

ROZDZIAŁ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

O RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH

§ 1. Przykłady i klasyfikacja równań różniczkowych

1. Równanie, w którym występują pochodne (przynajmniej jedna) niewiadomej funkcji, nazywamy *równaniem różniczkowym*.

PRZYKŁAD 1. Wyznaczyć funkcję $y=f(x)$ tak, aby było stałe

$$(1) \quad y' = y.$$

Sprawdzamy, że funkcja $y=e^x$ czyni zadość równaniu (1). Ogólniej, jeśli C jest dowolną liczbą rzeczywistą, to funkcja $y=Ce^x$ również spełnia warunek (1). Jak wynika z § 24 innych funkcji spełniających to równanie nie ma.

PRZYKŁAD 2. Wyznaczyć krzywe $y=f(x)$, dla których podnormalna jest wielkością stałą, równą p .

Ponieważ algebraiczna miara podnormalnej wynosi, jak wiadomo, yy' , więc należy wyznaczyć $y=f(x)$ tak, aby dla każdego x z jakiegoś przedziału było

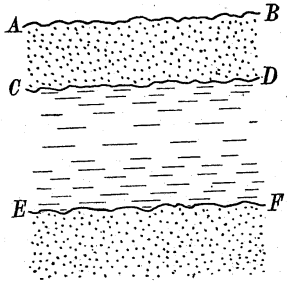
$$yy' = p.$$

PRZYKŁAD 3. Szybkość inwersji cukru trzcinowego. Cukier trzcinowy rozkłada się w roztworach wodnych pod wpływem katalizycznego działania kwasów. Jeżeli a oznacza ilość cukru w roztworze w momencie początkowym $t=0$, a x — ilość cukru, która uległa rozkładowi w czasie t , to prędkość rozkładu cukru dx/dt w momencie t jest na zasadzie prawa Guldberga wprost proporcjonalna do ilości cukru jeszcze nierozpuszczonego. Zachodzi tedy związek

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x),$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, który w pierwszym przybliżeniu może być uważany za stały.

Aby więc znaleźć zależność ilości zwinwertowanego cukru od czasu t , należy wyznaczyć funkcję $x(t)$ tak, aby spełnione było równanie (2), tzn. należy rozwiązać to równanie różniczkowe. Metodą rozwiązania zajmujemy się w § 17.



Rys. 1.

Kowa) jest uwidoczniiony na rys. 2 jako krzywa $C'G$ i symetryczna do niej krzywa $D'H$.

Obierzmy oś walca za oś y , linię EF — za oś x i oznaczmy przez P dowolną cząstkę (punkt) wody, a przez M i M' — punkty na EF i $D'H$, mające tę samą odciętą co P . Niechaj punkt M' ma współrzędne x i y i niech jeszcze N i N' będą punktami, które leżą symetrycznie do punktów M i M' względem osi y .

Doświadczenie uczy, że wartość skalarna v prędkości punktu P jest proporcjonalna do spadku dy/dx krzywej $D'H$ w punkcie M' , że więc

$$(3) \quad v = k \frac{dy}{dx},$$

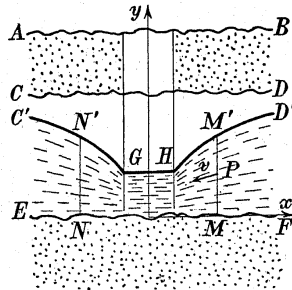
gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Z drugiej strony ilość Q wody, jaką wypompowujemy w jednostce czasu i o której zakładamy, że jest stała, równa jest ilości wody, jaka w tym czasie przepłynie przez poboczną walca o przekroju $MM'NN'$, to znaczy

$$(4) \quad Q = 2\pi xyv.$$

PRZYKŁAD 4. Kształt zwierciadła wody w otoczeniu studni*).

Na rys. 1 część zacieniowana między AB i CD oznacza warstwę ziemi, która pokrywa wodę gruntową, zawartą między CD i powierzchnią EF nieprzepuszczalnej warstwy ziemi.

Jeżeli wykopiey studnię kształtu walca obrotowego i przez pompowanie będziemy utrzymywali poziom wody w studni na stałej wysokości GH , to obniży się również poziom wody w otoczeniu studni, przybierając postać powierzchni obrotowej, której przekrój (tj. linia południ-



Rys. 2.

Z (3) i (4) wynika równanie różniczkowe

$$Q = 2k\pi xy \frac{dy}{dx},$$

z którego należy wyznaczyć funkcję $y=f(x)$, określającą linię południkową $C'G$.

W poprzednich przykładach równań różniczkowych oprócz niewiadomej funkcji występuje tylko jej pierwsza pochodna, a nie występują pochodne rzędów wyższych. Takie równania nazywamy *równaniami pierwszego rzędu*.

Najogólniejszą postacią równania pierwszego rzędu jest

$$(5) \quad F(x, y, y') = 0,$$

gdzie x jest zmienną niezależną, y — niewiadomą funkcją zmiennej x , y' — pochodną tej funkcji, F zaś jest daną funkcją trzech argumentów x , y i y' .

2. Oto przykłady równań, w których występują również pochodne wyższych rzędów funkcji niewiadomej.

PRZYKŁAD 5. Wyznaczyć krzywe płaskie o stałej krzywiznie.

Ograniczając się dla prostoty do krzywych dających się przedstawić równaniem $y=f(x)$ i uwzględniając znany wzór na krzywiznę stwierdzamy, że należy $y=f(x)$ wyznaczyć tak, aby

$$\frac{|y''|}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = a,$$

gdzie a oznacza stałą. Widać, że mamy tu do czynienia z równaniem, w którym występuje także druga pochodna funkcji niewiadomej.

PRZYKŁAD 6. Punkt materialny M porusza się po prostej w taki sposób, że jego przyspieszenie jest proporcjonalne do jego odległości od stałego punktu O prostej i ma zwrot przeciwny do zwrotu wektora OM . Wyznaczyć równanie ruchu tego punktu.

Traktując prostą jako oś liczbową o początku w punkcie O oraz oznaczając przez $x=x(t)$ współrzędną punktu M w chwili t , widzimy, że przyspieszenie d^2x/dt^2 jest proporcjonalne do odciętej x punktu ruchomego, a ponieważ ma ono opisany zwrot przeciwny, więc zachodzi równość postaci

$$(6) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x.$$

Współczynnik proporcjonalności oznaczyliśmy tu przez k^2 dla podkreślenia, że jest on dodatni.

Równanie (6) jest równaniem różniczkowym, w którym występuje druga pochodna funkcji niewiadomej $x=x(t)$. Można łatwo sprawdzić, że funkcje $x=\cos kt$ oraz $x=\sin kt$ i ogólniej $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$, gdzie

* W. Hort, *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs*, Berlin 1925, str. 65-66.

C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, spełniając równanie (6); określają one znany z mechaniki ruch harmoniczny.

PRZYKŁAD 7. Prostim przykładem równania różniczkowego, w którym występuje czwarta pochodna funkcji niewiadomej, jest równanie

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że równaniu temu czyni zadość każdy wielomian trzeciego stopnia

$$y = C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

gdzie $C_0, \dots, C_3$ są dowolnymi stałymi.

W podobny sposób tworzyć można równania różniczkowe, w których występują pochodne rozmaitych rzędów.

Ogólnie, *rzędem równania różniczkowego* nazywamy najwyższy z rzędów pochodnych funkcji niewiadomej, jakie występują w równaniu. Najogólniejszą postacią równania rzędu n będzie więc, analogicznie do (5), równanie

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gdzie x jest zmienną niezależną, y — funkcją niewiadomą, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ — kolejnymi pochodnymi tej funkcji, wreszcie F — daną funkcją argumentów $x, y, y', \dots, y^{(n)}$.

W przykładach 5 i 6 mamy równania drugiego rzędu, a w przykładzie 7 równanie czwartego rzędu.

3. W dotychczasowych przykładach wartości funkcji niewiadomej y zależały od jednej tylko zmiennej niezależnej. Równania różniczkowe tej postaci nazywamy *zwyczajnymi*.

Do równań różniczkowych zwyczajnych zaliczamy również takie równania, w których wartości funkcji niewiadomej zależą wprawdzie od kilku zmiennych niezależnych, ale w których figurują tylko pochodne względem jednej z tych zmiennych. Wówczas zmienne niezależne, względem których pochodne funkcji niewiadomej nie występują, noszą nazwę *parametrów równania*. Mówimy więc o *równaniu różniczkowym zależnym od jednego lub kilku parametrów*.

PRZYKŁAD 8. W równaniu (6) można uważać k za zmienną. Jest to parametr, którego interpretacja fizyczna jest widoczna: $k = 2\pi/T$, gdzie T oznacza okres jednego drgania.

PRZYKŁAD 9. W równaniu

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t, \lambda)$$

t i λ są zmiennymi niezależnymi, x zaś jest ich funkcją niewiadomą. W równaniu tym nie występuje różniczkowanie funkcji x względem λ , uważamy więc λ za parametr.

Funkcja niewiadoma będzie miała postać

$$x = \varphi(t, \lambda),$$

tak że właściwie na oznaczenie jej pochodnej względem zmiennej t powinno się używać zamiast symbolu dx/dt raczej symbolu $\partial x/\partial t$. Mimo to, dla lepszego uwypuklenia roli zmiennej t , przyjął się sposób pisania (7).

4. Jeżeli w równaniu różniczkowym funkcja niewiadoma zależy od kilku zmiennych niezależnych i jeżeli nadto w równaniu tym występują w sposób istotny pochodne funkcji niewiadomej względem co najmniej dwu z tych zmiennych niezależnych, wówczas mówimy, że jest to *równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych*.

Rząd takiego równania określa się podobnie jak rząd równania różniczkowego zwyczajnego.

PRZYKŁAD 10. Równanie

$$(8) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = mz,$$

gdzie m jest stałą, jest równaniem o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych niezależnych x i y .

Jeżeli przez $f(u)$ oznaczymy dowolną funkcję różniczkowalną zmiennej u , to — jak łatwo sprawdzić — funkcja

$$z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right)$$

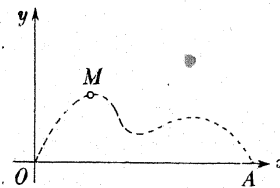
spełnia przy pewnych zastrzeżeniach równanie (8).

PRZYKŁAD 11. Rozepnijmy wzdłuż osi x jednorodną strunę sprężystą o długości l tak, aby przyjęła położenie równowagi OA . Utwierdźmy nieruchomo jej końce O i A . Odchylmy teraz strunę, nadając jej dowolne inne położenie, oznaczone na rys. 3 linią kreskową, i następnie puśćmy ją swobodnie. Struna będzie wykonywała pewne drgania, które należy wyznaczyć. Jeżeli

współrzędne dowolnego punktu M tej struny w chwili t oznaczymy przez x i y , wówczas, jak uczy teoria sprężystości, odchylenie y punktu M od położenia równowagi zależy jednocześnie od x i od t , przy czym zależność tę określa równanie

$$(9) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

gdzie a jest pewną stałą.



Rys. 3

Związek (9) jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Równanie to gra doniosłą rolę w fizyce; bywa ono nazywane *równaniem struny drgającej*.

Postać ogólna równania o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych niezależnych jest następująca:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

gdzie z oznacza funkcję niewiadomą zmiennych x i y , F zaś — daną funkcję pięciu argumentów x, y, z, p i q . W funkcji F zamiast p i q podstawiamy $\partial z/\partial x$ i $\partial z/\partial y$.

Jeżeli zmienne niezależne oznaczmy podobnie jak poprzednio przez $x_1, x_2, \dots, x_n$, a funkcję niewiadomą przez z , to najogólniejsze równanie o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu o n zmiennych niezależnych możemy napisać w postaci

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Analogicznie, ograniczając się do dwu zmiennych niezależnych x i y , możemy napisać ogólne równanie o pochodnych cząstkowych 2-go rzędu w postaci

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

ZADANIA. 1. Napisać równanie różniczkowe krzywych $y=y(x)$, dla których:

1° spadek jest proporcjonalny do kwadratu rzędnej;

2° długość odcinka normalnej, zawartego między punktem na krzywej i punktem przecięcia się tej normalnej z osią x , jest proporcjonalna do n -tej potęgi rzędnej punktu na krzywej;

3° długość łuku, liczona od punktu stałego M_0 do punktu bieżącego M o współrzędnych x i $y=y(x)$ równa jest danej funkcji $f(x, y)$.

2. Punkt materialny porusza się po osi x w taki sposób, że prędkość jest proporcjonalna do jego odległości od początku układu współrzędnych. Ułożyć równanie różniczkowe ruchu.

3. Kula wyrzucona z prędkością początkową c porusza się ruchem prostoliniowym w taki sposób, że jej energia kinetyczna jest proporcjonalna do długości przebytej drogi. Ułożyć równanie różniczkowe ruchu.

4. Dla gazów doskonałych prędkość zmiany objętości v w zależności od wzrostu ciśnienia p jest ujemna i przy stałej temperaturze proporcjonalna do kwadratu objętości. Wyrazić tę zależność w postaci równania różniczkowego i sprawdzić, że związek $pv = \text{const}$ (prawo Boyle'a-Mariotte'a) odpowiada tej zależności.

5. Promień krzywizny krzywej $y=f(x)$ jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu długości podstycznej. Podać równanie różniczkowe wyznaczające funkcję $f(x)$.

6. Punkt materialny o masie jednostkowej porusza się po osi x pod wpływem dwu sił działających wzdłuż tej osi, z których jedna ma natężenie proporcjonalne do odległości punktu ruchomego od początku układu, druga zaś jest periodyczna i wynosi $a \cos 2\pi t/T$. Ułożyć równanie różniczkowe ruchu.

7. Pole elektryczne jednorodne (tj. o stałym napięciu i kierunku), wytworzone między elektrodami zanurzonymi w elektrolicie, ma kierunek osi x . Jon dodatni o masie m porusza się, pozostając pod wpływem stałej siły pola i siły oporu proporcjonalnej do prędkości. Znaleźć równanie różniczkowe ruchu jonu.

§ 2. Układy równań różniczkowych

5. W zastosowaniach napotykamy też układy kilku równań różniczkowych o kilku funkcjach niewiadomych. Szczególnie w mechanice i fizyce występują często takie układy.

PRZYKŁAD 12. Równania

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y + 3z, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - 2z, \quad \frac{dz}{dt} = x - z$$

tworzą układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych o trzech funkcjach niewiadomych x, y i z zmiennej niezależnej t .

PRZYKŁAD 13. Część T przestrzeni wypełniona jest poruszającym się płynem. Niechaj cząsteczka płynu, zajmująca położenie (x, y, z) , ma prędkość, której składowe u, v i w niechaj będą znanymi funkcjami zmiennych x, y i z , niezależnymi jednak od czasu t

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

W tych warunkach możemy mówić o stacjonarnym polu wektorowym prędkości i postawić zadanie wyznaczenia w nim ruchu płynu. Ponieważ prędkości składowe są równe $dx/dt, dy/dt$ i dz/dt , więc zadanie sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z)$$

o trzech funkcjach niewiadomych x, y i z , zależnych od czasu t .

PRZYKŁAD 14. Oznaczmy przez $\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$ cosinusy kierunkowe dodatnich zwrotów stycznnej, normalnej głównej i binormalnej danej krzywej przestrzennej, przez s — długość łuku tej krzywej liczoną

od pewnego punktu na niej leżącego, wreszcie przez $1/R$ i $1/T$ — krzywiznę oraz skręt tej krzywej. Wówczas spełnione są znane z geometrii różniczkowej wzory Freneta

$$\begin{aligned}\frac{da}{ds} &= \frac{\dot{a}}{R}, & \frac{d\alpha}{ds} &= -\frac{\alpha}{R} - \frac{\ddot{\alpha}}{T}, & \frac{d\ddot{\alpha}}{ds} &= \frac{\dot{\alpha}}{T}, \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\dot{\beta}}{R}, & \frac{d\dot{\beta}}{ds} &= -\frac{\beta}{R} - \frac{\ddot{\beta}}{T}, & \frac{d\ddot{\beta}}{ds} &= \frac{\dot{\beta}}{T}, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\dot{\gamma}}{R}, & \frac{d\dot{\gamma}}{ds} &= -\frac{\gamma}{R} - \frac{\ddot{\gamma}}{T}, & \frac{d\ddot{\gamma}}{ds} &= \frac{\dot{\gamma}}{T}.\end{aligned}$$

W tzw. geometrii naturalnej badamy własności krzywej niezależnie od układu współrzędnych; wielkości $1/R$ i $1/T$ zwykle znane są jako funkcje długości łuku s , a szukane są cosinusy kierunkowe. Jak widać, mamy wtedy do czynienia z układem dziewięciu równań różniczkowych o dziewięciu funkcjach niewiadomych.

PRZYKŁAD 15. Dwa punkty (x_1, y_1, z_1) oraz (x_2, y_2, z_2) o masach m_1 i m_2 oddziałują na siebie według prawa powszechnego ciążenia. Napisać równania różniczkowe ruchu tych punktów.

Oznaczmy siły działające na dane punkty przez F_1 i F_2 . Mamy wówczas dla skalarnych wartości tych sił

$$|F_1| = |F_2| = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie k oznacza stałą powszechnego ciążenia, a r — odległość obu punktów materialnych. Odległość r wyraża się wzorem

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ponieważ siły działają wzdłuż prostej, łączącej oba punkty materialne, więc składowe tych sił wynoszą odpowiednio

$$|F_1| \cos(F_1, x), \quad |F_1| \cos(F_1, y), \quad |F_1| \cos(F_1, z)$$

oraz

$$|F_2| \cos(F_2, x), \quad |F_2| \cos(F_2, y), \quad |F_2| \cos(F_2, z).$$

Wreszcie, ponieważ mamy do czynienia z siłami przyciągającymi, więc

$$\begin{aligned}\cos(F_1, x) &= \frac{x_2 - x_1}{r}, & \cos(F_1, y) &= \frac{y_2 - y_1}{r}, & \cos(F_1, z) &= \frac{z_2 - z_1}{r}, \\ \cos(F_2, x) &= \frac{x_1 - x_2}{r}, & \cos(F_2, y) &= \frac{y_1 - y_2}{r}, & \cos(F_2, z) &= \frac{z_1 - z_2}{r}.\end{aligned}$$

Oznaczając czas przez t i stosując drugą zasadę dynamiki otrzymujemy na wyznaczenie ruchu danych punktów następujące równania:

$$(1) \quad \begin{aligned}m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3}, \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^3}, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{z_2 - z_1}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{z_1 - z_2}{r^3}.\end{aligned}$$

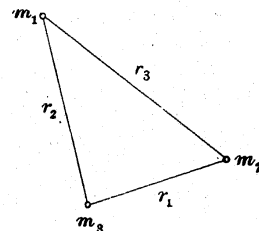
Stanowią one układ sześciu równań różniczkowych zwyczajnych o sześciu funkcjach niewiadomych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Układ ten gra zasadniczą rolę w astronomii, gdyż pozwala wyznaczyć ruch planety przyciąganej przez Słońce przy założeniu, że wpływy grawitacyjne innych ciał niebieskich mogą być pominięte. Zagadnienie rozwiązania równań (1) nosi nazwę zagadnienia dwóch ciał i może być w zupełności rozwiązane.

PRZYKŁAD 16. Jeżeli wpływy innych ciał niebieskich (czyli tzw. perturbacje) nie mogą być pominięte, to zagadnienie wyznaczenia ruchu planet bardzo się komplikuje. Przypuśćmy np., że idzie o trzy ciała niebieskie (np. Słońce, Ziemia i Księżyc), przyciągające się wzajemnie według prawa powszechnego ciążenia. Niechaj m_1, m_2 i m_3 oznaczają masy, a $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ i x_3, y_3, z_3 — współrzędne tych ciał (traktowanych oczywiście jako punkty materialne), a r_i niech będą ich odległościami (rys. 4):

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}, \\ (2) \quad r_2 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}, \\ r_3 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.\end{aligned}$$

Wówczas siła działająca na masę m_1 będzie wypadkową dwóch przyciągań, pochodzących od mas m_2 i m_3 . Składowa w kierunku osi x tej siły, w myśl rachunków przeprowadzonych w przykładzie 15, będzie

$$k m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_3^3} + k m_3 m_1 \frac{x_3 - x_1}{r_2^3},$$



Rys. 4

składowe zaś w kierunkach osi y i z otrzymamy, przedstawiając kołowo litery x, y i z . Podobnie otrzymamy składowe sił działających na masy m_2 i m_3 . Stosując więc znowu odnośną zasadę dynamiki, otrzymamy na wyznaczenie ruchu tego układu materialnego dziewięć równań, z których

wypisujemy pierwsze trzy

$$(3) \quad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_3^3} + k m_1 m_3 \frac{x_3 - x_1}{r_2^3}, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k m_2 m_3 \frac{x_3 - x_2}{r_1^3} + k m_2 m_1 \frac{x_1 - x_2}{r_3^3}, \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= k m_3 m_1 \frac{x_1 - x_3}{r_2^3} + k m_3 m_2 \frac{x_2 - x_3}{r_1^3}; \end{aligned}$$

dalsze sześć otrzymuje się przestawiając kołowo litery x, y i z . Tworzą one układ dziewięciu równań różniczkowych o dziewięciu funkcjach niewiadomych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$. Są to słynne równania ruchu trzech ciał, stanowiące przedmiot ogromnej ilości prac, nie wyczerpujących dotychczas całości zagadnienia.

PRZYKŁAD 17. Do układu równań różniczkowych zwyczajnych prowadzi też jedno z najważniejszych zagadnień dynamiki (którego dwa poprzednie przykłady są szczególnymi przypadkami), polegające na wyznaczeniu ruchu systemu materialnego przy założeniu, że siły działające na punkty systemu są znane. Niechaj do systemu materialnego należy n punktów $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Niechaj na punkt o masie m_i działa siła F_i o składowych X_i, Y_i i Z_i ($i=1, 2, \dots, n$). W najogólniejszym przypadku siłowe te będą zależeć: 1° od czasu t , 2° od położenia punktów systemu tzn. od współrzędnych x_i, y_i i z_i oraz 3° od prędkości punktów należących do systemu, a więc od pochodnych $dx_i/dt, dy_i/dt$ i dz_i/dt . Zatem każda z wielkości $X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_n, Y_n, Z_n$ jest, ogólnie biorąc, funkcją $6n+1$ zmiennych

$$t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dy_n}{dt}, \frac{dz_n}{dt}.$$

Stosując, jak w poprzednich przykładach, drugą zasadę dynamiki, otrzymamy $3n$ związków następujących:

$$(4) \quad \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i \left(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dy_n}{dt}, \frac{dz_n}{dt} \right), \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i \left(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dy_n}{dt}, \frac{dz_n}{dt} \right), \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i \left(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dy_n}{dt}, \frac{dz_n}{dt} \right), \end{aligned}$$

$i=1, 2, \dots, n.$

Tworzą one układ $3n$ równań różniczkowych dla wyznaczenia $3n$ współrzędnych punktów systemu w zależności od czasu t .

W podanych przykładach układów równań różniczkowych występowały pochodne funkcji niewiadomych tylko względem jednej zmien-

nej; dlatego układy opisanego typu nazywamy analogicznie jak w ustępie 3, str. 4, *układami równań różniczkowych zwyczajnych*. W odróżnieniu od nich układy, w których występują pochodne cząstkowe funkcji niewiadomych względem kilku zmiennych, nazywamy *układami równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych*.

PRZYKŁAD 18. Równania Cauchy-Riemanna postaci

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$

są układem dwóch równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych o dwóch funkcjach niewiadomych $U(x, y)$ i $V(x, y)$, zależnych od dwóch zmiennych x i y . Równania te podają warunek konieczny i dostateczny na to, aby funkcje ciągłe $U(x, y)$ i $V(x, y)$ były odpowiednio równe części rzeczywistej i urojonej pewnej funkcji holomorficznej*).

6. Niechaj α_k oznacza najwyższy rząd pochodnej funkcji y_k występujący w układzie równań różniczkowych zwyczajnych o n funkcjach niewiadomych $y_1, y_2, \dots, y_n$. Liczbę

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

nazywamy *rzędem układu równań różniczkowych*. Definicja ta dla $n=1$ pokrywa się z definicją rzędu równania przyjętą w ustępie 2, str. 4. Zgodnie z nią układy rozważane w przykładach 12-17 są odpowiednio rzędu 3, 3, 9, 12, 18 i $6n$.

Często stosuje się następujące

Twierdzenie. Każdy układ n równań różniczkowych zwyczajnych o n funkcjach niewiadomych można zastąpić równoważnym układem zawierającym pochodne tylko pierwszego rzędu; ilość równań nowego układu jest równa rządowi układu pierwotnego.

Dowód. Dla uproszczenia ograniczmy się do układu dwóch równań o dwóch funkcjach niewiadomych y i z

$$(5) \quad \begin{aligned} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', z'', \dots, z^{(q)}) &= 0, \\ G(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', z'', \dots, z^{(q)}) &= 0. \end{aligned}$$

Dla skrócenia oznaczyliśmy tutaj przez $y', y'', \dots, y^{(p)}$ kolejne pochodne funkcji y względem x i analogicznie dla funkcji z , przy czym to, że w obu równaniach są uwidocznione pochodne najwyższego rzędu obu funkcji niewiadomych, wcale nie zmniejsza stopnia ogólności naszych rozważań.

Układ (5) ma rząd $p+q$ i może być zastąpiony układem $p+q$ równań pierwszego rzędu w następujący sposób. Niech kolejno

* P. S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1948, str. 56-58.

$$\begin{aligned} y &= y_1, & y' &= y_2, & y'' &= y_3, & \dots, & y^{(p-1)} &= y_p, \\ z &= z_1, & z' &= z_2, & z'' &= z_3, & \dots, & z^{(q-1)} &= z_q. \end{aligned}$$

W tych oznaczeniach układ (5) jest równoważny układowi

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \quad \dots, \quad y'_{p-1} = y_p, \quad z'_1 = z_2, \quad z'_2 = z_3, \quad \dots, \quad z'_{q-1} = z_q,$$

$$F(x, y_1, \dots, y_p, y'_p, z_1, \dots, z_q, z'_q) = 0,$$

$$G(x, y_1, \dots, y_p, y'_p, z_1, \dots, z_q, z'_q) = 0,$$

który składa się z $p+q$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, c. b. d. o.

PRZYKŁAD 19. Układ 12-go rzędu, który napotkaliśmy w przykładzie 15, rozważając zagadnienie dwóch ciał, jest równoważny układowi 12 równań pierwszego rzędu, który zapiszemy, zgodnie z przyjętym w mechanice zwyczajem, oznaczając

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, & y_1 &= q_2, & z_1 &= q_3, & x_2 &= q_4, & y_2 &= q_5, & z_2 &= q_6, \\ \frac{dx_1}{dt} &= p_1, & \frac{dy_1}{dt} &= p_2, & \frac{dz_1}{dt} &= p_3, & \frac{dx_2}{dt} &= p_4, & \frac{dy_2}{dt} &= p_5, & \frac{dz_2}{dt} &= p_6, \end{aligned}$$

jak następuje:

$$\frac{dq_i}{dt} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= km_2 \frac{q_4 - q_1}{r^3}, & \frac{dp_2}{dt} &= km_2 \frac{q_5 - q_2}{r^3}, & \frac{dp_3}{dt} &= km_2 \frac{q_6 - q_3}{r^3}, \\ \frac{dp_4}{dt} &= km_1 \frac{q_1 - q_4}{r^3}, & \frac{dp_5}{dt} &= km_1 \frac{q_2 - q_5}{r^3}, & \frac{dp_6}{dt} &= km_1 \frac{q_3 - q_6}{r^3}, \end{aligned}$$

gdzie w nowych oznaczeniach r wyrażone jest wzorem

$$r = \sqrt{(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2}.$$

7. Jeżeli układ n równań różniczkowych zwyczajnych, z których każde jest pierwszego rzędu, o n funkcjach niewiadomych ma szczególnie prostą postać

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \quad \dots, \quad \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n),$$

w której nie występują po prawej stronie równań pochodne funkcji niewiadomych, to mówimy, że układ równań ma *postać normalną*.

Przy rozwiązywaniu wielu zagadnień korzystnie jest sprowadzić najpierw dany układ do układu równań pierwszego rzędu, następnie zaś przez rozwiązanie po względem pochodnych sprowadzić ten układ do postaci normalnej.

PRZYKŁAD 20. Układ

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} + 3(x+y) = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3y = 0$$

sprowadzamy do układu normalnego w ten sposób, że piszemy najpierw

$$x = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad y = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

po czym równania

$$\frac{dx_2}{dt} - \frac{dy_2}{dt} + 3(x_1 + y_1) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dx_2}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + 2x_2 - 3y_1 = 0$$

rozwiązujemy względem dx_2/dt i dy_2/dt . Otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{3}{2}x_1 - x_2, & \frac{dy_2}{dt} &= \frac{3}{2}x_1 - x_2 + 3y_1. \end{aligned}$$

ZADANIA. 8. Danych jest n punktów materialnych, z których każde dwa przyciągają się według prawa powszechnego ciążenia. Napisać równania różniczkowe ruchu tego układu punktów i wykazać, że jego środek masy porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym.

9. Ułożyć równania różniczkowe ruchu punktu materialnego, pozostającego pod działaniem siły skierowanej do stałego punktu $P = (a, b, c)$, której natężenie jest wprost proporcjonalne do odległości tego punktu materialnego od punktu P .

10. Jeżeli punkt materialny porusza się w polu potencjalnym, to równania ruchu są następujące:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

gdzie $V(x, y, z)$ jest tzw. funkcją sił czyli potencjałem pola. Wykazać, że przy odpowiednich założeniach suma energii kinetycznej i potencjalnej jest dla danego ruchu stała.

§ 3. Zbiory punktów, łuki, obszary na płaszczyźnie i w przestrzeni n -wymiarowej.

8. Sprecyzowanie zagadnień poruszonych w poprzednich paragrafach oraz sformułowanie związków z nimi twierdzeń wymaga przypomnienia w tym miejscu kilku znanych pojęć, których będziemy stale używali.

Niech będą dane dwa dowolne punkty $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$ płaszczyzny xy . Liczbę

$$r(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

będziemy nazywali *odległością punktów* P_1 i P_2 .

Niech teraz będą dane dwa dowolne zbiory (niepuste) Z_1 i Z_2 punktów płaszczyzny.

Odległością zbiorów Z_1 i Z_2 będziemy nazywali kres dolny liczb $r(P_1, P_2)$, gdy punkt P_1 przebiega zbiór Z_1 a punkt P_2 — zbiór Z_2 .

Następnie, niech $P_0 = (x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny xy , a ϱ — jakąś liczbą dodatnią. Zbiór wszystkich punktów $P = (x, y)$ spełniających warunek

$$r(P, P_0) < \varrho,$$

a więc leżących wewnątrz koła o środku P_0 i promieniu ϱ , będziemy nazywali *otoczeniem* o promieniu ϱ punktu P_0 i oznaczali przez

$$H(P_0, \varrho).$$

9. Niech Z będzie zbiorem punktów leżących na płaszczyźnie xy . Będziemy mówili, że zbiór Z jest *ograniczony*, jeżeli istnieje taka liczba $R > 0$, że wszystkie punkty tego zbioru należą do otoczenia $H(O, R)$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych; oznacza to, że z punktu O można zakreślić koło o tak dużym promieniu R , że wszystkie punkty zbioru Z znajdują się w tym kole.

Zbiór, który nie jest ograniczony, nazywamy *nieograniczonym*. Powiadamy, że P_0 jest *punktem skupienia* zbioru Z , jeżeli w każdym otoczeniu $H(P_0, \varrho)$ leży co najmniej jeden punkt zbioru Z różny od P_0 . Punkt skupienia zbioru Z może do niego należeć lub nie należeć. Jeżeli każdy punkt skupienia zbioru Z należy do zbioru Z , to zbiór ten nazywamy *zamkniętym*.

O ciągu nieskończonym punktów

$$(1) \quad P_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

mówimy, że jest *ograniczony*, jeżeli zbiór tych punktów jest ograniczony.

O ciągu (1) mówimy, że jest *zbieżny* do punktu $M = (\xi, \eta)$, jeżeli w każdym otoczeniu $H(M, \varrho)$ leżą prawie wszystkie punkty tego ciągu (tzn. wszystkie z wyjątkiem co najwyżej skończonej ich liczby) lub, co na jedno wychodzi, jeżeli odcięte x_i punktów P_i zmierzają do ξ , a rzędne y_i do η , lub wreszcie jeżeli odległości punktów P_i od punktu M dążą do zera przy i rosnącym nieograniczenie. Punkt M nazywamy *granicą* ciągu (1). Łatwo wykazać, że z każdego ciągu ograniczonego można wyjąć ciąg częściowy zbieżny.

Mówimy, że punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ jest *punktem wewnętrznym* zbioru Z , jeżeli istnieje takie $\varrho > 0$, że otoczenie $H(P_0, \varrho)$ należy także do Z . Jeżeli istnieje takie $\varrho > 0$, że żaden punkt otoczenia $H(P_0, \varrho)$ nie należy do Z , to mówimy, że punkt P_0 jest *punktem zewnętrznym* zbioru Z . Punkt P_0 , który nie jest ani punktem wewnętrznym, ani też punktem zewnętrznym zbioru Z , nazywamy *punktem granicznym* albo *brzegowym* tego zbioru.

Punkt brzegowy może do zbioru Z należeć lub nie. Zbiór wszystkich punktów granicznych (brzegowych) zbioru Z nazywamy *ograniczeniem* lub *brzegiem* tego zbioru.

Zbiór, którego wszystkie punkty są jego punktami wewnętrznymi, nazywamy *otwartym*. Przykładem takiego zbioru jest np. zbiór złożony z punktów położonych wewnątrz koła o środku $(-1, 0)$ i promieniu 1 oraz z punktów położonych wewnątrz koła o środku $(1, 0)$ i tym samym promieniu.

10. Będziemy używali następującego znakowania dla oznaczania przedziałów:

$$\begin{array}{ll} \langle a, b \rangle & \text{— przedział zamknięty} \quad a \leq x \leq b, \\ (a, b) & \text{,, otwarty} \quad a < x < b, \\ \langle a, b) & \text{,,} \quad a \leq x < b, \\ (a, b] & \text{,,} \quad a < x \leq b. \end{array}$$

W przypadku, gdy występujący przedział będzie którymkolwiek z czterech podanych, (a więc nie będzie miało znaczenia, czy zawiera swe końce), będziemy go oznaczali przez

$$[a, b]$$

i nazywali *przedziałem dowolnym* lub krótko *przedziałem*.

Jeżeli dla danego zbioru punktów Z istnieje taka para funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ ciągłych w jakimś przedziale $[a, b]$, że równania

$$(2) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

ustalają wzajemnie jednoznaczność między punktami zbioru Z a wartościami zmiennej w przedziale $[a, b]$, to zbiór Z nazywamy *łukiem zwykłym* (otwartym albo zamkniętym jedno- lub obustronnie, zależnie od charakteru przedziału $[a, b]$).

Punkty A i B odpowiadające wartościom a i b parametru nazywamy w przypadku przedziału jednostronnie lub obustronnie zamkniętego *końcami* opisanego łuku i mówimy, że *łuk* ten łączy punkty A i B . Równania (2) nazywamy *równaniami parametrycznymi łuku*, zmienną zaś pomocniczą t — *parametrem*. Pojęcie końców łuku nie zależy, jak można wykazać, od równań parametrycznych łuku. Jeżeli w definicji łuku zwykłego, zachowując odpowiednio wszystkie inne warunki, przyjmujemy, że wartościom a i b odpowiada ten sam punkt zbioru Z , to otrzymamy tzw. *krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych*.

Mówimy, że *łuk* Z *przechodzi przez punkt* $P_0 = (x_0, y_0)$, jeżeli punkt P_0 należy do tego łuku.

Mówimy, że *łuk* Z *przebiega w zbiorze* Z , jeżeli każdy punkt łuku Z należy do Z .

Niech M i N będą dwoma dowolnymi punktami płaszczyzny, ε zaś — dowolną liczbę dodatnią. Ciąg skończony punktów

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

nazywamy ε -łańcuchem łączącym punkty M i N , jeżeli $P_0 = M$ i $P_n = N$ oraz jeżeli odległość każdego dwu kolejnych punktów tego ciągu nie przekracza liczby ε .

Dwa zbiory Z_1 i Z_2 nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli nie mają one punktów wspólnych.

Dany zbiór Z nazywamy *spójnym*, jeżeli nie składa się on z takich dwóch zbiorów rozłącznych i niepustych, że żaden z nich nie zawiera punktów skupienia drugiego.

Zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem*, zbiór zaś ograniczony, zamknięty i spójny — *kontinuum*.

Na to, żeby dany zbiór otwarty Z był obszarem, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego dwóch jego punktów istniał łuk L łączący te punkty i przebiegający w Z .

Na to, żeby zbiór zamknięty i ograniczony Z był kontinuum, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego dwóch jego punktów i dla każdego $\varepsilon > 0$ istniał ε -łańcuch łączący te punkty i złożony z punktów zbioru Z^* .

Zbiór Z będziemy nazywali *obszarem zamkniętym* albo *dziedzina*, jeżeli: 1° jest zamknięty; 2° zawiera punkty wewnętrzne; 3° każdy jego punkt graniczny jest punktem skupienia jego punktów wewnętrznych; 4° zbiór jego punktów wewnętrznych jest spójny.

Zależnie od tego, czy ograniczenie danego obszaru lub dziedziny składa się z jednego, dwóch itd. lub też nieskończenie wielu zbiorów wzajemnie rozłącznych i spójnych, nazywamy ten obszar lub dziedzinę *jednospójną*, *dwuspójną* itd. lub też *nieskończenie wielospójną*; jeżeli obszar lub dziedzina nie są ograniczone podczas gdy ich brzeg jest ograniczony, to należy doliczać jako jeden z wymienionych zbiorów rozłącznych i spójnych punkt ∞ .

Na przykład tarcza koła oraz prostokąt określony nierównościami

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad \text{gdzie} \quad a_1 < a_2 \text{ i } b_1 < b_2,$$

są obszarami albo dziedzinami jednospójnymi, natomiast zbiór punktów (x, y) pierścienia kołowego określony warunkami

$$R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2, \quad \text{gdzie} \quad R_1 < R_2,$$

jest przykładem dziedziny dwuspójnej.

11. Rozważmy teraz przestrzeń n -wymiarową, złożoną z punktów postaci $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdzie x_k są dowolnymi liczbami ($k = 1, 2, \dots, n$).

Odległością punktów $P_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ i $P_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ nazywać będziemy liczbę

$$r(P_1, P_2) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})^2}.$$

Jeżeli punkt P_0 jest ustalony i ϱ oznacza liczbę dodatnią, to zbiór punktów, spełniających warunek $r(P_0, P) < \varrho$ nazywamy *wnętrzem hipersfery o środku P_0 i promieniu ϱ* lub, analogicznie do poprzedniego, *otoczeniem punktu P_0 o promieniu ϱ* ; oznaczamy je przez $H(P_0, \varrho)$.

Łukiem pojedynczym w przestrzeni n -wymiarowej nazywamy zbiór L , dla którego istnieje układ n takich funkcji $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, ciągłych w pewnym przedziale $[a, b]$, że związeki

$$(3) \quad x_k = \varphi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ustalają wzajemnie jednoznaczność odpowiedniości między punktami zbioru L i wartościami zmiennej t przedziału $[a, b]$.

Pojęcia i ich własności wymienione w ustępach 8-10, str. 13-16, dla przypadku płaszczyzny przenoszą się w sposób całkowicie analogiczny na przestrzeń n -wymiarową.

12. Jeśli liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nie są wszystkie jednocześnie równe zero, μ zaś jest liczbą dowolną, to zbiór punktów $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ przestrzeni n -wymiarowej, dla których spełniony jest warunek

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \mu = 0$$

nazywamy *hiperpłaszczyzną*. Hiperpłaszczyznę o równaniu

$$x_k + \mu = 0,$$

gdzie k jest którąś z liczb $1, 2, \dots, n$, nazywamy *prostopadłą do osi x_k* .

13. Zbiór Z nazywa się *jednolistny względem osi x_k* , jeśli każda hiperpłaszczyzna prostopadła do osi x_k ma ze zbiorem Z co najwyżej jeden punkt wspólny.

Niech łuk L , określony równaniami (3) w dowolnym przedziale $[a, b]$ parametru t będzie jednolistny względem osi x_1 . Nie istnieje wtedy w $[a, b]$ taka para wartości $t' \neq t''$, żeby $\varphi_1(t') = \varphi_1(t'')$, skąd wobec ciągłości wynika ściśle monotoniczność funkcji $\varphi_1(t)$. Niech m i M będą odpowiednio kresem dolnym i kresem górnym tej funkcji w $[a, b]$. Istnieje wtedy funkcja określona w przedziale $[m, M]$

$$t = u(x_1)$$

odwrotna do funkcji $x_1 = \varphi_1(t)$, ciągła i ściśle monotoniczna. Przyjmując, że

$$\varphi_i[u(x_1)] = g_i(x_1), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

*) P. S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1948, str. 11-12 i 26-29.

widzimy, że zbiór punktów $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ przedstawionych równaniami

$$(4) \quad x_i = g_i(x_1), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

dla zmiennej x_1 z przedziału $[m, M]$ jest identyczny ze zbiorem $\mathcal{L}$ i równania (4) ustalają wzajemnie jednoznaczność odpowiednio między punktami łuku $\mathcal{L}$, a wartościami zmiennej x_1 z przedziału $[m, M]$. Możemy więc łuk $\mathcal{L}$ przedstawiać także równaniami (4), co w wielu przypadkach jest o tyle korzystne, że jest tu o jedno równanie mniej. Prawdziwe jest więc następujące

Twierdzenie. Jeżeli dany łuk $\mathcal{L}$ jest jednolisty względem osi x_k , to istnieje przedział $[m, M]$ oraz $n-1$ funkcji

$$g_1(x_k), \dots, g_{k-1}(x_k), g_{k+1}(x_k), \dots, g_n(x_k)$$

określonych i ciągłych w tym przedziale i takich, że równania

$$(5) \quad x_i = g_i(x_k), \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

ustalają wzajemnie jednoznaczność odpowiednio między punktami łuku $\mathcal{L}$ a wartościami zmiennej x_k z przedziału $[m, M]$.

Równania (5) nazywamy wtedy zwyczajnym lub wyraźnym przedstawieniem łuku $\mathcal{L}$ względem osi x_k .

Jeżeli $n=2$, to łuk $\mathcal{L}$ jest jednolisty względem osi x wtedy i tylko wtedy, gdy da się on przedstawić równaniem $y=g(x)$; podobnie w przestrzeni trójwymiarowej punktów $P=(x, y, z)$, jeżeli da się on przedstawić równaniami

$$y = g(x), \quad z = h(x).$$

§ 4. Ogólne uwagi o równaniach różniczkowych zwyczajnych

14. Wprowadzimy pewną nową terminologię. Będziemy mówili, że funkcja $f(x)$ jest klasy C w jakimś przedziale, jeśli jest ona w tym przedziale ciągła. Jeżeli funkcja ta ma w nim pochodne ciągłe aż do rzędu m włącznie, to mówimy, że jest ona w tym przedziale klasy C^m . Wreszcie, jeżeli $f(x)$ ma w przedziale pochodne wszystkich rzędów (z konieczności ciągłe), to mówimy, że $f(x)$ jest w tym przedziale klasy C^∞ .

Definicje powyższe rozszerzamy też na funkcje wielu zmiennych: należy tylko wyraz „przedział” zastąpić wyrazem „obszar” lub „dziedzina”, wyraz zaś „pochodna” — wyrazami „pochodne cząstkowe”.

O łuku $\mathcal{L}$ położonym, ogólnie biorąc, w przestrzeni n -wymiarowej, albo o krzywej zamkniętej bez punktów wielokrotnych, będziemy mówili, że są one regularne klasy C^m , jeśli istnieje takie ich przedstawienie parametryczne

$$(1) \quad x_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

w którym funkcje $\varphi_i(t)$ w przedziale zmienności parametru są klasy C^m i jeżeli ponadto jest stale

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(t) > 0.$$

Łuk regularny klasy C^1 nazywamy krótko *regularnym*.

Jeżeli $f(x)$ jest w pewnym przedziale klasy C^1 , to równanie $y=f(x)$ przedstawia łuk regularny na płaszczyźnie. Ogólnie, w przestrzeni n -wymiarowej równania

$$x_i = f_i(x_k), \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

przedstawiają łuk regularny, jednolisty względem osi x_k , pod warunkiem, że funkcje f_i są klasy C^1 w przedziale zmienności argumentu x_k .

Zakładamy, że równania (1) przedstawiają łuk regularny, gdy t zmienia się w przedziale I . Niech t_0 należy do I . Wtedy przynajmniej jedna z liczb $\varphi'_i(t_0)$ jest różna od zera. Przyjmując, że np. $\varphi'_k(t_0) \neq 0$, możemy znaleźć taki przedział I_0 obejmujący liczbę t_0 , że jest w nim stale $\varphi'_k(t) \neq 0$, wskutek czego funkcja $\varphi_k(t)$ jest ściśle monotoniczna w I_0 i tym samym (por. ust. 13, str. 18), ta część łuku, która odpowiada przedziałowi I_0 , jest jednolista względem osi x_k . Opisaną własność wyrażamy mówiąc, że łuk regularny jest w każdym punkcie lokalnie jednolisty względem co najmniej jednej z osi układu.

15. Rozważmy teraz równanie różniczkowe zwyczajne n -tego rzędu

$$(2) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gdzie F jest funkcją określoną w jakimś obszarze przestrzeni zmiennych $x, y, y', \dots, y^{(n)}$.

Jeżeli funkcja

$$(2') \quad y = \varphi(x)$$

jest klasy C^n w pewnym przedziale $[a, b]$ i jeżeli nadto w tym przedziale czyni ona zadość równaniu (2), tzn., jeśli zachodzi identycznie równość

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = 0,$$

to mówimy, że funkcja ta jest rozwiązaniem szczególnym, albo krócej, rozwiązaniem równania (2).

Niektórzy autorowie używają też zamiast terminu „rozwiązanie” terminu „całka szczególna”, czego jednak będziemy unikali, rezerwując termin „całka” dla innych celów.

Uogólnimy jeszcze przyjętą definicję na przypadek układu równań różniczkowych zwyczajnych, ograniczmy się jednak do układu o pochodnych pierwszego rzędu, do którego każdy układ może być sprowadzony.

Rozwiązaniem (szczególnym) układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$(3) \quad F_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

nazywamy każdy układ funkcji

$$(3') \quad y_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

które są klasy C^1 w pewnym przedziale $[a, b]$ i nadto spełniają w tym przedziale równania (3), tzn., dla których zachodzą tożsamości

$$F_i[x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \varphi_1'(x), \dots, \varphi_n'(x)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

W ujęciu geometrycznym rozwiązania (2') i (3') są przedstawieniami pewnych łuków w przestrzeni dwu- lub $(n+1)$ -wymiarowej. Łuki te nazywamy *łukami całkowymi* równania (2) lub układu równań (3). Nazwy te będziemy stosowali często także do samych rozwiązań (2') i (3').

PRZYKŁAD 21. Nawiązując do równania $y' = y$, rozpatrywanego w przykładzie 1 spostrzegamy, że każda z funkcji $e^x, 2e^x, -e^x$ itd. jest rozwiązaniem (szczególnym) tego równania.

16. Rozpatrzmy bliżej równanie różniczkowe pierwszego rzędu typu (2)

$$(4) \quad F(x, y, y') = 0.$$

Nasuują się natychmiast następujące pytania:

1° czy równanie to ma zawsze jakieś rozwiązania?

2° jeżeli rozwiązania takie istnieją, to jaka jest ich ilość?

3° jeżeli rozwiązań tych jest więcej niż jedno, to jakie są dodatkowe warunki, któreby określały pewne rozwiązanie w sposób jednoznaczny, tzn. wyróżniały je spośród innych?

4° jak przedstawić rozwiązania w formie możliwie elementarnej, nadającej się do zastosowań?

17. Na pytanie 1° możemy od razu odpowiedzieć przecząco, jak wskazuje następujący

PRZYKŁAD 22. Rozpatrzmy równanie

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Jest jasne, że w zakresie liczb rzeczywistych równanie to nie ma rozwiązania. Jeśli natomiast dopuścimy zmienne zespolone, to spostrzemy od razu, że funkcja $y = ix$ jest rozwiązaniem naszego równania.

Ale i w zakresie zmiennych zespolonych równanie różniczkowe może nie mieć żadnego rozwiązania, jak tego dowodzi

PRZYKŁAD 23. Rozpatrzmy równanie

$$e^{\frac{dy}{dx}} = 0.$$

Ponieważ funkcja e^z nie ma miejsc zerowych nawet w zakresie zespolonym, więc równanie to nie może mieć rozwiązania.

Przypatrując się bliżej obu powyższym przykładom spostrzegamy, że przyczyną nierozwiązalności obu ostatnich równań leży — że się tak wyrazimy — poza teorią równań różniczkowych. W przykładzie 22 nieistnienie rozwiązania (w zakresie rzeczywistym) związane jest z tym, że równanie algebraiczne

$$1 + p^2 = 0$$

nie ma pierwiastków w zakresie rzeczywistym, podczas gdy w przykładzie 23 przyczyną nierozwiązalności jest to, że równanie $e^z = 0$ nie ma pierwiastka nawet w zakresie zespolonym.

Ogólniej, możemy więc powiedzieć, że nieistnienie rozwiązania równania (4) jest w obu przykładach wynikiem tego, że nie istnieje trójka liczb x, y, p , która byłaby rozwiązaniem równania

$$F(x, y, p) = 0.$$

18. Jak zobaczymy, rzecz się będzie miała zupełnie inaczej, jeżeli założymy, że równanie to ma rozwiązania. W szczególności jest tak wtedy, gdy równanie daje się przedstawić w postaci, którą nazywamy *normalną*

$$(5) \quad y' - f(x, y) = 0 \quad \text{czyli} \quad y' = f(x, y).$$

Wkrótce przekonamy się, że już przy bardzo słabych założeniach odnośnie funkcji $f(x, y)$ (wystarczy np. ciągłość tej funkcji) będziemy mogli dowieść, że równanie (5) ma nie tylko jedno, lecz na ogół nieskończenie wiele rozwiązań szczególnych.

PRZYKŁAD 24. Równanie $y' = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdyż czyni mu zadość każda funkcja $y = C$, gdzie C oznacza stałą.

PRZYKŁAD 25. Łatwo sprawdzić, że przy dowolnej wartości stałej C funkcja $y = -2/(x^2 + C)$ spełnia równanie

$$xy^2 - y' = 0$$

w każdym takim przedziale zmiennej x , w którym funkcja ta jest ciągła.

PRZYKŁAD 26. Równie łatwo stwierdzamy, że równanie

$$xy' - 2y + 2 = 0$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań; mianowicie, funkcja $y = Cx^2 + 1$ czyni mu zadość dla wszelkich wartości stałej C .

Przytoczone przykłady uprawniają nas do przypuszczenia, że dla ogólnego równania różniczkowego pierwszego rzędu istnieje taka funkcja

$$(6) \quad y = \Psi(x, C)$$

zależna nie tylko od zmiennej x , ale i od parametru C , że dla każdej

wartości C (z pewnego przedziału) funkcja ta, rozpatrywana jako funkcja tylko zmiennej x , czyni zadość temu równaniu różniczkowemu.

Rozważmy analogiczne przykłady dla równań różniczkowych rzędu $n > 1$.

PRZYKŁAD 27. Równanie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań, które wszystkie można, jak wiadomo z rachunku całkowego, przedstawić wzorem

$$y = px + q,$$

gdzie p i q są dowolnymi stałymi.

PRZYKŁAD 28. Nawiązując do przykładu 5 możemy powiedzieć, że rozwiązania występujące tam równania

$$(7) \quad \frac{|y'|}{(\sqrt{1+y^2})^3} = k$$

mogą w każdym razie zawierać dwie stałe dowolne. Istotnie, każde koło o promieniu $1/k$ ma krzywiznę k , wobec czego każda funkcja $y=y(x)$, która jest rozwiązaniem równania

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{k^2}$$

względem y , spełnia równanie różniczkowe (7); a i b mogą mieć wartości zupełnie dowolne.

PRZYKŁAD 29. Równanie różniczkowe n -go rzędu

$$(8) \quad \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

jest spełnione przez każdy wielomian stopnia $n-1$

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{n-1}x^{n-1}.$$

Rozwiązania zależą tu od n stałych dowolnych $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$. Z rachunku całkowego wiadomo, że równanie (8) nie ma innych rozwiązań.

Opierając się na powyższych przykładach i uogólniając przypuszczenie, wypowiedziane w związku z przykładami 24-26 (str. 21) możemy spodziewać się, że rozwiązania równania różniczkowego n -go rzędu będą mogły być przedstawione w postaci analogicznej do (6)

$$y = \mathcal{P}(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

w której występuje n stałych dowolnych. Precyzując pojęcie tak zwa-

nego *rozwiązania ogólnego*, udowodnimy w następnych rozdziałach twierdzenie wykazujące, że przypuszczenie to jest prawdziwe przy założeniach bardzo ogólnych.

Powyższe uwagi dają częściową odpowiedź na pytanie 2^o.

19. Przechodząc z kolei do pytania 3^o, powróćmy najpierw do przykładów 24-26.

Używając języka geometrii, możemy powiedzieć, że w przykładzie 24 rozwiązaniami szczególnymi są linie proste równoległe do osi x .

Przez każdy punkt (x_0, y_0) płaszczyzny xy przechodzi tylko jedna taka prosta. Istnieje więc tylko jedna funkcja $y=\varphi(x)$ spełniająca równanie $y'=0$ i warunek $\varphi(x_0)=y_0$.

W przykładzie 25 rozwiązaniami szczególnymi zawartymi we wzorze

$$(9) \quad y = -\frac{2}{x^2 + C}$$

są pewne krzywe algebraiczne trzeciego stopnia; zbadanie ich pozostawiamy czytelnikowi. Aby wyznaczyć wśród nich krzywą, przechodzącą przez punkt (x_0, y_0) , należy nadać stałej C taką wartość, aby było

$$y_0 = -\frac{2}{x_0^2 + C}.$$

Jest to możliwe, o ile tylko $y_0 \neq 0$. Otrzymamy wtedy dla C wartość

$$(10) \quad C = -\frac{2}{y_0} - x_0^2$$

i rozwiązaniem szczególnym, odpowiadającym punktowi (x_0, y_0) będzie krzywa określona równaniem

$$(11) \quad y = -\frac{2y_0}{y_0(x^2 - x_0^2) - 2},$$

które powstaje przez wstawienie wartości (10) do wzoru (9). Zauważmy też, że założenie $y_0 \neq 0$ okazuje się nieistotne, gdyż dla $y_0=0$ równanie (11) daje funkcję $y=0$, która czyni zadość równaniu $xy^2 - y' = 0$. Znowu więc widzimy na tym przykładzie, że przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi pewna krzywa, będąca rozwiązaniem danego równania różniczkowego. W ustępie 53, str. 74, zobaczymy, że jest ona jedyna. Tym samym istnieje jedno tylko rozwiązanie $\varphi(x)$ danego równania różniczkowego, spełniające warunek $\varphi(x_0)=y_0$.

Do tego samego wyniku prowadzi podobne rozumowanie, zastosowane do przykładu 26, z widocznym zastrzeżeniem $x \neq 0$.

Stawiając teraz sprawę ogólnie, weźmy pod uwagę równanie różniczkowe (4) i jego rozwiązania typu (6), przy założeniu, że takie rozwiązania istnieją. Dla każdego ustalonego C funkcja (6) zmiennej x przedstawia rozwiązanie szczególne równania (4), które interpretujemy geo-

metrycznie jako pewien łuk całkowity. Istnieje więc nieskończenie wiele łuków całkowitych równania (4), które otrzymujemy nadając stałej C we wzorze (6) rozmaite wartości. Na zasadzie omówionych przykładów mamy prawo spodziewać się, że przy pewnych założeniach przez dany, dowolnie zresztą obrany, punkt (x_0, y_0) przejdzie jeden i tylko jeden z powyższych łuków całkowitych. Oznacza to analitycznie, że będzie istniało jedno i tylko jedno rozwiązanie szczególne $y = \varphi(x)$, spełniające warunek

$$(12) \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

Rozwiązanie to otrzymamy, obliczając C z równania

$$y_0 = \Psi(x_0, C)$$

i wstawiając znaną wartość $C = C_0$ do równania (6), co daje jako rozwiązanie szczególne

$$y = \varphi(x) = \Psi(x, C_0).$$

Na pytanie więc, jakie dodatkowe warunki zapewniają jednoznaczność rozwiązania szczególnego równania (4), odpowiadamy, że można się spodziewać, iż przy pewnych założeniach będzie istniało jedno i tylko jedno rozwiązanie $y = \varphi(x)$, które dla dowolnie wybranej wartości x_0 zmiennej x będzie przybierało z góry wybraną wartość y_0 , czyli takie, które będzie spełniało równanie (12). Związek ten nazywamy *warunkiem początkowym*, albo *warunkiem Cauchy'ego*, dla rozwiązania szczególnego $y = \varphi(x)$ równania (4), zadanie zaś wyznaczenia rozwiązania spełniającego wymieniony warunek nazywamy *zagadnieniem* lub *zadaniem Cauchy'ego* dla tego równania.

Podobnie przedstawia się sprawa z równaniami wyższych rzędów.

W przykładzie 27 łukami całkowitymi są linie proste, nierównoległe do osi y . Przez każdy punkt (x_0, y_0) na płaszczyźnie przechodzi nieskończenie wiele prostych określonych wzorem ogólnym $y = px + q$, tak że warunek początkowy (12) nie zapewnia już tutaj jednoznaczności w określeniu szczególnego rozwiązania. Jeżeli jednak zażądamy, aby łuk całkowity miał w punkcie (x_0, y_0) przepisany z góry spadek y'_0 stycznej (tj. tangens jej kąta z osią x), to rozwiązanie szczególne będzie określone jednoznacznie i, jak łatwo sprawdzić, wyrazi się wzorem

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0).$$

Rozwiązanie to otrzymujemy więc ze wzoru ogólnego, nadając stałej p wartość y'_0 , stałej zaś q — wartość $y_0 - y'_0 x_0$. Warunki, które w naszym przykładzie zapewniają jednoznaczność rozwiązania szczególnego brzmią więc: dla danej z góry wartości x_0 rozwiązanie szczególne $y = \varphi(x)$ ma czynić zadość równaniom

$$(13) \quad \varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0,$$

gdzie y_0 i y'_0 oznaczają z góry dane dowolne liczby rzeczywiste.

Do analogicznych wyników dojdziemy, studiując przykład 28.

Przejdźmy, opierając się na powyższych obserwacjach, do ogólniejszego równania drugiego rzędu typu

$$(14) \quad F(x, y, y', y'') = 0.$$

Możemy się spodziewać, że rozwiązania tego równania będą się wyrażały, przy pewnych założeniach, w postaci opisanej w ustępie 18, str. 22

$$y = \Psi(x, C_1, C_2).$$

Aby określić jednoznacznie rozwiązanie szczególne $y = \varphi(x)$ należy zażądać, aby dla obranej z góry wartości x_0 przyjmowało ono z góry podyktowaną wartość y_0 , a nadto, aby jego pochodna przybierała w punkcie x_0 również z góry podyktowaną wartość y'_0 . Innymi słowy, należy zażądać, aby rozwiązanie $y = \varphi(x)$ spełniało związki (13) lub, co na jedno wychodzi, aby stałe C_1 i C_2 były tak dobrane, że

$$(15) \quad \Psi(x_0, C_1, C_2) = y_0, \quad \Psi'_x(x_0, C_1, C_2) = y'_0.$$

Równości (13) nazywamy *warunkami początkowymi* (albo *warunkami Cauchy'ego*) dla rozwiązania równania drugiego rzędu (14).

Uogólniając te rozważania, sformułujemy *warunki początkowe* w odniesieniu do równania różniczkowego zwyczajnego n -tego rzędu w sposób następujący: od szukanego rozwiązania szczególnego $y = \varphi(x)$ żądamy, aby w dowolnie obranym punkcie x_0 przybierało dowolnie wybraną wartość y_0 oraz aby jego kolejne pochodne (pierwsza, druga itd. aż do $(n-1)$ -ej) przybierały dla tegoż x_0 z góry obrane wartości $y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0$. Innymi słowy żądamy, aby rozwiązanie $y = \varphi(x)$ spełniało następujące warunki początkowe:

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad \varphi''(x_0) = y''_0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0.$$

Podobnie ustalamy *warunki początkowe* dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Rozważając go np. w postaci normalnej

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

obieramy dowolną wartość początkową x_0 , oraz dowolne wartości początkowe $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ dla funkcji $y_1, y_2, \dots, y_n$, poczem szukamy rozwiązania szczególnego

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots, \quad y_n = \varphi_n(x),$$

czyniącego zadość warunkom Cauchy'ego

$$\varphi_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jak zobaczymy, w obszernej klasie przypadków warunki te będą zapewniały jednoznaczność rozwiązania.

PRZYKŁAD 30. Przypuśćmy, że punkt materialny o masie m znajduje się w polu sił, których składowe X , Y i Z zależą jedynie od położenia punktu (x, y, z) w przestrzeni:

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Według drugiej zasady dynamiki ruch tego punktu jest określony równaniami

$$(16) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = X(x, y, z), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y(x, y, z), \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z(x, y, z).$$

Równania te nie określają jeszcze ruchu jednoznacznie, gdyż na ogół mają nieskończenie wiele rozwiązań i aby taką jednoznaczność uzyskać, należy sformułować warunki początkowe. W tym celu zastąpmy układ równań (16) równoważnym mu układem o pochodnych rzędu pierwszego:

$$\frac{dx'}{dt} = u, \quad \frac{dy'}{dt} = v, \quad \frac{dz'}{dt} = w,$$

$$m \frac{du}{dt} = X(x, y, z), \quad m \frac{dv}{dt} = Y(x, y, z), \quad m \frac{dw}{dt} = Z(x, y, z).$$

Warunki początkowe mają w tym przypadku postać następującą: dla obranej z góry wartości t_0 czasu t oraz z góry podyktowanych wartości x_0, y_0, z_0, u_0, v_0 i w_0 funkcji niewiadomych

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t), \quad u(t), \quad v(t), \quad w(t)$$

powinno być

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad w(t_0) = w_0.$$

Znaczy to, że dla jednoznacznego określenia ruchu punktu materialnego trzeba podać jego położenie (x_0, y_0, z_0) i prędkość (u_0, v_0, w_0) w momencie początkowym t_0 . Wartości (x_0, y_0, z_0) , określające tzw. położenie początkowe punktu, oraz wartości (u_0, v_0, w_0) , określające tzw. prędkość początkową, wyznaczają razem to, co w dynamice nazywamy stanem początkowym ruchu.

20. Pytaniem 4^o postawionym w ustępie 16, str. 20, zajmujemy się w związku z dowodami istnienia rozwiązań, oraz metodami efektywnego całkowania, którym są poświęcone dalsze rozdziały tej książki. Tutaj zaznaczymy tylko, że jedynie niektóre, bardzo specjalne typy równań różniczkowych mogą być rozwiązane elementarnie (tzn. można wyznaczyć ich rozwiązania) przy zastosowaniu przystępnych metod analizy, natomiast w większości napotykanym przypadków praktycznie przydatne przedstawienie rozwiązań otrzymać można wyłącznie w formie przybliżonej.

§ 5. Tworzenie równania $y' = f(x, y)$ i zagadnienie trajektorii

21. Rozważania geometryczne, które teraz przeprowadzimy utwierdzą nas we wnioskach, do których doszliśmy w ustępie 18, str. 21. Zaczniemy od przykładów.

PRZYKŁAD 31. Równanie

$$(1) \quad \Psi(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad y > 0,$$

przy traktowaniu zmiennej dodatniej y jako funkcji zmiennej x , przedstawia rodzinę półokręgów o stałym promieniu a , których środki leżą na osi x . Położenie każdego z tych półokręgów zależy od wartości stałej C , wskutek czego mamy tu do czynienia z jednoparametrową rodziną łuków, zależną od jednej stałej dowolnej. Wykażemy, że wszystkie te łuki czynią zadość jednemu równaniu różniczkowemu zwyczajnemu pierwszego rzędu. W tym celu nadajmy stałej C dowolną oznaczoną wartość, tzn. wybierzmy jeden z półokręgów tej rodziny i zróżniczkujmy równanie (1) względem zmiennej x . Otrzymujemy równość

$$(2) \quad (x - C) + yy' = 0.$$

Rugując teraz parametr C z równań (1) i (2), dostajemy równanie różniczkowe

$$y^2(1 + y'^2) - a^2 = 0,$$

któremu czynią zadość wszystkie półokręgi rodziny (1).

PRZYKŁAD 32. Utwórzmy równanie różniczkowe, któremu czynią zadość wszystkie parabole, należące do rodziny

$$(3) \quad y^2 - 2Cx = 0, \quad y > 0.$$

Różniczkując względem x (przy ustalonym C), jak w przykładzie poprzednim, otrzymujemy równość

$$yy' - C = 0,$$

z której wyznaczamy wartość C i wstawiamy do równania (3). Otrzymujemy stąd równanie różniczkowe

$$y^2 - 2xyy' = 0,$$

które możemy uprościć dzieląc obie strony przez y . Ostatecznie otrzymujemy szukane równanie w postaci

$$y - 2xy' = 0.$$

Oba te przykłady prowadzą nas do wniosku, że dla pewnych jednoparametrowych rodzin łuków płaskich można, zakładając odpowiednie warunki regularności, ułożyć takie równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, że wszystkie łuki każdej z tych rodzin będą czyniły

zadanie ułożonemu równaniu. Istotnie, niech będzie dana dowolna rodzina łuków dających się przedstawić równaniem kształtu

$$(4) \quad y = \Phi(x, C),$$

gdzie funkcja $\Phi(x, C)$ jest określona dla wartości zmiennych x oraz C , spełniających nierówności

$$(5) \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad C_1 \leq C \leq C_2.$$

Załóżmy jeszcze, że funkcja $\Phi(x, C)$ jest w obszarze zamkniętym (5) klasy C^1 , a nadto, że zachodzi tam nierówność

$$(5') \quad \Phi'_C(x, C) \neq 0,$$

co z uwagi na ciągłość pochodnej (5') powoduje, że jest ona stale dodatnia, lub stale ujemna.

Przyjmijmy w dalszym ciągu, że

$$\Phi'_C(x, C) > 0,$$

tzn., że funkcja $\Phi(x, C)$ rozpatrywana jako funkcja zmiennej C przy stałym x jest w przedziale $\langle C_1, C_2 \rangle$ ściśle rosnąca. Widać stąd, że jeżeli będzie $C' < C''$ (C' i C'' wzięte z przedziału $\langle C_1, C_2 \rangle$) to, używając języka geometrii, łuk o równaniu $y = \Phi(x, C')$ będzie leżał, ze względu na nierówność

$$\Phi(x, C') < \Phi(x, C''),$$

poniżej łuku określonego równaniem $y = \Phi(x, C'')$. W szczególności więc wszystkie łuki naszej rodziny będą leżały (p. rys. 5) między łukami $y = \Phi(x, C_1)$ i $y = \Phi(x, C_2)$.

Oznaczmy przez D dziedzinę, ograniczoną prostymi $x = x_1$ i $x = x_2$ oraz wspomnianymi dwoma łukami.

Przez każdy punkt tej dziedziny przechodzi dokładnie jeden łuk naszej rodziny. Rzeczywiście, niech punkt $M_0 = (x_0, y_0)$ należy do D . Wówczas oczywiście

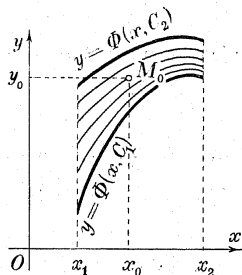
$$\Phi(x_0, C_1) \leq y_0 \leq \Phi(x_0, C_2),$$

a ponieważ funkcja $\Phi(x_0, C)$ jest w $\langle C_1, C_2 \rangle$ ściśle rosnąca, więc istnieje tylko jedna taka

$$y = \Phi(x, C_0).$$

wartość C_0 , że $\Phi(x_0, C_0) = y_0$. Jeśli więc nadamy stałej C tę właśnie wartość C_0 , to łuk

będzie przechodził przez punkt M_0 i będzie jedynym łukiem o tej własności.



Rys. 5

Z rozważań tych wynika, że każdemu punktowi (x, y) należącemu do D odpowiada tylko jedna taka wartość C , że równanie (4) jest spełnione. W ten sposób w D określona jest w sposób jednoznaczny funkcja

$$(6) \quad C = u(x, y),$$

jako funkcja uwikłana, wyrażona równaniem $\Phi(x, C) - y = 0$, a ponieważ funkcja (4) jest z założenia funkcją klasy C^1 , więc wobec (5') funkcja (6) jest także klasy C^1 .

Uważając teraz C za stałą, zróżniczkujemy równość (4) względem zmiennej x , poczem do otrzymanej równości

$$y' = \Phi'_x(x, C)$$

wstawmy wartość C daną wzorem (6). Otrzymamy równość

$$(7) \quad y' = \Phi'_x[x, u(x, y)] = f(x, y),$$

będącą równaniem różniczkowym pierwszego rzędu i to w postaci normalnej.

Równaniu temu czynią zadość wszystkie łuki rodziny (4). Istotnie, podstawiając po prawej i po lewej stronie tej równości $\Phi(x, C)$ w miejsce y , a $\Phi'_x(x, C)$ w miejsce y' , otrzymamy po prawej stronie wyrażenie

$$f[x, \Phi(x, C)] = \Phi'_x[x, u[x, \Phi(x, C)]],$$

a ponieważ na podstawie definicji funkcji odwrotnej jest

$$u[x, \Phi(x, C)] = C,$$

więc po prawej stronie otrzymamy ostatecznie wyrażenie $\Phi'_x(x, C)$ identyczne z wyrażeniem występującym po lewej stronie.

Ostatecznie wykazaliśmy, że przy wymienionych założeniach każdej rodzinie łuków (4) zależnej od jednej stałej dowolnej przyporządkować można równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu w postaci normalnej, dla którego wszystkie łuki tej rodziny są łukami całkowymi. Uprawnia nas to do przypuszczenia, że będzie i na odwrót, co potwierdza przypuszczenia, które wyraziliśmy w ustępie 18, str. 21. Równocześnie poznaliśmy też drogę, na jakiej można tworzyć równania różniczkowe.

Wynik, do którego doszliśmy można łatwo uogólnić na rodzinę łuków o równaniu ogólniejszym $\Psi(x, y, C) = 0$; dochodzi się wówczas również do równania pierwszego rzędu, które jednak na ogół nie da się napisać w postaci normalnej.

22. Jednym z ważnych zagadnień geometrii, które prowadzą do równań różniczkowych jest zadanie wyznaczenia tzw. trajektorii danej jednoparametrowej rodziny łuków, w szczególności tzw. trajektorii ortogonalnych.

Weźmy pod uwagę opisaną rodzinę łuków (4) zachowując równocześnie wszystkie założenia przyjęte w ustępie 21, str. 28.

Łuk, który łuki rodziny (4) przecina pod stałym kątem α nazywamy *α -trajektorią* tej rodziny. W szczególności, gdy idzie o kąt prosty, mówimy o *trajektorii ortogonalnej*.

Definicję tę można oczywiście rozszerzyć na rodzinę łuków o równaniu danym w postaci uwikłanej $\Phi(x, y, C) = 0$, zakładając jednak, że łuki do niej należące mają w każdym punkcie styczną.

Niech będzie dany dowolny kąt α ; zapytajmy, jak wyznaczyć wszystkie α -trajektorie rodziny (4).

Niech $Y = Y(x)$ będzie taką trajektorią, przebiegającą w określonej poprzednio dziedzinie D (str. 28), (x, Y) zaś — jej ustalonym punktem. Przez punkt ten przebiega dokładnie jeden łuk rodziny (4). Niechaj to będzie łuk, któremu odpowiada wartość C stałej. W punkcie (x, Y) muszą wtedy zachodzić dwie relacje, a mianowicie, po pierwsze musi być

$$(8) \quad Y = Y(x) = \Phi(x, C) = y,$$

gdyż dany łuk naszej rodziny w tym punkcie przecina się z trajektorią, po drugie, z uwagi na samo określenie trajektorii, musi być także

$$(9) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y' - y'}{1 + Y' y'},$$

w przypadku trajektorii nieortogonalnych i

$$(10) \quad 1 + Y' y' = 0,$$

jeśli idzie o trajektorie ortogonalne.

Ponieważ zaś łuki naszej rodziny spełniają równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y),$$

więc w myśl (8)

$$y' = f(x, Y)$$

i z (9) lub (10) wynika, że w przypadku trajektorii nieortogonalnych

$$(11) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y' - f(x, Y)}{1 + Y' f(x, Y)},$$

w przypadku zaś trajektorii ortogonalnych

$$(12) \quad 1 + Y' f(x, Y) = 0.$$

Równanie (11) lub (12) jest równaniem różniczkowym, któremu czynią zadość szukane trajektorie, co wskazuje, że zagadnienie wyznaczenia trajektorii jednoparametrowej rodziny łuków płaskich sprowadza się na ogół do rozwiązania pewnego równania różniczkowego pierwszego rzędu. Równanie to można od razu napisać znając równanie różniczkowe danej rodziny łuków, tak że nie potrzeba nawet znać samych łuków rodziny; dla wyznaczenia trajektorii wystarczy znajomość odpowiedniego równania różniczkowego.

Równanie (11) lub (12) można natychmiast sprowadzić do postaci normalnej. Otrzymamy dla trajektorii nieortogonalnych równanie

$$Y' = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f(x, Y)}{1 - f(x, Y) \operatorname{tg} \alpha},$$

dla trajektorii zaś ortogonalnych równanie

$$Y' = -\frac{1}{f(x, Y)}.$$

Warunki, przy których wolno napisać w ten sposób te równania są widoczne.

PRZYKŁAD 33. Ułożyć równanie różniczkowe trajektorii ortogonalnych rodziny górnych lub dolnych części elips współśrodkowych.

Równanie rodziny elips współśrodkowych może być w stosownie dobranym układzie współrzędnych napisane w postaci

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0, \quad a \neq b,$$

gdzie λ jest parametrem rodziny.

Wyznaczamy najpierw równanie różniczkowe samej rodziny elips. Różniczkując (13) względem x przy stałym λ , mamy

$$x(b^2 + \lambda) + yy'(a^2 + \lambda) = 0.$$

Obliczając stąd λ i przyjmując $a^2 - b^2 = \varepsilon e^2$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$, otrzymujemy dla $x \neq 0$

$$a^2 + \lambda = \frac{\varepsilon e^2 x}{x + yy'}, \quad b^2 + \lambda = -\frac{\varepsilon e^2 yy'}{x + yy'}.$$

Podstawiając te wartości do równania (13) dostajemy równanie różniczkowe rodziny elips współśrodkowych w postaci

$$(14) \quad (xy' - y)(x + yy') - \varepsilon e^2 y' = 0,$$

prawdziwe także dla $x = 0$.

Równanie trajektorii ortogonalnych otrzymamy więc, podstawiając do równania (14)

$$y = Y \quad \text{ i } \quad y' = -\frac{1}{Y'}.$$

Szukanym równaniem jest więc

$$(xY' - Y)(x + YY') - \varepsilon e^2 Y' = 0$$

z zastrzeżeniem, że $x \neq 0$.

ZADANIA. 11. Ułożyć równanie różniczkowe: 1° rodziny okręgów współśrodkowych; 2° rodziny elips homotetycznych; 3° rodziny elips powstających przez obrót płaski stałej elipsy dookoła środka tej elipsy.

Ułożyć też równanie różniczkowe ortogonalnych trajektorii każdej z tych trzech rodzin. Sformułować zastrzeżenia, przy których zachodzą równania tych trajektorii.

12. Ułożyć równanie różniczkowe ortogonalnych trajektorii rodziny krzywych $y^2(C-x) = x^2$, oraz $(x^2 + y^2)^2 = C^2xy$ i sformułować zastrzeżenia, przy których zachodzi to równanie.

13. Wykazać, że jeżeli dana jednoparametrowa rodzina krzywych spełnia równanie różniczkowe $F(x, y, y') = 0$, to przy pewnych dodatkowych założeniach trajektorie ortogonalne tej rodziny spełniają równanie $F(x, Y, -1/Y') = 0$. Sformułować te założenia.

14. Jednoparametrowa rodzina krzywych ma we współrzędnych biegunowych r i θ równanie $P(r, \theta, C) = 0$. Niech $Q(r, \theta, d\theta/dr) = 0$ będzie rezultatem eliminacji stałej C z równań $P = 0$ i $\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dr} = 0$. Wykazać, że przy właściwych założeniach równanie różniczkowe ortogonalnych trajektorii tej rodziny jest postaci

$$Q\left(R, \Theta, -\frac{1}{R^2} \frac{dR}{d\Theta}\right) = 0,$$

gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu trajektorii. Sformułować te założenia.

15. Stosując wynik z zadania 14 ułożyć równanie różniczkowe ortogonalnych trajektorii rodziny $r^n = C \sin n\theta$ oraz $r^2 \sin n\theta = C$; sformułować zastrzeżenia, przy których zachodzi ułożone równanie.

§ 6. Interpretacja geometryczna równania $y' = f(x, y)$ oraz przybliżona metoda graficzna jego całkowania

23. Podamy tu interpretację geometryczną równania

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

z której odniesiemy potrójną korzyść:

1° uzyskamy jeszcze jedną podstawę do dowodu twierdzenia, że równanie (1) ma nieskończenie wiele rozwiązań;

2° poznamy metodę graficzną przybliżonego wyznaczania rozwiązań tego równania;

3° interpretacja ta wskaże nam drogę, która doprowadzi nas w § 9 do jednego z dowodów twierdzenia, że rozwiązanie równania (1), spełniające warunki początkowy, rzeczywiście istnieje.

Założmy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w jakimś obszarze T . Oznaczmy przez (x_0, y_0) dowolny punkt tego obszaru, a przez p_0 — liczbę, określoną równością

$$p_0 = f(x_0, y_0).$$

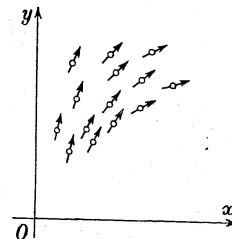
Trójkę liczb (x_0, y_0, p_0) będziemy nazywali *elementem całkowym* równania różniczkowego (1), sam zaś punkt (x_0, y_0) — *podkładem tego elementu*.

Równanie różniczkowe (1) przyporządkowuje więc każdemu punktowi obszaru T odpowiedni element całkowity. Zbiór elementów całkowitych, otrzymanych w ten sposób, nazywamy *polem kierunkowym*, określonym przez równanie różniczkowe (1).

Pole kierunkowe interpretujemy geometrycznie w następujący sposób. Obieramy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i w każdym punkcie (x_0, y_0) obszaru T kreślimy odcinek o długości ε , którego środkiem jest punkt (x_0, y_0) i którego spadek równy jest $p_0 = f(x_0, y_0)$ (rys. 6). Pole kierunkowe jest wyznaczone jednoznacznie przez równanie różniczkowe (1) i liczbę ε .

Założmy teraz, że funkcja

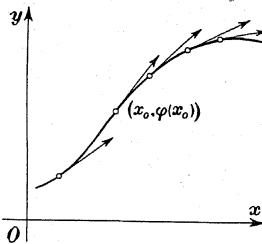
$$(2) \quad y = \varphi(x)$$



Rys. 6.

przedstawia łuk całkowity równania różniczkowego (1) w jakimś przedziale $[a, b]$ i niech x_0 należy do $[a, b]$, a $M = (x_0, \varphi(x_0))$ niech będzie punktem łuku całkowego. Ponieważ $\varphi'(x_0) = f[x_0, \varphi(x_0)]$, więc odcinek pola kierunkowego uciepiony w punkcie M_0 jest styczny w tym punkcie do łuku (2). Zachodzi to oczywiście dla każdego punktu łuku całkowego, a zatem łuk całkowity równania (1) jest to łuk, który w każdym swym punkcie jest styczny do odpowiedniego odcinka pola kierunkowego odpowiadającego równaniu (1) (rys. 7).

Zgodnie z tym zadaniem wyznaczenia rozwiązań równania różniczkowego (1) można ująć geometrycznie w sposób następujący. Wyznaczyć takie łuki regularne, jednolistne względem osi x i przebiegające w obszarze T , że w każdym swoim punkcie są one styczne do odpowiadającego temu punktowi odcinka pola kierunkowego, wyznaczonego przez równanie (1).



Rys. 7.

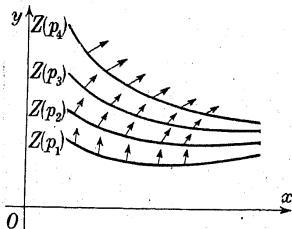
24. Niechaj teraz p będzie dowolną liczbą rzeczywistą, a $Z(p)$ zbiorem tych wszystkich punktów (x, y) obszaru T , dla których jest

$$f(x, y) = p.$$

Geometrycznie jest to zbiór tych punktów obszaru T , w których odcinek pola kierunkowego ma spadek równy p . Zbiór $Z(p)$ nazywamy *izokliną* równania (1) odpowiadającą wartości p , albo krócej *p-izokliną*. Może on być pusty, składać się ze skończonej ilości punktów, składać się z jednego lub więcej łuków, wypełniać całe obszary itd.

Rozpatrzmy najczęściej w praktyce zachodzący przypadek, gdy izokliny są łukami.

Na rys. 8 zaznaczone są schematycznie takie izokliny $Z(p_1)$, $Z(p_2)$, $Z(p_3)$ i $Z(p_4)$ równania (1) odpowiadające spadkom p_1 , p_2 , p_3 i p_4 wraz z odcinkami pola kierunkowego uczepionymi w pewnych punktach tych izoklin. Rzecz prosta, że wektory uczepione do punktów tej samej izokliny są równoległe.



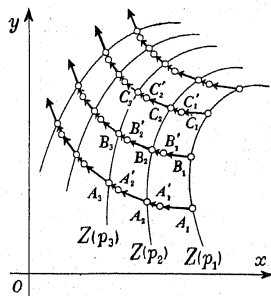
Rys. 8.

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w ustępie poprzednim, znalezienie łuków całkowych równania (1) sprowadza się do znalezienia łuków przecinających izokliny w taki sposób, że w punktach przecięcia łuki te są styczne do odcinków pola kierunkowego, uczepionych w tych punktach.

Otóż intuicja geometryczna wskazuje nam, że na ogół takie łuki istnieją, że jest ich nieskończenie wiele i że przez dowolnieabrany punkt obszaru T będzie można zazwyczaj poprowadzić tylko jeden taki łuk, że więc na ogół istnieje dokładnie jeden łuk całkowy spełniający dane warunki początkowe.

Poczynione obserwacje można, przy pewnych założeniach, wykorzystać dla skonstruowania dowodu twierdzenia Cauchy'ego (str. 51) orzekającego, że rozpatrywane równanie (1) ma rozwiązanie szczególne spełniające dany warunek początkowy. W tym miejscu zużytkujemy je dla naszkicowania graficznej metody przybliżonego rozwiązywania tego równania.

25. Nakreślmy izokliny równania (1) odpowiadające wartościom $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ (rys. 9), następnie na jednej z tych izoklin, np. na $Z(p_1)$, obierzmy ciąg punktów $A_1, B_1, C_1, \dots$ i zaznaczmy na rysunku uczepione w nich odcinki pola kierunkowego, przedłużając je o tyle, aby dochodziły w pobliże izokliny $Z(p_2)$. Oznaczmy otrzymane w ten sposób końce odcinków przez $A'_1, B'_1, C'_1, \dots$, następnie poprowadźmy przez te punkty odcinki o spadku p_2 . Niech $A_2, B_2, C_2, \dots$ stanowią punkty przecięcia tego drugiego ciągu odcinków z izokliną $Z(p_2)$, a $A'_2, B'_2, C'_2, \dots$ — odpowiednimi końcami obranymi blisko izokliny $Z(p_3)$. Dalej postępujemy podobnie: z punktów $A'_2, B'_2, C'_2, \dots$ prowadzimy odcinki o spadku p_3 przedłużając je o tyle, aby dochodziły blisko izokliny $Z(p_4)$.



Rys. 9.

i oznaczamy końce odcinków tego trzeciego ciągu przez $A'_3, B'_3, C'_3, \dots$, punkty zaś ich przecięcia z izokliną $Z(p_4)$ — przez $A_4, B_4, C_4, \dots$. Postępując tak otrzymamy ciąg linii łamanych

$$A_1 A'_1 A'_2 A'_3 \dots, B_1 B'_1 B'_2 B'_3 \dots, C_1 C'_1 C'_2 C'_3 \dots, \dots,$$

które możemy uważać za przybliżone obrazy graficzne łuków całkowych równania (1).

Istotnie: np. równanie linii łamanej $A_1 A'_1 A'_2 A'_3 \dots$ czyni zadość równaniu różniczkowemu (1) w punktach $A_1, A_2, A_3, \dots$, w których linia ta przecina się z izoklinami $Z(p_1), Z(p_2), Z(p_3), \dots$, gdyż spadek łamanej w tych punktach jest dokładnie równy spadkowi odcinków pola kierunkowego, uczepionych w tych punktach. W punktach pozostałych ta linia łamana oczywiście na ogół nie będzie spełniała równania różniczkowego (1), ale — jak można się spodziewać — uzyskane przybliżenie będzie tym dokładniejsze, im gęściej poprowadzimy izokliny.

Powyższa metoda graficzna niewątpliwie ma swoje braki, nie pozwala ona między innymi dokładnie oceniać popełnianych błędów, niemniej jednak bywa ona często z pożytkiem stosowana, jeżeli równanie jest bardziej zawile*).

PRZYKŁAD 34. Izokliną równania

$$(3) \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0,$$

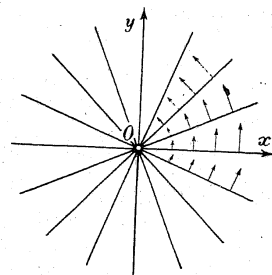
odpowiadająca wartości $p \neq 0$ jest linia prosta $py + x = 0$, wartości zaś $p = 0$ — linia $x = 0$.

Izokliny są więc w tym przykładzie (rys. 10) liniami prostymi przechodzącymi przez początek układu, z których wyłączono punkt $(0, 0)$. Ponieważ zaś odcinki pola kierunkowego odpowiadające p -izoklinie mają spadek p , sama zaś p -izoklina, jak widać, ma przy $p \neq 0$ spadek równy $-1/p$, więc odcinki należące do p -izokliny są do niej prostopadłe, co zachodzi także dla izokliny $x = 0$.

Opisana powyżej przybliżona konstrukcja łuków całkowych zastosowana do tego przykładu doprowadza nas do wniosku, że łukami całkowymi równania (3) będą górne i dolne części okręgów o środku $(0, 0)$. Rzeczywiście, łatwo ten wniosek potwierdzić przez zrózniczkowanie równania

$$x^2 + y^2 - C = 0.$$

* Czytelnika, interesującego się metodami przybliżonymi (graficznymi i numerycznymi) całkowania równań różniczkowych odsyłamy do książki: E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Lipsk 1942. Tam też znajdzie czytelnik dalszą literaturę.



Rys. 10.