MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXIII

ALGÈBRE DES ENSEMBLES

PAR

WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

WARSZAWA – WROCŁAW 1951

WARSZAWA (Poland) WROCŁAW
Śniadeckich 8 Świerczewskiego 19

PRINTED IN POLAND

Nakład 1100. Format B 1. Arkuszy 13. Papier h/drz. satyn. 80 gr.
Oddano do druku w marcu 1950 r. Druk ukończono w czerwcu 1951 r.
Zam. 366 Druk. Naukowa T. N. W. Warszawa, Śniadeckich 8. B-1-94.024

CHAPITRE I

ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

§ 1. L'équivalence des propositions. Soient A et B deux propositions quelconques. Nous écrirons

(1) $$A = B$$

dans le cas où elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses (et seulement dans ce cas). Deux propositions A et B satisfaisant à la formule (1) sont dites *équivalentes* et le symbole logique $=$ s'appelle *signe d'équivalence*.

Si l'on a la formule (1), on a évidemment aussi la formule

$$B = A;$$

la relation d'équivalence (entre propositions) est donc *symétrique*.

Si $A = B$ et $B = C$, on a évidemment $A = C$; la relation d'équivalence (entre propositions) est donc *transitive*.

Désignons par 1 une proposition vraie (p. ex. la proposition $2 \times 2 = 4$) et par 0 une proposition fausse (p. ex. la proposition $2 \times 2 = 5$).

La formule

$$P = 1$$

exprime donc que la proposition P est vraie, et la formule

$$P = 0$$

exprime que la proposition P est fausse.

6. Soit $f(X)$ une fonction qui fait correspondre aux ensembles $X \subset E$ des ensembles. Supposons qu'elle vérifie la condition

$$X \subset f(X) \quad \text{pour} \quad X \subset E \tag{9}$$

et supposons qu'il existe pour tout ensemble $Y \subset E$ au moins un ensemble $X \subset E$, tel que $f(X) = Y$. Démontrer qu'on a pour les ensembles finis $X \subset E$ la formule $f(X) = X$, et que cette formule peut être en défaut pour les ensembles X infinis.

D é m o n s t r a t i o n. Comme $0 \subset E$, il existe un ensemble $X \subset E$, tel que $f(X) = 0$ et, d'après (9), on a $X \subset f(X)$, donc $X = 0$. On a donc $f(0) = 0$. Supposons qu'il existe des ensembles finis $X_k \subset E$, ayant k éléments pour lesquels $f(X_k) \neq X_k$. Supposons que n est le plus petit nombre naturel pour lequel a lieu la dernière inégalité, et que l'ensemble X_n la vérifie. Or, d'après l'hypothèse sur la fonction f, il existe un ensemble $X \subset E$, tel que $f(X) = X_n$; on a donc $X \neq X_n$ et, étant donné que, d'après (9), $X \subset f(X) = X_n$, on conclut que l'ensemble X a au plus $n-1$ éléments. Il résulte donc de la définition du nombre n qu'on a $f(X) = X$, donc $X = X_n$, ce qui est impossible.

Nous avons ainsi démontré qu'on a $f(X) = X$ pour les ensembles finis $X \subset E$.

Soit maintenant E l'ensemble de tous les nombres naturels et définissons, pour $X \subset E$ la fonction $f(X)$ comme il suit. Si $X \subset E$ et l'ensemble $E - X$ est infini ou vide, posons $f(X) = X$ et, si l'ensemble $E - X$ est fini non vide, soit $f(X)$ l'ensemble formé de l'ensemble X et du plus grand nombre naturel appartenant à l'ensemble $E - X$. On a évidemment $f(E - \{1\}) = E \neq E - \{1\}$.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Notations

Termes

AUTEURS CITÉS

TABLE DES MATIÈRES