostatnich równań wynika, że pochodne dx/dt i dy/dt mogą zniknąć jednocześnie wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie znikają pochodne $d\xi/dt$ i $d\eta/dt$.

73. Rozważmy równanie różniczkowe

$$(8) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

w którym funkcje $P=P(x, y)$ i $Q=Q(x, y)$ są określone w T . Załóżmy, że układ (6) jest rozwiązaniem tego równania. Wówczas na mocy (7) i (8) otrzymujemy

$$(9) \quad \begin{aligned} P[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] & \left[\frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right] + \\ & + Q[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \left[\frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right] = 0, \end{aligned}$$

gdzie pochodne cząstkowe mają być obliczane w punktach (3). Po przegrupowaniu wyrazów tego równania otrzymujemy stąd w prosty sposób identyczność

$$R(\xi, \eta) \frac{d\xi}{dt} + S(\xi, \eta) \frac{d\eta}{dt} = 0,$$

w której

$$(9') \quad \begin{aligned} R(\xi, \eta) &= P[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \xi} + Q[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ S(\xi, \eta) &= P[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \eta} + Q[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Otrzymana identyczność wyraża, że układ (5) jest rozwiązaniem równania

$$(10) \quad R(\xi, \eta) d\xi + S(\xi, \eta) d\eta = 0.$$

Całkowanie równania (8) o zmiennych x i y można więc zastąpić całkowaniem równoważnego równania przekształconego (10) o zmiennych ξ i η i, jak łatwo widać, odwrotnie, gdzie związek między odnośnymi rozwiązaniami wyznaczają relacje (3) lub (2).

Przejścia od równań (8) do (10) stanowią zapowiedzianą metodę zamiany zmiennych w równaniu różniczkowym.

74. Jeżeli funkcja $U=U(x, y)$ jest całką równania (8), to funkcja

$$(11) \quad W=W(\xi, \eta)=U[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]$$

jest całką równania przekształconego (10); jeśli bowiem wzory (5) przedstawiają rozwiązanie równania (10), to wzory (6) przedstawiają rozwiązanie równania (8), co pociąga za sobą tożsamościową równość

$$U[x(t), y(t)] = C,$$

a więc, w myśl (11), także równość

$$W[\xi(t), \eta(t)] = U\{X[\xi(t), \eta(t)], Y[\xi(t), \eta(t)]\} = U[x(t), y(t)] = C.$$

Prócz tego z (8) wynika, że funkcja W jest klasy C^1 , a z ciągłości i wzajemnej jednoznaczności przekształcenia (2) wynika, że funkcja W , podobnie jak całka U , nie redukuje się do stałej w żadnym otoczeniu żadnego punktu obszaru Ω .

Zatem, łącząc otrzymane wyniki, widzimy, że funkcja (11) jest całką równania (10), c. b. d. o.

Na odwrót, łatwo jest dowieść, że jeśli funkcja $W(\xi, \eta)$ jest całką równania przekształconego (10), to funkcja

$$U(x, y) = W[\xi(x, y), \eta(x, y)]$$

jest całką równania (8).

75. Załóżmy, że funkcje P i Q są w obszarze T klasy C^1 i że punkt $M_0=(x_0, y_0)$ obszaru T nie jest punktem osobliwym dla równania (8). Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego równania przechodzące przez punkt M_0 (p. ust. 53, str. 74 i ust. 60, str. 87), a wobec tego, jak widać, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania przekształconego (10) przechodzące przez punkt $N_0=(\xi_0, \eta_0)$, odpowiadający punktowi M_0 . Wynik ten zasługuje na uwagę dlatego, że chociaż punkt (ξ_0, η_0) nie jest, jak widać, dla równania (10) punktem osobliwym, to jednak nie można stosować tutaj bezpośrednio kryterium jednoznaczności z ustępu 53, str. 74, a to dlatego, że na ogół o funkcjach $R(\xi, \eta)$ i $S(\xi, \eta)$ nie wiadomo nic więcej oprócz tego, że są one w obszarze Ω ciągłe. Wynika to ze wzorów (9'), w myśl których istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych tych funkcji miałyby miejsce np. wówczas, gdyby założyć o funkcjach $X(\xi, \eta)$ i $Y(\xi, \eta)$, że są klasy C^2 . W ten więc sposób, pośrednio stwierdzamy, że równanie przekształcone (10) ma dokładnie jedno rozwiązanie, przechodzące przez punkt N_0 .

76. Wspomnimy tu jeszcze o często występujących przypadkach szczególnych.

I. Niekiedy poddajemy przekształceniu tylko zmienną niezależną x , wprowadzając nową zmienną niezależną ξ za pomocą wzoru

$$x = X(\xi),$$

gdzie $X(\xi)$ jest funkcją klasy C^1 w jakimś przedziale, o pochodnej różnej od zera.

Wtedy przekształcenie (2) oraz równanie (10) przybierają postać

$$x = X(\xi), \quad y = y, \\ \left\{ P[X(\xi), y] \frac{dX(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi + Q[X(\xi), y] dy = 0.$$

II. Znacznie częściej pozostawiamy bez zmiany zmienną niezależną x , a wprowadzamy zamiast y nową funkcję niewiadomą η . Odpowiada to przekształceniu (2)

$$x = x, \quad y = Y(x, \eta),$$

i równaniu

$$\left\{ [P[x, Y(x, \eta)] + Q[x, Y(x, \eta)] \frac{\partial Y(x, \eta)}{\partial x} \right\} dx + Q[x, Y(x, \eta)] \frac{\partial Y(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta = 0.$$

III. Szczególnym przypadkiem poprzedniego przekształcenia jest wprowadzenie nowej funkcji niewiadomej za pomocą wzoru

$$y = Y(\eta)$$

nie zawierającego zmiennej niezależnej. Jak widać, odpowiednie równanie przekształcone przyjmie wtedy postać

$$P[x, Y(\eta)] dx + \left\{ Q[x, Y(\eta)] \frac{dY(\eta)}{d\eta} \right\} d\eta = 0.$$

PRZYKŁAD 53. Scałkować równanie $(x - y^2) dx + 2xy dy = 0$. Stosujemy w czterech ćwiartkach płaszczyzny podstawienie $y^2 = x\eta$, tzn.

$$y = \sqrt{x\eta} \quad \text{lub} \quad y = -\sqrt{x\eta}.$$

Ponieważ $2y dy = x d\eta + \eta dx$, więc otrzymujemy równanie

$$x(1 - \eta) dx + x(x d\eta + \eta dx) = 0$$

czyli równanie $d\eta + dx/x = 0$. Stąd $\eta = C - \ln|x|$, a więc $y^2 = x(C - \ln|x|)$.

ZADANIA. 31. Scałkować następujące równania: $(x + y)^2 dy/dx = a^2$, $y(y^2 - x^2)(1 + x^2)^{1/2} dy = nx(1 + y^2)^{3/2} dx$.

32. W równaniu różniczkowym $[y(x + y) + b^2] dx - [x(x + y) + a^2] dy = 0$ można rozdzielić zmienne przez wykonanie podstawienia $x = \xi + \eta$, $y = k\xi - \eta$, gdzie k należy stosownie dobrać. Scałkować to równanie.

33. Scałkować równanie $cy dx - (y + a + bx) dy - nx(x dy - y dx) = 0$, w którym a, b, c i n są stałymi, przez sprowadzenie do równania o rozdzielonych zmiennych za pomocą podstawienia

$$\xi = \frac{y - \beta}{x - \alpha}, \quad \eta = \frac{\lambda y}{x - \alpha},$$

gdzie stałe α, β i λ należy znaleźć.

34. W dwóch punktach $A = (-a, 0)$ i $B = (a, 0)$ nieograniczonej płaszczyzny umieszczono naboje $+1$, w punkcie zaś $O = (0, 0)$ nabój -1 . Wyznaczyć linie sił wytworzonego pola elektrycznego.

Wskazówka. Potencjał $V(x, y)$ w punkcie (x, y) jest równy

$$\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

linie sił są trajektoriami ortogonalnymi linii ekwipotencjalnych. Układamy najpierw równanie różniczkowe linii ekwipotencjalnych, potem równanie linii sił i wprowadzając współrzędne biegunowe otrzymujemy równanie różniczkowe, w którym zmienne dają się rozdzielić.

35. Analogiczne zadanie przy naboju -2 w punkcie $O = (0, 0)$. Linie sił są wtedy lemniskatami.

§ 22. Równanie różniczkowe jednorodne

77. Równaniem różniczkowym jednorodnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Zakładamy tutaj, że funkcja $h(z)$ jest ciągła w pewnym przedziale (p, q) i rozpatrujemy równanie w obszarze T określonym nierównościami

$$(2) \quad p < \frac{y}{x} < q, \quad 0 < x < \infty$$

oraz w obszarze $\bar{T}$, określonym nierównościami

$$(2') \quad p < \frac{y}{x} < q, \quad -\infty < x < 0.$$

Ponieważ dla obszaru $\bar{T}$ rozważania są analogiczne, więc ograniczymy się do rozpatrywania obszaru T . Rozwiązania równania (1) wyznaczamy za pomocą podstawienia

$$(3) \quad \frac{y}{x} = z,$$

do którego stosuje się poprzednio wyłożona teoria.

Mamy mianowicie

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}.$$

i wstawiając (3) i (4) do równania (1) otrzymujemy po łatwym rachunku równanie, równoważne równaniu (1)

$$(5) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{h(z) - z}{x}$$

lub

(6)

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{h(z)-z} = 0;$$

w równaniach (5) i (6) zmienne są rozdzielone.

PRZYKŁAD 54. Scałkować równanie $(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.

Przekształcając je formalnie do postaci

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y} = -\frac{2+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}$$

widzimy, że mamy do czynienia z równaniem jednorodnym. Wykonujemy więc podstawienie (3), co daje po wykonaniu podstawienia i podzieleniu przez x równanie

$$(2+2z+2z^2)dx + x(1+2z)dz = 0,$$

w którym zmienne dają się rozdzielić. Całkując, otrzymujemy równanie

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1+2z}{2+2z+2z^2} dz = C'$$

czyli, wprowadzając nową stałą C ,

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|1+z+z^2| = \ln C,$$

skąd $x^2(1+z+z^2) = C^2$. Wprowadzając teraz z powrotem y , znajdujemy całkę danego równania w postaci

$$x^2 + xy + y^2 = C^2.$$

Wykresami rozwiązań są więc — jak widać — elipsy o środku $(0, 0)$. Elipsy te są homotetyczne, z początkiem układu jako środkiem homotetii, przez który nie przechodzi żadne rozwiązanie.

PRZYKŁAD 55. Niechaj potencjałem przestrzennego pola sił będzie $V = V_0 r^{-2} \sin \vartheta$, gdzie r , ϑ i φ są współrzędnymi sferycznymi w przestrzeni, a V_0 — liczbą stałą. Wyznaczyć linie sił tego pola.

Równanie powierzchni ekwipotencjalnych ma w tym przypadku postać $r^2 = (V_0 \sin \vartheta)/C'$ czyli $r^2 = C \sin \vartheta$, gdzie C jest nową stałą. We współrzędnych prostokątnych równanie to przybiera postać

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - C^2 z^2 = 0,$$

z której widzimy, że powierzchnie ekwipotencjalne są powierzchniami obrotowymi z osią z jako osią obrotu. Jest więc jasne, że linie sił są trajektoriami ortogonalnymi linii południkowych tych powierzchni, a więc krzywymi płaskimi, leżącymi w płaszczyznach przechodzących przez oś obrotu. Wystarczy zatem znaleźć linie sił położone np. w płaszczyźnie xz , a następnie przez wykonanie obrotu otrzyma się wszystkie dalsze.

Otóż linie południkowe powierzchni ekwipotencjalnych, położone w tej płaszczyźnie, są określone równaniami

$$(7) \quad (x^2 + z^2)^3 - C^2 z^2 = 0, \quad y = 0.$$

Nie troszcząc się o drugie z tych równań, wyznaczmy równanie różniczkowe krzywych (7). Różniczkując pierwsze równanie (7) i eliminując następnie C , otrzymamy kolejno:

$$6(x^2 + z^2)^2 \left(x + z \frac{dz}{dx} \right) - 2C^2 z \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$C^2 = \frac{(x^2 + z^2)^3}{z^2},$$

$$3(x^2 + z^2)^2 (x dx + z dz) - \frac{(x^2 + z^2)^3 z dz}{z^2} = 0,$$

a stąd

$$(8) \quad \frac{dx}{dz} = \frac{x^2 - 2z^2}{3xz}.$$

Wobec tego równaniem różniczkowym linii sił, jako ortogonalnych trajektorii krzywych (8), jest równanie

$$(9) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z^2 - x^2}{3xz},$$

które jest jednorodne.

Całkujemy je przez podstawienie $z = \xi x$, skąd $dz = dx + x d\xi$, co doprowadza nas do równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dx}{x} + \frac{3\xi d\xi}{\xi^2 + 1} = 0;$$

stąd po wykonaniu całkowania otrzymuje się łatwo

$$x^2(1 + \xi^2) = C^*.$$

Zatem linie sił położone w płaszczyźnie xz określone są równaniami

$$(x^2 + z^2)^3 - C^* x^4 = 0, \quad y = 0.$$

Uwaga. Niech będzie w obszarze T (lub w obszarze $\bar{T}$) $h(y/x) \neq y/x$.

Weźmy dowolny promień, przebiegający w obszarze T , o początku w punkcie $(0, 0)$. Z (1) wynika, że wszystkie łuki całkowite przecinające ten promień, przecinają go pod jednym i tym samym kątem, różnym od 0 i π , a co za tym idzie, są — co można łatwo wykazać — łukami homotetycznymi z początkiem układu jako środkiem homotetii.

78. Weźmy pod uwagę jakąś funkcję $L(x, y)$, określoną w obszarach T i $\bar{T}$ zaznaczonych na rys. 13.

Jeżeli dla każdej pary punktów (x, y) i (tx, ty) , gdzie t jest liczbą dowolną różną od zera, leżących w T i $\bar{T}$ (a więc dla każdej pary punktów leżących w tych obszarach na prostej przechodzącej przez początek układu) zachodzi równość

$$L(tx, ty) = t^m L(x, y),$$

gdzie m jest liczbą stałą, to mówimy, że $L(x, y)$ jest w tych obszarach funkcją jednorodną stopnia m .

Jeżeli m nie jest liczbą całkowitą, to należy dodatkowo założyć, że $t > 0$.

Jeżeli w równaniu różniczkowym

$$(10) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są w obszarach T i $\bar{T}$ jednorodne tego samego stopnia m , to równanie (10) można (przy pewnych zastrzeżeniach) sprowadzić natychmiast do postaci (1).

Istotnie, z założenia jest w T i $\bar{T}$

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y).$$

Przyjmując w szczególności $t = 1/x$ i ograniczając się do $x > 0$ lub do $x < 0$, otrzymamy

$$P(x, y) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad Q(x, y) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

tak iż równanie (10) przyjmie postać

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)d\frac{y}{x} = 0,$$

skąd wynika równanie jednorodne

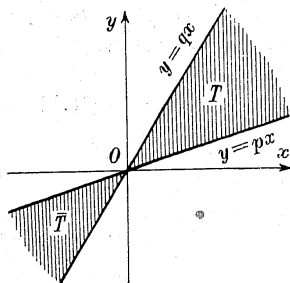
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = h\left(\frac{y}{x}\right),$$

przy zastrzeżeniu, że $Q(1, y/x) \neq 0$.

ZADANIA. 36. Scałkować następujące równania:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{x-y}, \quad y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx},$$

$$(x+y)dx - \sqrt{x^2+y^2}dy = 0, \quad (y - \sqrt{x^2+y^2})dx + (x - \sqrt{x^2+y^2})dy = 0,$$



Rys. 13

$$\text{Równanie postaci } y' = h\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right).$$

$$(x^2 + xy + y^2)dx + (x^2 - xy + y^2)dy = 0, \quad xy dy = (x^2 - y^2)dx,$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0, \quad \sqrt{x} \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} - \sqrt{x},$$

$$\left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}\right)x dy - \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right)y dx = 0.$$

37. Wyznaczyć takie łuki regularne, aby styczna (normalna) w dowolnym ich punkcie tworzyła z osią x kąt dwa razy większy od kąta, jaki tworzy z tą osią promień wodzący tego punktu.

§ 23. Równanie postaci $y' = h\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

79. Równanie różniczkowe

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right),$$

gdzie a, b, c i a', b', c' są stałymi, możemy uważać za uogólnienie równania jednorodnego rozpatrzonego w ust. 77, str. 109. Jeżeli mianowicie $c=c'=0$, to równanie (1) przechodzi, przy założeniu $x \neq 0$, w równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right) = h\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a'+b'\frac{y}{x}}\right).$$

Metoda całkowania równania (1) polega na stosownej zamianie zmiennych, przekształcającej to równanie w równanie jednorodne.

Zakładamy przy tym, że funkcja $h(z)$ jest ciągła w jakimś przedziale (p, q) i że zmienne x i y przebiegają obszar, w którym $p < \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} < q$.

W dyskusji ważną rolę będą grały wyznaczniki drugiego rzędu macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

tj. wyznaczniki

$$\Delta_1 = bc' - cb', \quad \Delta_2 = ca' - ac', \quad \Delta_3 = ab' - ba'.$$

Zależnie od wartości wyznaczników Δ_1 , Δ_2 i Δ_3 rozróżnimy parę przypadków.

I. $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Ponieważ liczby a', b', c' nie mogą być jednocześnie równe zeru, więc istnieje taka stała λ , że tożsamościowo

$$ax + by + c = \lambda(a'x + b'y + c').$$

Równanie (1) przybiera wówczas postać

$$\frac{dy}{dx} = h(\lambda)$$

zbadaną w ustępie 65, str. 93.

II. $\Delta_3 = 0$ i przynajmniej jeden z wyznaczników Δ_1 i Δ_2 jest różny od zera. Wówczas istnieje taka liczba λ , że zachodzi stale jedna z równości $ax + by + c = \lambda(a'x + b'y) + c'$ lub $a'x + b'y + c' = \lambda(ax + by) + c$, gdzie $c \neq \lambda c'$ lub $c' \neq \lambda c$.

Równaniu (1) możemy nadać w tym przypadku postać

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{\lambda(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}\right) \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c'}\right)$$

i naturalną jest rzeczą wykonać podstawienie

$$(3) \quad a'x + b'y = v \quad \text{lub} \quad ax + by = v.$$

Należy tu zrobić założenie $b' \neq 0$ lub $b \neq 0$, co jest dopuszczalne, gdyż w przypadku przeciwnym równanie (2) nie zawierałoby zmiennej y . Z (3) wynika równanie

$$(4) \quad a' + b' \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \quad \text{lub} \quad a + b \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

Wprowadzając według (3) i (4) wielkości v i dv/dx do równania (2) otrzymujemy równanie

$$(5) \quad \frac{dv}{dx} = a' + b'h\left(\frac{\lambda v + c}{v + c'}\right) \quad \text{lub} \quad \frac{dv}{dx} = a + bh\left(\frac{v + c}{\lambda v + c'}\right),$$

typu rozważanego w ustępie 65, str. 93.

PRZYKŁAD 56. Scałkować równanie

$$\sqrt{2x - y + 1} dx - \sqrt{4x - 2y + 3} dy = 0.$$

Piszemy je formalnie w postaci

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(2x - y) + 1}{2(2x - y) + 3}}$$

i podstawiamy $2x - y = v$, skąd $dy = 2dx - dv$. Po podstawieniu otrzymamy równanie $(\sqrt{v+1} - 2\sqrt{2v+3})dx + \sqrt{2v+3}dv = 0$, czyli równanie o rozdzielonych zmiennych

$$dx + \frac{\sqrt{2v+3}}{\sqrt{v+1} - 2\sqrt{2v+3}} dv = 0.$$

III. $\Delta_3 \neq 0$. Wyznaczamy takie stałe α i β , aby podstawienie $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ przekształcało równanie (1) na równanie jednorodne. Wobec

tego, że $dx = d\xi$ i $dy = d\eta$ równanie (1) przechodzi przy tym przekształceniu w równanie

$$\frac{d\eta}{d\xi} = h\left(\frac{a\xi + b\eta + (a\alpha + b\beta + c)}{a'\xi + b'\eta + (a'\alpha + b'\beta + c')}\right),$$

które jest jednorodne, jeżeli α i β spełniają równości

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Ze względu na warunek $\Delta_3 \neq 0$ stałe takie istnieją; są nimi współrzędne punktu przecięcia prostych o równaniach

$$(6) \quad ax + by + c = 0 \quad \text{i} \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Posługując się językiem geometrii mówimy, że równanie (1) przechodzi w równanie jednorodne przez wykonanie równoległego przesunięcia układu tak, aby początek układu wypadł w punkcie przecięcia prostych (6).

PRZYKŁAD 57. Scałkować równanie

$$(2x + 3y + 1)dx + (-4x + y - 3)dy = 0.$$

Rozwiązując równania $2x + 3y + 1 = 0$ i $-4x + y - 3 = 0$ otrzymujemy $\alpha = -5/7$ i $\beta = 1/7$. Zamiana zmiennych $x = \xi - 5/7$, $y = \eta + 1/7$ przekształca dane równanie w równanie jednorodne $(2\xi + 3\eta)d\xi + (-4\xi + \eta)d\eta = 0$.

ZADANIE 38. Scałkować następujące równania różniczkowe:

$$(3x - 2y + 1)dx + (x + y)dy = 0, \quad (2x - y + 4)dx + (x + 2y - 1)dy = 0,$$

$$(x + y + 1)dx - (x + y + 2)dy = 0, \quad (x - 2y + 1)dx + (2x - 4y + 2)dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x + y + 1}{x + y - 1}\right)^2, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x + y - 1}{x - y + 1}}.$$

§ 24. Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

80. Równanie postaci

$$(1) \quad y' = a(x)y + b(x),$$

które jest liniowe ze względu na funkcję niewiadomą i jej pochodną, nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu*.

W równaniu tym $a(x)$ i $b(x)$ są dwiema danymi funkcjami, ciągłymi w pewnym przedziale (p, q) . Pierwszą z nich nazywamy *współczynnikiem*, drugą *wyrazem wolnym równania*.

Prawa strona równania (1) jest ciągła w prostokącie T określonym nierównościami

$$p < x < q, \quad -\infty < y < \infty$$

i ma ciągłą pochodną cząstkową względem y ; tym samym przez każdy punkt prostokąta T przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie integralne tego równania.

81. W dalszym ciągu będziemy używali często prócz oznaczenia e^x dla funkcji wykładniczej, również oznaczenia $\exp x$.

Jeżeli w równaniu (1) jest stałe $b(x)=0$, to równanie to nazywamy *jednorodnym*. W tym przypadku przybiera ono postać równania o rozdzielonych zmiennych, badanego w ustępie 68, str. 98

$$(2) \quad y' = a(x)y.$$

Według wyników uzyskanych tamże, w prostokącie T można wyróżnić dwa prostokąty T_1 i T_2 złożone z punktów, dla których $y < 0$ lub $y > 0$. Ogół rozwiązań składa się z rozwiązań przebiegających całkownie albo w T_1 , albo w T_2 , określonych równościami

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^x a(s) ds$$

lub wyraźniej wzorem

$$(3) \quad y = y_0 \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right),$$

gdzie $M_0 = (x_0, y_0)$ jest dowolnym punktem jednego z prostokątów T_1 lub T_2 , i z rozwiązania w postaci stałej

$$(3') \quad y = 0;$$

rozwiązania integralne istnieją w całym przedziale (p, q) .

Wobec dowolności y_0 możemy rozwiązania (3) i (3') wyrazić jednym wzorem

$$(4) \quad y = C \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right), \quad p < x < q,$$

gdzie C jest stałą dowolną, a x_0 — jakimkolwiek ustalonym punktem przedziału (p, q) .

82. Rozwiązanie (4) równania jednorodnego (2) jest punktem wyjścia do rozwiązania równania ogólnego (1) za pomocą tzw. *metody uzmiennienia stałych*, która polega na tym, że zamiast stałej dowolnej C przyjmuje się w (4) taką funkcję $C=C(x)$ klasy C^1 w przedziale (p, q) , aby wyrażenie

$$(5) \quad y = C(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right)$$

było rozwiązaniem równania niejednorodnego (1).

Przypuśćmy, że taka funkcja $C(x)$ istnieje. Obliczając pochodną

$$(5') \quad y' = C'(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right) + C(x) a(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right)$$

1. podstawiając wartości (5) i (5') do równania (1), otrzymamy po wykonaniu redukcji równanie

$$C'(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right) = b(x)$$

czyli

$$(6) \quad C'(x) = b(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a(s) ds \right),$$

z którego należy wyznaczyć szukaną funkcję $C(x)$.

Całkując równanie (6) otrzymujemy

$$(7) \quad C(x) = D + \int_{x_0}^x b(t) \exp \left(- \int_{x_0}^t a(s) ds \right) dt,$$

gdzie D jest dowolną stałą całkowania.

Wstawiając znalezione wyrażenie (7) do wzoru (5) dochodzimy do wniosku, że jeśli istnieje rozwiązanie równania (1) dające się napisać w postaci (5), to musi ono mieć postać

$$(8) \quad y = \left[D + \int_{x_0}^x b(t) \exp \left(- \int_{x_0}^t a(s) ds \right) dt \right] \exp \left(\int_{x_0}^x a(s) ds \right).$$

Odwrotnie, przez zróżniczkowanie i wstawienie do równania (1) łatwo sprawdzić, że funkcja (8) spełnia przy każdej wartości stałej D równanie (1). Znaczenie stałej całkowania jest widoczne, dla $x=x_0$ mamy bowiem $y(x_0)=D$, tak że D jest wartością y_0 rozwiązania w miejscu x_0 . Zauważmy, że każde rozwiązanie (8) istnieje w całym przedziale (p, q) . W ten sposób wzór (8) przedstawia rozwiązanie ogólne równania (1).

PRZYKŁAD 58. Znajdźmy rozwiązanie ogólne równania liniowego $dy/dx = 3x^2y + 2x^3$. Całkując najpierw równanie jednorodne $dy/dx = 3x^2y$ mamy $y = Ce^{x^3}$. Uzmienniamy stałą i różniczkujemy funkcję $y = C(x)e^{x^3}$. Wstawiając to wyrażenie oraz wyrażenie $y' = C'(x)e^{x^3} + 3x^2C(x)e^{x^3}$ do danego równania różniczkowego, otrzymujemy warunek $C'(x) = 2x^3e^{-x^3}$, a stąd $C(x) = D - 2e^{-x^3}/3$. Zatem rozwiązaniem ogólnym jest $y = De^{x^3} - 2/3$.

PRZYKŁAD 59. Jeżeli zmieniamy pole sił elektrycznych, to w przewodniku umieszczonym w tym polu i mającym zdolności samoindukcji powstanie prąd o natężeniu zmiennym $I=I(t)$. Napięcie E będzie wtedy sumą napięcia Ohma, które jest równe iloczynowi oporu W i natężenia prądu I , i napięcia indukcyjnego, które jest równe iloczynowi współczynnika samoindukcji L i szybkości zmiany natężenia prądu dI/dt .

Tak więc

$$(9) \quad E = WI + L \frac{dI}{dt}.$$

Załóżmy teraz, że napięcie E jest funkcją periodyczną czasu t

$$(10) \quad E = E_0 \sin \omega t,$$

co w praktyce zdarza się bardzo często; E_0 i ω są to pewne stałe, z których pierwsza nazywa się największym napięciem chwilowym, druga zaś — częstością.

W powyższych warunkach otrzymujemy na wyznaczenie natężenia $I(t)$ równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

$$(11) \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{W}{L}I + \frac{E_0}{L} \sin \omega t.$$

Występujące w nim cztery stałe W , L , E_0 i ω są dane z doświadczenia.

Całkując najpierw równanie jednorodne $dI/dt = -WI/L$ otrzymujemy $I = Ce^{-Wt/L}$. Uznajemy stałą C i funkcję $y = Ce^{-Wt/L}$ oraz jej pochodną wstawiamy do równania (11) otrzymując warunek

$$\frac{dC}{dt} e^{-Wt/L} = \frac{E_0}{L} \sin \omega t.$$

Stąd

$$\frac{dC}{dt} = \frac{E_0}{L} e^{Wt/L} \sin \omega t,$$

a po wykonaniu całkowania

$$C = C(t) = D + \frac{E_0}{W^2 + L^2 \omega^2} (W \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) e^{Wt/L}.$$

Mnożąc tę równość przez $e^{-Wt/L}$ otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (11) postaci

$$(12) \quad I = D e^{-Wt/L} + \frac{E_0}{W^2 + L^2 \omega^2} (W \sin \omega t - \omega L \cos \omega t).$$

Wprowadźmy nową stałą określoną wzorem $\tan \gamma = \omega L/W$ i warunkiem $0 < \gamma < \pi/2$. Wówczas

$$\cos \gamma = \frac{W}{\sqrt{W^2 + L^2 \omega^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{\omega L}{\sqrt{W^2 + L^2 \omega^2}}$$

i wzór (12) przybiera postać

$$(13) \quad I = D e^{-Wt/L} + \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \gamma).$$

Wyznamy teraz stałą D tak, aby w momencie początkowym $t=0$ natężenie prądu było również równe zeru. Ze wzoru (13) otrzymujemy

$$D = \frac{\omega E_0 L}{W^2 + L^2 \omega^2},$$

tak że natężenie prądu jest określone funkcją

$$(14) \quad I = \frac{\omega E_0 L}{W^2 + L^2 \omega^2} e^{-Wt/L} + \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \gamma).$$

Interpretacja tego wzoru poucza nas, że natężenie prądu indukcyjnego składa się z natężenia zanikającego w czasie, określonego pierwszym składnikiem sumy występującej w tym wzorze i z natężenia periodycznego, określonego drugim składnikiem.

Wyraz zanikający dąży szybko do zera i to tym szybciej im większa jest wartość stosunku W/L ; zazwyczaj już po kilku sekundach wyraz ten jest tak znikomo mały, że praktycznie rzecz biorąc natężenie $I(t)$ jest już po bardzo krótkim czasie periodyczną funkcją czasu t , wyrażającą się wzorem przybliżonym

$$I = I_0 \sin(\omega t - \gamma),$$

gdzie dla skrócenia przyjęliśmy

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + L^2 \omega^2}}.$$

I_0 nazywa się największą chwilową wartością prądu.

83. Najdawniejsza metoda całkowania równania (1) pochodzi od J. Bernoulliego, który pierwszy podał rozwiązanie ogólne tego równania. Polega ona na tym, że funkcji y szukamy w postaci iloczynu dwóch czynników u i v ,

$$(15) \quad y = uv,$$

które staramy się stosownie dobrać. Różniczkując równanie (15) i wstawiając do równania (1) otrzymujemy po uporządkowaniu wyrazów

$$v \left[\frac{du}{dx} - a(x)u \right] + u \frac{dv}{dx} - b(x) = 0.$$

Jeżeli wyznaczymy funkcję u tak, aby wyrażenie w nawiasie klamrowym było równe zeru, to na wyznaczenie czynnika v otrzymujemy równanie

$$\frac{dv}{dx} = \frac{b(x)}{u},$$

które możemy rozwiązać przez całkowanie.

Jak widać, metoda Bernoulliego jest w gruncie rzeczy identyczna z metodą uziemiennienia stałych.

84. Omówimy kilka własności rozwiązań równania liniowego (1).

Twierdzenie. Jeżeli $\varphi(x) \neq 0$ i $\psi(x)$ są dowolnymi rozwiązaniami równań (2) i (1), to rozwiązanie ogólne równania (1) ma postać

$$(16) \quad y = \psi(x) + D\varphi(x),$$

gdzie D jest stałą dowolną.

Dowód. Po pierwsze, widać od razu, że funkcja (16) spełnia przy każdym D równanie (1); po drugie, wobec warunku $\varphi(x) \neq 0$, można zawsze dobrać stałą D tak, aby rozwiązanie (16) przechodziło przez dany z góry punkt obszaru, co wobec jednoznaczności rozwiązań dowodzi łącznie z poprzednim, że wzór (16) przedstawia rozwiązanie ogólne równania (1).

Wynikają stąd natychmiast następujące twierdzenia.

Twierdzenie. Jeżeli znane są dwa różne rozwiązania $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ równania (1), to rozwiązanie ogólne tego równania można wyznaczyć za pomocą działań arytmetycznych, według wzoru

$$(17) \quad y = \varphi_1(x) + D[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

gdzie D jest stałą dowolną.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że różnica $\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$ jest, jak łatwo sprawdzić, rozwiązaniem równania (2) różnym od zera, i zastosować twierdzenie poprzednie do funkcji $\varphi_1(x)$ i wspomnianej różnicy.

Twierdzenie. Dla każdego trzech rozwiązań $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi(x)$ równania (1), z których dwa pierwsze są różne, stosunek

$$(18) \quad \frac{\varphi(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}$$

jest wielkością stałą niezależną od x , a zależną jedynie od wyboru tych rozwiązań.

Dowód. Wynika to bezpośrednio z twierdzenia poprzedniego przez podstawienie $y = \varphi(x)$ i rozwiązanie równania (17) względem stałej D .

Uwaga. Z ostatniego twierdzenia wynika m. in., że znając wykresy dwóch różnych rozwiązań szczególnych możemy konstrukcyjnie otrzymać w widoczny sposób wykres każdego innego rozwiązania.

ZADANIA. 39. Scałkować następujące równania:

$$y' = x \sin y, \quad y' = \frac{1}{xy}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2} + \frac{1}{x(1+x^2)},$$

$$y' = y \sin x + \cos x, \quad y \frac{dy}{dx} = ay^2 + b \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = y(x + \ln y),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sin y}, \quad \cos y \frac{dy}{dx} = \cos x \sin y + \sin x,$$

$$\frac{dy}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x) \frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{gdzie } \varphi(x) \text{ jest funkcją daną,}$$

$$\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}.$$

40. Wyznaczyć łuki, dla których podnormalna jest w każdym punkcie równa kwadratowi odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

41. Wyznaczyć łuki, dla których spadek stycznej jest równy sumie spadku promienia wodzącego i odciętej punktu styczności.

42. Oznaczmy przez M punkt bieżący łuku $y = \varphi(x)$, przez P — jego rzut na oś x , wreszcie przez Q — punkt przecięcia się stycznej w punkcie M z osią y . Wyznaczyć $\varphi(x)$ tak, aby pole trapezu $OQMP$ było stałe.

43. Wyznaczyć trajektorie ortogonalne rodziny krzywych

$$x - b = b e^{y/a}, \quad a > 0.$$

44. Punkt materialny o masie m pod wpływem stałej siły F porusza się w pewnym ośrodku po linii prostej z prędkością v . Ośrodek stawia opór proporcjonalny do prędkości punktu. Ułożyć równanie ruchu.

45. Znajdąc dwa rozwiązania szczególne $y_1 = x^2 + 1$ i $y_2 = -x^2 + 1$ równania $y'x^2 - 2x(y-1) = 0$ podać jego rozwiązanie ogólne.

46. Wykazać, że stosunek dwóch rozwiązań szczególnych $\varphi_2(x)$ i $\varphi_1(x)$ równania (1) może być napisany w postaci

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = 1 + D \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{b(s)}{\varphi_1(s)} ds \right),$$

gdzie D jest stałą.

47. Wykazać, że wszystkie styczne poprowadzone do łuków całkowitych równania (1) w punktach, leżących na prostej $x = x_0$ równoległej do osi y przechodzą, przy założeniu, że $a(x_0) \neq 0$, przez punkt (ξ, η) o współrzędnych

$$\xi = x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, \quad \eta = -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}.$$

Zbadać przypadek, gdy $a(x_0) = 0$.

48. Dowieść następującego twierdzenia Liapunowa: równanie liniowe

$$\frac{dy}{dx} = ky + b(x),$$

w którym k jest stałą, $b(x)$ zaś — funkcją okresową, ma rozwiązanie szczególne okresowe, z okresem równym okresowi funkcji $b(x)$.

§ 25. Równanie Bernoulliego

85. Powyższą nazwą oznaczamy równanie

$$(1) \quad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą. Gdy $\alpha = 0$ lub $\alpha = 1$, otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe, które już omówiliśmy. Wobec tego

założymy, że $a \neq 0$ i $a \neq 1$; przyjmujemy, że funkcje $a(x)$ i $b(x)$ są ciągłe w jakimś przedziale (p, q) .

Gdy $a > 0$, to funkcja stała $y=0$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (1), a jeżeli jest nadto $a > 1$, to jak widać, zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania; wobec tego, jeśli jakieś rozwiązanie znika choćby dla jednej wartości $x=x_0$ należącej do przedziału (p, q) , to musi już ono być identycznie zerem; może tak nie być dla $a < 1$ (p. ust. 49, str. 66). W przypadku, gdy $a < 0$, rozwiązanie znikające nie ma w ogóle sensu, przynajmniej tak długo, jak długo równania (1) nie zastąpimy równaniem rozszerzonym $[a(x)y^{1-a} + b(x)]dx - y^{-a}dy = 0$. Należy wreszcie dodać, że gdy a nie jest liczbą całkowitą, to stojąc na gruncie liczb rzeczywistych należy założyć, że $y > 0$.

Założmy następnie, że mamy do czynienia z rozwiązaniami stałe różnymi od zera, co równoważne jest rozważaniu równania (1) w obszarach $p < x < q$ i $y > 0$ lub $y < 0$.

Wykażemy, że równanie (1) można w tym przypadku sprowadzić do równoważnego równania liniowego. Istotnie, równanie (1) można przepisać w formie

$$\frac{1}{y^a} \frac{dy}{dx} = a(x)y^{1-a} + b(x)$$

czyli, z uwagi na wzór

$$\frac{1}{y^a} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-a} \frac{d}{dx} y^{1-a},$$

w postaci

$$\frac{1}{1-a} \frac{d}{dx} y^{1-a} = a(x)y^{1-a} + b(x).$$

Przyjmując

$$(2) \quad y^{1-a} = z$$

otrzymujemy dla funkcji niewiadomej z równanie liniowe

$$(3) \quad \frac{1}{1-a} \frac{dz}{dx} = a(x)z + b(x).$$

Jeżeli funkcja

$$z = Df(x) + g(x)$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania (3), to funkcja

$$y = \pm |Df(x) + g(x)|^{1/(1-a)},$$

przy odpowiednim doborze znaku i obszaru zmienności x i D , w którym jest ona różna od zera, jest rozwiązaniem ogólnym równania (1); związek zaś

$$\frac{y^{1-a} - g(x)}{f(x)} = D$$

daje całkę równania (1).

Uwaga. Jeżeli znane jest pewne szczególne rozwiązanie y_1 równania Bernoulliego, nieznikające i przebiegające w całym przedziale (p, q) , to tym samym znane jest pewne rozwiązanie szczególne równania liniowego (3), a mianowicie rozwiązanie

$$z_1 = y_1^{1-a}.$$

Wobec tego (p. ust. 84, str. 119) dla znalezienia rozwiązania ogólnego równania (3), wystarczy znaleźć rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania jednorodnego, co wymaga jednego całkowania.

Podobnie, gdy znane są dwa analogiczne i różne rozwiązania szczególne równania Bernoulliego, to znane są tym samym dwa różne rozwiązania szczególne równania (3), wobec czego (p. ust. 84, str. 120) można automatycznie wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (3), a więc i rozwiązanie ogólne równania (1).

PRZYKŁAD 60. W równaniu

$$\frac{dy}{dx} = y + x\sqrt{y},$$

które możemy też, dla $y > 0$, napisać w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + x,$$

podstawiamy $\sqrt{y} = z$ i wobec równości

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

otrzymujemy równanie liniowe

$$2 \frac{dz}{dx} = z + x.$$

W rozwiązaniu $z = Ce^{x/2}$ odpowiedniego równania jednorodnego $dz/dx = z/2$ uziemienniamy stałą i dla wyznaczenia $C(x)$ otrzymujemy warunek $2C'(x) = xe^{-x/2}$. Stąd $C(x) = -e^{-x/2}(x+2)D$, a więc $z = -(x+2) + De^{x/2}$ i ostatecznie

$$y = [-(x+2) + De^{x/2}]^2,$$

gdzie D jest dowolną stałą.

ZADANIE 49. Rozwiązać następujące równania:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy + \frac{1}{y}, & x \frac{dy}{dx} - 4y &= x^2 \sqrt{y}, \\ \frac{dy}{dx} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right), & (xy + x^2 y^2) \frac{dy}{dx} &= 1. \end{aligned}$$

§ 26. Równanie Jacobiego

86. Rozważymy najpierw pewne równanie ogólniejsze*), do którego równanie Jacobiego zawsze można sprowadzić, a mianowicie równanie

$$(1) \quad A(x, y)dx + B(x, y)dy + C(x, y)(ydx - xdy) = 0,$$

przy założeniu, że funkcje A i B są jednorodne tego samego stopnia m , funkcja zaś C jest sumą dwóch funkcji jednorodnych stopni p i q , tzn. że

$$(2) \quad A(x, y) = x^m a\left(\frac{y}{x}\right), \quad B(x, y) = x^m b\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$(3) \quad C(x, y) = x^p c_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^q c_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

gdzie a, b, c_1 i c_2 są to pewne funkcje argumentu $z = y/x$ ciągłe w jakimś przedziale.

Równanie (1) przybiera, wobec (2) i (3), postać

$$a\left(\frac{y}{x}\right)dx + b\left(\frac{y}{x}\right)dy + \left[x^{p-m}c_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{q-m}c_2\left(\frac{y}{x}\right)\right](ydx - xdy) = 0.$$

Wykonując narzucające się podstawienie

$$y = xz$$

otrzymamy następujące równoważne równanie o niewiadomej funkcji z

$$(4) \quad [a(z) + zb(z)]dz + [xb(z) - x^{p-m+2}c_1(z) - x^{q-m+2}c_2(z)]dz = 0.$$

Pozostawiając czytelnikowi prostą dyskusję przypadku, gdy w pewnych punktach z jest $a(z) + zb(z) = 0$, założymy, że jest stałe

$$(5) \quad \Phi(z) = a(z) + zb(z) \neq 0.$$

Wówczas równaniu (4) można nadać postać

$$(5') \quad \frac{dx}{dz} + \frac{b(z)}{\Phi(z)}x - \frac{c_1(z)}{\Phi(z)}x^{p-m+2} - \frac{c_2(z)}{\Phi(z)}x^{q-m+2} = 0,$$

z której widzimy, że jeżeli jeden z wykładników $p-m+2$, $q-m+2$ jest równy jedności, to mamy do czynienia z równaniem Bernoulliego. Ponieważ zawsze, bez szkody dla ogólności, można przyjąć, że zachodzi to dla pierwszego z wykładników, więc otrzymujemy

Twierdzenie. Jeżeli prócz założeń sformułowanych wyżej spełniony jest warunek $p=m-1$ i warunek (5), to równanie (1) jest efektywnie całkowne bez względu na wartość wykładnika q .

*) P. W. A. Stiekiłow, *Osnovy teorii integrowania obyknownykh differencjalnykh uravnenij*, Moskwa 1927, str. 150 i nast.

Jeżeli jedna z funkcji, np. c_1 jest identycznie równa zeru, to z (5') wiadać, że wypowiedziane twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej pozostałej funkcji c_2 i dowolnego wykładnika q . W ten sposób jako szczególny przypadek twierdzenia poprzedniego otrzymujemy następujące

Twierdzenie. Jeżeli w równaniu (1) $A(x, y)$ i $B(x, y)$ są funkcjami jednorodnymi tego samego stopnia m , a $C(x, y)$ jest funkcją jednorodną dowolnego stopnia q , to równanie to jest, przy wymienionych przedtem założeniach, efektywnie całkowne.

PRZYKŁAD 61. Równanie $(3+xy-y^2)dx + (4-x^2+xy)dy = 0$ może być napisane w postaci $3dx + 4dy + (x-y)(ydx - xdy) = 0$. Podstawiając $y = xz$ otrzymamy równanie Bernoulliego

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{4}{3+4z}x - \frac{z-1}{3+4z}x^3$$

w czterech ćwiartkach płaszczyzny, w których $x \neq 0$ i $z \neq -3/4$.

PRZYKŁAD 62. Równanie różniczkowe

$$[l_{11}x + (l_{12} + l_0)y + \varphi(x, y)]dy + [(l_{21} - l_0)x + l_{22}y - \varphi(x, y)x]dx = 0,$$

w którym l_{ij} i l_0 są stałymi, a $\varphi(x, y) = x^q \psi(y/x)$ — dowolną funkcją jednorodną i ciągłą dla wartości y/x przebiegających pewien przedział, może być napisane w postaci

$$(l_{11}x + l_{12}y)dx + (l_{21}x + l_{22}y)dy + [l_0 + \varphi(x, y)](ydx - xdy) = 0.$$

Stosuje się tu zatem wyłożona teoria, gdyż współczynnik przy $ydx - xdy$ jest sumą funkcji jednorodnej l_0 stopnia zero i pewnej drugiej funkcji jednorodnej $\varphi(x, y)$.

87. Jeżeli A, B i C są w równaniu (1) liniowymi funkcjami zmiennych x i y , to mamy tzw. *równanie Jacobiego*, które zapisujemy w postaci

$$(6) \quad (a_1x + b_1y + c_1)dy - (a_2x + b_2y + c_2)dx - (a_3x + b_3y + c_3)(x dy - y dx) = 0.$$

Zakładamy, że współczynniki a_2 i b_3 nie są równocześnie równe zeru, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy właściwie do czynienia z równaniem rozważanym w ust. 79, str. 113. Ponieważ prócz tego w przypadku $c_1 = c_2 = 0$ równanie (6) jest, przy odpowiednich zastrzeżeniach, typu rozważanego przed chwilą, więc narzuca się myśl, aby do tego przypadku szczególnego sprowadzić przypadek ogólny; czynimy to przez podstawienie

$$(7) \quad x = \xi + a, \quad y = \eta + \beta.$$

Podstawiając (7) do (6) otrzymujemy równanie tego samego typu

$$(8) \quad (a_1\xi + b_1\eta + c_1)d\eta - (a_2\xi + b_2\eta + c_2)d\xi - (a_3\xi + b_3\eta + \lambda)(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0$$

z następującymi wartościami współczynników:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 - a_3 a, & a'_2 &= a_2 - a_3 \beta, & a'_3 &= a_3, \\ (9) \quad b'_1 &= b_1 - b_3 a, & b'_2 &= b_2 - b_3 \beta, & b'_3 &= b_3, \\ c'_1 &= (a_1 a + b_1 \beta + c_1) - \lambda a, & c'_2 &= (a_2 a + b_2 \beta + c_2) - \lambda \beta, & \lambda &= a_3 a + b_3 \beta + c_3. \end{aligned}$$

Aby równanie (8) było typu rozważanego w ustępie 86, str. 125, trzeba aby było $c'_1 = c'_2 = 0$, co daje następujące warunki

$$\begin{aligned} (10) \quad & (a_1 - \lambda) a + b_1 \beta + c_1 = 0, \\ & a_2 a + (b_2 - \lambda) \beta + c_2 = 0, \\ & a_3 a + b_3 \beta + (c_3 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli istnieją liczby a, β i λ czyniące zadość równaniom (10), to równanie Jacobiego jest przy pewnych założeniach rozwiązywalne elementarnie i zagadnienie całkowania tego równania sprowadza się do zadania algebraicznego, jakim jest wyznaczenie liczb a, β i λ z równań (10).

88. Wiadomo, że warunkiem koniecznym na to, aby istniały liczby a i β czyniące zadość trzem równaniom (10), jest warunek

$$(11) \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

jeśli więc rozwiązanie równań (10) istnieje, to λ musi spełniać równanie (11), zwane *równaniem charakterystycznym równania Jacobiego*.

Równanie charakterystyczne (11) jest stopnia trzeciego, ma więc pierwiastki λ_1, λ_2 i λ_3 , z których co najmniej jeden jest rzeczywisty. Założymy, że wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i że nie zachodzi przypadek pierwiastka potrójnego oraz dobierzmy oznaczenia tak, aby było $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Oznaczmy przez $\Delta_1(\lambda)$ podwyznacznik wyznacznika (11) odpowiadający elementowi c_1 , a przez $\Delta_2(\lambda)$ — podwyznacznik odpowiadający elementowi c_2 . Mamy

$$\Delta_1(\lambda) = a_2 b_3 - b_2 a_3 + a_3 \lambda, \quad \Delta_2(\lambda) = a_1 b_3 - b_1 a_3 - b_3 \lambda.$$

Zobaczmy, że co najmniej jedna z czterech liczb $\Delta_1(\lambda_1), \Delta_1(\lambda_2), \Delta_2(\lambda_1)$ i $\Delta_2(\lambda_2)$ jest różna od zera. Istotnie, gdyby tak nie było, to z równości $\Delta_1(\lambda_1) = \Delta_1(\lambda_2) = 0$ wynikałoby, że $a_3 = 0$, z równości zaś $\Delta_2(\lambda_1) = \Delta_2(\lambda_2) = 0$ wynikałoby, że $b_3 = 0$, gdyż wyznaczniki $\Delta_1(\lambda)$ i $\Delta_2(\lambda)$, jako liniowe funkcje zmiennej λ , zniknęłyby dla dwóch różnych wartości λ_1 i λ_2 . Ponieważ zaś liczby a_3 i b_3 nie są z założenia jednocześnie równe zeru, więc i jedną z czterech wspomnianych liczb jest różna od zera i bez szkody dla ogólności możemy np. przyjąć, że $\Delta_1(\lambda_1) \neq 0$.

Rozpatrzmy w takim razie układ równań, w który przejdą równania (10), jeżeli w nich zamiast λ napiszemy λ_1 . Wówczas, wobec tego, że $\Delta_1(\lambda_1) \neq 0$, można z dwóch ostatnich równań układu wyznaczyć wartości

i β i, wobec warunku $D(\lambda_1) = 0$, wartości te spełniają również pierwsze równanie układu. Tak samo jest w przypadku $\Delta_2(\lambda_1) \neq 0$.

W ten sposób wykazaliśmy, że jeśli odnośne równanie charakterystyczne ma wyłącznie pierwiastki rzeczywiste, w tym dwa różne, to równanie Jacobiego jest całkowne elementarnie.

Do równania Jacobiego wrócimy przy rozważaniu układów równań różniczkowych; tam też omówimy wyłączone obecnie przypadki.

PRZYKŁAD 63. Dla równania

$$(-6x + 4y - 12)dy - (3x + 5y + 6)dx - (2x - 4y + 4)(x dy - y dx) = 0$$

pierwiastkami równania charakterystycznego

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 4 & -12 \\ 3 & 5 - \lambda & 6 \\ 2 & -4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tzn. równania

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

są liczby $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 2$. Równania (10) przybiorą dla $\lambda_1 = 0$ postać

$$-6a + 4\beta - 12 = 0, \quad 3a + 5\beta + 6 = 0, \quad 2a - 4\beta + 4 = 0.$$

Z dwóch ostatnich równań znajdujemy $a = -2, \beta = 0$; wartości te spełniają i pierwsze równanie. Szukane przekształcenie ma więc postać

$$x = \xi - 2, \quad y = \eta.$$

Równanie dane przybiera po przekształceniu postać

$$-(2\xi + 4\eta)d\eta - (3\xi + 5\eta)d\xi - (2\xi - 4\eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0,$$

omówioną w ustępie 86, str. 125.

ZADANIA. 50. Rozwiązać następujące równania:

$$(-2x + y^2)dx + (1 - x - xy)dy = 0,$$

$$(2x + 3y)dx + (4x - 2y)dy + (2x - 3y + 1)(y dx - x dy) = 0.$$

51. Scałkować następujące równania Jacobiego:

$$(7x + 8y - 5)dy - (7x + 8y)dx - 5(x - y)(y dx - x dy) = 0,$$

$$[(x + 1)(y + 1) + y^2]dx - [(x + 1)(x + y) - y]dy = 0.$$

§ 27. Ogólne równanie Riccatiego

89. Przez *ogólne równanie Riccatiego* rozumiemy równanie różniczkowe

$$(1) \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

w którym $a = a(x), b = b(x)$ i $c = c(x)$ są trzema danymi funkcjami zmiennej x , ciągłymi w pewnym przedziale (p, q) . Gdy jest stałe $a(x) = 0$,

otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe, gdy zaś $c(x)=0$ — mamy do czynienia z równaniem Bernoulliego. Prawa strona równania (1) jest ciągła w prostokącie T danym nierównościami

$$p < x < q, \quad -\infty < y < \infty$$

i ma w T ciągłą pochodną cząstkową względem y . Tym samym przez każdy punkt $M_0=(x_0, y_0)$ prostokąta T przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (1).

W przeciwieństwie do tego, co obserwowaliśmy rozpatrując równanie liniowe, nie będzie na ogół prawdziwym twierdzenie, że każde rozwiązanie równania (1) istnieje w całym przedziale (p, q) , w którym współczynniki $a(x)$, $b(x)$ i $c(x)$ są określone. Można podać przykład równania (1), którego współczynniki są w (p, q) określone i ciągłe, a które nie ma ani jednego rozwiązania szczególnego istniejącego w całym tym przedziale.

Równanie Riccatiego mimo swojej prostoty należy już do tych równań, które nie dają się w ogólnym przypadku efektywnie scałkować. Zachodzi to nawet dla tak prostego równania, jakim jest tzw. *specjalne równanie Riccatiego*

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + bx^n,$$

gdzie a i b są stałymi, które daje się efektywnie rozwiązać tylko przy wyjątkowych wartościach wykładnika n .

Okoliczność powyższa poważnie wpłynęła na rozwój teorii równań różniczkowych. Skoro bowiem okazało się, że na ogół nie można równania różniczkowego scałkować elementarnie, zadanie efektywnego znalezienia jego rozwiązań, choć było bardzo ważne, zeszło na plan dalszy, zaczęto natomiast uważać za główne zadanie teorii równań różniczkowych charakteryzowanie rozwiązań przy pomocy samego równania różniczkowego, tzn. jego „zewnętrznej” formy.

90. Jako ilustrację powyższej uwagi podamy kilka twierdzeń odnoszących się do równania (1), które albo pozwalają w niektórych przypadkach znaleźć jego rozwiązanie ogólne, albo orientują nas w jego naturze. Mamy najpierw

Twierdzenie. Jeżeli znane jest jedno rozwiązanie szczególne y_0 równania (1), określone w całym przedziale (p, q) , to równanie to może być sprowadzone do pewnego równoważnego równania Bernoulliego.

Dowód. Stosując zamiannę zmiennej y na z według wzoru

$$(2) \quad y = y_0 + z,$$

co jest dopuszczalne wobec tego, że funkcja y_0 jest określona w całym przedziale (p, q) i wstawiając (2) do równania (1) oraz uwzględniając, że na mocy założenia

$$y'_0 = ay_0^2 + by_0 + c,$$

przyjmujemy dla wyznaczenia funkcji z równanie

$$(3) \quad z' = (b + 2ay_0)z + az^2,$$

a więc równanie Bernoulliego, które przez podstawienie

$$(4) \quad z = \frac{1}{w}$$

może być sprowadzone, dla $z \neq 0$ (tzn. gdy rozwiązanie y jest różne od y_0), do równania liniowego

$$(5) \quad w' = -(b + 2ay_0)w - a.$$

PRZYKŁAD 64. Weźmy pod uwagę równanie

$$\frac{dy}{dx} = (k - y)(x + y) = kx + (k - x)y - y^2,$$

w którym k jest stałą. Jak widać, funkcja $y_0 = k$ jest rozwiązaniem szczególnym tego równania. Wobec tego podstawiamy, dla każdego rozwiązania y , różnego od stałej k , $z = y - k$ i otrzymujemy dla z równanie Bernoulliego

$$\frac{dz}{dx} = -(k + x)z - z^2.$$

Przyjmujemy $1/z = w$ i otrzymujemy z kolei dla w równanie

$$\frac{dw}{dx} = w(k + x) + 1.$$

Całkując najpierw równanie jednorodne otrzymujemy jako jego rozwiązanie ogólne funkcję $Ce^{(k+x)^2/2}$, a po uzmiennieniu stałej otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania liniowego w postaci

$$w = \left[D + \int_0^x e^{-(k+s)^2/2} ds \right] e^{(k+x)^2/2}.$$

Stąd otrzymujemy, dopuszczając symboliczne wartości $\pm\infty$ stałej dowolnej D i odpowiednio działania nimi, rozwiązanie ogólne rozwiązania równania postaci

$$y = k + \frac{e^{-(k+x)^2/2}}{D + \int_0^x e^{-(k+s)^2/2} ds},$$

gdzie wyrażenie w mianowniku powinno być stale $\neq 0$, co osiągamy dobierając odpowiednio obszar zmienności x i D .

Twierdzenie. Jeżeli znane są dwa różne rozwiązania szczególne równania Riccatiego, określone w całym przedziale (p, q) , to zagadnienie wyznaczenia rozwiązania ogólnego tego równania może być sprowadzone do całkowania pewnego równania różniczkowego liniowego jednorodnego.

Dowód. Jeżeli y_0 i y_1 są dwoma opisanymi szczególnymi rozwiązaniami równania (1), to z poprzedniego wynika, że funkcja

$$z = y_1 - y_0$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania (3), a funkcja $w = 1/(y_2 - y_1)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania liniowego (5). Całkowanie tego ostatniego sprowadza się więc do całkowania odpowiedniego równania jednorodnego, c. b. d. o.

Twierdzenie. Jeżeli znane są trzy różne rozwiązania szczególne równania Riccatiego, przebiegające w całym przedziale (p, q) , to można podać rozwiązanie ogólne tego równania przez wykonanie działań arytmetycznych.

Dowód. Jeżeli y_1, y_2 i y_3 są znanymi, różnymi rozwiązaniami równania (1), to z poprzedniego wynika, że funkcje

$$(6) \quad w_1 = \frac{1}{y_1 - y_3}, \quad w_2 = \frac{1}{y_2 - y_3}$$

są różnymi rozwiązaniami równania typu (5), dla którego można (p. ust. 84, str. 120) od razu napisać rozwiązanie ogólne w postaci

$$w = w_1 + D(w_2 - w_1).$$

Stąd dostajemy ogół wszystkich różnych od y_3 rozwiązań równania (1) w postaci

$$(7) \quad y = y_3 + \frac{1}{\frac{1}{y_1 - y_3} + D\left(\frac{1}{y_2 - y_3} - \frac{1}{y_1 - y_3}\right)},$$

a dopuszczając symboliczne wartości $D = \pm\infty$ stwierdzamy natychmiast, że (7) przedstawia rozwiązanie ogólne równania (1), c. b. d. o. Zastrzegamy tu oczywiście, że mianownik w ułamku występującym po prawej stronie w (7) powinien być różny od zera.

Twierdzenie. Dla każdych czterech rozwiązań y_1, y_2, y_3 i y równania (1) istniejących w jakimś przedziale, z których trzy pierwsze są różne, wówczas

$$(8) \quad \frac{y - y_1}{y - y_3} \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_3}$$

jest wielkością stałą, niezależną od x , a zależną jedynie od wyboru tych rozwiązań.

Dowód. Wynika to bezpośrednio z (7), przez rozwiązanie względem stałej D ; gdy $y = y_3$, wówczas jako stały stosunek (8) należy przyjąć symboliczne wartości $D = \pm\infty$.

91. Ponieważ nie istnieją metody efektywnego całkowania równania Riccatiego w ogólnym przypadku, więc tym ważniejsza jest znajomość pewnych przekształceń, sprowadzających równanie do postaci prostszych,

pozwalających albo niekiedy odgadnąć rozwiązanie szczególne, albo łatwiej śledzić własności rozwiązań na podstawie samego równania. W tym kierunku prowadzą następujące twierdzenia.

Twierdzenie. Jeżeli w równaniu (1) współczynnik $a = a(x)$ jest stale różny od zera i klasy C^1 , to można sprowadzić równanie (1) do takiego równania Riccatiego, w którym współczynnik przy kwadracie funkcji niewiadomej równy jest 1 albo -1 .

Dowód. Niech będzie

$$y = u \frac{\varepsilon}{a},$$

gdzie u jest nową funkcją niewiadomą zmiennej x , zaś $\varepsilon = \pm 1$. Podstawiając do (1) otrzymujemy równanie równoważne

$$(9) \quad u \frac{d}{dx} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right) + \frac{\varepsilon}{a} \frac{du}{dx} = au^2 \frac{\varepsilon^2}{a^2} + bu \frac{\varepsilon}{a} + c,$$

czyli wobec założenia, że $a \neq 0$, równanie

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon u^2 + \left(b + \frac{da}{dx} \right) u + \varepsilon ac,$$

c. b. d. o.

Twierdzenie. Jeżeli w równaniu (1) współczynnik $a = a(x)$ jest stale różny od zera i klasy C^1 i jeżeli funkcja b jest klasy C^1 , to równanie Riccatiego można tak przekształcić, aby współczynnik przy kwadracie funkcji niewiadomej nie uległ zmianie i równocześnie, aby znikł wyraz zawierający funkcję niewiadomą w potęgę pierwszej.

Dowód. Podstawmy w równaniu (1)

$$y = u + v,$$

gdzie u jest nową funkcją niewiadomą, v zaś — chwilowo nieoznaczoną funkcję pomocniczą, określoną i będącą klasy C^1 w przedziale (p, q) . Po uporządkowaniu przekształconego równania (1) otrzymujemy

$$\frac{du}{dx} = au^2 + (2av + b)u + \left(av^2 + bv + c - \frac{dv}{dx} \right).$$

Jeżeli teraz podstawimy

$$v = -\frac{b}{2a},$$

to, jak widać, równanie (1) przybiera żadaną postać

$$\frac{du}{dx} = au^2 + C,$$

gdzie

$$C = C(x) = \frac{-ab^2 + 4a^2c + 2a \frac{db}{dx} - 2b \frac{da}{dx}}{4a^2}.$$

Wykonując po kolei przekształcenia wskazane w poprzednich twierdzeniach możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Jeżeli w równaniu (1) współczynniki a i b są klasy C^1 i jeżeli $a \neq 0$, to równanie ogólne Riccatiego można sprowadzić do postaci szczególnie prostej

$$\frac{dY}{dx} = \varepsilon Y^2 + C,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, C zaś jest pewną funkcją ciągłą, wyrażającą się przez funkcje a, b, c i pochodne da/dx i db/dx .

ZADANIA 52. Wyznaczyć rozwiązania ogólne następujących równań:

$$y' = 1 + x^2 - y^2, \quad y' = y^2 + xy - 2/x^2 - 1, \quad y' = 2e^{-x}y^2 - e^x,$$

znając odpowiednio ich rozwiązania szczególne

$$y = x, \quad y = 1/x, \quad y = e^x.$$

53. Odgadnąć rozwiązanie szczególne, a następnie wyznaczyć rozwiązanie ogólne następujących równań:

$$y' = 1 - xy - y^2, \quad y' = (1 - xy)Q(x) - y^2, \quad y' = \cos x - y \sin x + y^2.$$

54. Wykazać, że jeżeli w równaniu (1) wprowadzimy nową zmienną niezależną t za pomocą podstawienia typu $x = Q(t)$, to otrzymamy nadal równanie Riccatiego, przy stosownych założeniach o funkcji $Q(t)$.

55. Wykazać, że jeśli w równaniu (1) zamiast funkcji y wprowadzimy za pomocą przekształcenia homograficznego nową funkcję

$$\eta = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

to otrzymamy nadal równanie Riccatiego; α, β, γ i δ są takimi funkcjami klasy C^1 zmiennej x , że $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

56. Wykazać, że jeśli y_1 i y_2 są dwoma szczególnymi rozwiązaniami równania (1), to przy stosownych zastrzeżeniach wzór

$$y = \frac{y_2 + Dy_1(y_2 - y_1) \exp\left(-\int_{x_0}^x [b(s) + 2a(s)y_1(s)] ds\right)}{1 + D(y_2 - y_1) \exp\left(-\int_{x_0}^x [b(s) + 2a(s)y_1(s)] ds\right)}$$

przedstawia rozwiązanie ogólne tego równania.

§ 28. Równanie Boole'a i równanie Riccatiego specjalne

92. Szczególne równanie Riccatiego

$$(1) \quad xy' - ay + by^2 = cx^\mu,$$

w którym a, b, c i μ są pewnymi stałymi nazywamy *równaniem różniczkowym Boole'a*. Zakładamy, że $b \neq 0$ i $c \neq 0$, aby wykluczyć przypadek równania liniowego lub równania Bernoulliego, oraz że $x > 0$. Jak zobaczymy, równanie to można w niektórych przypadkach efektywnie scałkować.

Wykonajmy najpierw nasuwające się podstawienie

$$y = x^q z,$$

gdzie q jest stałą chwilowo nieoznaczoną. Po uproszczeniach i uporządkowaniu otrzymamy równanie o zmiennej z , któremu można nadać postać

$$(2) \quad xz' + (q - a)z + bx^q z^2 = cx^{\mu - q}.$$

Widzimy stąd, że jeśli równocześnie $q = a$ i $\mu - q = q$, to równanie (2) przybiera postać

$$(3) \quad z' + x^{q-1}(bz^2 - c) = 0,$$

w której zmienne dają się rozdzielić. Aby taką wartość q można było wyznaczyć, musi być $\mu = 2a$ i wtedy należy przyjąć $q = a = \mu/2$. Mamy więc

Twierdzenie. Gdy $\mu = 2a$, wówczas podstawienie $y = x^a z$ przekształca równanie (1) na równanie (3) o zmiennych rozdzielonych.

93. Boole wykazał, że przy pewnych wartościach stałej β podstawienie

$$(4) \quad y = \beta + \frac{x^\mu}{v},$$

gdzie v jest nową funkcją niewiadomą, przekształca równanie (1) w równanie tego samego typu.

Istotnie, ograniczając się do wartości $x > 0$ i $y \neq \beta$ otrzymujemy w tym przypadku równanie różniczkowe

$$(5) \quad xv' - \left(\frac{b\beta^2 - a\beta}{x^\mu} - c \right) v^2 - (\mu - a + 2b\beta)v = bx^\mu,$$

które jest równaniem Boole'a, jeżeli tylko

$$b\beta^2 - a\beta = 0,$$

czyli jeżeli przyjmiemy $\beta = a/b$ lub $\beta = 0$. Stąd mamy

Twierdzenie. Podstawienia

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^\mu}{v} \quad i \quad y' = \frac{x^\mu}{v}$$

przekształcają równanie Boole'a rozważane w obszarach $x > 0$ i $y > \beta$ lub $y < \beta$, gdzie $\beta = a/b$ lub $\beta = 0$, w analogiczne równanie Boole'a w odpowiednich obszarach zmiennych x i v .

94. Zbadajmy najpierw podstawienie typu

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^\mu}{v_1},$$

odpowiadające przypadkowi $\beta = a/b$; w tym przypadku równanie (5) przybiera postać

$$(6) \quad xv'_1 - (\mu + a)v_1 + cv_1^2 = bx^\mu.$$

Ograniczając się do wartości $x > 0$ i $v_1 \neq (\mu + a)/c$ oraz przyjmując

$$v_1 = \frac{\mu + a}{c} + \frac{x^\mu}{v_2},$$

możemy do tego równania znowu zastosować podstawienie tego typu, doprowadzające nas do równania

$$xv'_2 - (2\mu + a)v_2 + bv_2^2 = cx^\mu.$$

Podstawiając analogicznie

$$v_2 = \frac{2\mu + a}{b} + \frac{x^\mu}{v_3}$$

otrzymamy z kolei równanie

$$xv'_3 - (3\mu + a)v_3 + cv_3^2 = bx^\mu$$

i postępując tak w dalszym ciągu otrzymamy po wykonaniu k takich podstawień równanie

$$xv'_k - (k\mu + a)v_k + Pv_k^2 = Qx^\mu,$$

gdzie dla k parzystego należy przyjąć $P = b$ i $Q = c$, a dla k nieparzystego należy przyjąć $P = c$ i $Q = b$.

Stąd i z udowodnionego w ustępie 92, str. 133, twierdzenia wynika wniosek, że jeśli po k krokach będzie $\mu = 2(k\mu + a)$, to otrzymamy równanie, które da się sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych. Przypadek ten zachodzi oczywiście wtedy i tylko wtedy, jeżeli liczba $(\mu - 2a)/2\mu$ jest całkowita i dodatnia.

Zbadajmy z kolei podstawienie typu

$$y = \frac{x^\mu}{v}$$

odpowiadające przypadkowi $\beta = 0$. Równanie (5) przybierze w tym przypadku postać

$$xv' - (\mu - a)v + cv^2 = bx^\mu.$$

W myśl tego, co przed chwilą wykazaliśmy, równanie to da się efektywnie scałkować, gdy liczba $[\mu - 2(\mu - a)]/2\mu = (2a - \mu)/2\mu$ jest całkowita i dodatnia, czyli gdy $(\mu - 2a)/2\mu$ jest liczbą całkowitą ujemną.

Ostatecznie mamy więc następujące

Twierdzenie. Jeżeli wyrażenie $(\mu - 2a)/2\mu$ jest liczbą całkowitą, to równanie Boole'a można sprowadzić do równoważnego równania o zmiennych rozdzielonych, ograniczając stosownie obszar zmienności x i y , a więc jest ono w tym przypadku efektywnie całkowalne.

95. Tak zwane specjalne równanie Riccatiego (p. ust. 89, str. 128)

$$(7) \quad y' = ay^2 + bx^n,$$

gdzie $x > 0$, sprowadza się przez proste podstawienie

$$y = \frac{z}{x}$$

do równania Boole'a typu

$$(8) \quad xz' - z - az^2 = bx^{n+2},$$

w którym rolę a gra liczba 1, rolę zaś μ — liczba $n + 2$.

Jeśli więc liczba $(n + 2 - 2)/2(n + 2) = n/(2n + 4)$ jest całkowita, to równanie (7) można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych. Przyjmując $n/(2n + 4) = k$ widzimy, że zachodzi to wtedy, gdy n jest postaci $4k/(1 - 2k)$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Gdy $k \rightarrow \infty$, wówczas n określone w powyższy sposób zmierza do -2 . Wtedy podstawienie

$$y = \frac{1}{z}$$

przekształca, przy zastrzeżeniu $y \neq 0$, równanie (7) w równanie

$$z' = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2,$$

a więc w równanie jednorodne, które można scałkować elementarnie.

Reasumując mamy więc

Twierdzenie. Jeżeli $n = -2$ lub jeżeli n jest postaci $4k/(1 - 2k)$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to równanie (7) może być sprowadzone, drogą wykonania skończonej liczby elementarnych podstawień i przy stosownym ograniczeniu zmienności x i y , do równoważnego równania efektywnie rozwiązalnego.

Uwaga. Liouville wykazał, że podane wyżej przypadki są jedynymi, w których równanie (7) daje się scałkować przez wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych *).

ZADANIA. 57. Scałkować według opisanych metod następujące równania:

$$y' + y^2 = \frac{1}{\sqrt{x^4}}, \quad y' + y^2 = \frac{1}{x^4}, \quad y' = 4y^2 + \frac{1}{x^4},$$

podając obszary zmienności x i y , w których wolno wykonać właściwe przekształcenia.

58. Sprowadzić równanie $xy' = ay^2 + by + cx^n$, w którym a, b, c i n są stałymi, za pomocą podstawienia $x = \xi^a$, $y = \xi\eta$, do specjalnego równania Riccatiego. Wyznaczyć odpowiedni wykładnik a oraz podać warunki elementarnej całkowalności danego równania łącznie ze stosownymi zastrzeżeniami co do obszarów zmienności x i y .

§ 29. Teoria czynnika całkującego

96. Jeżeli równanie

$$(1) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

rozważane w pewnym obszarze T jest zupełne, to, jak widzieliśmy w ustępie 64, str. 93, równanie to jest efektywnie rozwiązalne. Jeżeli równanie (1) nie jest zupełne, to powstaje myśl, czy nie można pomnożyć go stronami przez taką funkcję $N(x, y)$, określoną w obszarze T , aby przeszło ono w równoważne równanie zupełne.

Przyjmijmy następujące określenie: jeżeli przy danym równaniu (1) i jakiejś funkcji $N = N(x, y)$, ciągłej i różnej od zera w obszarze T , równanie różniczkowe postaci

$$(2) \quad N(x, y)P(x, y) dx + N(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

jest w obszarze T zupełne, to mówimy, że funkcja N jest *czynnikiem całkującym równania* (1).

Założenie, że ma być $N(x, y) \neq 0$ wprowadziliśmy po to, aby równanie (2) pozostawało równoważne z (1).

97. Znajomość czynnika całkującego dla równania (1) ma, jak widać, pierwszorzędne znaczenie i nasuwa się pytanie, w jaki sposób można taki czynnik efektywnie wyznaczyć. Częściową odpowiedź na to pytanie daje

Twierdzenie. Niech funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ występujące w równaniu (1) będą klasy C^1 w obszarze T , a obszar ten niech będzie jednospójny. Na to, aby funkcja $N(x, y)$ klasy C^1 była czynnikiem całkującym równa-

*) J. Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6 (1841).

nia (1), potrzeba i wystarcza, aby była ona stale różna od zera oraz aby spełniona była w obszarze T równość

$$(3) \quad \frac{\partial(NP)}{\partial y} = \frac{\partial(NQ)}{\partial x}$$

lub równoważna jej równość

$$(4) \quad Q(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - P(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} = -N(x, y) \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right].$$

Dowód. Wynika to bezpośrednio z określenia czynnika całkującego oraz z warunku (6) podanego w ustępie 64, str. 92.

Równanie (4) nosi nazwę *równania czynnika całkującego* dla równania (1).

98. Równanie (4) jest względem niewiadomej funkcji $N(x, y)$ równaniem o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Rozwiązanie takiego równania jest zadaniem na ogół o wiele trudniejszym niż rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego (1) i powstaje pytanie, czy z punktu widzenia praktycznego poszukiwanie czynnika całkującego ma jakąś wartość.

W celu wyjaśnienia tej wątpliwości należy zauważyć, po pierwsze, że dla skorzystania z czynnika całkującego przy rozwiązywaniu równania (1) nie trzeba znać wszystkich rozwiązań równania (4), a wystarczy znajomość jednej funkcji nieznikającej i czyniącej zadość temu równaniu, po drugie, że w wielu przypadkach takie jedno szczególne rozwiązanie równania (4) daje się po prostu odgadnąć i po trzecie, że istnieje klasa przypadków, gdzie czynnik całkujący daje się wyznaczyć według ściśle określonych metod postępowania, z których kilka będzie omówionych poniżej w dalszym ciągu tego paragrafu.

Z tych powodów należy uznać nie tylko teoretyczną ale i praktyczną wartość poszukiwania czynnika całkującego.

PRZYKŁAD 65. Lewa strona równania różniczkowego

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{y} dx + \frac{x^2 + y^2 + 1}{x} dy = 0$$

nie jest różniczką zupełną. Jeżeli jednak równanie to pomnożymy przez funkcję xy , to otrzymamy równanie

$$x(x^2 + y^2 - 1) dx + y(x^2 + y^2 + 1) dy = 0,$$

które już jest zupełne. Funkcja xy jest więc czynnikiem całkującym danego równania w całej płaszczyźnie zmiennych x i y z wyłączeniem punktu $(0, 0)$. Czynnik ten można po prostu odgadnąć.

99. Obecnie podamy trzy przypadki, w których czynnik całkujący równania (1) daje się wyznaczyć metodami ściśle określonymi. Zakła-

damy, że funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w pewnym jednostajnym obszarze T .

I. Wyznaczanie czynnika całkującego, zależnego tylko od jednej ze zmiennych, postaci $N=\mu(x)$ lub $N=\nu(y)$.

Udowodnione w ustępie 97, str. 136, twierdzenie wskazuje, że na to, aby funkcja $\mu(x)$ klasy C^1 jednej tylko zmiennej x była czynnikiem całkującym równania (1), potrzeba i wystarcza, żeby: 1° była ona określona w przedziale (a, b) będącym rzutem obszaru T na oś x , 2° była różna od zera, 3° spełniała w T warunek

$$(5) \quad Q(x, y) \frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x) \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right).$$

Widzimy, że jeżeli dla opisanej funkcji $\mu(x)$ zachodzi związek (5), to wobec warunku $\mu(x) \neq 0$ jest, przy założeniu $Q(x, y) \neq 0$,

$$(6) \quad \frac{d \ln |\mu(x)|}{dx} = \frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)}.$$

Równość ta orzeka, że wyrażenie występujące po jej prawej stronie nie zależy od y , tzn., że jest ono funkcją tylko jednej zmiennej x w obszarze T i że funkcja $\mu(x)$ ma postać

$$(7) \quad \mu(x) = \pm \exp \left(\int \frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} dx \right).$$

Na odwrót, jeżeli wyrażenie po prawej stronie (6) nie zależy od y , to funkcja $\mu(x)$ wyznaczona wzorem (7) czyni zadość związkowi (6), a więc i równaniu (5), a ponieważ nie znika, więc jest ona czynnikiem całkującym równania (1).

Reasumując otrzymujemy

Twierdzenie. Na to, by przy założeniu $Q(x, y) \neq 0$ i założeniach wymienionych na początku ustępu 99, str. 137, istniał czynnik całkujący równania (1) zależny tylko od zmiennej x , potrzeba i wystarcza, aby wyrażenie

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)}$$

nie zależało od zmiennej y . Jeżeli warunek ten jest spełniony, to wzór (7) określa czynnik całkujący równania (1).

PRZYKŁAD 66. Dla równania różniczkowego

$$(*) \quad (3x^4y + x^2y^3 + 6xy)dx + 3(x^2 + y^2)dy = 0$$

dochodzi, jak widać, w płaszczyźnie zmiennych x i y bez punktu $(0, 0)$ związek

$$\frac{\frac{\partial(3x^4y + x^2y^3 + 6xy)}{\partial y}}{\frac{\partial(3(x^2 + y^2))}{\partial x}} = x^2.$$

Na mocy (7) czynnikiem całkującym zależnym tylko od zmiennej x jest wyrażenie $\mu(x) = e^{x^3}$. Jak łatwo sprawdzić, równanie

$$e^{x^3}(3x^4y + x^2y^3 + 6xy)dx + 3e^{x^3}(x^2 + y^2)dy = 0$$

otrzymane z (*) przez pomnożenie go przez ten czynnik całkujący jest zupełne; można usunąć nadto zastrzeżenie co do wyłączenia punktu $(0, 0)$.

II. Zamieniając role zmiennych x i y oraz funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie. Na to, aby istniał czynnik całkujący równania (1) zależny tylko od zmiennej y , potrzeba i wystarcza, żeby przy wymienionych w ustępie 99, str. 137 założeniach i przy założeniu $P(x, y) \neq 0$, wyrażenie

$$(8) \quad \frac{\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}}{P(x, y)}$$

nie zależało od zmiennej x . Jeżeli warunki te są spełnione, to funkcja

$$\nu(y) = \pm \exp \left(\int \frac{\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}}{P(x, y)} dy \right)$$

jest czynnikiem całkującym równania (1).

PRZYKŁAD 67. Wyznaczyć czynnik całkujący równania

$$xydx + [x^2\varphi(y) + \psi(y)]dy = 0,$$

gdzie $\varphi(y)$ i $\psi(y)$ są dowolnymi funkcjami klasy C^1 , określonymi dla $y \neq 0$.

Po łatwym rachunku wyrażenie (8) przyjmuje w rozważanym przypadku w obszarach, gdzie $x \neq 0$ i $y \neq 0$, postać

$$\frac{2\varphi(y) - 1}{y},$$

co wskazuje, że istnieje tam czynnik całkujący danego równania zależny tylko od y , postaci

$$\nu(y) = \exp \left(\int \frac{2\varphi(y) - 1}{y} dy \right);$$

zastrzeżenie, że $x \neq 0$ można teraz usunąć.

III. Zbadajmy wreszcie, kiedy istnieje analogiczny czynnik całkujący w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których każda zależy tylko od jednej zmiennej

$$(9) \quad \mu(x)\nu(y).$$

Zakładając, że (9) jest żądanym czynnikiem całkującym i stosując warunek (4) podany w ustępie 97, str. 137, otrzymujemy

$$Q(x,y)\frac{d\ln|\mu(x)|}{dx} - P(x,y)\frac{d\ln|\nu(y)|}{dy} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Stąd, przyjmując oznaczenia $d\ln|\mu(x)|/dx = \varphi(x)$ i $d\ln|\nu(y)|/dy = \psi(y)$, widzimy, że warunkiem koniecznym istnienia czynnika całkującego postaci (9) jest istnienie takich dwóch funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(y)$, dla których zachodzi tożsamościowo równość

$$(10) \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = Q(x,y)\varphi(x) - P(x,y)\psi(y).$$

Na odwrót, jeżeli zachodzi tego rodzaju związek, to przyjmując

$$(11) \quad \mu(x) = \pm \exp\left(\int \varphi(x)dx\right), \quad \nu(y) = \pm \exp\left(\int \psi(y)dy\right),$$

otrzymujemy, jak widać, żądany czynnik całkujący w postaci

$$\pm \exp\left(\int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy\right).$$

PRZYKŁAD 68. Równanie

$$axdy - bydx - (a_1x + b_1y + c_1)(xdy - ydx) = 0$$

jest równaniem Jacobiego i mogłoby być scałkowane metodą wyłożoną w ustępie 86, str. 125. Poszukajmy tu czynnika całkującego. Przyjmując

$$P = (a_1x + b_1y + c_1 - b)y, \quad Q = -(a_1x + b_1y + c_1 - a)x$$

mamy, jak widać,

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3a_1x + 3b_1y + 2c_1 - a - b.$$

Zapytajmy, czy istnieją takie funkcje $\varphi = \varphi(x)$ i $\psi = \psi(y)$, aby prawa strona powyższej równości była równa $Q\varphi - P\psi$, tzn., aby

$$(12) \quad \begin{aligned} & 3a_1x + 3b_1y + 2c_1 - a - b = \\ & = -(a_1x + b_1y + c_1 - a)x\varphi(x) - (a_1x + b_1y + c_1 - b)y\psi(y). \end{aligned}$$

Łatwo się domyślić, że warunkowi temu można będzie uczynić zadość przyjmując w obszarach, gdzie x i y są różne od zera, np. dla $x > 0$ i $y > 0$

$$(13) \quad \varphi(x) = \frac{A}{x}, \quad \psi(y) = \frac{B}{y},$$

gdzie A i B są stałymi, które należy stosownie dobrać. Podstawiając (13) do (12) mamy dla wyznaczenia tych stałych warunek

$$3a_1x + 3b_1y + 2c_1 - a - b = -a_1(A+B)x - b_1(A+B)y + (a-c_1)A + (b-c_1)B$$

czyli

$$A+B = -3, \quad (a-c_1)A + (b-c_1)B = -a-b+2c_1.$$

W założeniu, że równania powyższe są rozwiązywalne względem A i B , co zachodzi z pewnością, gdy $a-b \neq 0$, otrzymujemy po wyznaczeniu stałych A i B żądane funkcje (11) w postaci

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{A dx}{x}\right) = x^A, \quad \nu(y) = \exp\left(\int \frac{B dy}{y}\right) = y^B,$$

a więc i czynnik całkujący tego równania kształtu

$$x^A y^B.$$

100. Przyjmując oznaczenia i założenia podane w ustępach 72 i 73, str. 105 i 106, wykonajmy w równaniu (1) zamianę zmiennych według wzorów

$$(14) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta).$$

Przekształcamy równanie (1) w równanie równoważne

$$(15) \quad R(\xi, \eta)d\xi + S(\xi, \eta)d\eta = 0,$$

gdzie funkcje $R = R(\xi, \eta)$ i $S = S(\xi, \eta)$ są określone odpowiednimi wzorami w ustępach 72 i 73, str. 105 i 106. Zachodzi następujące

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $N = N(x, y)$ jest czynnikiem całkującym równania (1), to funkcja

$$(16) \quad M = M(\xi, \eta) = N[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]$$

jest czynnikiem całkującym równania (15).

Dowód. Z założenia wynika, że istnieje w obszarze T taka funkcja

$$U = U(x, y),$$

dla której jest tożsamościowo

$$\frac{\partial U}{\partial x} = NP \quad \text{ i } \quad \frac{\partial U}{\partial y} = NQ.$$

Przyjmując teraz analogicznie jak w ustępie 74, str. 106,

$$W = W(\xi, \eta) = U[X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]$$

i uwzględniając oznaczenie (16) i (14) otrzymujemy, różniczkując funkcję W względem ξ ,

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = MP \frac{\partial x}{\partial \xi} + MQ \frac{\partial y}{\partial \xi} = M \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = MR$$

i analogicznie, różniczkując W względem η , otrzymujemy

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = MS.$$

Otrzymane równości wskazują, że po pomnożeniu przez czynnik M równanie (15) staje się zupełne, co łącznie z wynikającym z (16) warunkiem $M \neq 0$ dowodzi, że funkcja (16) jest czynnikiem całkującym tego równania.

101. Wyznaczmy teraz czynniki całkujące dwóch ważnych równań: liniowego i jednorodnego.

I. Jeżeli równanie liniowe rozważane w ustępie 80, str. 115, napiszemy w postaci równoważnej

$$(17) \quad [a(x)y + b(x)]dx - dy = 0,$$

to widać od razu, że odpowiednie wyrażenie występujące po prawej stronie wzoru (7) jest w tym przypadku funkcją wyłącznie zmiennej x równą $-a(x)$. Tym samym funkcja

$$\exp \left(- \int a(x) dx \right)$$

jest czynnikiem całkującym równania (17).

II. Jeżeli funkcje P i Q są jednorodne stopnia m , tzn., gdy

$$P = x^m p \left(\frac{y}{x} \right), \quad Q = x^m q \left(\frac{y}{x} \right),$$

gdzie p i q są pewnymi funkcjami ciągłymi argumentu $u = y/x$ w jakimś przedziale $[a, \beta]$ zmienności argumentu u , to równaniu (1) można nadać postać

$$x^m p \left(\frac{y}{x} \right) dx + x^m q \left(\frac{y}{x} \right) dy = 0,$$

czyli, po podstawieniu $y = ux$, postać

$$(18) \quad [x^m [p(u) + u q(u)]] dx + x^{m+1} q(u) du = 0.$$

Jeżeli równanie to pomnożymy przez funkcję

$$M(x, u) = \frac{1}{x^{m+1} [p(u) + u q(u)]},$$

to przejdzie ono w równanie o zmiennych rozdzielonych. Funkcja $M(x, u)$ jest więc czynnikiem całkującym równania (18), stąd zaś funkcja

$$N(x, y) = M \left(x, \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x^{m+1} \left[p \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y}{x} q \left(\frac{y}{x} \right) \right]},$$

n. funkcja

$$N(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$$

jest, na podstawie twierdzenia dowiedzonego w ustępie 100, str. 141, czynnikiem całkującym równania jednorodnego. Należy tutaj oczywiście zastrzec wykonalność występujących dzieleni.

102. Załóżmy teraz, że znane są dwa czynniki całkujące równania (1): $N_1 = N_1(x, y)$ i $N_2 = N_2(x, y)$, oba klasy C^1 oraz że funkcje P i Q występujące w tym równaniu są także klasy C^1 . Stosując znane twierdzenie o pochodnych mieszanych, mamy

$$(19) \quad \frac{\partial N_i Q}{\partial x} = \frac{\partial N_i P}{\partial y}$$

czyli

$$(20) \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} Q + \frac{\partial Q}{\partial x} N_i = \frac{\partial N_i}{\partial y} P + \frac{\partial P}{\partial y} N_i, \quad i=1, 2.$$

Mnożąc kolejno równania (20) przez N_2 i przez N_1 , odejmując stronami i przenosząc wyrazy otrzymujemy

$$Q \left(N_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} - N_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) - P \left(N_1 \frac{\partial N_2}{\partial y} - N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) = 0,$$

stąd zaś, dzieląc obie strony przez N_1^2 , otrzymujemy ostatecznie

$$Q \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N_2}{N_1} \right) - P \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N_2}{N_1} \right) = 0.$$

Z powyższego wynika, że funkcja N_2/N_1 spełnia w obszarze dowolnym T równanie o pochodnych cząstkowych przynależne do równania (1); co pozwala (p. ust. 61, str. 89) wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Jeżeli N_1 i N_2 są takimi czynnikami całkującymi klasy C^1 równania (1), że iloraz N_2/N_1 nie redukuje się w żadnym otoczeniu żadnego punktu obszaru T do stałej oraz jeżeli obszar T nie zawiera punktów osobliwych, to wymieniony iloraz jest całką równania (1).

Na ogół więc, znając dwa czynniki całkujące równania (1), można od razu otrzymać jego całkę.

Na odwrót, znając różną od zera całkę $U = U(x, y)$ równania (1) i jeden jego czynnik całkujący klasy C^1 postaci $N_1 = N_1(x, y)$, można otrzymać, przy założeniu, że odpowiedni obszar T jest jednospójny, drugi czynnik całkujący $N_2 = N_2(x, y)$ klasy C^1 wspomnianego równania według wzoru

$$(21) \quad N_2 = N_1 U.$$

Istotnie, tworząc w obszarze T wyrażenie

$$(22) \quad \frac{\partial Q N_2}{\partial x} - \frac{\partial P N_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial Q N_1}{\partial x} - \frac{\partial P N_1}{\partial y} \right) U + N_1 \left(Q \frac{\partial U}{\partial x} - P \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

stwierdzamy, że jest ono tożsamościowo równe zeru, ponieważ wyrażenie w pierwszej parze nawiasów znika na podstawie założenia, że N_1 jest czynnikiem całkującym równania (1), a wyrażenie w drugiej parze nawiasów znika wobec tego, że funkcja U jest całką tego równania. Tym samym na mocy (22), twierdzenia podanego w ustępie 97, str. 136, i oczywistej nierówności $N_2 \neq 0$, funkcja (21) jest czynnikiem całkującym równania (1).

Uwaga. Zamiast całki U równania (1) można we wzorze (21) przyjąć dowolną całkę tegoż równania postaci

$$F(U),$$

gdzie F jest dowolną funkcją klasy C^1 nieznikającą i o nieznikającej pochodnej, określoną w przedziale zmienności funkcji U (p. ust. 62, str. 89).

103. Rezultaty te mogą być niekiedy w następujący sposób zużytkowane w praktyce. Przypuśćmy, że funkcje N_1 i U_1 są odpowiednio czynnikiem całkującym i różną od zera całką równania

$$(23) \quad P_1 dx + Q_1 dy = 0$$

oraz że N_2 jest analogicznym czynnikiem całkującym, a U_2 — analogiczną całką równania

$$(24) \quad P_2 dx + Q_2 dy = 0;$$

równania rozważamy w tym samym obszarze jednospójnym T nie zawierającym punktów osobliwych.

Wówczas wzory

$$\bar{N} = N_1 F_1(U_1) \quad \text{ i } \quad \bar{N} = N_2 F_2(U_2)$$

określają, przy jakichkolwiek stosownych funkcjach F_1 i F_2 , czynniki całkujące równań (23) i (24), i jeżeli można tak dobrać funkcje F_1 i F_2 , aby we wspomnianym obszarze było stałe

$$(25) \quad N_1 F_1(U_1) = N_2 F_2(U_2),$$

to wspólna wartość funkcji (25) jest czynnikiem całkującym równania

$$(P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy = 0.$$

PRZYKŁAD 69*). Rozważamy w obszarze $x > 0, y > 0$ równanie

$$(26) \quad ax dy + by dx + x^m y^n (ax dy + by dx) = 0,$$

gdzie a, b, α i β są stałymi. Czynnikiem całkującym równania

$$(27) \quad ax dy + by dx = 0$$

* E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, quatrième éd., Paris 1924, str. 334.

to oczywiście funkcja $1/xy$, która przekształca to równanie w równanie o zmiennych rozdzielonych. Ponieważ zaś całką tego równania jest funkcja $x^b y^a$, więc wyrażenie

$$\frac{1}{xy} \varphi(x^b y^a),$$

w którym φ jest dowolną funkcją klasy C^1 różną od zera o nieznikającej pochodnej, określoną dla dodatnich wartości swego argumentu, jest czynnikiem całkującym równania (27). Podobnie stwierdzamy, że czynniki całkujące równania

$$(28) \quad x^m y^n (ax dy + by dx) = 0$$

są dane wzorem

$$\frac{1}{x^{n+1} y^{m+1}} \psi(x^b y^a),$$

gdzie ψ jest analogiczną funkcją dowolną. Jeśli zatem uda się dobrać funkcje φ i ψ w taki sposób, aby było stałe

$$\frac{1}{xy} \varphi(x^b y^a) = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} \psi(x^b y^a),$$

to wspólna ich wartość określi czynnik całkujący równania (26).

Nasuwa się tutaj myśl, aby przyjąć $\varphi = \varphi(u) = u^p$ oraz $\psi = \psi(v) = v^q$, gdzie p i q są wykładnikami, które należy wyznaczyć tak, aby było identycznie

$$(x^b y^a)^p = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} (x^b y^a)^q.$$

Prowadzi to do układu równań liniowych

$$ap - aq + n = 0, \quad bp - \beta q + m = 0.$$

Jeżeli $a\beta - ba \neq 0$, to układ ten jest rozwiązalny i oznaczając przez p i q jego rozwiązanie otrzymujemy czynnik całkujący równania (26) postaci

$$x^{bp-1} y^{ap-1}.$$

Jeżeli zaś $a\beta - ba = 0$, to albo $a = b = 0$ i wtedy równanie (26) przyjmuje postać (28) bezpośrednio całkowną, albo liczby a i b nie są jednocześnie równe zeru i wówczas istnieje takie k , że $a = ka$ i $\beta = kb$, przez co równanie (1) przybiera postać $(ax dy + by dx)(1 + kx^m y^n) = 0$ także bezpośrednio całkowną.

ZADANIA. 59. Wyznaczyć czynnik całkujący, a następnie scałkować następujące równania:

$$(1+x+y+xy) dx + (1-x+y-xy) dy = 0,$$

$$(y+y^3) dx + (xy^2+x+1) dy = 0,$$

$$(x^2+y^4) dx + x^2 y^3 dy = 0,$$



$$(Ax+By)dx - (Cx+Dy)dy = 0,$$

$$[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(A+H)x+2(B+K)y+2(H+L)]dx +$$

$$+[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(B+H)x+2(C+K)y+2(K+L)]dy = 0,$$

gdzie A, B, C, H, K i L są stałymi.

60. Znaleźć warunki, przy których równanie $Pdx+Qdy=0$ ma czynnik całkujący kształtu

$$N(ax+by), \quad N(x^2+y^2), \quad N\left(\frac{ax+\beta y}{\gamma x+\delta y}\right).$$

61. Wykazać, że na to, aby równanie $dy/dx=f(x, y)$, gdzie $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w pewnym obszarze T , miało czynnik całkujący zależny tylko od x , potrzeba i wystarcza, żeby funkcja $f(x, y)$ była funkcją liniową zmiennej y .

62. Wykazać, że jeżeli funkcje P i Q spełniają w danym obszarze jednopójnym T równania Cauchy-Riemanna (p. ust. 5, str. 11) i jeśli nie znikają one jednocześnie w żadnym punkcie tego obszaru, to funkcja

$$\frac{1}{P^2+Q^2}$$

jest czynnikiem całkującym równania $Pdx+Qdy=0$, rozważanego w tym obszarze.

ROZDZIAŁ IV

OGÓLNE RÓWNANIE UWIKŁANE PIERWSZEGO RZĘDU

§ 30. Twierdzenia egzystencjonalne odnoszące się do równania

$$F(x, y, y')=0$$

104. Przechodzimy do rozpatrzenia najogólniejszego równania różniczkowego pierwszego rzędu, tj. równania o postaci uwikłanej

$$(1) \quad F(x, y, y')=0,$$

przy założeniu, że funkcja $F(x, y, p)$ jest klasy C^1 w pewnym obszarze przestrzennym V zmiennych x, y i p . Niekiedy będziemy o funkcji F czynili założenia dalej idące, tak że założenie uczynione obecnie należy uważać za minimalne.

Od razu nasuwa się myśl, aby przez rozwiązanie względem y' sprowadzić teorię równania (1) do teorii równania w postaci normalnej $y'=f(x, y)$. Istotnie, myśl ta doprowadzi nas do podstawowych twierdzeń odnoszących się do równania (1), ale zanim do tego przystąpimy, wprowadzimy pewne uogólnienia dotychczas używanych pojęć.

105. Punkt (x, y, p) obszaru V argumentów funkcji F będziemy nazywali *elementem liniowym*, odpowiedni zaś punkt płaszczyzny (x, y) — *podkładem* tego elementu. Wspomniany element liniowy interpretujemy geometrycznie obierając dowolną, ale ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$ i tworząc w punkcie (x, y) płaszczyzny odcinek o długości ε , o początku w tym punkcie i o spadku p .

Jeżeli dla elementu (x_0, y_0, p_0) obszaru V zachodzi równość

$$(2) \quad F(x_0, y_0, p_0)=0,$$

to element ten będziemy nazywali *elementem całkowym równania* (1) pozostając w zgodzie z odpowiednim pojęciem wprowadzonym w ustępie 23, str. 33, dla równania w postaci normalnej.

Jeżeli przy tym dla elementu całkowego (x_0, y_0, p_0) równania (1) spełniona jest nierówność

$$(3) \quad F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0,$$