

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

nie jest ograniczone w tym przedziale.

Mamy natomiast następujące

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ ma w przedziale $[a, b]$ pochodną ograniczoną (niekoniecznie ciągłą), to funkcja ta spełnia w tym przedziale warunek Lipschitza.

Dowód. Załóżmy, że istnieje taka liczba $K \geq 0$, że dla wszystkich wartości x leżących w przedziale $[a, b]$ zachodzi nierówność

$$|\varphi'(x)| \leq K.$$

Obierzmy w $[a, b]$ dwie dowolne wartości x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$) i zastосуemy do różnicy $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ twierdzenie o przyrostach skończonych

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1),$$

gdzie ξ leży między x_1 i x_2 . Z ostatniej równości i założonej ograniczoneści pochodnej $\varphi'(x)$ wynika bezpośrednio żądany warunek Lipschitza.

Geometrycznie twierdzenie to wyraża, że funkcja $\varphi(x)$ mająca w przedziale $[a, b]$ styczną o stromości ograniczonej, spełnia w tym przedziale warunek Lipschitza. Odwrotnie, przy spełnionym warunku Lipschitza stromość stycznej jest, jak można okazać, ograniczona stałą Lipschitza.

27. Wprowadzone pojęcie można rozszerzyć na funkcje wielu zmiennych. Załóżmy np., że funkcja $f(x, y)$ jest określona w obszarze T . Jeżeli istnieją takie dwie stałe liczby K i L , że dla każdej pary punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) należących do zbioru T zachodzi nierówność

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq K|x_2 - x_1| + L|y_2 - y_1|,$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ spełnia w obszarze T warunek Lipschitza względem zmiennych x i y ze stałymi K i L . Funkcja taka jest oczywiście ciągła w T ; prócz tego, uogólniając dowód twierdzenia poprzedniego, czytelnik sam wykaże z łatwością, że jeśli funkcja $f(x, y)$ ma w obszarze T wypukłym pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ograniczone, to spełnia ona w tym obszarze warunek Lipschitza.

Można następnie, i to właśnie będzie nam potrzebne, rozważać funkcje, które spełniają warunek Lipschitza jedynie ze względu na jedną ze zmiennych, np. ze względu na zmienną y . Będziemy mówili, że funkcja $f(x, y)$ określona w obszarze T spełnia w nim warunek Lipschitza względem zmiennej y ze stałą $L \geq 0$, jeżeli dla każdej pary punktów (x, y_1) i (x, y_2) wziętych na prostej równoległej do osi y i należących do T spełniona jest nierówność

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|.$$

Z definicji tej i z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika: jeżeli każde dwa punkty obszaru T o tej samej współrzędnej x

ROZDZIAŁ II

TWIERDZENIE CAUCHY'EGO O ISTNIENIU ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ $y' = f(x, y)$

§ 7. Dowód istnienia rozwiązania metodą kolejnych przybliżeń

26. Niech $\varphi(x)$ będzie dowolną funkcją określoną w jakimś przedziale $[a, b]$, a x_1 i x_2 — dowolnymi, lecz różnymi liczbami tego przedziału. Iloraz różnicowy

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}$$

przedstawia geometrycznie spadek stycznej, poprowadzonej przez punkty $(x_1, \varphi(x_1))$ i $(x_2, \varphi(x_2))$ wykresu funkcji $\varphi(x)$.

Jeśli istnieje taka liczba $K \geq 0$, że ten iloraz różnicowy nie przekracza co do wartości bezwzględnej liczby K dla wszelkich różnych od siebie wartości x_1 i x_2 z przedziału $[a, b]$, tzn., jeżeli jest zawsze

$$\left| \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq K$$

czyli

$$(1) \quad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|,$$

to mówimy, że funkcja $\varphi(x)$ spełnia w przedziale $[a, b]$ warunek Lipschitza i najmniejszą z liczb K mających powyższą własność nazywamy stałą Lipschitza funkcji $\varphi(x)$ w przedziale $[a, b]$.

Geometryczne znaczenie tego warunku jest oczywiste: spadek stycznej nie może co do wartości bezwzględnej być za wielki, tzn. wykres funkcji $\varphi(x)$ nie może przebiegać zанаdто stromo.

Z nierówności (1) widać, że warunek Lipschitza pociąga za sobą ciągłość funkcji $\varphi(x)$, lecz nie na odwrót, istnieją bowiem funkcje ciągłe w przedziale, nie spełniające warunku Lipschitza z żadną stałą K , np. funkcja $\varphi(x) = x^{1/2}$, która jest w przedziale $(0, 1)$ ciągła (a nawet ma wewnątrz tego przedziału ciągłą pochodną), a nie spełnia warunku Lipschitza, gdyż wyrażenie

można połączyć odcinkiem przebiegającym całkowicie w T i jeśli funkcja $f(x, y)$ ma w T pochodną cząstkową $f'_y(x, y)$ ograniczoną, to funkcja $f(x, y)$ spełnia w T warunek Lipschitza względem zmiennej y .

28. Przechodzimy do podstawowego dla teorii równań różniczkowych twierdzenia, orzekającego, że przy pewnych założeniach równanie różniczkowe o postaci normalnej

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie szczególne

$$(2) \quad y = \varphi(x),$$

spełniające warunek początkowy

$$(3) \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia, zwanego *twierdzeniem Cauchy'ego* od nazwiska jego odkrywcę. Sam Cauchy podał dwa zupełnie różne dowody tego twierdzenia; jeden z nich jest rozbudowaniem i uściśleniem rozważań geometrycznych przeprowadzonych w § 6. str. 32.

Oba te dowody będą omówione w § 9 i § 14, w tym zaś miejscu podamy dowód inny, daleko prostszy i krótszy, który zawdzięczamy Picardowi. Dowód ten jest oparty na pewnym ogólnym postępowaniu, stosowanym dziś często i z pożytkiem w różnych zagadnieniach analizy, a noszącym nazwę *metody kolejnych przybliżeń* (aproksymacji sukcesywnych). Metoda ta była stosowana zresztą oddawna przez astronomów, ale dopiero Picard uczynił z niej narzędzie ścisłego badania. Użyta do równania (1) wymaga ona pewnych założeń o funkcji $f(x, y)$ wykraczających poza założenie ciągłości, a mianowicie zastosowania wspomnianego wyżej warunku Lipschitza, co w odpowiednim momencie w dalszym ciągu uczynimy (p. ust. 33, str. 42).

29. Załóżmy na razie tylko ciągłość funkcji $f(x, y)$ w jakimś obszarze płaskim T i oberzmy w tym obszarze jakiś punkt (x_0, y_0) .

Przypuśćmy na chwilę, że istnieje łuk całkowity równania (1) przechodzący przez tenże punkt (x_0, y_0) . Mówiąc dokładniej, przypuśćmy, że istnieje funkcja $y = \varphi(x)$ różniczkowalna w jakimś przedziale $[x_1, x_2]$, zawierającym wewnątrz liczbę x_0 , spełniająca warunek początkowy (3) i spełniająca równanie różniczkowe (1) w przedziale $[x_1, x_2]$, tzn., dla której

$$(4) \quad \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)].$$

Ponieważ $f(x, y)$ i $\varphi(x)$ są funkcjami ciągłymi, więc i funkcja złożona $f[x, \varphi(x)]$ jest w przedziale $[x_1, x_2]$ ciągła. Zatem z równości (4) wynika, że i pochodna $\varphi'(x)$ jest w $[x_1, x_2]$ ciągła i wobec tego można tę równość całkować od punktu x_0 do dowolnego punktu x należącego do $[x_1, x_2]$. Ponieważ zaś wobec (3)

$$\int_{x_0}^x \varphi'(s) ds = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) - y_0,$$

więc całkując otrzymujemy równość

$$(5) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \varphi(s)] ds,$$

w której zmienną podcałkową oznaczyliśmy literą s dla odróżnienia od zmiennej x , oznaczającej dowolną, ale chwilowo ustaloną wartość x z przedziału $[x_1, x_2]$.

Wynik, do którego doszliśmy jest następujący: jeżeli istnieje funkcja $y = \varphi(x)$ spełniająca w przedziale $[x_1, x_2]$ równanie (1) i warunek początkowy (3), to funkcja ta spełnia w tym przedziale równanie (5).

Na odwrót, przypuśćmy, że jakaś funkcja $y = \varphi(x)$, ciągła w przedziale $[x_1, x_2]$ zawierającym wewnątrz liczbę x_0 , spełnia w tymże przedziale równość (5). W takim razie funkcja podcałkowa występująca w (5) jest także ciągła, a wobec tego, w myśl znanego twierdzenia rachunku całkowego, prawa strona równości (5) ma pochodną i pochodna ta równa się wartości funkcji podcałkowej w punkcie końcowym przedziału całkowania, tzn. równa jest $f[x, \varphi(x)]$. Wobec tego i lewa strona równości (5) ma pochodną, tzn. zachodzi równość (4), czyli funkcja $\varphi(x)$ spełnia w przedziale $[x_1, x_2]$ równanie różniczkowe (1). Ponieważ zaś z (5) wynika $\varphi(x_0) = y_0$, więc warunek początkowy (3) jest spełniony i w ten sposób wykazaliśmy, że jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest w przedziale $[x_1, x_2]$ ciągła i spełnia tam równanie (5), to spełnia ona w tym przedziale równanie różniczkowe (1) i warunek początkowy (3).

Z rozważań powyższych wynika, że zagadnienie wyznaczenia rozwiązań równania (1) spełniających warunek początkowy (3) jest w zupełności równoważne zadaniu wyznaczenia funkcji ciągłych spełniających równanie (5). Korzystając z tego będziemy starali się dowieść, że dla równania (5) istnieje odpowiednia funkcja ciągła, aby w ten sposób uzyskać dowód zasadniczego twierdzenia o istnieniu rozwiązań równania (1).

Równanie (5) nazywamy *równaniem całkowym*, przynależnym do równania różniczkowego (1) i warunku początkowego (3).

30. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do równania (5) polega na utworzeniu pewnego nieskończonego ciągu funkcji

$$(6) \quad \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$$

o którym wykazemy, że jest w pewnym przedziale zbieżny jednostajnie, i że jego granica jest rozwiązaniem ciągłym równania (5). Funkcje tego ciągu nazywać będziemy *kolejnymi przybliżeniami rzędu zerowego, pierwszego, drugiego itd.*

Funkcje (6) określamy w sposób następujący. Ponieważ ma być spełniony warunek (3), więc jako przybliżenie rzędu zerowego przyjmujemy funkcję stałą

$$(7) \quad \varphi_0(x) = y_0.$$

Funkcję tę podstawiamy następnie do prawej strony równości (5) w miejsce szukanej funkcji $\varphi(x)$ i rezultat podstawienia

$$(8) \quad \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \varphi_0(s)] ds$$

obieramy za przybliżenie rzędu pierwszego.

Teraz postępujemy analogicznie. Znalezione przybliżenie $\varphi_1(x)$ podstawiamy, zamiast szukanego rozwiązania $\varphi(x)$, do prawej strony równości (5) i otrzymany wynik

$$(9) \quad \varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \varphi_1(s)] ds$$

obieramy za przybliżenie rzędu drugiego. Podobnie, przybliżenie $\varphi_3(x)$ określamy wzorem

$$\varphi_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \varphi_2(s)] ds.$$

Ogólnie, przybliżenie rzędu $k+1$ określamy indukcyjnie za pomocą przybliżenia rzędu k wzorem

$$(10) \quad \varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \varphi_k(s)] ds.$$

Przypuśćmy teraz, że udało się nam wykazać, że ciąg tak określonych kolejnych przybliżeń jest jednostajnie zbieżny w jakimś przedziale $[x_1, x_2]$, zawierającym wewnątrz liczbę x_0 . Niech funkcja $\varphi(x)$ będzie granicą tego ciągu, która jest oczywiście także ciągła. Wtedy ciąg utworzony z funkcji $f[x, \varphi_k(x)]$, $k=0, 1, \dots$, jest w $[x_1, x_2]$, z uwagi na ciągłość funkcji $f(x, y)$, jednostajnie zbieżny do funkcji $f[x, \varphi(x)]$ i wobec tego całka występująca po prawej stronie równości (10) przy k rosnącym nieograniczenie zmierza do granicy, równej

$$\int_{x_0}^x f[s, \varphi(s)] ds.$$

Ponieważ zaś jednocześnie funkcje $\varphi_{k+1}(x)$ zbieżają do funkcji $\varphi(x)$, więc przechodząc w (10) do granicy otrzymamy równość (5). W ten sposób będzie udowodnione, że równanie (5) posiada rozwiązanie ciągłe, a tym samym, że istnieje również rozwiązanie równania różniczkowego (1), spełniające warunek początkowy (3).

31. Przechodząc do bardziej precyzyjnego ujęcia podanych wyżej uwag musimy najpierw rozstrzygnąć pytanie zasadnicze, czy można istotnie w wyżej opisany sposób określić wszystkie kolejne przybliżenia w jakimś wspólnym przedziale obejmującym liczbę x_0 .

Przypuśćmy, że przybliżenie $\varphi_1(x)$ zostało określone w wyżej opisany sposób w jakimś otoczeniu $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$; wtedy, aby utworzyć przybliżenie $\varphi_2(x)$, należy całkować wyrażenie $f[s, \varphi_1(s)]$, co można uczynić tylko wtedy, gdy odpowiednie punkty $(s, \varphi_1(s))$ należą do obszaru T ; ponieważ $\varphi_1(x_0) = y_0$, więc warunek ten będzie z pewnością spełniony dla wartości s dostatecznie bliskich x_0 , ale wcale nie ma pewności, że będzie tak w całym otoczeniu $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ i łatwo można podać przykłady, w których dla x bardziej odległych od x_0 funkcja $\varphi_2(x)$ przestanie być określona wzorem (9). Wynika stąd, że $\varphi_2(x)$ nie da się na ogół określić w podany sposób w całym otoczeniu $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, a tylko w jakimś ciśniejszym otoczeniu $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$. Rozumując podobnie dla $\varphi_3(x)$ otrzymamy w opisany sposób tę funkcję w jakimś otoczeniu $[x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3]$, które na ogół będzie jeszcze ciśniejsze niż otoczenie $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$ itd. Widzimy, że a priori nie jest wykluczone, że przy k rosnącym nieograniczenie długość otoczenia $[x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k]$, w którym jest określone w powyższy sposób przybliżenie $\varphi_k(x)$, będzie dążyła do zera. Gdyby zaś tak było, to oczywiście funkcja graniczna byłaby określona tylko w jednym punkcie x_0 , a więc nie można by wykazać istnienia rozwiązania w pewnym przedziale $[x_1, x_2]$, gdzie $x_1 \neq x_2$.

32. Opisaną wyżej trudność pokonujemy wykazując, że istnieje takie wspólne otoczenie $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, w którym dadzą się skonstruować wszystkie przybliżenia, tworzone według reguły określonej w ust. 30, str. 40.

W tym celu wyznaczmy najpierw dwie liczby dodatnie a i b w taki sposób, aby prostokąt określony nierównościami

$$(11) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

leżał całkowicie w obszarze T . Ponieważ prostokąt ten jest dziedziną, a funkcja $|f(x, y)|$ jest w nim ciągła, więc jest ona w tym prostokącie ograniczona i ma skończony kres górny M , czyli jest

$$(12) \quad |f(x, y)| \leq M.$$

Oznaczmy teraz przez δ liczbę dodatnią, określoną w sposób następujący: jeżeli $M=0$, to $\delta=a$, jeżeli zaś $M>0$, to δ równa jest mniejszej z liczb a i b/M , a wspólnej ich wartości, jeżeli obie te liczby są równe. Zapisujemy to w postaci

$$(13) \quad \delta = \min(a, b/M).$$

Powiadamy, że jeśli wyznaczmy tę właśnie wartość δ , to wszystkie kolejne przybliżenia tworzone w sposób opisany w ustępie 30, str. 40, będą istniały w otoczeniu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Istotnie, jeżeli x należy do tego otoczenia, to funkcja $\varphi_0(x)=y_0$ przebiega w obrębie prostokąta (11), a więc wzór (8) ma z pewnością sens w całym tym otoczeniu i określa ciągłą funkcję $\varphi_1(x)$. Ponadto dla x należących do tego otoczenia zachodzi, z uwagi na (8), (12) i określenie liczby δ , nierówność

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[s, \varphi_0(s)] ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f[s, \varphi_0(s)]| ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x M ds \right| = M|x - x_0| \leq M\delta \leq b.$$

Wynika stąd, że jeżeli x należy do otoczenia $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, to łuk określony funkcją $\varphi_1(x)$ nie wybiega poza obręb prostokąta (11), tym bardziej więc poza obręb obszaru T . W takim razie drugie przybliżenie $\varphi_2(x)$ określone związkiem (9) również daje się określić w całym tym otoczeniu. Jest to funkcja ciągła, dla której znowu zachodzi wzór

$$|\varphi_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[s, \varphi_1(s)] ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x M ds \right| = M|x - x_0| \leq M\delta \leq b.$$

A więc, jak długo x pozostaje w otoczeniu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tak długo i łuk $\varphi_2(x)$ nie wybiega poza obręb prostokąta (11), tak że w tym samym otoczeniu da się określić również trzecie przybliżenie. Rozumując podobnie i stosując indukcję matematyczną stwierdzamy, że wzory (7) i (10) istotnie określają wszystkie kolejne przybliżenia w całym otoczeniu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

33. W dotychczasowych rozważaniach wystarczało założenie, że funkcja $f(x, y)$ jest w obszarze T ciągła. Można jednak wykazać na przykładach, że założenie to nie może zapewnić zbieżności ciągu (6) i dlatego przyjmijmy dodatkowo, że funkcja $f(x, y)$ spełnia ze względu na zmienną y warunek Lipschitza

$$(14) \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$$

w całym prostokącie (11) (p. ust. 27, str. 39).

Przechodząc przy tym założeniu do dowodu zbieżności ciągu przybliżeń kolejnych (6) określonego w otoczeniu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ zauważymy, że wystarczy w tym celu wykazać jednostajną zbieżność szeregu postaci

$$(15) \quad \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \dots,$$

dla którego ciąg (6) jest ciągiem sum częściowych. Uczynimy to przez utworzenie stosownego szeregu zbieżnego o wyrazach nie mniejszych od bezwzględnych wartości wyrazów szeregu (15), czyli tzw. *majoranty* zbieżnej dla tego szeregu, którą uzyskamy szacując kolejne wyrazy szeregu (15).

Mamy najpierw

$$(16) \quad |\varphi_0(x)| = |y_0|.$$

Dalej z (7) i (8) wynika, jak poprzednio, że

$$(17) \quad |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f[s, \varphi_0(s)] ds \right| \leq M|x - x_0|.$$

Następnie z (8) i (9) otrzymujemy

$$(18) \quad |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f[s, \varphi_1(s)] - f[s, \varphi_0(s)]] ds \right|,$$

a ponieważ punkty $(s, \varphi_0(s))$ i $(s, \varphi_1(s))$ leżą w prostokącie (11) i to na tej samej prostej równoległej do osi y , więc możemy zastosować nierówność (14), według której jest

$$|f[s, \varphi_1(s)] - f[s, \varphi_0(s)]| \leq L|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)|.$$

Stosując więc (17), otrzymujemy najpierw nierówność

$$(19) \quad |f[s, \varphi_1(s)] - f[s, \varphi_0(s)]| \leq ML|s - x_0|,$$

a następnie z (18) i (19) otrzymujemy szukane oszacowanie trzeciego z wyrazów szeregu (15)

$$(20) \quad |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x [f[s, \varphi_1(s)] - f[s, \varphi_0(s)]] ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x ML|s - x_0| ds \right| = M \frac{L|x - x_0|^2}{2!}.$$

Podobnie szacujemy następny wyraz tego szeregu

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f[s, \varphi_2(s)] - f[s, \varphi_1(s)]| ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds \right|$$

i stosując nierówność (20) otrzymujemy

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \frac{ML^2|s - x_0|^2}{2!} ds \right| = \frac{ML^2|x - x_0|^3}{3!}.$$

Postępując w ten sposób dalej możemy łatwo wykazać indukcyjnie, że spełniona jest ogólnie nierówność

$$(21) \quad |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M \frac{L^k|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Zatem szereg

$$|y_0| + M|x - x_0| + \frac{ML|x - x_0|^2}{2!} + \frac{ML^2|x - x_0|^3}{3!} + \dots$$

jest majorantą szeregu (15), a ponieważ w przedziale $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ spełniona jest nierówność $|x - x_0| \leq \delta$, więc tym bardziej szereg

$$(22) \quad |y_0| + M\delta + \frac{ML\delta^2}{2!} + \frac{ML^2\delta^3}{3!} + \dots$$

jest majorantą szeregu (15).

Szereg (22) jest z pewnością zbieżny, o czym łatwo się przekonać, stosując klasyczne kryteria.

Wynika stąd, że także szereg (15), a więc i ciąg (6) są w otoczeniu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ jednostajnie zbieżne. Oznaczając przez $\varphi(x)$ granicę ciągu (6), otrzymujemy funkcję ciągłą, która, jak już wskazano poprzednio, spełnia równanie całkowe (5), a więc i równanie różniczkowe (1) łącznie z warunkiem (3).

34. Dowiedzimy z kolei, że uzyskane rozwiązanie $y = \varphi(x)$, którego istnienie wykazaliśmy, jest jedyne czyli jednoznaczne. Jednoznaczność tę należy rozumieć w ten sposób, że jeśli $y = \varphi(x)$ jest w jakimś przedziale $[x_0 - d, x_0 + d]$, gdzie $d > 0$, również rozwiązaniem równania różniczkowego (1), spełniającym ten sam warunek początkowy $\varphi(x) = y_0$ i przebiegającym w prostokącie (11), to we wspólnej części przedziałów $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ i $[x_0 - d, x_0 + d]$ spełniona jest tożsamościowo równość

$$(23) \quad \psi(x) = \varphi(x).$$

Istotnie, niech $\psi(x)$ będzie jakimkolwiek opisany wyżej rozwiązaniem równania (1) i niechaj $[x_0 - h, x_0 + h]$ oznacza wspólną część przedziałów $[x_0 - d, x_0 + d]$ i $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Ponieważ funkcja $\psi(x)$ również spełnia równanie całkowe (5), więc w przedziale $[x_0 - h, x_0 + h]$ zachodzi wzór

$$(24) \quad \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \psi(s)] ds.$$

Stąd otrzymujemy łatwo, wobec (7), nierówność

$$(25) \quad |\psi(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f[s, \psi(s)] ds \right| \leq M |x - x_0|.$$

Odejmując stronami (24) i (8) i stosując nierówność (14), mamy

$$|\psi(x) - \varphi_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x f[s, \psi(s)] - f[s, \varphi_0(s)] ds \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |\psi(s) - \varphi_0(s)| ds \right|,$$

a więc z uwagi na (25)

$$|\psi(x) - \varphi_1(x)| \leq L \int_{x_0}^x M |s - x_0| ds = M \frac{L |x - x_0|^2}{2!}.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \varphi_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f[s, \psi(s)] - f[s, \varphi_1(s)] ds \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |\psi(s) - \varphi_1(s)| ds \right| \leq \\ &\leq M \frac{L^2}{2!} \left| \int_{x_0}^x |s - x_0|^2 ds \right| = M \frac{L^2 |x - x_0|^3}{3!} \end{aligned}$$

i ogólnie, co łatwo stwierdzić można indukcyjną,

$$(26) \quad |\psi(x) - \varphi_k(x)| \leq M \frac{L^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Ponieważ wyrażenia po prawej stronie zmierzają do zera, gdy k rośnie nieograniczenie, więc z nierówności (26) wynika, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\psi(x) - \varphi_k(x)| = 0$$

w każdym punkcie x przedziału $[x_0 - h, x_0 + h]$. W tym przedziale więc

$$\psi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x),$$

tak iż funkcja $\Psi(x)$ jest także granicą ciągu (6), co dowodzi (23).

Uwaga. Nierówność (26) wskazuje nadto, że jeśli zamiast rozwiązania równania (1) spełniającego warunek (3) wziąć k -te przybliżenie $\varphi_k(x)$, to błąd popełniony nie będzie w punkcie x przekraczał liczby

$$M \frac{L^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!},$$

w całym zaś otoczeniu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ — liczby

$$M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!}.$$

35. Zbierając uzyskane wyniki otrzymujemy następujące zasadnicze **Twierdzenie Cauchy'ego**.

Założenia: 1° Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze T ;

2° prostokąt (11) leży w obszarze T ;

3° M jest kresem górnym $|f(x, y)|$ w prostokącie (11);

4° $\delta = \min(a, b/M)$;

5° funkcja $f(x, y)$ spełnia w prostokącie (11) warunek Lipschitz'a.

Teza: istnieje funkcja $y = \varphi(x)$ klasy C^1 w przedziale $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, której obraz geometryczny leży w prostokącie (11) i która spełnia warunek początkowy (3) oraz równanie różniczkowe (1); funkcja $y = \varphi(x)$ jest jedyną funkcją o powyższych własnościach w tym sensie, że jeśli jakaś funkcja $y = \psi(x)$ ma również wszystkie powyższe własności w jakimś przedziale $[x_0 - d, x_0 + d]$, to we wspólnej części tego przedziału oraz przedziału $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ zachodzi identyczność $\varphi(x) = \psi(x)$.

36. W niektórych przypadkach można użyć metody kolejnych przybliżeń dla efektywnego wyznaczenia rozwiązania.

PRZYKŁAD 35. Znaleźć rozwiązanie $\varphi(x)$ równania $y' = x^2 y$, spełniające warunek $\varphi(0) = 1$.

Mamy tu $\varphi_0(x) = 1$, a zatem

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x s^2 \varphi_0(s) ds = 1 + \frac{x^3}{3}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x s^2 \varphi_1(s) ds = 1 + \int_0^x s^2 \left(1 + \frac{s^3}{3}\right) ds = \\ &= 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^3}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x s^2 \varphi_2(s) ds = 1 + \frac{1}{1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^3}{3}\right)^3$$

i łatwo sprawdzić indukcyjną, że

$$\varphi_k(x) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{x^3}{3}\right)^k.$$

W granicy otrzymujemy więc

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 + \dots$$

Sumą tego szeregu jest oczywiście funkcja $\varphi(x) = e^{x^3/3}$ i a posteriori można sprawdzić, że czyni ona istotnie zadość warunkom zadania.

37. Metoda kolejnych przybliżeń może być z powodzeniem stosowana również w praktyce do przybliżonego rozwiązywania równań.

PRZYKŁAD 36. W dziedzinie $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ funkcja $f(x, y)$ jest określona wzorem $f(x, y) = x^4 + y^3/4$. Wyznaczyć przybliżoną wartość rozwiązania szczególnego $y = \varphi(x)$ równania

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^4 + \frac{1}{4} y^3,$$

przy warunku $\varphi(0) = 0$.

W rozważanej dziedzinie jest $|f(x, y)| \leq 5/4$, tak iż można przyjąć $M = 5/4$, a wobec tego $\delta = \text{Min}(1, 4/5) = 4/5$. Rozwiązanie więc będzie z pewnością istnieć w przedziale $[-4/5, 4/5]$.

Ograniczmy się do wyznaczenia kolejnego przybliżenia rzędu trzeciego. Mamy

$$\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \left[s^4 + \frac{1}{4} \varphi_0^3(s)\right] ds = \int_0^x s^4 ds = \frac{x^5}{5},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \left[s^4 + \frac{1}{4} \varphi_1^3(s)\right] ds = \int_0^x \left[s^4 + \frac{s^{10}}{10^3}\right] ds = \frac{x^5}{5} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 10^3},$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \int_0^x \left[s^4 + \frac{1}{4} \varphi_2^3(s)\right] ds = \int_0^x \left[s^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{s^5}{5} + \frac{s^{11}}{11 \cdot 10^3}\right)^2\right] ds = \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 10^3} + \frac{x^{17}}{187 \cdot 10^3} + \frac{x^{23}}{11132 \cdot 10^4}. \end{aligned}$$

Według oszacowania podanego w uwadze na końcu ust. 34, str. 45, moduł popełnionego błędu w punkcie x jest nie większy niż

$$\frac{ML^3|x|^4}{4!},$$

gdzie L jest stałą Lipschitza. Ponieważ $f'_y(x, y) = y/2$, więc w rozważanej dziedzinie górny kres jej modułu wynosi $1/2$, tak że można przyjąć $L = 1/2$. Moduł popełnionego błędu nie przekracza więc

$$\frac{5/4 \cdot (1/2)^3 \cdot |x|^4}{24} = \frac{5|x|^4}{768}.$$

ZADANIA. 16. Znaleźć metodą kolejnych przybliżeń rozwiązanie szczególne $y = \varphi(x)$ równania różniczkowego $y' = y$, spełniające warunek początkowy $\varphi(0) = 1$. Wykazać, że otrzymuje się w ten sposób kolejne sumy częściowe rozwinięcia funkcji e^x na szereg Maclaurina.

17. Wyznaczyć dwa pierwsze kolejne przybliżenia rozwiązania $y = \varphi(x)$ równania $dy/dx = x^2 + y^2$, spełniającego warunek początkowy $\varphi(0) = 0$. Oceń błąd popełniony dla wartości $x = 0,1$.

18. Dla równania $dy/dx = y - x$ szukamy rozwiązania $y = \varphi(x)$, spełniającego warunek $\varphi(0) = 1$. Wyznaczyć czwarte kolejne przybliżenie i zbadać dokładność, z jaką ono przedstawia rzeczywistą wartość rozwiązania dla $x = 0,25, 0,5, 0,75$ i 1 .

19. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest w pewnym otoczeniu punktu $(0, 0)$ ciągła i że spełnia w tym otoczeniu warunek

$$|x| |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < K |y_2 - y_1|,$$

gdzie $0 < K < 1$. Wykazać, że twierdzenie Cauchy'ego dla równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ i punktu początkowego $(0, 0)$ pozostaje prawdziwe.

§ 8. Funkcje równociągłe. Twierdzenie Arzeli

38. Niech R będzie dowolną rodziną funkcji $f(x)$ określonych w przedziale I , a x_0 — liczbą z tego przedziału. Jeżeli istnieje taka liczba $M(x_0)$, że dla wszystkich funkcji $f(x)$ należących do R jest

$$|f(x_0)| \leq M(x_0),$$

to mówimy, że funkcje rodziny R są w punkcie x_0 *wspólnie ograniczone*. Jeżeli zaś istnieje taka liczba $M \geq 0$, że dla wszystkich funkcji rodziny R i dla wszystkich wartości x z przedziału I jest

$$|f(x)| \leq M,$$

to mówimy, że funkcje rodziny R są *wspólnie ograniczone w przedziale I* . Jeżeli funkcje rodziny R są wspólnie ograniczone w przedziale I , to są wspólnie ograniczone w każdym punkcie tego przedziału, ale niekoniecznie na odwrót, co wykazuje poniższy

PRZYKŁAD 37. Niech w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{m+1}, \\ 2m^2(m+1) \left(x - \frac{1}{m+1} \right) & \text{dla } \frac{1}{m+1} \leq x \leq \frac{2m+1}{2m(m+1)}, \\ -2m^2(m+1) \left(x - \frac{1}{m} \right) & \text{dla } \frac{2m+1}{2m(m+1)} \leq x \leq \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{m} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ciąg $\{f_m(x)\}$, $m=1, 2, \dots$, stanowi — jak łatwo sprawdzić — rodzinę funkcji wspólnie ograniczonych w każdym punkcie przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, lecz nie wspólnie ograniczonych w tym przedziale.

Twierdzenie. Jeżeli ciąg nieskończony funkcji $\{f_i(x)\}$ określonych w przedziale I , jest ograniczony w każdym punkcie tego przedziału, to dla każdego ciągu punktów

$$(1) \quad \xi_1, \xi_2, \dots$$

należących do tego przedziału, istnieje ciąg częściowy

$$f_{k_1}(x), f_{k_2}(x), \dots$$

ciągu funkcji $\{f_i(x)\}$, zbieżny we wszystkich punktach ciągu (1).

Dowód. Ponieważ ciąg $\{f_i(\xi_1)\}$ jest ograniczony, więc istnieje ciąg częściowy ciągu $\{f_i(x)\}$ zbieżny w punkcie ξ_1 . Oznaczmy ten ciąg, używając dwu wskaźników, przez

$$(2) \quad f_{11}(x), f_{12}(x), \dots$$

Ponieważ ciąg (2) jest ograniczony w punkcie ξ_2 , więc istnieje ciąg częściowy ciągu (2) zbieżny w punkcie ξ_2 . Oznaczmy ten ciąg przez

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \dots$$

Ponieważ ciąg ten jest już zbieżny w punktach ξ_1 i ξ_2 , więc rozumując jak przedtem, wyjmujemy z niego ciąg częściowy $\{f_{3i}(x)\}$ zbieżny w ξ_3 , a więc już w trzech punktach: ξ_1, ξ_2, ξ_3 , itd. W ten sposób otrzymamy ciąg podwójny

$$(3) \quad \begin{matrix} f_{11}(x), f_{12}(x), \dots, \\ f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, \\ f_{31}(x), f_{32}(x), \dots, \\ \dots \end{matrix}$$

o następujących własnościach:

1^o ciąg znajdujący się w $(i+1)$ -ym wierszu jest ciągiem częściowym o wskaźnikach rosnących, wyjętym z ciągu znajdującego się w i -tym wierszu;

2^o ciąg znajdujący się w i -tym wierszu jest zbieżny w punktach $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$.

Rozważmy teraz ciąg przekątny

$$(4) \quad f_{11}(x), f_{22}(x), \dots$$

Wszystkie jego wyrazy od i -tego począwszy są, na mocy 1^o i 2^o, wyrazami o rosnących wskaźnikach wyjętymi z ciągu występującego w i -tym wierszu, skąd wynika, że ciąg (4) jest zbieżny w punktach $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$, a ponieważ jest tak dla każdego i , więc ciąg ten jest zbieżny we wszystkich punktach ciągu (1), c. b. d. o.

39. Powiadamy, że R jest *rodziną funkcji równociągłych w przedziale I* , jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla wszelkich punktów x' i x'' z przedziału I nierówność

$$(5) \quad |x'' - x'| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$(6) \quad |f(x'') - f(x')| < \varepsilon,$$

dla każdej funkcji $f(x)$ rodziny R .

W tym przypadku każda funkcja rodziny R jest w I ciągła i to nawet jednostajnie, ale nie na odwrót, tzn. nie każda rodzina funkcji ciągłych jest rodziną funkcji równociągłych, w pojęciu bowiem równociągłości istotne jest to, że przy danym $\varepsilon > 0$ jedna i ta sama liczba δ jest dobrana dla całej rodziny R , a nie dla każdej poszczególniej funkcji $f(x)$ tej rodziny, co dla dowolnej nieskończonej rodziny funkcji ciągłych nie zawsze jest możliwe.

PRZYKŁAD 38. Niech R będzie rodziną wszystkich funkcji liniowych postaci $f(x) = mx$, określonych w przedziale $[a, b]$. Są one w nim klasy C . Aby dla danego $\varepsilon > 0$ i dla danej funkcji $f(x)$ nierówność (6) wynikała z nierówności (5), potrzeba i wystarcza, żeby było $\delta \leq \varepsilon/|m|$. Wraz z $m \rightarrow \infty$ wartość δ będzie więc dążyła do zera i zbiór wartości δ nie będzie miał dodatniego kresu dolnego, który dopiero byłby wartością realizującą dla wszystkich funkcji rodziny R naraz wynikanie nierówności (6) z nierówności (5). R nie jest więc rodziną funkcji równościowych.

PRZYKŁAD 39. W poprzednim przykładzie rodzina R nie była jednak wspólnie ograniczona. Oto przykład ciągu nieskończonego funkcji $\{f_m(x)\}$, ciągłych w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ i wspólnie w nim ograniczonych, a nie równościowych. Niech $f_m(x) = x^{1/m}$. Gdyby funkcje tego ciągu były równościowe, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istniałoby takie $\delta > 0$, że dla x spełniających nierówność $0 \leq x \leq \delta$ i dla każdej liczby naturalnej m byłoby $|f_m(x) - f_m(0)| = x^{1/m} \leq \delta^{1/m} < \varepsilon$, co wobec $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta^{1/m} = 1$ jest dla $\varepsilon < 1$ niemożliwe.

Czytelnik sam bez trudu wykaże, że jeżeli w odróżnieniu od powyższych przykładów wszystkie funkcje rodziny R spełniają w przedziale I warunek Lipschitza z tą samą stałą L , to R jest rodziną funkcji równościowych w I .

W dalszym ciągu udowodnimy ważne w zastosowaniach

Twierdzenie Arzeli. Dla każdej rodziny R funkcji równościowych i wspólnie ograniczonych w przedziale $\langle a, b \rangle$ można wybrać z każdego ciągu nieskończonego funkcji tej rodziny

$$(7) \quad g_1(x), g_2(x), \dots$$

pewien ciąg częściowy, który jest w $\langle a, b \rangle$ zbieżny jednostajnie.

Dowód. Weźmy dowolny ciąg nieskończony (7), złożony z funkcji rodziny R , oraz dowolny, wszędzie gęsty w $\langle a, b \rangle$ ciąg liczb

$$(8) \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

Stosując twierdzenie z ustępu 38, str. 48, wyznaczmy jako żądany ciąg częściowy ciągu (7) taki jego ciąg częściowy

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots,$$

który jest zbieżny w każdym z punktów (8).

Aby dowieść, że ciąg ten jest w $\langle a, b \rangle$ zbieżny jednostajnie, obierzmy dowolne $\varepsilon > 0$ i wyznaczmy $\delta > 0$ tak, aby nierówność (5) dla każdego x' i x'' należącego do $\langle a, b \rangle$ pociągała nierówność

$$|f_i(x'') - f_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i=1, 2, \dots$$

Rodzina przedziałów $(\xi_v - \delta, \xi_v + \delta)$, gdzie $v=1, 2, \dots$, pokrywa przedział $\langle a, b \rangle$, istnieje więc, w myśl twierdzenia Heine-Borela, skończony ciąg tych przedziałów

$$(9) \quad (\xi_{a_1} - \delta, \xi_{a_1} + \delta), (\xi_{a_2} - \delta, \xi_{a_2} + \delta), \dots, (\xi_{a_r} - \delta, \xi_{a_r} + \delta)$$

również pokrywający $\langle a, b \rangle$. Ponieważ każda liczba x z przedziału $\langle a, b \rangle$ należy do któregoś z przedziałów (9), więc oznaczając go przez $(\xi_{a_r(x)} - \delta, \xi_{a_r(x)} + \delta)$, mamy, na mocy określenia liczby δ ,

$$(10) \quad |f_i(x) - f_i(\xi_{a_r(x)})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i=1, 2, \dots$$

Następnie obieramy taki wskaźnik $N > 0$, aby dla $p > N$ i $q > N$ spełnione były nierówności

$$(11) \quad |f_p(\xi_{a_j}) - f_q(\xi_{a_j})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad j=1, 2, \dots, r.$$

Jest to oczywiście możliwe z uwagi na zbieżność ciągu (7) w punktach (8) oraz ze względu na to, że punktów ξ_{a_j} jest skończenie wiele.

Ponieważ dla dowolnych p i q oraz dla dowolnego x z przedziału $\langle a, b \rangle$ jest

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f_p(\xi_{a_r(x)})| + |f_p(\xi_{a_r(x)}) - f_q(\xi_{a_r(x)})| + |f_q(\xi_{a_r(x)}) - f_q(x)|,$$

więc ze względu na (10) i (11) zachodzi nierówność

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon,$$

dla $p > N$, $q > N$ i dowolnego x z przedziału, c. b. d. o.

§ 9. Dowód istnienia rozwiązania metodą linii łamanych Twierdzenie Cauchy-Peano

40. Jak już wspomnieliśmy w ustępie 28, str. 38, pierwsze dwa dowody twierdzenia, że równanie

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

ma rozwiązanie $y = \varphi(x)$, spełniające warunek początkowy

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0,$$

podał sam Cauchy. Pierwszy z tych dowodów, oparty o metodę linii łamanych omówioną w sposób poglądowy w ustępie 25, str. 34, podamy obecnie z odpowiednimi uproszczeniami i uogólnieniami.

W dowodzie tym Cauchy zakładał, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągłą w otoczeniu badanego punktu (x_0, y_0) i że ma w tym otoczeniu ciągłą pochodną cząstkową $f'_y(x, y)$. Lipschitz, analizując założenia Cauchy'ego zauważył, że założenie drugie jest za silne i że może być zastąpione założeniem słabszym, iż funkcja $f(x, y)$ spełnia ze względu na zmienną y warunek omówiony w ustępie 27, str. 37. W ten właśnie sposób została wyróżniona tak ważna w dzisiejszej analizie klasa funkcji spełniających warunek Lipschitza.

Dalszy istotny postęp zawdzięczamy Peano, który przy końcu ubiegłego stulecia wykazał, że jedna część twierdzenia Cauchy'ego, a mian-

nowicie ta, która zapewnia istnienie rozwiązania $y = \varphi(x)$ równania (1) spełniającego warunek (2), jest prawdziwa przy jednym tylko założeniu ciągłości funkcji $f(x, y)$. Druga natomiast część, zapewniająca jednoznaczność rozwiązania równania (1) przestaje być prawdziwa, o ile się nie uczyni dodatkowych założeń. Od tego czasu zagadnienie istnienia rozwiązania oddziela się od zagadnienia jego jednoznaczności, a twierdzenie zapewniające istnienie rozwiązania tylko przy założeniu ciągłości funkcji $f(x, y)$ oznacza się często nazwą *twierdzenia Cauchy-Peano*.

Dowód Peano, będący modyfikacją dowodu Cauchy'ego, uległ z kolei licznym przeobrażeniom i uproszczeniom, które doprowadziły do jego wielkiej prostoty i jasności.

41. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze T , obierzmy w nim punkt (x_0, y_0) , oznaczmy przez d jakąś liczbę dodatnią i weźmy dowolny rosnący ciąg liczb

$$(3) \quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_0 + d.$$

Nawiązując do rozważań intuicyjnych z ustępu 25, str. 34, konstruujemy łamaną, odpowiadającą podziałowi (3) przedziału $\langle x_0, x_0 + d \rangle$, o wierzchołkach $P_v = (x_v, y_v)$ i o spadku boku $P_v P_{v+1}$, równym

$$(4) \quad f(x_v, y_v)$$

lub

$$(4') \quad f(x_v, y_v) + \lambda_v,$$

gdzie λ_v jest dowolną liczbą dla $v = 0, 1, \dots, n$.

Jeżeli spadek łamanej określony jest wzorem (4), to łamana ta nazywa się *zwyczajną*, jeżeli zaś spadek określony jest wzorem (4'), to łamana nazywa się *uogólnioną*. Do dowodu twierdzenia Cauchy-Peano wystarcza użycie łamanych zwyczajnych, jednak ze względów, które będą wyjaśnione w ustępie 48, str. 64, bardziej celowe jest posługiwanie się łamanymi uogólnionymi, co też w dalszym ciągu czynimy.

W tym przypadku funkcja przedziałami liniową określająca wspomnianą łamaną zależy nie tylko od zmiennej x i od wyboru ciągu (3), tj., od wartości liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$, ale także od wartości parametrów $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Oznaczmy tę funkcję przez

$$(5) \quad \Psi = \Psi(x, x_0, x_1, \dots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

Jest ona określona indukcyjnie w sposób następujący:

$$(5') \quad \Psi = \begin{cases} y_0 + [f(x_0, y_0) + \lambda_0](x - x_0) & \text{w przedziale } \langle x_0, x_1 \rangle, \\ y_k + [f(x_k, y_k) + \lambda_k](x - x_k) & \text{w przedziale } \langle x_k, x_{k+1} \rangle, \end{cases}$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, n-1$, a wartości y_k są – jak to łatwo sprawdzić – określone wzorem zwrotnym

$$(6) \quad y_k = y_0 + \sum_{v=0}^{k-1} [f(x_v, y_v) + \lambda_v](x_{v+1} - x_v), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ostatecznie mamy więc dla funkcji Ψ w przedziale $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ wzór

$$(7) \quad \Psi = y_0 + \sum_{v=0}^{k-1} [f(x_v, y_v) + \lambda_v](x_{v+1} - x_v) + [f(x_k, y_k) + \lambda_k](x - x_k),$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Uwaga. Gdy wszystkie liczby λ_v są równe zeru, to otrzymujemy oczywiście łamane zwyczajne.

Możemy, jak widać, zdefiniować analogiczne łamane w przedziale $[x_0 - d, x_0]$.

42. Definicja (7) nie określa funkcji Ψ dla $x > x_k$, gdy wierzchołek P_k znajduje się poza obszarem T , ponieważ symbol $f(x_k, y_k)$ traci wtedy sens. Wykażemy, że jeśli liczby d i $|\lambda_k|$ są dostatecznie małe, to ten przypadek nie ma miejsca.

W tym celu wyznaczamy najpierw takie liczby $a > 0$ i $b > 0$, aby prostokąt określony nierównościami

$$(8) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

leżał w T . Oznaczamy przez M kres górny bezwzględnej wartości funkcji $f(x, y)$ w tym prostokącie, przez λ – dowolną liczbę nieujemną oraz

$$(9) \quad \delta_\lambda = \text{Min}[a, b/(M + \lambda)].$$

Przyjmując $d = \delta_\lambda$ twierdzimy, że dla parametrów λ_k spełniających

$$(10) \quad |\lambda_k| \leq \lambda, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

wzór (7) określa, łącznie z wzorami (5') i (6), funkcję Ψ w całym przedziale $\langle x_0, x_0 + \delta_\lambda \rangle$ i analogicznie w przedziale $\langle x_0 - \delta_\lambda, x_0 \rangle$, a łamane nie wychodzą poza prostokąt (8).

Istotnie, według (5) w przedziale $\langle x_0, x_1 \rangle$ jest

$$(11) \quad |\Psi - y_0| \leq [f(x_0, y_0) + \lambda_0](x - x_0),$$

a więc na mocy (10) i (11)

$$(12) \quad |\Psi - y_0| \leq (M + \lambda)(x - x_0) \leq (M + \lambda)(x_1 - x_0) \leq (M + \lambda)\delta_\lambda \leq b,$$

czyli pierwszy bok łamanej, a w szczególności jego punkt końcowy P_1 leży w prostokącie (8). Jeśli teraz przypuścimy, że bok $P_{k-1}P_k$ leży w tym prostokącie, to widać, że wartość $f(x_k, y_k)$ jest określona i wzór (5') określa Ψ także w przedziale $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$; zarazem z poprzedniego wynika, że jest w tym przedziale

$$(13) \quad |\Psi - y_0| \leq \sum_{v=0}^{k-1} [f(x_v, y_v) + \lambda_v](x_{v+1} - x_v) + [f(x_k, y_k) + \lambda_k](x - x_k) \leq \sum_{v=0}^{k-1} (M + \lambda)(x_{v+1} - x_v) + (M + \lambda)(x - x_k) = (M + \lambda)(x - x_0) \leq (M + \lambda)\delta_\lambda \leq b;$$

nierówność ta wykazuje, że bok $P_k P_{k+1}$ również leży w prostokącie (8).

Na zasadzie indukcji wnioskujemy stąd, że funkcja Ψ jest określona dla x spełniających warunek $|x - x_0| \leq \delta_\lambda$ i wykres jej przebiega w prostokącie (8).

Uwaga. Łamane zwyczajnie istnieją w przedziale $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, gdzie

$$(14) \quad \delta = \text{Min}(a, b/M).$$

43. Wykażemy, że jeżeli spełniony jest warunek (10), to funkcje (5), odpowiadające dowolnym podziałom (3), tworzą rodzinę funkcji równo-ciągłych w przedziale $\langle x_0 - \delta_\lambda, x_0 + \delta_\lambda \rangle$.

W tym celu udowodnimy, że wszystkie te łamane spełniają warunek Lipschitza ze wspólną stałą $M + \lambda$, co, jak wiadomo (p. ust. 39, str. 50), jest warunkiem dostatecznym równości.

Dla x' i x'' spełniających warunek $x_0 \leq x' < x'' \leq x_0 + \delta_\lambda$ niech $\langle x_{l'}, x_{l'+1} \rangle$ i $\langle x_{l''}, x_{l''+1} \rangle$ będą takimi przedziałami częściowymi odpowiadającymi ciągłom (3), że x' należy do pierwszego z tych przedziałów, a x'' — do drugiego.

Stosując oznaczenie (5) i wzór (7) otrzymamy najpierw w przypadku, gdy $l' + 1 \leq l'' - 1$, równość

$$\begin{aligned} & \Psi(x'', x_0, \dots, x_n, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) - \Psi(x', x_0, \dots, x_n, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = \\ & = [f(x_{l'}, y_{l'}) + \lambda_{l'}](x_{l'+1} - x') + \sum_{v=l'+1}^{l''-1} [f(x_v, y_v) + \lambda_v](x_{v+1} - x_v) + \\ & \quad + [f(x_{l''}, y_{l''}) + \lambda_{l''}](x'' - x_{l''}), \end{aligned}$$

a potem nierówność

$$\begin{aligned} & |\Psi(x'', x_0, \dots, x_n, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) - \Psi(x', x_0, \dots, x_n, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})| \leq \\ & \leq (M + \lambda)(x_{l'+1} - x') + \sum_{v=l'+1}^{l''-1} (M + \lambda)(x_{v+1} - x_v) + (M + \lambda)(x'' - x_{l''}) = \\ (15) \quad & = (M + \lambda)(x'' - x'), \end{aligned}$$

i analogicznie sprawdzamy tę nierówność w przypadku, gdy $l' + 1 > l'' - 1$ oraz w przedziale $\langle x_0 - \delta_\lambda, x_0 \rangle$, co wobec dowolności rozważanej łamanej dowodzi równości funkcji Ψ rodziny (5), odpowiadających dowolnym podziałom (3), przy założeniu (10).

44. Rozważmy taki nieskończony ciąg podziałów

$$(16) \quad \{\pi_\mu\}$$

przedziału $\langle x_0, x_0 + \delta_\lambda \rangle$ na przedziały częściowe, aby maksimum ich długości dążyło do zera przy $\mu \rightarrow \infty$. Niech

$$(17) \quad x_0 = x_0^{(\mu)} < x_1^{(\mu)} < \dots < x_{n_\mu}^{(\mu)} = x_0 + \delta_\lambda$$

będą punktami wyznaczającymi podział π_μ i niech dowolne liczby

$$(18) \quad \lambda_0^{(\mu)}, \lambda_1^{(\mu)}, \dots, \lambda_{n_\mu-1}^{(\mu)}$$

spełniają nierówność

$$(19) \quad |\lambda_\nu^{(\mu)}| \leq \lambda^{(\mu)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n_\mu - 1, \quad \mu = 1, 2, \dots,$$

gdzie

$$(20) \quad \{\lambda^{(\mu)}\}$$

jest dowolnym, dążącym do zera ciągiem liczb, spełniających nierówność

$$(21) \quad 0 \leq \lambda^{(\mu)} \leq \lambda, \quad \mu = 1, 2, \dots$$

Oznaczmy dla skrócenia

$$\Psi(x, x_0^{(\mu)}, \dots, x_{n_\mu}^{(\mu)}, \lambda_0^{(\mu)}, \dots, \lambda_{n_\mu-1}^{(\mu)}) = \Psi_\mu(x), \quad \mu = 1, 2, \dots$$

Funkcje

$$(22) \quad \Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x), \dots$$

są w przedziale $\langle x_0, x_0 + \delta_\lambda \rangle$ równociągłe i wspólnie ograniczone. Możemy więc, w myśl twierdzenia Arzeli (p. ust. 39, str. 50), wyjąć z ciągu (22) ciąg częściowy

$$\Psi_{q_1}(x), \Psi_{q_2}(x), \Psi_{q_3}(x), \dots,$$

jednostajnie zbieżny w tym przedziale. Aby nie komplikować zapisów, założmy, że funkcję $\Psi_{q_\mu}(x)$ oznaczyliśmy znowu przez $\Psi_\mu(x)$, tzn., że ciąg (22) jest już tym wyjętym ciągiem częściowym jednostajnie zbieżnym.

45. Oznaczając przez $\varphi(x)$ granicę ciągłą tego ciągu wykażemy, że funkcja ta spełnia równanie całkowe przynależne do równania (1) (p. ust. 29, str. 39), czyli że jest ona rozwiązaniem równania (1), spełniającym warunek początkowy (2). W tym celu udowodnimy, że różnica

$$R(x) = \varphi(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[s, \varphi(s)] ds$$

jest mniejsza co do wartości bezwzględnej od dowolnie obranego $\varepsilon > 0$.

Dla przystosowania różnicy $R(x)$ do potrzebnych oszacowań, przedstawiamy ją najpierw dla dowolnego μ w formie

$$\begin{aligned} R(x) &= [\varphi(x) - \Psi_\mu(x)] + \left(\Psi_\mu(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[s, \Psi_\mu(s)] ds \right) + \\ &+ \int_{x_0}^x [f[s, \Psi_\mu(s)] - f[s, \varphi(s)]] ds. \end{aligned}$$

Obierając następnie w przedziale $\langle x_0, x_0 + \delta_\lambda \rangle$ dowolną, ale chwilowo ustaloną liczbę x , oznaczmy przez $\langle x_{k_\mu}^{(\mu)}, x_{k_\mu+1}^{(\mu)} \rangle$ ten z przedziałów czę-

ściowych podziału (π_μ) , który tę liczbę zawiera. Według definicji funkcji $\Psi_\mu(x)$ będzie wtedy

$$\begin{aligned}\Psi_\mu(x) &= y_0 + \sum_{v=0}^{k_\mu-1} [f(x_v^{(\mu)}, y_v^{(\mu)}) + \lambda_v^{(\mu)}] (x_{v+1}^{(\mu)} - x_v^{(\mu)}) + [f(x_{k_\mu}^{(\mu)}, y_{k_\mu}^{(\mu)}) + \lambda_{k_\mu}^{(\mu)}] (x - x_{k_\mu}^{(\mu)}) = \\ &= y_0 + \sum_{v=0}^{k_\mu-1} \int_{x_v^{(\mu)}}^{x_{v+1}^{(\mu)}} f(x_v^{(\mu)}, y_v^{(\mu)}) ds + \int_{x_{k_\mu}^{(\mu)}}^x f(x_{k_\mu}^{(\mu)}, y_{k_\mu}^{(\mu)}) ds + \sum_{v=0}^{k_\mu-1} \lambda_v^{(\mu)} (x_{v+1}^{(\mu)} - x_v^{(\mu)}) + \\ &\quad + \lambda_{k_\mu}^{(\mu)} (x - x_{k_\mu}^{(\mu)}),\end{aligned}$$

a ponieważ jest także

$$\int_{x_0}^x f[s, \Psi_\mu(s)] ds = \sum_{v=0}^{k_\mu-1} \int_{x_v^{(\mu)}}^{x_{v+1}^{(\mu)}} f[s, \Psi_\mu(s)] ds + \int_{x_{k_\mu}^{(\mu)}}^x f[s, \Psi_\mu(s)] ds,$$

więc wobec (19)

$$\begin{aligned}(23) \quad |R(x)| &\leq |\varphi(x) - \Psi_\mu(x)| + \sum_{v=0}^{k_\mu-1} \int_{x_v^{(\mu)}}^{x_{v+1}^{(\mu)}} |f(x_v^{(\mu)}, y_v^{(\mu)}) - f[s, \Psi_\mu(s)]| ds + \\ &\quad + \int_{x_{k_\mu}^{(\mu)}}^x |f(x_{k_\mu}^{(\mu)}, y_{k_\mu}^{(\mu)}) - f[s, \Psi_\mu(s)]| ds + \int_{x_0}^x |f[s, \Psi_\mu(s)] - \\ &\quad - f[s, \varphi(s)]| ds + \lambda^{(\mu)} (x - x_0).\end{aligned}$$

Dobierzmy teraz do danego dowolnego $\varepsilon > 0$ liczbę $\eta > 0$ tak, aby dla punktów (x', y') i (x'', y'') prostokąta (8), takich, że

$$(24) \quad |x'' - x'| < \eta, \quad |y'' - y'| < \eta,$$

zachodziła nierówność

$$(25) \quad |f(x'', y'') - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda},$$

co ze względu na jednostajną ciągłość funkcji $f(x, y)$ w tym prostokącie jest oczywiście możliwe. Następnie, korzystając z równociągłości funkcji (22) wyznaczmy liczbę $\sigma > 0$ tak, aby

$$(26) \quad \sigma < \eta$$

i aby dla x' i x'' należących do $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ nierówność

$$(27) \quad |x'' - x'| < \sigma$$

pociągała za sobą nierówność

$$(28) \quad |\Psi_\mu(x'') - \Psi_\mu(x')| < \eta$$

dla wszelkich μ . Wreszcie, mając η i σ , wyznaczmy N tak, aby następnym nierówności

$$(29) \quad \mu > N$$

były nierówności

$$(30) \quad |\varphi(x) - \Psi_\mu(x)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$(31) \quad |f[s, \varphi(s)] - f[s, \Psi_\mu(s)]| < \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda},$$

$$(32) \quad \lambda^{(\mu)} < \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda},$$

$$(33) \quad 0 < x_{v+1}^{(\mu)} - x_v^{(\mu)} < \sigma, \quad v = 0, 1, \dots, n_\mu - 1.$$

W tych warunkach dla wartości s należących do $\langle x_v^{(\mu)}, x_{v+1}^{(\mu)} \rangle$ będzie zachodziła, ze względu na (33), nierówność

$$(34) \quad 0 \leq s - x_v^{(\mu)} < \sigma, \quad v = 0, 1, \dots, k_\mu,$$

ponieważ zaś nierówność (27) pociąga nierówność (28), więc w tymże przedziale będzie też

$$|\Psi_\mu(s) - \Psi_\mu(x_v^{(\mu)})| < \eta$$

czyli

$$(35) \quad |\Psi_\mu(s) - y_v^{(\mu)}| < \eta.$$

Z nierówności (24) wynika (25), a więc (34) i (35) pociągają za sobą, wobec (26), nierówność

$$(36) \quad |f(x_v^{(\mu)}, y_v^{(\mu)}) - f[s, \Psi_\mu(s)]| < \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda}$$

w każdym z przedziałów częściowych podziału (π_μ) , jeśli tylko zachodzić będzie (29).

Z (23), (30), (31), (32) i (36) wynika w takim razie nierówność

$$|R(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{v=0}^{k_\mu-1} \int_{x_v^{(\mu)}}^{x_{v+1}^{(\mu)}} \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda} ds + \int_{x_{k_\mu}^{(\mu)}}^x \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda} ds + \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{4\delta_\mu} ds + \frac{\varepsilon}{4\delta_\lambda} (x - x_0) \leq \varepsilon,$$

c. b. d. o. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla przedziału $\langle x_0 - \delta_\lambda, x_0 \rangle$.

Jeśli w dowodzie powyższym ograniczymy się do łamanych zwyczajnych, to uzyskany wynik będzie prawdziwy w przedziale $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, gdzie liczba δ określona jest wzorem (14). Reasumując mamy następujące

Twierdzenie Cauchy-Peano. (lokalne). Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze T , prostokąt, dany nierównościami (8) leży w T , M jest górnym kresem bezwzględnej wartości funkcji $f(x, y)$ w tym prostokącie i liczba δ jest określona równością $\delta = \text{Min}(a, b/M)$, to istnieje funkcja $y = \varphi(x)$, określona w przedziale $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ i spełniająca w nim równanie (1) oraz warunek (2). Funkcja ta przedstawia geometrycznie łuk regularny, przebiegający w prostokącie T i przechodzący przez punkt (x_0, y_0) .

§ 10. Integralne rozwiązanie zadania Cauchy'ego

46. W dalszym ciągu rozważamy równanie

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

oraz zagadnienie znalezienia takiego rozwiązania szczególnego $y = \varphi(x)$, które by spełniało warunek początkowy

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0,$$

gdzie zakładamy, jak w ustępie poprzednim, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w pewnym obszarze T . Wykazaliśmy tam, że dla dowolnego punktu (x_0, y_0) tego obszaru istnieje rozwiązanie w sensie lokalnym, tzn. określone w dostatecznie małym przedziale zawierającym liczbę x_0 .

Obecnie omówimy zagadnienie integralnego rozwiązania tego samego zadania, tzn. zagadnienie znalezienia rozwiązania określonego w przedziale możliwie największym.

Najpierw udowodnimy następujące przygotowawcze

Twierdzenie. Jeżeli funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są rozwiązaniami szczególnymi równania (1) określonymi w przedziałach $\langle x_1, x_2 \rangle$ i $\langle x_2, x_3 \rangle$ ($x_1 < x_2 < x_3$) i jeśli

$$(3) \quad \varphi_1(x_2) = \varphi_2(x_2) = y_2,$$

to funkcja $\Psi(x)$, określona w przedziale $\langle x_1, x_3 \rangle$, jako równa $\varphi_1(x)$ w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$, a $\varphi_2(x)$ w przedziale $\langle x_2, x_3 \rangle$, jest rozwiązaniem równania (1).

Dowód. Z założenia wynika, że funkcja $\varphi_1(x)$ spełnia równanie (1) w zamkniętym przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$. W szczególności więc w punkcie x_2 istnieje lewostronna pochodna — oznaczmy ją przez $\varphi_1^-(x_2)$ — i zachodzi równość

$$\varphi_1^-(x_2) = f[x_2, \varphi_1(x_2)] = f(x_2, y_2).$$

Podobnie dla funkcji $\varphi_2(x)$ istnieje prawostronna pochodna w punkcie x_2 — oznaczmy ją przez $\varphi_2^+(x_2)$ — i zachodzi równość

$$\varphi_2^+(x_2) = f[x_2, \varphi_2(x_2)] = f(x_2, y_2),$$

a zatem

$$(4) \quad \varphi_1^-(x_2) = \varphi_2^+(x_2).$$

Z równości (3) i (4) wynika, że funkcja $\Psi(x)$ ma w punkcie x_2 pierwszą pochodną, dla której

$$\Psi'(x_2) = f[x_2, \Psi(x_2)].$$

Wobec tego funkcja $\Psi(x)$ spełnia równanie (1) w całym przedziale $\langle x_1, x_3 \rangle$, c. b. d. o.

Z uwagi na to nazywamy funkcję $\Psi(x)$ przedłużeniem w prawo rozwiązania $\varphi_1(x)$ i przedłużeniem w lewo rozwiązania $\varphi_2(x)$.

Przy tworzeniu tych przedłużeń można oczywiście brać przedziały otwarte z jednej strony (x_1, x_2) i (x_2, x_3) .

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ rozwiązaniem równania (1), to istnieje przedział $\langle x'_1, x'_2 \rangle$ zawierający w swym wnętrzu przedział $\langle x_1, x_2 \rangle$ oraz takie rozwiązanie $\Psi(x)$ równania (1) w przedziale $\langle x'_1, x'_2 \rangle$, że w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ zachodzi równość

$$\Psi(x) = \varphi(x).$$

Dowód. Punkt $P_2 = (x_2, \varphi(x_2))$ leży oczywiście w danym obszarze T , wobec czego istnieje w T taki prostokąt o środku P_2 i o bokach równoległych do osi układu, że do równania (1) i punktu P_2 można zastosować twierdzenie lokalne Cauchy-Peano. Istnieje więc w przedziale $\langle x_2, x'_2 \rangle$, gdzie $x'_2 > x_2$, rozwiązanie $\varphi_2(x)$ spełniające warunek $\varphi_2(x_2) = \varphi(x_2)$. Oznaczmy $\Psi(x) = \varphi_1(x)$ w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ oraz $\Psi(x) = \varphi_2(x)$ w przedziale $\langle x_2, x'_2 \rangle$. W myśl twierdzenia poprzedniego dostajemy przedłużenie $\Psi(x)$ rozwiązania $\varphi(x)$ w prawo i podobnie dowodzimy, że można je przedłużyć w lewo, c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie wyrażamy krótko, mówiąc, że każde rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (1), określone w przedziale zamkniętym i przebiegające w obszarze T , można przedłużyć w prawo i w lewo.

47. Niech $\varphi(x)$ będzie rozwiązaniem równania (1) w przedziale prawostronnie otwartym $\langle x_1, x_2 \rangle$. Powstaje pytanie, czy i kiedy rozwiązanie to można dodatkowo określić dla $x = x_2$ w ten sposób, aby spełniało ono równanie (1) w przedziale zamkniętym $\langle x_1, x_2 \rangle$. Odpowiedź na to pytanie wymaga uprzedniego wprowadzenia następującej definicji.

Mówimy, że rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (1) istniejące w prawostronnie otwartym skończonym przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ skupia się swym prawym końcem na punkcie (x_2, y_2) obszaru T , jeżeli istnieje ciąg $\{x_n\}$

$$x_1 \leq x_n < x_2, \quad x_n \rightarrow x_2,$$

taki, że

$$\varphi(x_n) \rightarrow y_2^*.$$

*) Jeżeli przedział nie jest skończony, tzn. $x_2 = \infty$, to uważamy, że rozwiązanie $\varphi(x)$ nie skupia się swym prawym końcem.

Odpowiedź na postawione przed chwilą pytanie daje następujące

Twierdzenie. Jeżeli rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (1) istniejące w prawostronnie otwartym przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ skupia się na punkcie (x_2, y_2) obszaru T , to określając dodatkowo $\varphi(x)$ dla $x=x_2$ za pomocą równości $y_2=\varphi(x_2)$ otrzymamy rozwiązanie istniejące w przedziale zamkniętym $\langle x_1, x_2 \rangle$. W szczególności więc dla $x=x_2$ będzie

$$\varphi'(x_2)=f[x_2, \varphi(x_2)].$$

Twierdzenie to podaje więc warunki, w jakich rozwiązanie równania (1) istniejące w przedziale prawostronnie otwartym $\langle x_1, x_2 \rangle$ można przedłużyć na przedział zamknięty $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Dowód. Wykażemy najpierw, że

$$\lim_{x \rightarrow x_2} \varphi(x) = y_2.$$

Otoczmy w tym celu punkt (x_2, y_2) kwadratem K_ε

$$|x - x_2| \leq \varepsilon, \quad |y - y_2| \leq \varepsilon$$

na tyle małym, aby był on zawarty w obszarze T . Wystarczy wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego ciągu $x_1 \leq \xi_n < x_2$, $\xi_n \rightarrow x_2$, od pewnego wskaźnika począwszy zachodzi nierówność

$$|\varphi(\xi_n) - y_2| \leq \varepsilon.$$

Dowodząc niewprost przypuścimy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\xi_1, \xi_2, \dots$, dla którego jest stale

$$|\varphi(\xi_n) - y_2| > \varepsilon,$$

gdzie $x_1 \leq \xi_n < x_2$ i $\xi_n \rightarrow x_2$.

Ponieważ $\varphi(x)$ skupia się swym prawym końcem na punkcie (x_2, y_2) , więc istnieje ciąg punktów x_n , dla których $x_1 \leq x_n < x_2$, $x_n \rightarrow x_2$ i $\varphi(x_n) \rightarrow y_2$. Dla dostatecznie dużych wskaźników n będzie więc

$$|\varphi(x_n) - y_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Idąc od punktu x_n ku punktowi ξ_n napotkamy taki pierwszy punkt ζ_n , że

$$|\varphi(\zeta_n) - y_2| = \varepsilon.$$

Część wykresu $y=\varphi(x)$ odpowiadająca przedziałowi $[x_n, \zeta_n]$ należy oczywiście do kwadratu K_ε dla n dostatecznie dużych. Mamy

$$|\varphi(\zeta_n) - \varphi(x_n)| = |\varphi(\zeta_n) - y_2 + y_2 - \varphi(x_n)| \geq$$

$$\geq |\varphi(\zeta_n) - y_2| - |\varphi(x_n) - y_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na podstawie twierdzenia Lagrange'a o przyrostach skończonych jest

$$\varphi(\zeta_n) - \varphi(x_n) = (\zeta_n - x_n) \varphi'(\eta_n),$$

gdzie η_n leży między ζ_n a x_n , punkt zaś $(\eta_n, \varphi(\eta_n))$ należy do K_ε oraz

$$\varphi'(\eta_n) = f[\eta_n, \varphi(\eta_n)].$$

Jest więc

$$|(\zeta_n - x_n) \varphi'(\eta_n)| = |(\zeta_n - x_n) f[\eta_n, \varphi(\eta_n)]| \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd wynika, że

$$|f[\eta_n, \varphi(\eta_n)]| \geq \frac{\varepsilon}{2|\zeta_n - x_n|}.$$

Ponieważ $\zeta_n - x_n \rightarrow 0$, więc

$$|f[\eta_n, \varphi(\eta_n)]| \rightarrow \infty,$$

co jest niemożliwe, gdyż punkty $(\eta_n, \varphi(\eta_n))$ są położone w kwadracie K_ε , w którym funkcja $f(x, y)$, jako ciągła, musi być ograniczona.

Wykazaliśmy więc, że dla każdego ciągu $x_1 \leq \xi_n < x_2$, $\xi_n \rightarrow x_2$, musi być $\varphi(\xi_n) \rightarrow y_2$, tzn., że

$$\lim_{x \rightarrow x_2} \varphi(x) = y_2.$$

Wobec ciągłości funkcji $f(x, y)$ wynika stąd, że

$$\lim_{x \rightarrow x_2} f[x, \varphi(x)] = f(x_2, y_2) = f[x_2, \varphi(x_2)].$$

Ponieważ jednak w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ jest $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$, więc

$$\lim_{x \rightarrow x_2} \varphi'(x) = f(x_2, y_2) = f[x_2, \varphi(x_2)].$$

Stosując do ilorazu

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x - x_2} = \frac{\varphi(x) - y_2}{x - x_2}$$

twierdzenie de l'Hospitala otrzymamy na podstawie przedostatniej równości

$$\lim_{x \rightarrow x_2} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \rightarrow x_2} \varphi'(x) = f[x_2, \varphi(x_2)]$$

czyli

$$\varphi'(x_2) = f[x_2, \varphi(x_2)].$$

Oznacza to, że rozwiązanie $\varphi(x)$ określone dla $x=x_2$ przez równość $\varphi(x_2)=y_2$ spełnia równanie różniczkowe (1) również dla $x=x_2$. Funkcja $\varphi(x)$, określona dla $x=x_2$ przez równość $\varphi(x_2)=y_2$, jest więc rozwiązaniem równania (1) istniejącym w przedziale zamkniętym $\langle x_1, x_2 \rangle$, c. b. d. o.

Oba poprzednie twierdzenia wskazują nam dwa różne sposoby przedłużania rozwiązań w prawo. Pierwszy z nich zapewnia możliwość przedłużenia rozwiązania istniejącego w przedziale zamkniętym $\langle x_1, x_2 \rangle$ na szerszy przedział zamknięty $\langle x_1, x'_2 \rangle$. Drugi dotyczy rozwiązań istniejących w przedziale prawostronnie otwartym $\langle x_1, x_2 \rangle$, które skupiają się swym prawym końcem na jakimś punkcie (x_2, y_2) obszaru T . Rozwiązania takie można przedłużyć na przedział zamknięty $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Powstaje pytanie, jak daleko da się przedłużyć w prawo dowolne rozwiązanie równania (1). Odpowiedź na to pytanie ułatwi nam następujące określenie.

Mówimy, że rozwiązanie $y=\varphi(x)$ równania (1) istniejące w przedziale prawostronnie otwartym $\langle b_0, b \rangle$ *zmierza swym prawym końcem do brzegu obszaru T* , jeżeli rozwiązanie to swym prawym końcem nie skupia się na żadnym punkcie tego obszaru.

Przypadek ten charakteryzuje się więc tym, że nie istnieje żaden ciąg $x_1, x_2, \dots$, dla którego

$$b_0 \leq x_n < b, \quad x_n \rightarrow b, \quad \varphi(x_n) \rightarrow c,$$

gdzie (b, c) jest punktem wewnętrznym obszaru T .

W odniesieniu do możliwie najdalej posuniętej przedłużalności dowolnego rozwiązania na prawo zachodzi następujące zasadnicze

Twierdzenie. Każde rozwiązanie równania (1) wychodzące w prawo z punktu (b_0, c_0) , tzn. istniejące w pewnym przedziale $\langle b_0, b \rangle$, da się przedłużyć w prawo na taki prawostronnie otwarty przedział $\langle b_0, b^* \rangle$, aby rozwiązanie to, rozważane w tym przedziale, zmierzało swym prawym końcem do brzegu obszaru T .

Dowód. Niechaj $y=\varphi(x)$ będzie rozwiązaniem istniejącym w przedziale $\langle b_0, b \rangle$. Jeżeli rozwiązanie to swym prawym końcem zmierza do brzegu T , to teza twierdzenia jest prawdziwa i dowód jest ukończony.

Jeżeli rozwiązanie to nie zmierza prawym końcem do brzegu T , to da się ono rozszerzyć na przedział $\langle b_0, b \rangle$. Przyjmując $b=b_1$ widzimy, że da się ono rozszerzyć na przedział $\langle b_0, b_1 \rangle$. Oznaczmy przez k_2 kres górny takich liczb k , że da się ono rozszerzyć na przedział $\langle b_0, b_1+k \rangle$.

Przyjmując

$$b_2 = b_1 + \text{Min} \left(\frac{k_2}{2}, 1 \right)$$

widzimy, że da się ono przedłużyć na przedział $\langle b_0, b_2 \rangle$. Zakładamy, że rozwiązanie nasze da się przedłużyć na przedział $\langle b_0, b_n \rangle$ i oznaczmy przez k_{n+1} kres górny takich k , że da się ono przedłużyć na przedział $\langle b_0, b_n+k \rangle$ i przyjmujemy

$$b_{n+1} = b_n + \text{Min} \left(\frac{k_{n+1}}{2}, 1 \right).$$

Ciąg $b_1, b_2, b_3, \dots$ jest indukcyjnie określony i rosnący, a zatem zmierza do pewnej granicy b^* (skończonej lub nie).

Ponieważ nasze rozwiązanie daje się kolejno przedłużać na przedziały $\langle b_0, b_1 \rangle, \langle b_0, b_2 \rangle, \langle b_0, b_3 \rangle, \dots$, więc da się ono, jak łatwo wykazać, przedłużyć na przedział prawostronnie otwarty $\langle b_0, b^* \rangle$.

Twierdzimy, że rozwiązanie $y=\varphi(x)$ rozważane w tym przedziale zmierza swym prawym końcem do brzegu obszaru T . Przypuśćmy, że tak nie jest. Na podstawie ostatniego twierdzenia da się ono przedłużyć na przedział zamknięty skończony $\langle b_0, b^* \rangle$ i z kolei, na podstawie przedostatniego twierdzenia, na jeszcze szerszy przedział $\langle b_0, b^*+\varepsilon \rangle$.

Oznaczmyliśmy przed chwilą przez k_{n+1} kres górny takich liczb k , że rozwiązanie $y=\varphi(x)$ da się przedłużyć na przedział $\langle b_0, b_n+k \rangle$. Wynika stąd, że

$$b_n + k_{n+1} \geq b^* + \varepsilon > b_n + \varepsilon,$$

a zatem

$$(5) \quad k_{n+1} > \varepsilon > 0.$$

Z drugiej strony jest w tym przypadku

$$\text{Min}(k_{n+1}/2, 1) = b_{n+1} - b_n \rightarrow b^* - b^* = 0.$$

Wnosimy stąd, że dla dość dużych wskaźników n

$$\text{Min}(k_{n+1}/2, 1) = k_{n+1}/2$$

czyli

$$k_{n+1} \rightarrow 0,$$

co wobec (5) jest niemożliwe. Dowiedliśmy w ten sposób, że rozwiązanie $y=\varphi(x)$ rozważane w przedziale $\langle b_0, b^* \rangle$ zmierza swym prawym końcem do brzegu obszaru T , w przypadku, gdy $b^* < \infty$.

Jeżeli $b^* = \infty$, to rozwiązanie $y=\varphi(x)$ zmierza swym prawym końcem do brzegu obszaru T , zgodnie z odnośnikiem na str. 59 i w ten sposób dowód naszego twierdzenia można uważać za zakończony.

Wprowadzając analogiczne do podanych uprzednio pojęcia skupiania się rozwiązania swym lewym końcem na punkcie obszaru oraz zmierzania swym lewym końcem do brzegu obszaru i stosując podobne rozumowanie można wykazać, że dla każdego rozwiązania równania (1) wychodzącego w lewo z punktu (b_0, c_0) istnieje jego przedłużenie w lewo, zmierzające swym lewym końcem do brzegu obszaru T .

Pozwala to wypowiedzieć następujące

Twierdzenie Cauchy-Peano. (integralne). Jeżeli funkcja $f(x, y)$ występująca po prawej stronie równania

$$y' = f(x, y)$$

jest ciągła w obszarze T , to każde rozwiązanie tego równania ma przedłużenie w lewo i w prawo zmierzające swymi oboma końcami do brzegu obszaru T .

Każde tak przedłużone rozwiązanie $y=\varphi(x)$ spełniające warunek początkowy

$$y_0 = \varphi(x_0)$$

nazywamy *rozwiązaniem integralnym* równania (1) przy tym warunkach początkowym.

48. Wykażemy, że każde rozwiązanie równania (1) określone w przedziale zamkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu łamanych uogólnionych.

Zakładając, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze T , bierzemy dowolne takie rozwiązanie $y=\varphi(x)$ określone w przedziale $\langle a, \beta \rangle$ i rozpatrujemy łuk regularny o równaniu $y=\varphi(x)$. Widać od razu, że istnieje taka liczba $\eta > 0$, że dziedzina D określona nierównościami

$$a \leq x \leq \beta, \quad \varphi(x) - \eta \leq y \leq \varphi(x) + \eta$$

leży całkowicie w obszarze T , w przeciwnym bowiem razie, jak łatwo sprawdzić, co najmniej jeden punkt wspomnianego łuku musiałby należeć do brzegu obszaru T .

Jeśli przez M oznaczymy kres górny bezwzględnej wartości funkcji $f(x, y)$ w D , to z (1) wynika nierówność

$$(6) \quad |f[x, \varphi(x)]| \leq M,$$

a więc także nierówność

$$(7) \quad \frac{1}{|x'' - x'|} \left| \int_{x'}^{x''} f[s, \varphi(s)] ds \right| \leq M \quad \text{dla} \quad a \leq x' < x'' \leq \beta.$$

Obierzmy teraz dowolny ciąg liczb

$$(8) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

i oznaczmy przez P_k punkt $(x_k, \varphi(x_k))$, a przez L' — łamaną o wierzchołkach P_k . Jej równaniem jest funkcja $g(x)$ określona w przedziałach $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$, $k=0, 1, \dots, n-1$, wzorem

$$(9) \quad g(x) = \varphi(x_k) + \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k).$$

Aby zbadać, przy jakich warunkach łamana L' leży w dziedzinie D , oszacujmy, korzystając z (1), różnicę

$$\varphi(x) - g(x) = \int_{x_k}^x f[s, \varphi(s)] ds - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f[s, \varphi(s)] ds.$$

Z (7) wynika, że w przedziale $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ zachodzi nierówność

$$|\varphi(x) - g(x)| \leq 2M(x_{k+1} - x_k).$$

Jeżeli więc ciąg (8) będzie tak dobrany, że przedziały częściowe będą krótsze niż $\eta/2M$, to w całym przedziale $\langle a, \beta \rangle$ zachodzić będzie nierówność

$$|\varphi(x) - g(x)| \leq \eta$$

wykazująca, że łamana L' leży w dziedzinie D . Jeśli zaś zwrócimy jeszcze uwagę na to, że wyrażeniu $g(x)$ możemy nadać w przedziale $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ postać

$$(10) \quad g(x) = \varphi(x_k) + [f[x_k, \varphi(x_k)] + \lambda_k](x - x_k),$$

gdzie

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_k &= \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - f[x_k, \varphi(x_k)] = \varphi'(\xi_k) - f[x_k, \varphi(x_k)] = \\ &= f[\xi_k, \varphi(\xi_k)] - f[x_k, \varphi(x_k)], \quad x_k < \xi_k < x_{k+1}, \end{aligned}$$

to dostrzeżemy, że łamana L' jest uogólnioną łamaną Cauchy'ego wychodzącą z punktu $(a, \varphi(a))$ w prawo lub z punktu $(\beta, \varphi(\beta))$ w lewo.

Obierając nieskończony ciąg liczb

$$\{\eta_i\}, \quad 0 < \eta_i < \eta,$$

zbieżny do zera, wyznaczając dla każdej z nich taki ciąg (8), aby przedziały częściowe były mniejsze od $\eta_i/2M$ i oznaczając przez $g_i(x)$ odpowiednią łamaną utworzoną zgodnie z wzorem (9) lub (10), dostrzegamy z łatwością, że ciąg $\{g_i(x)\}$ zmierza jednostajnie w przedziale $\langle a, \beta \rangle$ do rozwiązania $\varphi(x)$. Jednocześnie zmierzają jednostajnie (względem i) do zera odnośne liczby λ_k^i dane wzorem analogicznym do (11) dla łamanej $g_i(x)$.

Uwagi. 1^o Przekonamy się niżej (p. przykład 40), że twierdzenie to nie byłoby słuszne dla łamanych zwykłych.

2^o Ponieważ wszystkie uogólnione łamane wychodzące z punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ i odpowiadające wartościom λ_k spełniającym nierówność (10), § 9, w której λ jest dowolną liczbą dodatnią, istnieją w przedziale $\langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1 \rangle$, gdzie δ_1 jest dane wzorem (9), § 9, więc z ostatniego twierdzenia wynika, że każde integralne rozwiązanie równania (1) przechodzące przez punkt P_0 istnieje w przedziale $\langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1 \rangle$ i rozwiązywane w nim przebiega całkowicie w prostokacie określonym warunkami (8), § 9. Czytelnik z łatwością sam stwierdzi, że rozwiązanie to istnieje w zamkniętym przedziale $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, gdzie δ jest dane równością (14), § 9, i przebiega w prostokacie (8), § 9.

3^o Ponieważ liczby a i b określające wielkość prostokąta (8), § 9, były wybrane dowolnie, więc z uwagi 2^o wynika, że dla każdego z góry danego otoczenia płaskiego punktu P_0 istnieje taki dostatecznie krótki przedział $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$, że każde rozwiązanie przechodzące przez punkt P_0 i istniejące w tym przedziale lub w jego części, przebiega całkowicie w tym otoczeniu płaskim punktu P_0 .

§ 11. Pęk rozwiązań równania $y' = f(x, y)$, przechodzących przez jeden punkt

49. Jeżeli zakładamy tylko ciągłość funkcji $f(x, y)$, to rozwiązanie równania

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

spełniające dany warunek początkowy nie jest na ogół określone jednoznacznie; jeżeli rozwiązań jest więcej niż jedno, można badać *pęk rozwiązań* tego równania, wychodzących z danego punktu.

PRZYKŁAD 40. Niech

$$(i) \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{dla } x \text{ dowolnych i } y \geq 0, \\ 0 & \text{,, „ „ „ i } y < 0; \end{cases}$$

funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w całej płaszczyźnie.

Zajniemy się wyznaczeniem wszystkich rozwiązań, wychodzących z punktu $(0, 0)$.

Zauważmy najpierw, że jeśli $y_0 < 0$, to równanie (1) ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) postać $y' = 0$, wobec czego jedynym rozwiązaniem przechodzącym przez ten punkt jest prosta $y = y_0$. Stąd, jeśli dla jakiegokolwiek rozwiązania $\Psi(x)$ istnieje taka wartość $x = \bar{x}$, że $\Psi(\bar{x}) < 0$, to już w całym przedziale istnienia tego rozwiązania jest $\Psi(x) = \Psi(\bar{x}) < 0$; każde więc rozwiązanie przechodzące przez punkt $(0, 0)$ jest w całym przedziale swego istnienia nieujemne.

Funkcja $\varphi_1(x) \equiv 0$ jest w przedziale $(-\infty, \infty)$ szukanym rozwiązaniem i idzie o to, czy przez punkt $(0, 0)$ przechodzą jakieś inne rozwiązania. O ile $\varphi_2(x)$ jest takim rozwiązaniem, to muszą istnieć takie przedziały zmiennej x , w których $\varphi_2(x) > 0$. W każdym takim przedziale spełnione jest równanie $y' = y^{1/2}$, a więc i nierówność $\varphi_2'(x) > 0$, tzn. funkcja $\varphi_2(x)$ jest w tym przedziale ściśle rosnąca. Istnieje więc funkcja $x = \varphi_2(y)$ odwrotna do funkcji $y = \varphi_2(x)$ i jest dla niej

$$\varphi_2'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Zatem $\varphi_2(y)$ musi być kształtu $x = \varphi_2(y) = \int dy/y^{1/2} = 2y^{1/2} + C$ i można próbować tak wyznaczyć stałą C , aby $\varphi_2(0) = 0$. Otrzymujemy oczywiście $C = 0$, a stąd $\varphi_2(x) = x^2/4$. Równanie to zachodzi tylko tam, gdzie $\varphi_2'(x) > 0$, tzn. dla $x > 0$. Otrzymaliśmy więc drugie rozwiązanie naszego zadania. Jest nim funkcja

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ x^2/4 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

która jest klasy C^1 w przedziale $(-\infty, \infty)$ i spełnia w nim równanie (1)

Są jeszcze i dalsze rozwiązania przechodzące przez $(0, 0)$. Określmy bowiem funkcję $\Phi(x, \xi)$ dla każdego x z przedziału $(-\infty, \infty)$ i dla $\xi > 0$ wzorem

$$\Phi(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq \xi, \\ (x - \xi)^2/4 & \text{dla } x > \xi. \end{cases}$$

Funkcja $\Phi(x, \xi)$ spełnia równanie (1) przy każdym ustalonym ξ . Ponadto jest $\Phi(0, \xi) = 0$, co łącznie z poprzednim orzeka, że przedstawia ona przy każdym $\xi > 0$ rozwiązanie równania (1) przechodzące przez punkt $(0, 0)$.

Istnieje więc nieskończenie wiele tych rozwiązań i są one uwidocznione na rys. 11. Pomijając rozwiązania $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ widzimy, że każde inne składa się z części dodatniej osi x , następnie zaś przechodzi w parabolę. Nietrudno sprawdzić, że innych rozwiązań przechodzących przez punkt $(0, 0)$ nie ma.

Uwaga. Gdybyśmy do rozwiązań wychodzących z punktu $(0, 0)$ w prawo stosowali metodę łamanych Cauchy'ego, używając tylko łamanych zwyczajnych, to otrzymalibyśmy tą drogą tylko rozwiązanie $\varphi_1(x) = 0$. Inne rozwiązania przechodzące przez punkt $(0, 0)$ nie są granicami ciągów łamanych zwyczajnych.

Podamy drugi przykład, w którym przez punkt $(0, 0)$ przechodzi nieskończenie wiele rozwiązań, a żadne dwa rozwiązania przechodzące przez $(0, 0)$ nie mają innych punktów wspólnych.

PRZYKŁAD 41. Bierzemy pod uwagę rodzinę łuków postaci

$$(ii) \quad y = \Phi(x, C) = C - \sqrt{C^2 + x^4},$$

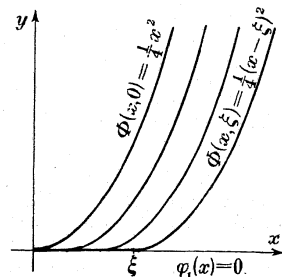
gdzie x i C spełniają nierówności

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq C < \infty.$$

Mamy więc $\Phi(x, C) < 0$ dla $x \neq 0$ i $\Phi(0, C) = 0$. Dla każdego ustalonego C równanie (1) przedstawia łuk otwarty, (p. ust. 10, str. 15) przechodzący przez $(0, 0)$, a ponieważ dla $x \neq 0$ jest

$$\Phi'_C(x, C) = 1 - \frac{C}{\sqrt{C^2 + x^4}} > 0,$$

więc dla stałego $x \neq 0$ funkcja $\Phi(x, C)$ jest ściśle rosnąca, tzn. łuki rodziny (ii) nie mają poza punktem $(0, 0)$ innych punktów wspólnych.



Rys. 11

Prostym rachunkiem stwierdzamy, że łuki te, wyłączając punkt $(0, 0)$, spełniają równanie różniczkowe

$$(iii) \quad y' = f(x, y) = \frac{4x^3y}{x^4 + y^2},$$

którego prawa strona jest ciągła. Ponieważ jednak

$$|f(x, y)| = 2|x| \frac{2x^2|y|}{x^4 + y^2} \leq 2|x|,$$

więc $f(x, y) \rightarrow 0$, gdy $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Można więc usunąć nieciągłość funkcji $f(x, y)$ w tym punkcie, określając $f(0, 0) = 0$. Wtedy rodzina łuków (ii) spełniać będzie równanie (2) także i w punkcie $(0, 0)$, gdyż wszystkie łuki do niej należące są w tym punkcie styczne do osi x .

50. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ występująca w równaniu (1) jest określona i ciągła w obszarze *normalnym* N , tzn. takim, że jeżeli jakiekolwiek dwa punkty o tej samej odciętej $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_1, y_2)$ należą do N , to wszystkie punkty odcinka P_1P_2 także należą do N . Niech dalej $P_0 = (x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem tego obszaru. Punkt Q nazwiemy *osiągalnym* z P_0 , jeżeli istnieje łuk całkowity równania (1) łączący punkty P_0 i Q .

Twierdzenie. Jeżeli dwa punkty o tej samej odciętej $Q_1 = (x_1, y_1)$ i $Q_2 = (x_1, y_2)$ są osiągalne z P_0 , to każdy punkt odcinka Q_1Q_2 jest także osiągalny z P_0 .

Dowód. Przyjmując bez szkody dla ogólności, że $x_1 > x_0$ i $y_2 > y_1$ weźmy łuki całkowite $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ łączące P_0 z Q_1 oraz P_0 z Q_2 i oznaczmy przez X zbiór tych wartości x z przedziału $\langle x_0, x_1 \rangle$, dla których $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Zbiór X , jako zbiór miejsc zerowych funkcji $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, jest zamknięty i niepusty, gdyż zawiera x_0 i jego kres górny ξ należy do X . Przy tym jest $\xi < x_1$, gdyż $y_1 = \varphi_1(x_1) < \varphi_2(x_1) = y_2$ (rys. 12).

Niech Δ oznacza zbiór określony nierównościami

$$\xi \leq x \leq x_1, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

$Q = (x_1, \eta)$ zaś — dowolny punkt odcinka Q_1Q_2 . Jakikolwiek rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (1) wychodzące w lewo z punktu Q i przedłużone tak, aby swym lewym końcem zmierzało do brzegu obszaru N nie może przebiegać całkowicie w zbiorze Δ i tym samym istnieje taki punkt ξ' , że będzie $\xi \leq \xi' < x_1$ i albo $\varphi(\xi') = \varphi_1(\xi')$, albo $\varphi(\xi') = \varphi_2(\xi')$.

Jeżeli ma miejsce np. drugi przypadek, to oznaczając $\Psi(x) = \varphi_2(x)$ w przedziale $\langle x_0, \xi' \rangle$ i $\Psi(x) = \varphi(x)$ w przedziale $\langle \xi', x_1 \rangle$ otrzymujemy

(p. ust. 46, str. 58) rozwiązanie, łączące punkt P_0 z punktem Q , a więc Q jest osiągalny z P_0 , c. b. d. o.

51. Załóżmy teraz, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w dowolnym obszarze T . Udowodnimy następujące

Twierdzenie. Jeżeli $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są dwoma rozwiązaniami równania (1) przechodzącymi przez punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T i określonymi w pewnym przedziale $[a, b]$ zawierającym wewnątrz x_0 , to funkcja określona w tym przedziale wzorem

$$(2) \quad \Psi(x) = \text{Max}[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$$

jest także rozwiązaniem równania (1) przechodzącym przez punkt P_0 .

Dowód. Jeżeli dla danej wartości x jest $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, to w pewnym otoczeniu tego punktu jest oczywiście $\Psi(x) = \varphi_2(x)$, a więc

$$(3) \quad \Psi'(x) = \varphi_2'(x) = f[x, \varphi_2(x)] = f[x, \Psi(x)]$$

i jest analogicznie, gdy $\varphi_2(x) < \varphi_1(x)$.

Jeżeli natomiast dla danego x jest $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \Psi(x)$, to uwzględniając, że $\varphi_i(x)$, $i=1, 2$, są rozwiązaniami równania (1), jest dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dostatecznie małych wartości h

$$\left| \frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} - f[x, \varphi_1(x)] \right| = \left| \frac{\varphi_1(x+h) - \Psi(x)}{h} - f[x, \Psi(x)] \right| < \varepsilon,$$

stad zaś i z uwagi na to, że $\Psi(x+h) = \varphi_1(x+h)$ lub $\Psi(x+h) = \varphi_2(x+h)$, zachodzi nierówność

$$\left| \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} - f[x, \Psi(x)] \right| < \varepsilon,$$

co po przejściu do granicy z $h \rightarrow 0$ dowodzi równości (3).

Równość (3) zachodzi więc dla każdego x z przedziału $[a, b]$, c. b. d. o.

Rozwiązanie $y = G(x)$ równania (1) przechodzące przez punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T i określone w pewnym przedziale $[a, b]$ zawierającym wewnątrz punkt x_0 nazywamy *rozwiązaniem górnym* równania (1) w odniesieniu do punktu P_0 , jeżeli dla każdego rozwiązania $y = \varphi(x)$ wychodzącego z tego punktu zachodzi nierówność

$$(4) \quad \varphi(x) \leq G(x)$$

dla wszystkich wartości x , dla których oba rozwiązania $\varphi(x)$ i $G(x)$ są jednocześnie określone. Analogiczne rozwiązanie $y = g(x)$, dla którego w warunkach podanych w definicji rozwiązania górnego zachodzi nierówność

$$(5) \quad \varphi(x) \geq g(x),$$

nazywamy *rozwiązaniem dolnym* równania (1) w odniesieniu do punktu P_0 .

Uwagi. 1° Oczywiście jest, że w danym przedziale istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie górne i jedno rozwiązanie dolne.

2° W powyższych określeniach nie przesądzamy bynajmniej sprawy istnienia opisanych rozwiązań. Orzeka o tym dopiero następujące

Twierdzenie (o lokalnym istnieniu rozwiązania górnego i rozwiązania dolnego). *Przy poprzednich założeniach przez każdy punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T przechodzą rozwiązania górne i dolne, określone co najmniej w pewnym dostatecznie małym otoczeniu punktu x_0 .*

Dowód. Obierzmy liczby dodatnie a i b tak, aby prostokąt

$$(6) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

leżał wewnątrz T i niech M będzie kresem górnym bezwzględnej wartości funkcji $f(x, y)$ w tym prostokącie, δ zaś — liczbą $\text{Min}(a, b/M)$.

Na mocy końcowej uwagi ustępu 48, str. 65, wszystkie rozwiązania $y = \varphi(x)$ przechodzące przez P_0 istnieją dla $|x - x_0| \leq \delta$ i przebiegają w prostokącie (6). Oznaczmy, przy dowolnym, chwilowo ustalonym x , przez $G(x)$ kres górny, a przez $g(x)$ — kres dolny wartości $\varphi(x)$, gdy $\varphi(x)$ przebiega wszystkie rozwiązania przechodzące przez P_0 . Dla funkcji tak określonych w otoczeniu $|x - x_0| \leq \delta$ spełnione są oczywiście warunki (4) i (5), dotyczące rozwiązania górnego i dolnego. Wystarczy więc wykazać, że funkcje te są rozwiązaniami równania (1) przechodzącymi przez punkt P_0 .

W tym celu zauważmy, że z uwagi na jednostajną ciągłość funkcji $f(x, y)$ w prostokącie (6) istnieje dla każdego $\varepsilon > 0$ takie $\vartheta > 0$, że nierówności

$$|x'' - x'| < \vartheta, \quad |y'' - y'| < \vartheta$$

pociągają za sobą, dla każdego punktu (x', y') i (x'', y'') tego prostokąta, nierówność

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Tym samym dla każdego rozwiązania $\varphi(x)$ przechodzącego przez P_0 , rozważanego w otoczeniu $|x - x_0| \leq \delta$ i spełniającego tamże warunek Lipschitza ze stałą M , nierówność $|x_2 - x_1| < \gamma = \text{Min}(\vartheta, \vartheta/M)$ pociąga za sobą, wobec $|x_2 - x_1| < \vartheta/M$, nierówność $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \vartheta$, a następnie nierówność

$$(7) \quad |f[x_2, \varphi(x_2)] - f[x_1, \varphi(x_1)]| < \varepsilon.$$

Stąd wynika, że

$$(8) \quad \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = \varphi'(\xi) = f[\xi, \varphi(\xi)] = f[x_1, \varphi(x_1)] + \eta,$$

gdzie ξ spełnia warunek $|\xi - x_1| < |x_2 - x_1|$; η zaś, według (7) — warunek

$$(8') \quad |\eta| = |f[\xi, \varphi(\xi)] - f[x_1, \varphi(x_1)]| < \varepsilon,$$

co daje ostatecznie

$$(9) \quad \left| \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} - f[x_1, \varphi(x_1)] \right| < \varepsilon.$$

Weźmy teraz dwa jakiegokolwiek ciągi rozwiązań

$$\varphi_n^i(x), \quad i=1, 2, \quad n=1, 2, \dots$$

przechodzących przez P_0 i takich, że

$$\varphi_n^i(x_i) \rightarrow G(x_i), \quad i=1, 2$$

i utwórzmy zgodnie z twierdzeniem z ustępu 51, str. 69, rozwiązanie

$$\Psi_n(x) = \text{Max}[\varphi_n^1(x), \varphi_n^2(x)].$$

Z łatwością stwierdzamy, że $\Psi_n(x_i) \rightarrow G(x_i)$. Prócz tego na mocy (9) jest

$$\left| \frac{\Psi_n(x_2) - \Psi_n(x_1)}{x_2 - x_1} - f[x_1, \Psi_n(x_1)] \right| < \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy dostajemy nierówność

$$(10) \quad \left| \frac{G(x_2) - G(x_1)}{x_2 - x_1} - f[x_1, G(x_1)] \right| \leq \varepsilon$$

dla $|x_2 - x_1| < \gamma$.

Ponieważ punkty x_1 i x_2 były wybrane dowolnie z otoczenia $|x - x_0| \leq \delta$, więc, wobec (10), istnieje pochodna

$$G'(x_1) = f[x_1, G(x_1)]$$

w każdym punkcie x_1 tego przedziału, c. b. d. o. Dowód analogicznej równości dla funkcji $g(x)$ jest zupełnie podobny.

Aby podać odpowiednie twierdzenie o charakterze integralnym, udowodnimy najpierw pomocnicze

Twierdzenie. *Jeżeli funkcja $G(x)$ jest w przedziale zamkniętym $\langle a, b \rangle$ rozwiązaniem górnym w odniesieniu do punktu P_0 , $G^*(x)$ zaś jest w przedziale $\langle b, b+\lambda \rangle$ rozwiązaniem górnym w odniesieniu do punktu $P^* = (b, G(b))$, to funkcja $H(x)$, identyczna w odpowiednich przedziałach z $G(x)$ i $G^*(x)$, jest w całym przedziale $\langle a, b+\lambda \rangle$ rozwiązaniem górnym w odniesieniu do punktu P_0 .*

Dowód. Gdyby tak nie było, to istniałoby takie rozwiązanie $\Psi(x)$ wychodzące z P_0 , że dla pewnego x' z przedziału $\langle a, b+\lambda \rangle$ byłoby $\Psi(x') > H(x')$, gdzie $x' > b$, gdyż dla $x \leq b$ zachodziłoby $\Psi(x) \leq G(x) = H(x)$, w myśl założenia, że $G(x)$ jest rozwiązaniem górnym. Stąd funkcja

$$\Psi^*(x) = \text{Max}[\Psi(x), G^*(x)], \quad b \leq x \leq b+\lambda,$$

jest takim rozwiązaniem wychodzącym z P^* , że

$$\Psi^*(x') = \Psi(x') > H(x') = G^*(x'),$$

co jest sprzeczne z określeniem rozwiązania górnego $G^*(x)$.

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie (integralne o istnieniu rozwiązania górnego i dolnego).

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest w obszarze T ciągła, punkt zaś P_0 leży w obszarze T , to istnieje integralne rozwiązanie górne i dolne w odniesieniu do punktu P_0 , tzn. takie, które jest zarówno rozwiązaniem górnym jak rozwiązaniem integralnym w sensie określeń, podanych w ustępie 51, str. 69.

Dowód. Oznaczmy przez B kres górny końców b przedziałów $\langle x_0, b \rangle$, w których istnieje rozwiązanie górne w odniesieniu do punktu P_0 ; z określenia liczby B wynika wtedy łatwo, że istnieje pewne rozwiązanie górne $G(x)$ w odniesieniu do punktu P_0 zdefiniowane w całym przedziale $\langle x_0, B \rangle$. W dalszym ciągu konstruujemy analogiczne rozwiązanie w pewnym przedziale $\langle A, x_0 \rangle$, co natychmiast daje rozwiązanie górne $G(x)$ w całym przedziale $\langle A, B \rangle$. Jest to żądane rozwiązanie integralne i górne. Dowód, że jest ono istotnie integralne, tzn., że rozwiązanie $G(x)$ rozważane w $\langle A, B \rangle$ zmierza oboma swymi końcami do brzegu obszaru, przebiega tak samo, jak analogiczna część dowodu twierdzenia podanego w ustępie 47, str. 63, przy zastosowaniu poprzedniego twierdzenia pomocniczego. Podobnie utworzyć można odpowiednie integralne rozwiązanie dolne, przy zastosowaniu analogicznego twierdzenia pomocniczego dla rozwiązań dolnych.

§ 12. Zagadnienie jednoznaczności rozwiązania

równania $y' = f(x, y)$

52. Przykłady podane w ustępie 49 pouczają nas, że przy założeniu ciągłości funkcji $f(x, y)$ w obszarze T zadanie polegające na wyznaczeniu rozwiązania $y = \varphi(x)$ równania

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

spełniającego warunek początkowy

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0,$$

gdzie $P_0 = (x_0, y_0)$ jest danym punktem obszaru T , może mieć więcej niż jedną, a nawet nieskończenie wiele odpowiedzi.

Niech $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$ będą dwoma integralnymi rozwiązaniami równania (1) przechodzącymi przez punkt P_0 , I_1 i I_2 — przedziałami istnienia tych rozwiązań, a I — częścią wspólną przedziałów I_1 i I_2 . Wtedy, jak łatwo stwierdzić, zachodzić mogą następujące przypadki: 1° w przedziale I jest stale $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ i wtedy, wobec definicji rozwiązań integralnych, musi być $I_1 = I_2 = I$; 2° istnieje w przedziale I taki punkt x' , że $\varphi_1(x') \neq \varphi_2(x')$ i takie otoczenie $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$ punktu x_0 , leżące w I , że w otoczeniu tym jest stale $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$; 3° w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0 istnieją takie wartości x' , że $\varphi_1(x') \neq \varphi_2(x')$.

W pierwszym przypadku rozwiązania $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ nazywamy *integralnie identycznymi w odniesieniu do punktu P_0* , w przypadku drugim mówimy o rozwiązaniach *lokalnie identycznych w odniesieniu do punktu P_0* , ale integralnie różnych, w przypadku zaś trzecim — o rozwiązaniach *lokalnie* (a tym bardziej *integralnie*) *różnych*. Można zresztą posunąć tę klasyfikację jeszcze dalej wprowadzając pojęcie *jednostronnej identyczności lokalnej* lub *integralnej* (przy ograniczeniu się do wartości $x > x_0$, albo $x < x_0$).

W przykładzie 40 rozwiązanie $\varphi_1(x)$ w przedziale $(-\infty, \infty)$ i rozwiązanie $\Phi(x, \xi)$ są w odniesieniu do punktu $(0, 0)$ lewostronnie integralnie identyczne, prawostronnie zaś lokalnie identyczne, ale integralnie różne. Natomiast rozwiązanie $\varphi_2(x)$ jest prawostronnie lokalnie różne od rozwiązania $\varphi_1(x)$. W przykładzie 41 rozwiązania (ii) są lokalnie różne zarówno lewostronnie jak prawostronnie w odniesieniu do punktu $(0, 0)$.

Jeśli rozwiązania $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są prawostronnie identyczne, ale tylko lokalnie, to istnieje taka liczba d_0 będąca kresem górnym liczb x , dla których $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, że w przedziale $\langle x_0, x_0 + d_0 \rangle$ jest $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, natomiast w dowolnym prawostronnym otoczeniu liczby $x_0 + d_0$ istnieją takie wartości $x' > x_0 + d_0$, że $\varphi_1(x') \neq \varphi_2(x')$. W tym przypadku punkt $P = (x_0 + d_0, \varphi_1(x_0 + d_0))$ nazywamy *prawostronnym punktem rozgałęzienia danych rozwiązań*. Analogicznie określamy *lewostronny punkt rozgałęzienia*. Jeżeli $P \neq P_0$ jest prawostronnym punktem rozgałęzienia rozwiązań $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ przechodzących przez punkt P_0 , to rozwiązania te są oczywiście, w odniesieniu do punktu P_0 , lokalnie prawostronnie identyczne, natomiast w odniesieniu do punktu P oba te rozwiązania są lewostronnie lokalnie identyczne, a prawostronnie lokalnie różne.

Mówiąc w teorii równań różniczkowych o jednoznaczności rozwiązania równania (1), które by spełniało warunek (2), mamy na myśli jednoznaczność lokalną. Idzie więc o to, czy każde dwa rozwiązania przechodzące przez punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ są lokalnie identyczne, tzn., czy istnieje taka liczba $d > 0$, że każde dwa rozwiązania równania (1) $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ spełniające warunek (2) spełniają zarazem związek $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ w tej części przedziału $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$, w której są one oba określone. Jeżeli liczba taka istnieje, to mówimy, że odnośne *zadanie Cauchy'ego posiada w punkcie P_0 dokładnie jedno rozwiązanie* lub, że *przez dany punkt P_0 przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (1)* lub wreszcie, że *w punkcie P_0 ma miejsce (zachodzi) jednoznaczność rozwiązania*.

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że jeżeli wspomniana jednoznaczność rozwiązania ma miejsce w każdym punkcie obszaru, w którym określona jest prawa strona równania (1), to przez każdy punkt wspomnianego obszaru przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie integralne równania (1).

Zakładając dla dalszego ciągu, że funkcja $f(x, y)$ występująca w równaniu (1) jest ciągła w pewnym obszarze T , mamy najpierw następujące

Twierdzenie. Na to, żeby zadanie, polegające na wyznaczeniu rozwiązania równania (1) przechodzącego przez dany punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T miało dokładnie jedno rozwiązanie, potrzeba i wystarczy, aby rozwiązania górne i dolne w odniesieniu do punktu P_0 były lokalnie identyczne, tzn. identyczne w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Łatwy dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

53. Przechodząc do dalszego omówienia sprawy jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego zwracamy uwagę, że sprawa ta ma zasadnicze znaczenie w zastosowaniach matematyki do nauk przyrodniczych i innych, gdzie niejednokrotnie bardzo ważne jest rozstrzygnięcie pytania, czy zjawisko opisane odpowiednim równaniem różniczkowym lub równaniami różniczkowymi, może przebiegać przy danych warunkach początkowych w jeden tylko sposób, czy też na wiele sposobów, co równoważne jest właśnie pytaniu, czy wspomniane równania mają tylko jedno, czy też wiele różnych rozwiązań. Konieczne jest więc udowodnienie twierdzeń, podających przynajmniej warunki dostateczne jednoznaczności rozwiązań. Mamy obecnie pewną ilość tego rodzaju twierdzeń, grających rolę analogiczną do roli kryteriów zbieżności w teorii szeregów; twierdzenia te nie zapewniając warunków koniecznych, podają warunki dostateczne w postaci, nadającej się do zastosowań w praktyce. Przydatne praktycznie warunki konieczne i dostateczne nie są dotychczas znane.

Jedno kryterium jednoznaczności rozwiązania już poznaliśmy: warunkiem wystarczającym jednoznaczności lokalnej rozwiązania równania (1) w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ jest, aby funkcja $f(x, y)$ spełniała w pewnym otoczeniu tego punktu warunek Lipschitza względem zmiennej y (p. ust. 34 i uwaga 3^a, str. 65). Jako ogólniejsze od powyższego wymienimy

Kryterium Nagumo. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ spełnia w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T warunek

$$(3) \quad |x - x_0| |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|,$$

to zagadnienie Cauchy'ego dla równania (1) ma w punkcie P_0 dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Założmy, że zarówno funkcja $\varphi(x)$ jak i funkcja $\psi(x)$ są w przedziale $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$ rozwiązaniami równania (1) przechodzącymi przez punkt P_0 i przebiegającymi w tym otoczeniu tego punktu P_0 , w którym warunki kryterium Nagumo są spełnione. Wtedy jest oczywiście

$$(4) \quad |\psi(x) - \varphi(x)| = \left| \int_{x_0}^x \{f[s, \psi(s)] - f[s, \varphi(s)]\} ds \right|$$

oraz w myśl (3) dla $x \neq x_0$

$$(5) \quad |f[x, \psi(x)] - f[x, \varphi(x)]| \leq \left| \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{x - x_0} \right|.$$

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą

$$(6) \quad u(x) = \left| \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{x - x_0} \right|$$

określoną i ciągłą w przedziale $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$ z wyjątkiem wartości $x = x_0$. Gdy $x \rightarrow x_0$, to licznik i mianownik wyrażenia występującego po prawej stronie równości (6) dążą do zera; z uwagi jednak na to, że stosunek pochodnych licznika i mianownika, równy

$$\psi'(x) - \varphi'(x) = f[x, \psi(x)] - f[x, \varphi(x)],$$

zmierza do granicy $f[x_0, \psi(x_0)] - f[x_0, \varphi(x_0)] = f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0$, więc według twierdzenia de l'Hospitala $u(x) \rightarrow 0$ przy $x \rightarrow x_0$. Niech będzie jeszcze dodatkowo $u(0) = 0$; wówczas funkcja $u(x)$ jest ciągła w przedziale zamkniętym $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$. Tym samym istnieje w tym przedziale taka wartość ξ , dla której $u(x)$ osiąga swój kres górny K ; z (4), (5) i (6) wynika, że

$$(7) \quad |\psi(\xi) - \varphi(\xi)| \leq \left| \int_{x_0}^{\xi} u(s) ds \right| \leq K |\xi - x_0|.$$

Dowodząc niewprost przypuśćmy teraz, że rozwiązania $\Psi(x)$ i $\varphi(x)$ nie są identyczne, tzn., że $K > 0$. Wówczas, z uwagi na to, że $u(0) = 0$ i z uwagi na ciągłość funkcji $u(x)$, można wyznaczyć takie otoczenie punktu $x = x_0$, w którym jest $u(x) < K$, skąd wynika, że po prawej stronie (7) można przyjąć nierówność mocną.

Dzielną tę nierówność przez różnicę $\xi - x_0$ otrzymamy po lewej stronie liczbę $u(\xi)$, a więc liczbę K , przez co dochodzimy do nierówności mocnej, sprzecznej. Rozwiązania $\psi(x)$ i $\varphi(x)$ muszą więc być identyczne. Ponieważ w myśl uwagi 3^a, str. 65, można zawsze tak zwęzić przedział $\langle x_0 - d, x_0 + d \rangle$, aby każde rozwiązanie równania (1) istniejące w jego części przebiegało w tym otoczeniu płaskim punktu P_0 , w którym spełnione są warunki kryterium, więc w punkcie P_0 zadanie Cauchy'ego ma dokładnie jedno rozwiązanie, c. b. d. o.

54. Przy omawianiu innych kryteriów ograniczymy się, ze względu na ich małą doniosłość praktyczną, jedynie do zreferowania wyników pomijając dowody. Najogólniejsze będzie tutaj następujące

Kryterium Kamkego. Założenia:

1^o $\omega(x, z)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w zakresie zmiennych

$$0 < x < a, \quad z \geq 0;$$

2^o dla każdego $0 < a < a$ funkcja $\Psi(x) = 0$ jest jedyną funkcją określoną w przedziale $0 \leq x < a$, spełniającą warunki $\Psi(0) = 0$ i $\Psi'(0) = 0$ i czyniącą żadość wewnątrz przedziału $(0, a)$ równaniu różniczkowemu

$$z' = \omega(x, z);$$

3° funkcja $f(x, y)$ spełnia w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T nierówność

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \omega(|x - x_0|, |y_2 - y_1|).$$

Teza: istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (1) przechodzące przez punkt P_0 .

Kryterium Kamkego zawiera w sobie jako szczególny przypadek kryterium Nagumo i znacznie dawniejsze

Kryterium Osgooda. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ spełnia w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T nierówność

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \omega(|y_2 - y_1|),$$

gdzie $\omega(u)$ jest funkcją ciągłą, dodatnią dla $0 < u \leq u_0$, równą zeru dla $u = 0$ i taką, że całka niewłaściwa

$$(8) \quad \int_0^{u_0} \frac{du}{\omega(u)}$$

jest rozbieżna, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (1) przechodzące przez punkt P_0 .*

Omówione warunki są w szczególności spełnione dla funkcji $\omega(u)$ postaci Ku (co daje warunek Lipschitza) oraz dla funkcji

$$(9) \quad Ku \ln \frac{1}{u}, Ku \ln \frac{1}{u} \ln \ln \frac{1}{u}, \dots$$

Na zakończenie podamy jeszcze bardzo użyteczne w praktyce

Kryterium jednoznaczności. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ spełnia w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ warunek Lipschitza względem zmiennej x i jeżeli nadto $f(x_0, y_0) \neq 0$, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (1) spełniające warunek początkowy (2).

Rzeczywiście, w opisanym przypadku istnieje w pewnym przedziale $[y_0 - d, y_0 + d]$ dokładnie jedno rozwiązanie $x = \varphi(y)$ równania

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

spełniające warunek początkowy $\varphi(y_0) = x_0$. Z uwagi na to, że w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ spełniona jest nierówność $f(x, y) \neq 0$, w pewnym otoczeniu punktu y_0 zachodzi nierówność $\varphi'(y) \neq 0$. Funkcja $\varphi(y)$ jest więc ściśle monotoniczna i jednoznacznie odwracalna w tym otoczeniu. Łatwo stwierdzić, że funkcja postaci $y = \varphi(x)$, odwrotna do funkcji $x = \varphi(y)$, określona w odpowiednim otoczeniu punktu x_0 , będzie wówczas jedynym rozwiązaniem równania (1) spełniającym warunek (2).

*) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Lipsk 1930, str. 99-100 i 139-142.

U w a g a. Założenie $f(x_0, y_0) \neq 0$ jest w powyższym twierdzeniu istotne, gdyż np. funkcja $f(x, y) = |y|^{1/2}$ spełnia w otoczeniu punktu $(0, 0)$ pozostałe warunki powyższego twierdzenia, a jednoznaczność rozwiązania w tym punkcie nie ma miejsca (przykład 40).

ZADANIE 20. Dowieść, że równanie $dy/dx = |y|^a$, gdzie $0 < a < 1$, ma więcej niż jedno rozwiązanie $y = \varphi(x)$, spełniające warunek początkowy $\varphi(0) = 0$.

§ 13. Przybliżona metoda rachunkowa całkowania równania $y' = f(x, y)$ oparta na metodzie linii łamanych

55. Istnieje przybliżona metoda rachunkowa wyznaczania rozwiązań $y = \varphi(x)$ równania

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

spełniającego warunek początkowy

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0,$$

oparta na metodzie linii łamanych. Pozwala ona zarazem podać oszacowanie popełnionego błędu.

Aby otrzymać wynik możliwie prosty, zrobimy założenia mocniejsze, niż to w istocie rzeczy jest potrzebne, a mianowicie przyjmijemy, że funkcja $f(x, y)$ spełnia warunek Lipschitza ze względu na obie zmienne w każdej dziedzinie D położonej w danym obszarze T , w którym jest określona. Jak wynika z rozważań poprzednich, rozwiązanie $\varphi(x)$ spełniające warunek (2) jest wówczas jednoznacznie określone nie tylko w sensie lokalnym ale nawet w sensie integralnym.

Niech $\varphi(x)$ będzie takim określonym w otwartym przedziale (a^*, b^*) integralnym rozwiązaniem równania (1), przebiegającym od brzegu do brzegu i spełniającym warunek początkowy (2). Weźmy pod uwagę dowolny przedział $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$ zawarty w (a^*, b^*) i obejmujący liczbę x_0 i oznaczmy przez d większą z liczb $x_0 - \bar{x}_1$ oraz $\bar{x}_2 - x_0$. Obierzmy następnie tak małą liczbę dodatnią η , aby dziedzina określona nierównościami

$$(3) \quad \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2, \quad \varphi(x) - \eta \leq y \leq \varphi(x) + \eta$$

leżała w T (p. ust. 48, str. 64).

Oznaczmy przez M kres górny bezwzględnej wartości funkcji $f(x, y)$ w dziedzinie (3), a przez L taką stałą, aby nierówność

$$(4) \quad |f(x'', y'') - f(x', y')| < L(|x'' - x'| + |y'' - y'|)$$

zachodziła dla każdej pary punktów (x', y') , (x'', y'') dziedziny (3).

Weźmy pod uwagę podział przedziału $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$ na przedziały częściowe, określony przez ciąg punktów

$$(5) \quad \bar{x}_1 = x_{-m} < x_{-m+1} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \bar{x}_2$$

i utworzymy łamaną zwyczajną $\Psi(x)$ wychodzącą w obie strony z punktu (x_0, y_0) oraz odpowiadającą temu podziałowi. Zachodzi wówczas

Twierdzenie. Jeśli liczba τ , oznaczająca maksimum długości przedziałów częściowych wyznaczonych przez ciąg (5), spełnia nierówność

$$(6) \quad \tau < \frac{\eta}{2(1+M)(e^{L\Delta}-1)},$$

to opisana łamana $\Psi(x)$ istnieje w całym przedziale $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$ i spełnia w tym przedziale nierówność

$$(7) \quad |\Psi(x) - \varphi(x)| \leq \eta \frac{e^{L|x-x_0|}-1}{e^{L\Delta}-1} \leq \eta.$$

Dowód. Ograniczymy się do przedziału $\langle x_0, \bar{x}_2 \rangle$ i zastosujemy indukcję zupełną. Ponieważ w przedziale $\langle x_0, x_1 \rangle$ jest

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, \varphi(s)] ds = y_0 + f[\zeta_0, \varphi(\zeta_0)](x - x_0),$$

gdzie ζ_0 jest liczbą pośrednią z przedziału $\langle x_0, x_1 \rangle$, więc w przedziale tym zachodzi

$$\begin{aligned} |\Psi(x) - \varphi(x)| &= |f(x_0, y_0) - f[\zeta_0, \varphi(\zeta_0)]|(x - x_0) \leq \\ &\leq L[|\zeta_0 - x_0| + |\varphi(\zeta_0) - y_0|](x - x_0) \leq L[|\zeta_0 - x_0| + M(\zeta_0 - x_0)](x - x_0) \leq \\ &\leq L(1+M)\tau(x - x_0) \leq \frac{L\eta}{e^{L\Delta}-1}(x - x_0). \end{aligned}$$

Ale dla $x \geq x_0$ jest

$$L(x - x_0) \leq e^{L(x-x_0)} - 1,$$

wobec czego zachodzi w rozważanym przedziale nierówność (7).

Przypuśćmy, że nierówność ta jest słuszna dla przedziału $\langle x_0, x_p \rangle$. Z (7) wynika, że punkt $(x_p, \Psi(x_p))$ leży w dziedzinie (3), tak że łamaną $\Psi(x)$ można określić w przedziale $\langle x_p, x_{p+1} \rangle$ wzorem

$$\Psi(x) = \Psi(x_p) + f[x_p, \Psi(x_p)](x - x_p).$$

Ponieważ w przedziale tym jest ponadto

$$\varphi(x) = \varphi(x_p) + \int_{x_p}^x f[s, \varphi(s)] ds = \varphi(x_p) + f[\zeta_p, \varphi(\zeta_p)](x - x_p),$$

gdzie ζ_p jest liczbą należącą do przedziału $\langle x_p, x_{p+1} \rangle$, więc mamy nierówność

$$|\Psi(x) - \varphi(x)| \leq |\Psi(x_p) - \varphi(x_p)| + |f[x_p, \Psi(x_p)] - f[\zeta_p, \varphi(\zeta_p)]|(x - x_p),$$

a ponieważ punkt $(\zeta_p, \varphi(\zeta_p))$ leży w dziedzinie (3), podobnie jak punkt $(x_p, \Psi(x_p))$, więc zgodnie z (4) otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} |\Psi(x) - \varphi(x)| &\leq [1 + L(x - x_p)]|\Psi(x_p) - \varphi(x_p)| + \\ &+ L|\zeta_p - x_p|(x - x_p) + L(x - x_p)|\varphi(x_p) - \varphi(\zeta_p)|. \end{aligned}$$

Ale w myśl przypuszczenia jest

$$|\Psi(x_p) - \varphi(x_p)| \leq \eta \frac{e^{L(x_p-x_0)}-1}{e^{L\Delta}-1};$$

ponieważ $|\zeta_p - x_p| \leq \tau$ oraz $|\varphi(x_p) - \varphi(\zeta_p)| \leq M|\zeta_p - x_p| \leq M\tau$, więc

$$\begin{aligned} |\Psi(x) - \varphi(x)| &\leq \eta[1 + L(x - x_p)] \frac{e^{L(x_p-x_0)}-1}{e^{L\Delta}-1} + L(x - x_p) \frac{\eta}{(1+M)(e^{L\Delta}-1)} = \\ &= \frac{\eta}{e^{L\Delta}-1} \left\{ [1 + L(x - x_p)]e^{L(x_p-x_0)} - 1 - \frac{LM}{1+M}(x - x_p) \right\}. \end{aligned}$$

Wobec nierówności $1 + L(x - x_p) \leq e^{L(x-x_p)}$ otrzymujemy stąd natychmiast w przedziale $\langle x_p, x_{p+1} \rangle$ nierówność (7), co zgodnie z zasadą indukcji daje łącznie z poprzednim nierówność (7) w całym przedziale $\langle x_0, \bar{x}_2 \rangle$. Podobnie postępujemy w przedziale $\langle \bar{x}_1, x_0 \rangle$.

§ 14. Metoda granic Cauchy'ego

56. Rozważajmy znowu równanie

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

i szukajmy rozwiązania szczególnego $y = \varphi(x)$, spełniającego warunek

$$(2) \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ daje się rozwinąć w otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ na szereg potęgowy, tzn., że istnieją takie dwie liczby dodatnie r i r' oraz taki ciąg podwójny współczynników

$$(3) \quad A_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots,$$

że w dziedzinie określonej nierównościami

$$(4) \quad |x - x_0| \leq r, \quad |y - y_0| \leq r'$$

podwójny szereg potęgowy

$$(5) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu} (x - x_0)^\mu (y - y_0)^\nu$$

jest bezwzględnie zbieżny i przedstawia funkcję $f(x, y)$.

Jak wiadomo z rachunku różniczkowego, funkcja $f(x, y)$ ma wtedy w dziedzinie (4) ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów związane ze współczynnikami (3) wzorami

$$(6) \quad A_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu! \nu!} \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right)_{(x_0, y_0)}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie wskaźnik (x_0, y_0) oznacza, że idzie o wartość pochodnej w punkcie P_0 .

Przy uczynionym założeniu nasuwa się przypuszczenie, że równanie (1) ma rozwiązanie spełniające warunek (2) i dające się rozwinąć na szereg Taylora w punkcie x_0 . Można więc postawić pytanie, czy istnieje taka liczba $\varrho > 0$ i taki ciąg nieskończony współczynników

$$(7) \quad a_0, a_1, a_2, \dots,$$

że szereg potęgowy

$$(8) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

jest zbieżny dla każdej wartości x , spełniającej warunek

$$(9) \quad |x - x_0| < \varrho,$$

i że dla tych wartości x szereg ten spełnia równanie (1), a nadto czyni zadość warunkowi (2). Jest oczywiste, że o ile szereg taki istnieje, to

$$(10) \quad a_k = \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Przy takim postawieniu sprawy zadanie całkowania równania (1) z warunkiem początkowym (2) sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia stosownego ciągu współczynników (7) lub, co na jedno wychodzi, pochodnych $\varphi^{(k)}(x_0)$, co — jak zaraz zobaczymy — może być dokonane przez wykonanie działań elementarnych na współczynnikach (3), a następnie do stwierdzenia zbieżności szeregu (8) przy odpowiednio dobranym ϱ .

Pierwszym, który dowiódł, że szereg (8) jest zbieżny w pewnym otoczeniu wartości x_0 był Cauchy. Szacując wartości bezwzględne współczynników (7) zbudował on majorantę zbieżną dla szeregu (8), nazywając taką metodę dowodzenia *rachunkiem granic*; przez wyraz „granica” rozumiał on tu odpowiednie ograniczające wyrazy majoranty.

Zakładając, że funkcja $f(x, y)$ jest określona szeregiem (5), naturalne jest stanąć na stanowisku zmiennych zespolonych, tzn. założyć, że argumenty funkcji $f(x, y)$ i rozwiązania $\varphi(x)$ przebiegają odpowiednio wartości zespolone z otoczenia (4) i otoczenia (9). Można zresztą, jak to uczynił Lindelöf, dowieść zbieżności szeregu (8) także na gruncie zmiennej rzeczywistej, nie odwołując się do wiadomości z teorii funkcji zmiennej zespolonej*). Metoda granic, podobnie jak poprzednio poznane metody dowodu twierdzenia Cauchy'ego, jest jedną z ogólnych metod, za pomocą których rozwiązano wiele zagadnień analizy.

*) E. Lindelöf, *Acta Societatis Fennicae*, 21 (1896). Por. także cytowaną książkę Kamkego, str. 66-73.

57. Uproszczenie założeń. Aby skrócić pisownie, przyjmujemy, że $x_0 = y_0 = 0$. Nie zmniejszamy przez to ogólności rozważań, gdyż wprowadzając nowe zmienne ξ i η za pomocą wzorów

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta$$

i przyjmując

$$f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = F(\xi, \eta),$$

stwierdzamy natychmiast, że jeśli funkcja $\varphi(x)$ holomorficzna w kole (9) w płaszczyźnie zmiennej zespolonej x spełnia równanie (1) i warunek (2), to funkcja

$$\eta = \psi(\xi) = \varphi(x_0 + \xi) - y_0$$

jest holomorficzna w kole $|\xi| < \varrho$ i spełnia w płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ równanie

$$(11) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = F(\xi, \eta)$$

oraz warunek $\psi(0) = 0$, i odwrotnie.

Przy powyższym uproszczeniu przedstawienie (5) funkcji $f(x, y)$ i szukane rozwiązanie (8) wraz z warunkiem początkowym (2) przybierają postać

$$(12) \quad f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu},$$

$$(13) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \varphi(0) = a_0 = 0,$$

gdzie $|x| \leq r$ i $|y| \leq r'$, a argumenty x i y mogą przybierać wartości zarówno rzeczywiste, jak zespolone.

58. Część formalna dowodu Cauchy'ego. Przypuśćmy, że rozwiązanie postawionego zagadnienia istnieje i postaramy się wyznaczyć współczynniki a_k rozwinięcia (13). Zauważmy, że

$$(14) \quad \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$$

i że różniczkując kolejno, otrzymujemy:

$$\varphi''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(x),$$

$$\varphi'''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} [\varphi'(x)]^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi''(x),$$

$$\dots \dots \dots ;$$

pochodne cząstkowe $\partial^{\mu+\nu} f / \partial x^{\mu} \partial y^{\nu}$ mają być obliczane dla argumentów x i $y = \varphi(x)$.

W szczególności dla $x=0$ i $y=\varphi(0)=0$ otrzymujemy, uwzględniając (10), wzory na wartości kolejnych współczynników szeregu (13):

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi'(0) = f_{(0,0)}, \\ a_2 &= \frac{1}{2!} \varphi''(0) = \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(0,0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(0,0)} \varphi'(0) \right], \\ a_3 &= \frac{1}{3!} \varphi'''(0) = \\ &= \frac{1}{3!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(0,0)} + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)} \varphi'(0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(0,0)} [\varphi'(0)]^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(0,0)} \varphi''(0) \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

gdzie wskaźnik $(0,0)$ oznacza, że wartości funkcji i pochodnych cząstkowych są obliczone w punkcie $(0,0)$.

Pozwalają one, jak widać, wyrazić wartość a_k przez wartości funkcji $f(x,y)$ i jej pochodnych cząstkowych aż do rzędu $k-1$ włącznie, branych w punkcie $(0,0)$, w ogólnej formie

$$(15) \quad a_k = \Phi_k(A_{00}, A_{10}, A_{01}, A_{20}, \dots, A_{0,k-1}), \quad k=1, 2, \dots,$$

gdzie Φ_k jest, jak widać, wielomianem o współczynnikach dodatnich.

Wynikają stąd następujące wnioski:

1° wyznaczenie współczynników a_k szeregu (13) jest zawsze możliwe i są one określone wzorami (15);

2° współczynniki a_k są określone jednoznacznie, wskutek czego, jeśli w ogóle istnieje rozwiązanie holomorficzne równania (1), spełniające warunek początkowy (2), to jest ono jedyne.

Niech $G(x,y)$ będzie funkcją holomorficzną określoną przez szereg

$$(16) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu},$$

zbieżny co najmniej dla $|x| < r$ i $|y| < r'$ i będący majorantą dla szeregu (12), tzn. taki, że

$$(17) \quad |A_{\mu\nu}| \leq B_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots$$

Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe pomocnicze

$$(18) \quad \frac{dY}{dx} = G(x, Y)$$

i szukajmy rozwiązania holomorficznego

$$(19) \quad Y = \Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

tego równania, spełniającego warunek $\Psi(0)=0$. Powtarzając rozumo-

wanie, które doprowadziło nas do wyznaczenia współczynników a_k , otrzymamy dla współczynników b_k wartości

$$b_k = \Phi_k(B_{00}, B_{10}, B_{01}, B_{20}, \dots, B_{0,k-1}), \quad k=1, 2, \dots,$$

gdzie Φ_k jest tym samym wielomianem, który występuje we wzorze (15).

Ponieważ współczynniki wielomianu Φ_k są liczbami dodatnimi, więc z nierówności (17) wynika natychmiast, że

$$(20) \quad |a_k| \leq b_k \quad k=1, 2, \dots,$$

co oznacza, że szereg (19) jest majorantą szeregu (13). Ileżkroć więc okaże się, że szereg (19) jest zbieżny w pewnym kole o środku O i promieniu $\varrho > 0$, to i szereg (13) będzie w tym kole zbieżny, z czego wynika twierdzenie, które mamy udowodnić.

Z uwagi na to nasuwa się następująca metoda dowodu zbieżności szeregu (13): wyznaczyć funkcję $G(x,y)$ tak, aby z jednej strony szereg (16) był majorantą zbieżną szeregu (12), z drugiej zaś strony, aby równanie różniczkowe (18) miało rozwiązanie holomorficzne $\Psi(x)$, spełniające warunek $\Psi(0)=0$. Rozwinięcie tego rozwiązania na szereg potęgowy będzie majorantą zbieżną szeregu (13), którego zbieżność będzie tym samym udowodniona. Rozumowanie to stanowi właśnie ideę dowodu, którą zawdzięczamy Cauchy'emu.

59. Wyznaczenie majoranty i dowód zbieżności szeregu potęgowego (13). Opieramy się na znanej z teorii funkcji analitycznych nierówności, w myśl której

$$(21) \quad |A_{\mu\nu}| \leq \frac{M}{r^{\mu} r'^{\nu}}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots,$$

gdzie M jest kresem górnym funkcji $|f(x,y)|$ dla x i y przebiegających wartości zespolone spełniające nierówności $|x| \leq r$ i $|y| \leq r'$.

Stąd widać od razu, że szereg

$$(22) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M}{r^{\mu} r'^{\nu}} x^{\mu} y^{\nu} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right) \left(1 - \frac{y}{r'}\right)}$$

o współczynnikach podanych po prawej stronie nierówności (21), określa żadaną zbieżną majorantę szeregu (12) w obszarze $|x| < r$, $|y| < r'$.

Rozpatrując równanie różniczkowe

$$(23) \quad \frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right) \left(1 - \frac{Y}{r'}\right)},$$

*) P. E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II. quatrième éd., Paris 1924, str. 281.

które można rozwiązać stosując metodę rozdzielania zmiennych*), otrzymamy w przypadku $M \neq 0$ jako ^{*)}żądane rozwiązanie (19) funkcję

$$(24) \quad Y = \Psi(x) = r' - r' \sqrt{1 + \frac{2rM}{r'} \ln \left(1 - \frac{x}{r}\right)},$$

w której obieramy gałąź główną logarytmu i pierwiastka. Rozwiązanie to jest funkcją holomorficzną, dla tych wszystkich wartości $|x| < r$, dla których wyrażenie występujące pod pierwiastkiem jest różne od zera. Ponieważ wyrażenie to znika tylko dla wartości

$$(25) \quad x = r(1 - e^{-r'/2rM}) > 0,$$

a wartość ta jest mniejsza od r , więc promień zbieżności ϱ szeregu (19) jest równy liczbie (25).

Zatem szereg (13) o współczynnikach danych wzorami (15) będzie także zbieżny co najmniej w kole $|x| < \varrho$. Prócz tego widać, że dla $|x| < \varrho$ zachodzi nierówność

$$(26) \quad |\varphi(x)| < r'.$$

Istotnie, na podstawie uwag poprzednich, dla x spełniających wymienioną nierówność jest

$$|\varphi(x)| \leq \Psi(|x|) < \Psi(\varrho) = r'.$$

Ponieważ funkcja $\varphi(x)$ jest holomorficzna w kole $|x| < \varrho$, więc to samo dotyczy funkcji $\varphi'(x)$ oraz, wobec $\varrho < r$, (26) i holomorficzności funkcji (12) dla $|x| < r$, $|y| < r'$, funkcja złożona $f[x, \varphi(x)]$ jest także holomorficzna w kole $|x| < \varrho$; prócz tego, zgodnie z określeniem wyrażen (15), funkcje występujące po obu stronach (14) mają wraz ze wszystkimi pochodnymi tę samą wartość w punkcie $x=0$. Tym samym funkcje te są identyczne, co dowodzi, że szereg (13) jest rozwiązaniem równania (1). Dyskusja przypadku $M=0$ jest widoczna.

Ostatecznie więc, wracając do początkowych oznaczeń, otrzymujemy

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest holomorficzna w dziedzinie określonej nierównościami (4), to równanie różniczkowe (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie holomorficzne $\varphi(x)$, określone w pewnym otoczeniu $|x - x_0| < \varrho$ i spełniające warunek początkowy (2).

Z twierdzeń o jednoznaczności wynika ponadto, że $\varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem przechodzącym przez punkt (x_0, y_0) i istniejącym w opisanym otoczeniu, bo $f(x, y)$ mając ciągłą pochodną $f'_y(x, y)$ spełnia tym samym w dziedzinie (4) warunek Lipschitza, który zapewnia jednoznaczność rozwiązania.

*) Metoda ta będzie wyłożona w rozdziale III w sposób całkowicie niezależny od rozważań bieżących. Można zresztą nie opierając się na tych wynikach sprawdzić bezpośrednio, że funkcja (24) jest rozwiązaniem równania (23), spełniającym dany warunek początkowy.

§ 15. Równanie postaci $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

60. Niech dane będą w pewnym obszarze płaskim T dwie funkcje ciągłe $P(x, y)$ i $Q(x, y)$.

Równanie zapisane w formie

$$(1) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

będziemy rozumieli jako zagadnienie wyznaczenia takiej pary funkcji (lub klasy wszystkich takich par funkcji)

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

określonych i będących klasy C^1 w pewnym przedziale oraz spełniających w każdym jego punkcie t równość (1), w której dx i dy są różniczkami funkcji (2) względem parametru t i takich, że

$$(2') \quad x'^2(t) + y'^2(t) > 0.$$

Powinno zatem być w przedziale $[t_1, t_2]$ zmienności t tożsamościowo

$$(3) \quad P[x(t), y(t)]x'(t)dt + Q[x(t), y(t)]y'(t)dt = 0.$$

Każdy taki układ funkcji (2) będziemy nazywali *rozwiązaniem szczególnym* równania (1).

Powiadamy, że rozwiązanie (2) przechodzi przez dany punkt płaszczyzny $M_0 = (x_0, y_0)$ lub, że spełnia ono względem tego punktu warunek początkowy Cauchy'ego, jeżeli dla pewnej wartości $t=t_0$ w przedziale $[t_1, t_2]$ zmienności parametru t jest

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Rozwiązanie równania (1) postaci

$$(4) \quad x = \bar{x}(\bar{t}), \quad y = \bar{y}(\bar{t})$$

określone dla $\bar{t}$ z przedziału $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ uważamy za *identyczne z rozwiązaniem* (2), jeżeli istnieje taka funkcja ściśle monotoniczna

$$t = t(\bar{t}),$$

przekształcająca przedział $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ na $[t_1, t_2]$, że jest tożsamościowo

$$\bar{x}(\bar{t}) = x[t(\bar{t})], \quad \bar{y}(\bar{t}) = y[t(\bar{t})].$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że wprowadzone pojęcie identyczności rozwiązań jest zwrotne, symetryczne i przechodnie.

Równanie o postaci normalnej

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

przepisane w formie

$$(5') \quad dy - f(x, y)dx = 0$$

może być oczywiście uważane za równoważne z równaniem (5) z dodatkowym warunkiem, że w jego rozwiązaniach parametrem ma być po prostu zmienna x . Takie rozwiązania równania (1), w których jedna ze zmiennych x lub y jest zarazem parametrem nazywamy *rozwiązaniami wyrażnymi tego równania*. Można udowodnić następujące

Twierdzenie. Każde rozwiązanie równania (5') jest identyczne z pewnym rozwiązaniem wyrażnym tego równania.

Dowód. Biorąc dowolne rozwiązanie równania (5') w postaci (2) stwierdzamy na mocy równości $y'(t)dt - f[x(t), y(t)]x'(t)dt = 0$ oraz nierówności $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$, że musi być stale $x'(t) \neq 0$; istnieje więc funkcja odwrotna do funkcji $x = x(t)$ postaci $t = t(x)$, co pozwala wyrazić z kolei funkcję $y = y(t)$ jako funkcję $x = x(t)$ w formie $y = \varphi(x) = y[t(x)]$; przy tym $\varphi'(x) = y'(t)/x'(t)$ czyli $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$; funkcja $y = \varphi(x)$ jest więc łącznie z funkcją $x = x$ rozwiązaniem wyrażnym równania (5') identycznym, jak widać, z danym rozwiązaniem postaci (2), c. b. d. o.

Możemy więc uważać równania (5) i (5') za całkowicie równoważne.

Wynika stąd natychmiast, że jeśli w punkcie $M_0 = (x_0, y_0)$ jest

$$(6) \quad P(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{lub} \quad Q(x_0, y_0) \neq 0,$$

to w pewnym otoczeniu tego punktu można zastąpić równanie (1) co najmniej jednym równoważnym równaniem

$$(7) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

gdzie traktuje się raz x , raz zaś y jako niewiadomą funkcję drugiej z występujących zmiennych.

Punkty M_0 , w których równoważność równań (1) i (7) nie ma miejsca, a więc takie, że

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0,$$

nazywamy *punktami osobliwymi równania* (1).

Istnienie co najmniej jednego rozwiązania równania (1), przechodzącego przez dany punkt M_0 , jest dla punktów nieosobliwych zagwarantowane równoważnością równań (7) i (1) oraz dowodami istnienia rozwiązań dla równań w postaci normalnej.

Dla punktów osobliwych M_0 istnieje wprawdzie para funkcji stałych

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

spełniających równanie (1), ale ponieważ funkcje te nie spełniają warunku (2'), więc nie mogą być uważane za rozwiązanie równania, tak że może się zdarzyć, że przez punkt osobliwy nie przechodzi żadne rozwiązanie równania (1).

Wprowadzone w ust. 52, str. 73, pojęcie lokalnej jednoznaczności rozwiązania przenosimy teraz na równanie (1).

Przy danym dowolnym rozwiązaniu (2) to samo rozwiązanie rozważane w przedziale zawartym w przedziale pierwotnym $[t_1, t_2]$ i każde z nim identyczne nazywamy *częścią rozwiązania* (2).

Czytelnik sprawdzi z łatwością, że jeżeli dwa dane rozwiązania związane są relacją polegającą na tym, że jedno z nich jest częścią drugiego, to każde dwa rozwiązania odpowiednio identyczne z danymi związane są analogiczną relacją.

Prócz tego widać od razu, że jeżeli z dwóch rozwiązań wyraźnych

$$x = x, \quad y = \varphi_1(x), \quad x = x, \quad y = \varphi_2(x)$$

jedno jest częścią drugiego, to funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są tożsamościowo równe w tym przedziale, w którym są one obie określone oraz że równość rozwiązań $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ w tym przedziale pociąga za sobą, że oba są częściami trzeciego rozwiązania wyraźnego.

Powiadamy, że przez dany punkt $M_0 = (x_0, y_0)$ obszaru T przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (1), jeżeli istnieje takie otoczenie punktu M_0 , że dla każdego dwóch rozwiązań równania (1) przechodzących przez M_0 i przebiegających we wspomnianym otoczeniu istnieje trzecie rozwiązanie tego równania takie, że każde z danych rozwiązań jest jego częścią.

Można udowodnić następujące

Twierdzenie. Na to, aby w danym punkcie nieosobliwym $M_0 = (x_0, y_0)$ równania (1) zachodziła jednoznaczność rozwiązania równania (1) w sensie ostatnio podanym, potrzeba i wystarcza, aby w punkcie tym zachodziła jednoznaczność rozwiązania w sensie podanym w ustępie 52, str. 73 dla jednego z utworzonych wyżej równoważnych równań (7).

Dowód. Jednoznaczność rozwiązania w punkcie nieosobliwym w podanym przed chwilą sensie jest, jak widać od razu, równoważna jednoznaczności w tym samym sensie w odniesieniu tylko do rozwiązań wyraźnych, która z kolei, jak łatwo stwierdzić, równoważna jest jednoznaczności w sensie podanym w ustępie 52.

Wprowadzone wyżej uogólnienie pojęcia równania różniczkowego i jego rozwiązania mają m. in. tę zaletę, że nie wyróżniają żadnej ze zmiennych x i y . W równaniu (5) w postaci normalnej z góry jest przesądzane, że x jest zmienną niezależną, y zaś — szukaną funkcją tej zmiennej, podczas gdy w równaniu (1) można jako zmienną niezależną obrać x , y lub wreszcie t .

W praktyce mamy często do czynienia z przypadkiem następującym: dane jest równanie różniczkowe $y' = -P(x, y)/Q(x, y)$, gdzie funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłe w jakimś obszarze T , funkcja zaś $Q(x, y)$ znika dla pewnych punktów (x, y) zbioru T . Wtedy oczywiście równanie to traci w takich punktach sens, podczas gdy równanie (1) ma sens w całym zbiorze T , i w wielu przypadkach, ze względu na naturę

zagadnienia, które doprowadziło do danego równania różniczkowego, może się okazać bardzo celowe rozważać, zamiast tego równania, właśnie równanie (1). Trzeba jednak pamiętać, iż wówczas następuje istotne rozszerzenie zagadnienia, gdyż równanie (1) może np. mieć rozwiązanie postaci $x=\varphi(y)$, którego nie można sprowadzić do postaci $y=\varphi(x)$.

PRZYKŁAD 42. Rozszerzmy zagadnienie równania

$$(8) \quad y' = -\frac{x}{y}$$

i rozważajmy równanie

$$(8') \quad xdx + ydy = 0.$$

Z łatwością sprawdzamy, że rozwiązaniami równania (8) są funkcje

$$y = \pm \sqrt{C^2 - x^2}, \quad C > 0, \quad -C < x < C,$$

przedstawiające części górne i dolne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 = C^2$.

Okręgi te nie mogą być przedstawione w całości żadnym równaniem $y=\varphi(x)$, a więc nie mogą stanowić rozwiązań równania (8).

Przeciwnie, biorąc równanie (8') widzimy, że parametryczne przedstawienie tych okręgów w całym ich przebiegu, postaci

$$x = C \cos t, \quad y = C \sin t, \quad C > 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

jest rozwiązaniem równania (8').

61. Przy poprzednich założeniach *całką* równania (1) będziemy nazywali każdą taką funkcję dwóch zmiennych

$$U = U(x, y)$$

klasy C^1 w obszarze T , nie redukującą się w żadnym otoczeniu żadnego punktu tego obszaru do stałej, że dla każdego rozwiązania (2) równania (1) zachodzi tożsamościowo równość

$$(9) \quad U[x(t), y(t)] = C,$$

gdzie C jest pewną stałą odpowiadającą wybranemu rozwiązaniu.

Uwaga. Często będziemy oznaczali terminem „całka” nie samą funkcję $U(x, y)$, lecz równość (9).

PRZYKŁAD 43. Dane jest równanie

$$(10) \quad xy^2 dx - dy = 0$$

w obszarze T zmiennych x i y określonym dwiema nierównościami

$$-\infty < x < \infty, \quad y > 0.$$

Zakładając, że układ funkcji

$$(10') \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

jest dowolnym rozwiązaniem równania (10), otrzymujemy, podstawiając funkcje (10') do (10) i dzieląc przez $y^2(t)$,

$$x(t)x'(t)dt - \frac{1}{y^2(t)}y'(t)dt = 0.$$

Całkując dostajemy stąd równość

$$\frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{y(t)} = C,$$

która wskazuje, że funkcja

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{y}$$

jest całką równania (10).

Jeżeli funkcja U jest całką równania (1), to różniczkując tożsamość (9) otrzymujemy

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = 0,$$

co w zestawieniu z równaniem (1) daje równość

$$(11) \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} P(x, y) = 0,$$

zachodzącą w każdym punkcie (x, y) , przez który przechodzi jakieś rozwiązanie równania (1).

Jeżeli w szczególności obszar T , w którym jest określone równanie (1) nie zawiera punktów osobliwych, to, jak wykazaliśmy, przez każdy jego punkt przechodzi jakieś rozwiązanie i tym samym równanie (11) zachodzi tożsamościowo w obszarze T . Nazywamy je *równaniem o pochodnych cząstkowych przynależnym do równania (1)*.

Czytelnik zechce wykazać, że jeżeli jakaś funkcja $U = U(x, y)$ klasy C^1 w obszarze T bez punktów osobliwych spełnia w nim opisane równanie przynależne oraz nie redukuje się w żadnym otoczeniu żadnego punktu obszaru do stałej, to funkcja ta jest całką równania (1).

62. Załóżmy, że funkcja U jest całką równania (1) w obszarze T . Oznaczmy kres górny funkcji U w obszarze T przez C_1 , a dolny przez C_2 , przez $F(C)$ zaś jakąkolwiek taką funkcję klasy C^1 w przedziale $[C_1, C_2]$, odpowiednio zamkniętym lub otwartym, że $F'(C) \neq 0$.

Przy tych warunkach funkcja złożona

$$(12) \quad V = V(x, y) = F[U(x, y)]$$

jest również całką równania (1) w obszarze T .

Istotnie, funkcja ta jest klasy C^1 w T i wobec równości

$$U(x, y) = F^{-1}[V(x, y)]$$

nie redukuje się ona do stałej w żadnym kole zawartym w T .

Prócz tego, jak widać z (12), warunek (9) zachodzący dla funkcji U i dla dowolnego rozwiązania (2) równania (1) pociąga za sobą analogiczny warunek dla tegoż rozwiązania i funkcji V . Zatem V jest całką równania (1).

PRZYKŁAD 44. W przykładzie 43 widzieliśmy, że funkcja $x^2/2 + 1/y$ jest całką równania $xy^2 dx - dy = 0$. Wobec tego funkcje takie, jak np. $(x^2/2 + 1/y)^2$, $y/(x^2y + 2)$ itp. są również całkami tego równania.

Na zakończenie wprowadzimy jeszcze dla równania (1), przy początkowych założeniach, następujące pojęcie: układ funkcji

$$(13) \quad x = x(t, C), \quad y = y(t, C),$$

określonych i będących klasy C^1 w pewnym obszarze zmiennych t i C nazywamy *rozwiązaniem ogólnym równania* (1), jeżeli układ ten, traktowany przy dowolnej, chwilowo ustalonej wartości zmiennej C , jako układ funkcji zależnych tylko od jednej zmiennej t , przedstawia, przy wszystkich wartościach C , dokładnie wszystkie rozwiązania równania (1). Znaczy to, że dla każdego rozwiązania równania (1) istnieje taka dopuszczalna wartość C i taki dopuszczalny przedział zmienności t , że układ (13) przy ustalonym C jest w tym przedziale identyczny z rozważanym rozwiązaniem. Na odwrót, przy każdej chwilowo ustalonej dopuszczalnej wartości C i dopuszczalnym przedziale zmienności t , układ (13) jest pewnym rozwiązaniem równania (1). Termin „dopuszczalny” oznacza tu, że należy brać pod uwagę takie wartości C i takie odpowiednie przedziały zmienności t , dla których wyrażenia (13) nie tracą sensu.

ZADANIE 21. Znaleźć całki następujących równań różniczkowych:

$$3ydx + 2xdy = 0, \quad aydx + (x^2 + b)dy = 0, \quad dy - \sin^2 x dx = 0.$$

ROZDZIAŁ III

EFEKTYWNE ROZWIĄZYWANIE PEWNYCH TYPÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

§ 16. Równanie zupełne

63. Przez *efektywne rozwiązywanie*, czyli inaczej *całkowanie równania różniczkowego*, rozumiemy, zależnie od przykładu, znalezienie w postaci elementarnej bądź wszystkich jego rozwiązań np. w formie rozwiązania ogólnego, bądź całki tego równania, bądź wreszcie jakiegos rozwiązania szczególnego.

Efektywne rozwiązywanie równania różniczkowego jest zagadnieniem bardzo ważnym zarówno w matematyce, jak i mechanice, fizyce, astronomii, naukach przyrodniczych, technicznych i innych. Należy podkreślić, że wyznaczenie takiego rozwiązania na drodze elementarnej i wyrażenie go np. za pomocą funkcji elementarnych jest możliwe tylko w nielicznych przypadkach, natomiast w większości przypadków uciekać się trzeba do metod przybliżonych lub graficznych. Jeżeli całkowanie równania można sprowadzić do zadania, którym zajmuje się rachunek całkowy lub jakiś inny dział matematyki, np. elementarniejsze działy algebry, to zadanie uważa się z punktu widzenia teorii równań różniczkowych za efektywnie rozwiązane. W rozdziale obecnym zajmujemy się najważniejszymi typami tych równań różniczkowych, które mogą być efektywnie rozwiązane.

W napotykanym przykładach będziemy stosowali często metodę, polegającą na przeprowadzaniu czysto formalnych rachunków bez analizowania założeń, przy których są one wykonalne, oraz na późniejszym sprawdzeniu, w jakim stopniu otrzymane wyniki są kompletne i czynią zadość warunkom zagadnienia.

W wielu przykładach i zadaniach późniejsze sprawdzenie, analiza założeń i inne uzupełnienia pozostawione będą milcząco, jako ćwiczenie, czytelnikowi.

64. Wróćmy, przy założeniach sformułowanych w ust. 60, str. 85 do równania

$$(1) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$