

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXIII

02338 [237]

---

ALGÈBRE  
DES ENSEMBLES

P A R

WACŁAW SIERPİŃSKI

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

---

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO  
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

W A R S Z A W A — W R O C Ł A W 1 9 5 1

02338

COPYRIGHT, 1951, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE  
 WARSZAWA (Poland) WROCLAW  
 Sniadeckich 8 Suterzewskiego 19

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced  
 in any form, by mimeograph or any other means,  
 without permission in writing from the publishers.



PRINTED IN POLAND

Nakład 1100. Format B1. Arkuszy 13. Papier b/dz. natp. 80 gr.  
 Oddano do druku w marcu 1950 r. Druk ukończony w czerwcu 1951 r.  
 Zam. 366 Druk. Naukowa T. N. W. Warszawa, Sniadeckich 8. B-1-94.024

4.287/15  
 3.10.52

## CHAPITRE I

### ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

§ 1. L'équivalence des propositions. Soient  $A$  et  $B$  deux propositions quelconques. Nous écrivons

$$(1) \quad A \equiv B$$

dans le cas où elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses (et seulement dans ce cas). Deux propositions  $A$  et  $B$  satisfaisant à la formule (1) sont dites *équivalentes* et le symbole logique  $\equiv$  s'appelle *signe d'équivalence*.

Si l'on a la formule (1), on a évidemment aussi la formule

$$B \equiv A;$$

la relation d'équivalence (entre propositions) est donc *symétrique*.

Si  $A \equiv B$  et  $B \equiv C$ , on a évidemment  $A \equiv C$ ; la relation d'équivalence (entre propositions) est donc *transitive*.

Désignons par 1 une proposition vraie (p. ex. la proposition  $2 \times 2 = 4$ ) et par 0 une proposition fautive (p. ex. la proposition  $2 \times 2 = 5$ ).

La formule

$$P \equiv 1$$

exprime donc que la proposition  $P$  est vraie, et la formule

$$P \equiv 0$$

exprime que la proposition  $P$  est fautive.

6. Soit  $f(X)$  une fonction qui fait correspondre aux ensembles  $X \subset E$  des ensembles. Supposons qu'elle vérifie la condition

$$(9) \quad X \subset f(X) \text{ pour } X \subset E$$

et supposons qu'il existe pour tout ensemble  $Y \subset E$  au moins un ensemble  $X \subset E$ , tel que  $f(X) = Y$ . Démontrer qu'on a pour les ensembles finis  $X \subset E$  la formule  $f(X) = X$ , et que cette formule peut être en défaut pour les ensembles  $X$  infinis.

Démonstration. Comme  $0 \subset E$ , il existe un ensemble  $X \subset E$ , tel que  $f(X) = 0$  et, d'après (9), on a  $X \subset f(X)$ , donc  $X = 0$ . On a donc  $f(0) = 0$ . Supposons qu'il existe des ensembles finis  $X_k \subset E$ , ayant  $k$  éléments pour lesquels  $f(X_k) \neq X_k$ . Supposons que  $n$  est le plus petit nombre naturel pour lequel a lieu la dernière inégalité, et que l'ensemble  $X_n$  la vérifie. Or, d'après l'hypothèse sur la fonction  $f$ , il existe un ensemble  $X \subset E$ , tel que  $f(X) = X_n$ ; on a donc  $X \neq X_n$  et, étant donné que, d'après (9),  $X \subset f(X) = X_n$ , on conclut que l'ensemble  $X$  a au plus  $n-1$  éléments. Il résulte donc de la définition du nombre  $n$  qu'on a  $f(X) = X$ , donc  $X = X_n$ , ce qui est impossible.

Nous avons ainsi démontré qu'on a  $f(X) = X$  pour les ensembles finis  $X \subset E$ .

Soit maintenant  $E$  l'ensemble de tous les nombres naturels et définissons, pour  $X \subset E$  la fonction  $f(X)$  comme il suit. Si  $X \subset E$  et l'ensemble  $E - X$  est infini ou vide, posons  $f(X) = X$  et, si l'ensemble  $E - X$  est fini non vide, soit  $f(X)$  l'ensemble formé de l'ensemble  $X$  et du plus grand nombre naturel appartenant à l'ensemble  $E - X$ . On a évidemment  $f(E - \{1\}) = E \neq E - \{1\}$ .

INDEX TERMINOLOGIQUE

Notations

- $\equiv 1, P \equiv 1, P \equiv 0, 1, \equiv PQ$  19.
- $\rightarrow 2, \rightarrow PQ$  19.
- $\supset 3, \subset 27, A \subset B$  54,  $\overset{*}{C}$  83.
- $CE$  86.
- $P \& Q$  7.
- $P \vee Q$  7.
- $A + B$  7, 62.
- $A - B$  62.
- $A \cdot B$  7, 62,  $A \times B$  108.
- $P'$  11,  $R'$  27,  $R^*$  27.
- $/$  16.
- $NP$  19.
- $+PQ$  19.
- $\cdot PQ$  19.
- $P(x)$  24.
- $\iota_x 27, \iota E$  40.
- $\prod_x 30, \prod_{E \in F} 66, \prod_{k=1}^n 67, \prod_{k=1}^{\infty} 67, \prod_{x \in A} P(x)$  89.
- $\sum_x 30, \sum_{E \in F} 65, \sum_{x \in A} P(x)$  89.
- $e$  36,  $\bar{e}$  36.
- $\{ \}$  35,  $\{a\}$  39.
- $E = 0$  43.
- $\Delta$  43.
- $U(E)$  59.
- $A \cup B$  98.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n, \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  102,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  104.
- $B^A$  114.
- $f^{-1}(y)$  117.
- $PZ$  131.
- $z \in F$
- $xRy, xR'y$  133.
- $\sim$  151.
- $\succ$  162.
- $s, d$  165,  $p$  167.
- $\Phi_s, \Phi_d$  165,  $\Phi_p$  167,  $\Phi_c$  169,  $\Phi_\delta$  169.
- $\Phi_B$  172,  $\Phi_\Sigma, \Phi_\Delta$  173,  $\Phi_\lambda$  176,  $\Phi_A$  186.
- $\Phi_K$  193,  $H_N$  193.

## Termes

- Additive* (famille d'ensembles): simplement 167, complètement 176.  
*Algèbre de Boole* 91.  
*Aliquote* (partie) 55.  
*Alternative* 7.  
*Anneau d'ensembles* 166.  
*Antinomies* 50.  
*Apagogique* (démonstration) 14.  
*Assertion* (principe d') 2.  
*Associativité* 2.  
*Asymétrie* 27.  
*Atomes* 139.  
*Axiome d'absorption* 64, — de l'infini 47, 57, — de Nicod 17, — des paires 46, — de substitution 113, — du choix (de Zermelo) 132, — du partage 138, — relationnel 46, — I 46, II 46, — III 66, — IV 58, — V 59, — VII 47, 57.  
*Base* (d'un ensemble) 108.  
*Calculable* (nombre) 41.  
*Carré combinatoire* 110.  
*Champ* (d'une relation) 134.  
*Classes boréliennes* (d'ensembles) 172, — additives 173, — multiplicatives 173.  
*Commutation* (loi de) 5.  
*Complémentaire* (d'un ensemble) 86.  
*Complètement additive* (famille d'ensembles) 176, — multiplicative 176.  
*Conjonction* 7.  
*Conséquence* 7.  
*Constituante* (d'un ensemble) 88.  
*Contradiction* (principe de  $\rightarrow$ ) 11.  
*Contradictaires* (propositions) 16.  
*Contraposition* 15.  
*Contre-domaine* (d'une relation) 134.  
*Converse* (d'une relation) 27.  
*Corps de Boole* 92, — généralisé 92, corps d'ensembles 141, 168.  
*Correspondance* 28, 112, — biunivoque 119, — m-n-voque 154.  
*Crible* (de Lusin) 192.  
*Déduction* (règle de) 7, 20.  
*Démonstration apagogique* 14.  
*Différence* (d'ensembles) 62.  
*Disjointe* (somme) 75.  
*Distance* 158.  
*Distributivité* 5, 11.  
*Division* (d'ensembles) 65.  
*Domaine* (d'une relation) 134.  
*Effectivité* 41, 44.  
*Egalité* (des ensembles) 37.  
*Élément* 35, — d'accumulation 157.  
*Ensemble* 35, — analytique 186, — compact 156, — de même puissance 151, — dérivé 155, — fermé 156, — homogène 49, — irréductible 60, le plus grand — 59, le plus petit — 59, — ordonné 162, — ouvert 156, — partiellement ordonné 163, 164, — saturé 60, — vide 43.  
*Équivalence* des propositions 1, des relations 26.  
*Espace métrique* 158, — semi-métrique 159, — topologique 158, — (V) 157.  
*Exemple effectif* 44.  
*Famille d'ensembles* 161.  
*Fonction* absolument additive 142, — analytique 195, — à valeurs distinctes 117, — caractéristique (d'un ensemble) 105, — de Hausdorff 193, — non décroissante 141, — propositionnelle 24.  
*Formule de De Morgan* 87.  
*Homogène* (ensemble) 49.  
*Hypothèse du continu* 153, — généralisée 154.  
*Identité* (des objets) 37.  
*Idéal* (d'un corps d'ensembles) 141.  
*Image géométrique* (d'une fonction) 112.  
*Implication* 3, — formelle, — matérielle 32.  
*Individus* 47.  
*Inégalité* (des ensembles) 37.  
*Infini actuel* 48, — potentiel 48.  
*Intersection* (d'ensembles) 62.  
*Intuitionnistes* 12.  
*Irréductible* (ensemble) 60.  
*Isomorphisme* (des relations) 135.  
*Lattices* 94.  
*Le plus grand* (ensemble) 59, petit (ensemble) 59.  
*Limites des suites d'ensembles* (inférieure ou restreinte, supérieure ou complète) 102.  
*Logique intuitionniste* 13.  
*Loi d'absorption* 10, 68, — de double négation 14, — d'importation et d'exportation 10, — de Leibniz 26, — de réduction à l'absurde 14, — de tautologie 68.  
*Modus ponens* 5, 10, 21.  
*Multiplicative* (famille d'ensembles): simplement 167, complètement 176.  
*Mutuellement orthogonaux* (ensembles) 86.  
*Négation* 11, 14.  
*Négative* (d'une relation) 27.  
*Nommer* (un objet) 28.  
*Opération* 28, — (A) 185, — de Hausdorff 193.  
*Ordonné* (ensemble) 162.  
*Ordre* (dans un ensemble) 161.  
*Paire ordonnée* 47.  
*Partie aliquote* 55.  
*Partiellement ordonné* (ensemble) 163, 164.  
*Presque contenu* 83.  
*Principe d'abstraction* 136, — d'assertion 2, — de composition 10, — de contradiction 11, — de dualité 87, — de réduction 4, — de simplification 11, — d'homogénéité (des types) 51, — d'induction 165, — du thiers exclu 11.  
*Produit d'ensembles* 62, 66, — cartésien (combinatoire) 108, 130, — extérieur 132, — logique 7.  
*Propriété* 26.  
*Puissance d'ensembles* 151.  
*Quantificateurs* 30.  
*Réduction* (principe de) 4.  
*Reflexivité* 2.  
*Règle de déduction* 7, 20, — de substitution 20.  
*Relation* 26, 133, — asymétrique 27, — non symétrique 27, — symétrique 27, — transitive 27.  
*Réunion* (d'ensembles) 62.  
*Saturé* (ensemble) 60.  
*Séparabilité* des ensembles 181.  
*Séparables* (familles d'ensembles) 86.  
*Signe d'appartenance* 36, — d'équivalence 1, — d'implication 4, — d'incompatibilité 16.  
*Similitude* (des relations) 135.  
*Somme d'ensembles* 62, 65, — disjointe 75, — logique 7.  
*Sous-ensemble* 54, vrai — 55.  
*Structures* 94.  
*Substitution* (règle de) 20.  
*Suite d'ensemble croissante, décroissante* (descendante) 81.  
*Syllogisme catégorique* 9, — hypothétique 9.  
*Symétrie* 1, 27.  
*Système déterminant* 185.  
*Théorème de Cantor-Bernstein* 151, — de la diagonale 159, — de Souslin 190, — de Zorn 133.  
*Transitivité* 1, 27.  
*Valeurs logiques* 2.  
*Variable libre* 30, — liée 30.  
*Vide* (ensemble) 43.

## AUTEURS CITÉS

- Ackermann W. 7, 17, 18, 21.  
 Alexandroff P. 159.  
 Anaxagore 49.  
 Aristote 2, 20, 49.  
  
 Baire R. 58.  
 Banach S. 127, 146.  
 Bar-Hillel J. 51.  
 Bernays P. 22, 27, 30, 41, 42, 47, 58,  
 119, 133.  
 Bernstein F. 151.  
 Bertrand 38.  
 Bieberbach L. 150.  
 Birkhoff G. 94, 133, 164.  
 Boole G. 15, 34.  
 Borel E. 35, 43, 45, 157.  
 Brouwer L. E. J. 11, 13, 43.  
 Byrne L. 93.  
  
 Cantor G. 36, 151, 156  
 Carathéodory C. 62.  
 Carruccio E. 119.  
 Chittenden 159.  
 Church A. 13, 34, 42.  
 Couturat L. 3, 9, 32, 34, 37, 40, 49, 74,  
 100, 136.  
 Curry 51.  
  
 Dedekind R. 36.  
 De Morgan 15, 87.  
 Dirichlet-Lejeune P. 36.  
 Duns Scotus 14, 20.  
  
 Eilenberg E. 123.  
 Euclide 44.  
  
 Fraenkel A. 12, 14, 25, 31, 46, 47,  
 48, 50, 51, 58, 59, 66, 113.  
 Frege G. 34, 39, 51.  
 Fréchet M. 139, 157, 159.  
  
 Galilei Galileo 119.  
 García E. 29.  
 Gentzen G. 24.  
 Glivenko V. 13.  
 Goldbach 38.  
 Gödel K. 57, 58, 132, 153.  
 Grelling K. 51.  
  
 Hahn H. 31, 86.  
 Hartogs F. 153.  
 Hausdorff F. 55, 62, 108, 159, 168,  
 193, 194.  
 Herbrand J. 3.  
 Heyting A. 11, 23, 24.  
 Hilbert D. 6, 7, 11, 17, 18, 21, 22, 27,  
 30, 41, 42.  
 Hispanus P. J. 48.  
 Hopf H. 159.  
 Horn A. 83.  
 Huntington E. V. 23, 93.  
  
 Janiszewski S. 60.  
 Jevons Stanley 100.  
 Johannson 23.  
  
 Kantorovitch L. 195.  
 Kasner 119.  
 Knaster B. 44, 146.  
 Kolmogoroff A. 12, 171.  
 Koźniewski A. 172.  
 König D. 154.  
 Krokiewicz A. 48.  
 Kronecker 11, 36.  
 Kuratowski C. 34, 44, 46, 78, 86, 90,  
 96, 144, 152, 158, 159, 161, 172.  
  
 Leibniz 26, 34, 40, 48.  
 Leśniewski S. 2.  
 Leucippe 49.  
 Levi B. 59.  
 Lévy P. 12.  
 Lindenbaum A. 44, 47, 150, 153, 159,  
 172.  
 Livenson E. 195.  
 Lusin N. 40, 86, 138, 186, 192.  
  
 Łukasiewicz J. 2, 3, 5, 6, 8, 9, 17, 21,  
 22, 23.  
  
 Marczewski E. 136.  
 Mazurkiewicz S. 129.  
 Mc Kinsey J. C. C. 16.  
 Menger K. 64, 159.  
 Mertens 11.  
 Mirimanoff D. 49, 51, 53, 54, 113.  
 Mostowski A. 7, 14, 37, 41, 47, 52,  
 58, 92, 93, 135.  
 Müller F. 34, 74.  
  
 Netto E. 56.  
 Neumann v. J. 58.  
 Nicod J. G. P. 17, 24.  
  
 Ore O. 80, 138.  
  
 Parménide 48.  
 Peano G. 34, 39, 59.  
 Peirce Ch. 4, 15, 16, 34.  
 Piccard S. 123, 139, 168, 172, 173, 176.  
 Poincaré H. 48.  
 Pólya G. 143.  
 Foretzky 15, 74.  
 Posament T. 144.  
 Post E. L. 23, 124, 125.  
  
 Quine M. V. 16, 51, 71.  
  
 Ramsay 50.  
 Richard 51.  
 Robinson R. M. 58.  
 Rothberger F. 85.  
 Russell B. 3, 27, 30, 34, 49, 51, 59.  
  
 Saks S. 101.  
 Scholz H. 136.  
 Schopenhauer 14.  
 Schröder E. 34, 74.  
 Schweitzer H. 136.  
 Sergescu P. 48, 49.  
 Serret J. A. 38.  
 Sheffer 16.  
 Sierpiński W. 44, 45, 49, 57, 84, 85,  
 86, 108, 122, 127, 130, 150, 151, 152,  
 153, 154, 168, 171, 172, 176, 186,  
 190, 193, 194.  
  
 Skolem Th. 11, 36, 51, 59, 90, 94.  
 Souslin M. 186, 190  
 Steinhaus H. 14, 79.  
 Stone H. 98.  
 Sylvester J. J. 143.  
 Szegő G. 143.  
 Szele T. 133.  
 Szpilrajn E. 164, voir Marczewski E.  
  
 Tannery 49.  
 Tarski A. 2, 7, 13, 19, 23, 24, 33, 41,  
 51, 58, 60, 78, 83, 86, 90, 92, 132,  
 139, 141, 146, 151, 152, 153, 175.  
 Tchebycheff 38.  
 Teichmüller O. 132.  
 Teresaka H. 94, 96.  
 Tukey J. W. 133.  
  
 Vaidyanathaswamy R. 179.  
 Vailati 15.  
  
 Wajsberg M. 124.  
 Wavre R. 12.  
 Webb D. 124, 125.  
 Weyl H. 11.  
 Whitehead A. N. 3, 15, 27, 30, 34.  
 Whittaker J. M. 146.  
 Wiener N. 46.  
 Wilkosz W. 39.  
  
 Zarankiewicz K. 135, 136.  
 Zermelo E. 45, 46, 47, 50, 51, 54, 58,  
 59, 66, 78, 132, 134.  
 Zénon 48.  
 Zorn M. 133.  
  
 Żyliński E. 124

## TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE I. ALGÈBRE DES PROPOSITIONS.

§ 1. L'équivalence des propositions . . . . .	1
§ 2. L'implication . . . . .	3
§ 3. Produit logique et somme logique . . . . .	7
§ 4. Négation . . . . .	11
§ 5. Fonctions propositionnelles . . . . .	24
§ 6. Les quantificateurs . . . . .	30

## CHAPITRE II. ENSEMBLES, ÉLÉMENTS, SOUS-ENSEMBLES.

§ 7. Ensembles et leurs éléments . . . . .	35
§ 8. Egalité et inégalité des ensembles . . . . .	37
§ 9. Ensemble formé d'un seul élément . . . . .	39
§ 10. L'ensemble vide . . . . .	43
§ 11. Ensembles d'ensembles . . . . .	45
§ 12. Sous-ensembles . . . . .	54
§ 13. Le plus petit (le plus grand) ensemble à propriété donnée . . . . .	59

## CHAPITRE III. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES.

§ 14. Somme, produit et différence de deux ensembles . . . . .	62
§ 15. Somme et produit d'un ensemble quelconque d'ensembles . . . . .	65
§ 16. Propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles . . . . .	67
§ 17. Sommes disjointes . . . . .	75
§ 18. Complémentaires des ensembles et leurs propriétés . . . . .	86
§ 19. Parallélisme entre l'algèbre des propositions et l'algèbre des ensembles . . . . .	88
§ 20. L'expression $(A-B) \vdash (B-A)$ . . . . .	98
§ 21. Limites des suites d'ensembles . . . . .	102
§ 22. Produit cartésien de deux ensembles . . . . .	108

## CHAPITRE IV. FONCTIONS. IMAGES D'ENSEMBLES. RELATIONS.

§ 23. Fonctions; correspondances . . . . .	112
§ 24. Propriétés des images . . . . .	115
§ 25. Produit cartésien de plusieurs ensembles . . . . .	130
§ 26. Relations définies dans un ensemble. Principe d'abstraction . . . . .	133
§ 27. Théorèmes de Banach et de Cantor-Bernstein . . . . .	141
§ 28. Correspondances multivoques . . . . .	154
§ 29. La Topologie comme chapitre de la Théorie générale des ensembles . . . . .	155
§ 30. Théorème de la diagonalé . . . . .	159

## CHAPITRE V. FAMILLES D'ENSEMBLES ET OPÉRATIONS SUR CES FAMILLES.

§ 31. Familles d'ensembles. Familles d'ensembles établissant un ordre . . . . .	161
§ 32. Anneaux et corps. Opérations $s$ , $d$ et $\rho$ . . . . .	165
§ 33. Familles $\Phi_\alpha$ et $\Phi_\beta$ et leurs propriétés . . . . .	169
§ 34. Un théorème sur les anneaux d'ensembles . . . . .	179
§ 35. Théorèmes sur la séparabilité des ensembles . . . . .	181
§ 36. Opération $(A)$ et ses propriétés . . . . .	185
§ 37. Forme abstraite du Théorème de Souslin . . . . .	190
§ 38. Le crible de Lusin . . . . .	192
§ 39. Les opérations de Hausdorff . . . . .	193

INDEX TERMINOLOGIQUE . . . . .	199
AUTEURS CITÉS . . . . .	202

