CHAPITRE V

FAMILLES D'ENSEMBLES ET OPÉRATIONS SUR CES FAMILLES

§ 31. Familles d'ensembles. Familles d'ensembles établissant un ordre. On appelle *famille d'ensembles* un ensemble dont les éléments sont des ensembles. Exemple: l'ensemble $U(E)$ de tous les sous-ensembles de l'ensemble E.

Si Φ est une famille de sous-ensembles d'un ensemble donné E, nous disons que la famille Φ *établit un ordre* dans l'ensemble E, lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes: [1])

1) X et Y étant deux ensembles quelconques de la famille Φ, on a $X \subset Y$ ou bien $Y \subset X$ (les familles Φ vérifiant cette condition sont dites *croissantes* ou familles d'ensembles croissants);

2) p et q étant deux éléments distincts de l'ensemble E, il existe au moins un ensemble H de la famille Φ, tel que l'ensemble $H \cdot \{p, q\}$ est formé d'un seul élément.

Soient p et q deux éléments distincts de E et soient H_1 et H_2 deux ensembles de la famille Φ vérifiant la condition 2). Chacun des ensembles $H_1 \cdot \{p, q\}$ et $H_2 \cdot \{p, q\}$ est donc formé d'un seul élément. D'après 1) on a $H_1 \subset H_2$ ou bien $H_2 \subset H_1$. Donc un au moins des ensembles $H_1 \cdot \{p, q\}$ et $H_2 \cdot \{p, q\}$ est contenu dans l'autre. Chacun de ces ensembles étant formé d'un seul élément, on peut en conclure qu'ils sont égaux. On a donc $H_1 \cdot \{p, q\} = H_2 \cdot \{p, q\}$. Le produit $H \cdot \{p, q\}$ ne dépend donc pas (pour p et q donnés) du choix de l'ensemble H qui vérifie la condition 2).

Si (pour deux éléments distincts p et q de E) on a $H \cdot \{p, q\} = \{p\}$, quel que soit l'ensemble H vérifiant la condition 2), posons $p \prec q$. Donc, si pour deux éléments distincts p et q de E on n'a pas $p \prec q$, on a $H \cdot \{p, q\} \neq \{p\}$, quel que soit l'ensemble H vérifiant la condi-

[1]) Cf. C. Kuratowski, Fundamenta Mathematicae 2, p. 161.

tion 2), donc $H\cdot\{p,q\}=\{q\}$ (puisque l'ensemble $H\cdot\{p,q\}$ est formé d'un seul élément); alors, vu la définition adoptée de la relation $\prec$, on a $q\prec p$. La relation $\prec$ est donc connexe (dans E).

On voit que la relation $\prec$ est *asymétrique* (dans E). En effet, si l'on avait, pour deux éléments p et q de E, à la fois $p\prec q$ et $q\prec p$, on aurait (pour les ensembles H vérifiant la condition 2)) $H\cdot\{p,q\}=\{p\}$ et $H\cdot\{p,q\}=\{q\}$, d'où $p=q$, ce qui est contraire à la définition de la relation $\prec$.

La relation $\prec$ est transitive. En effet, soient p, q et r trois éléments de E, tels que $p\prec q$ et $q\prec r$. La relation $\prec$ étant asymétrique, nous ne pouvons pas avoir $p=r$. On a donc $p\neq r$; vu la condition 2), il existe un ensemble H de la famille Φ, tel que l'ensemble $H\cdot\{p,r\}$ a un seul élément. D'autre part, puisque $p\prec q$ et $q\prec r$, il existe des ensembles H_1 et H_2 de la famille Φ, tels que $H_1\cdot\{p,q\}=\{p\}$ et $H_2\cdot\{q,r\}=\{q\}$. Or, d'après la propriété 1) de la famille Φ, on a $H_1\subset H_2$ ou bien $H_2\subset H_1$. Si $H_2\subset H_1$, alors, vu que $q\,\epsilon\, H_2$, on aurait $q\,\epsilon\, H_1$, contrairement à la formule $H_1\cdot\{p,q\}=\{p\}$. On a donc $H_1\subset H_2$ et, vu que $r\,\overline{\epsilon}\,H_2$ (puisque $H_2\cdot\{q,r\}=\{q\}$), on trouve $r\,\overline{\epsilon}\,H_1$. D'autre part $p\,\epsilon\, H_1$, d'où on a $H_1\cdot\{p,r\}=\{p\}$, donc $p\prec r$. Nous avons ainsi démontré que la relation $\prec$ est transitive.

Nous voyons que toute famille Φ de sous-ensembles de l'ensemble E, établissant un ordre dans E, détermine dans E une relation connexe, asymétrique et transitive.

D'autre part, si l'ensemble E est *ordonné*, c'est-à-dire si l'on a défini dans E une relation connexe, asymétrique et transitive, $\prec$, alors en posant, pour $p\,\epsilon\, E$, $H(p)=\mathop{E}\limits_{x\,\epsilon\, E}[x\prec p]$ on obtient une famille $\Phi=\{H(p)\}_{p\,\epsilon\, E}$ de sous-ensembles de E établissant un ordre dans E.

Ainsi l'étude des ensembles ordonnés se réduit à celle des familles d'ensembles établissant un ordre. La théorie des ensembles ordonnés peut donc être considérée comme un chapitre de la Théorie générale des ensembles. (Evidemment, un ordre d'éléments d'un ensemble, en tant que relation entre ses éléments, peut être aussi défini par un sous-ensemble de son carré combinatoire; cf. p. 133).

On démontre à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe, pour tout ensemble E, une relation établissant un ordre dans E (sans l'aide de l'axiome du choix, on ne sait pas démontrer qu'il existe une relation établissant un ordre dans l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle).

EXEMPLES. Soit E l'ensemble de tous les nombres réels et posons, pour $p\,\epsilon\, E$, $H(p)=\mathop{E}\limits_{x\,\epsilon\, E}[x<p]$. La famille de tous les ensembles $H(p)$, où $p\,\epsilon\, E$, ordonne l'ensemble E d'après la relation $<$. Or, la famille de tous les ensembles $H(r)$, où r est un nombre rationnel, ordonne aussi l'ensemble E d'après la relation $<$, de même que la famille de tous les ensembles $H(s)$, où s est une fraction décimale finie.

On peut démontrer que, pour tout ordre défini dans un ensemble E, il existe toujours parmi les familles de sous-ensembles de E établissant cet ordre une qui est la plus grande. Ainsi par exemple pour l'ensemble E de tous les nombres réels ordonné d'après la relation $<$, c'est la famille $\Phi=\{\Lambda\}+\{E\}+\{H(p)\}_{p\,\epsilon\, E}+\{H(p)+\{p\}\}_{p\,\epsilon\, E}$, où Λ désigne l'ensemble vide. Pour l'ensemble R de tous les nombres rationnels ordonné d'après la relation $<$, la plus grande famille de sous-ensembles de R établissant cet ordre est, comme on le voit facilement, la famille de tous les ensembles RX, où $X\,\epsilon\,\Phi$. Or, il n'existe pas la plus petite famille établissant l'ordre $<$ dans R.

Un ensemble E est dit *partiellement ordonné* par la relation R, si, a et b étant deux éléments de E (distincts ou non), une tout au plus des formules

$$aRb \quad \text{et} \quad bRa$$

est vraie, et si pour $a\,\epsilon\, E$, $b\,\epsilon\, E$ et $c\,\epsilon\, E$ les formules

$$aRb \quad \text{et} \quad bRc$$

entraînent toujours la formule aRc; autrement dit, si la relation R est asymétrique et transitive.

Si la relation R ordonne partiellement l'ensemble E, on peut faire correspondre à tout élément p de E un sous-ensemble $f(p)$ de E, de sorte que, pour $a\,\epsilon\, E$ et $b\,\epsilon\, E$, la formule aRb équivaut à la condition que $f(a)$ soit un vrai sous-ensemble de $f(b)$. A ce but il suffit de poser, pour $p\,\epsilon\, E$, $f(p)=\{p\}+\mathop{E}\limits_{x\,\epsilon\, E}[xRp]$. D'autre part, toute famille de sous-ensembles d'un ensemble est partiellement (ou entièrement) ordonnée par la relation ARB qui exprime que A est un vrai sous-ensemble de l'ensemble B. L'étude des ensembles partiellement ordonnés équivaut donc à l'étude des familles d'ensembles ordonnées par rapport à la relation d'inclusion ($\subset$).

La relation R d'inclusion des ensembles satisfait évidemment aux conditions suivantes:

1) XRX pour tous les X;

2) si XRY et YRX, alors $X=Y$;

3) si XRY et YRZ, alors XRZ.

M. Garrett Birkhoff appelle *partiellement ordonné* un ensemble dans lequel on a défini une relation R satisfaisant aux conditions 1, 2 et 3 [1]).

L'étude de ces ensembles équivaut à l'étude des familles d'ensembles partiellement ordonnées par la relation $\subset$.

On peut démontrer que, si un ensemble E est partiellement ordonné par la relation R, E peut être ordonné (par la relation $\prec$) de sorte que, pour deux éléments a et b de E, la formule aRb entraîne toujours la formule $a \prec b$. La démonstration est cependant beaucoup plus difficile qu'on ne pourrait le croire; elle utilise l'axiome du choix [2]).

Exemples d'ensembles partiellement ordonnés.

1. L'ensemble E de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle devient partiellement ordonné par la relation fRg qui exprime que pour tout x réel on a $f(x)<g(x)$.

2. L'ensemble E de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle devient partiellement ordonné par la relation fRg qui exprime qu'on a $\lim\limits_{x=+\infty}(f(x)/g(x))=0$.

3. L'ensemble de tous les nombres naturels devient partiellement ordonné par la relation $a|b$ qui exprime que a est un diviseur de b.

EXERCICE. Démontrer que toute famille F d'ensembles devient partiellement ordonnée par la relation R définie comme il suit: on a XRX pour $X \epsilon F$ et, X et Y étant deux ensembles distincts de la famille F, on a XRY dans ce cas et seulement dans ce cas où l'ensemble $X-Y$ est infini et l'ensemble $Y-X$ fini.

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer que la relation R est transitive. Or, cela résulte tout de suite des formules

$$X-Z \supset (Y-Z)-(Y-X) \quad \text{et} \quad Z-X \subset (Z-Y)+(Y-X),$$

quels que soient les ensembles X, Y et Z.

[1]) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. vol. 25, New York 1940, p. 5.

[2]) Voir E. Szpilrajn, Fund. Math. 16, p. 386.

Le théorème suivant peut être considéré comme principe d'induction pour les ensembles quelconques.

Théorème. *Soient E un ensemble donné, Φ une famille complètement additive [1]) d'ensembles croissants dont la somme est l'ensemble E, et P un sous-ensemble donné de E. Admettons 1^0 qu'il existe un ensemble H_0 de la famille Φ, tel que $H_0 \subset P$, et 2^0 que, si $H \epsilon \Phi$ et $E \neq H \subset P$, il existe un ensemble $H' \epsilon \Phi$, tel que $H \subset H' \subset P$ et $H' \neq H$. Alors $E=P$.*

Démonstration. Soit S la somme de tous les ensembles de la famille Φ qui sont $\subset P$. D'après 1^0 et vu que la famille Φ est complètement additive, on a $S \epsilon \Phi$ et, évidemment, $S \subset P$. Si $E \neq S$, il existerait, d'après 2^0, un ensemble $S' \epsilon \Phi$, tel que $S \subset S' \subset P$ et $S' \neq S$. Vu la définition de l'ensemble S, S' serait un terme de la somme S et on aurait $S' \subset S$, ce qui est incompatible avec $S \subset S' \neq S$. On a donc $E=S$, ce qui donne, d'après $S \subset P \subset E$, l'égalité $E=P$, c. q. f. d.

§ 32. Anneaux et corps. Opérations s, d **et** ρ. Dans la fonction $U(E)$ (nous avons désigné par $U(E)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble E) la variable est un ensemble et la valeur de la fonction est une famille d'ensembles. Or, on considère souvent des fonctions où la variable est une famille d'ensembles et la valeur de la fonction est un ensemble, ainsi par exemple les fonctions $S(F)=\sum\limits_{E \epsilon F} E$ et $P(F)=\prod\limits_{E \epsilon F} E$, c'est-à-dire la somme, respectivement le produit de tous les ensembles de la famille F.

Nous donnerons maintenant des exemples, importants dans la théorie des ensembles (surtout des ensembles de points), des fonctions où la variable ainsi que les valeurs sont des familles d'ensembles.

Désignons, pour toute famille Φ d'ensemles, par Φ_s, respectivement par Φ_d, la famille de tous les ensembles qui sont des sommes, respectivement des produits d'un nombre fini d'ensembles de la famille Φ (suivant la notation ordinaire des fonctions, on devrait écrire $s(\Phi)$ au lieu de Φ_s, et $d(\Phi)$ au lieu de Φ_d).

Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a évidemment:

$$\Phi \subset \Phi_s, \quad \Phi \subset \Phi_d, \quad \Phi_{ss}=\Phi_s, \quad \Phi_{dd}=\Phi_d$$

(Φ_{ss} désigne ici la famille Ψ_s, où $\Psi=\Phi_s$).

[1]) Une famille Φ d'ensembles est dite complètement additive quand, Φ_1 étant une sous-famille quelconque (non vide) de Φ, la somme de tous les ensembles constituant Φ_1 appartient à Φ (voir p. 176).

Il existe des familles finies Φ d'ensembles, pour lesquelles $\Phi \neq \Phi_s = \Phi_d$, par exemple la famille Φ formée de l'ensemble vide et de cinq ensembles: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$ et $\{1,2,3,4\}$; on a ici $\Phi_s = \Phi_d = \Phi + \{\{1,2\}\} \neq \Phi$, vu que $\{1,2\} \overline{\epsilon} \Phi$.

D'après la notation adoptée, Φ_{sd} est la famille de tous les ensembles qui sont des produits d'un nombre fini d'ensembles de la famille Φ_s, et Φ_{ds} la famille de tous les ensembles qui sont des sommes d'un nombre fini d'ensembles de la famille Φ_d. Nous allons démontrer qu'on a toujours

(1) $$\Phi_{sd} = \Phi_{ds}.$$

En effet, pour toute famille Φ d'ensembles on a $\Phi_{sd} \subset \Phi_{ds}$, puisque, en développant le produit d'un nombre fini d'ensembles de la famille Φ_s, on obtient une somme d'un nombre fini d'ensembles dont chacun est un produit d'un nombre fini d'ensembles de la famille Φ.

Pour démontrer que $\Phi_{ds} \subset \Phi_{sd}$, désignons par Φ' la famille de tous les ensembles qui sont complémentaires CE des ensembles E de la famille Φ par rapport à la somme S de tous les ensembles de la famille Φ. Il résulte des formules de De Morgan que, si $E \epsilon \Phi_{ds}$, on a $CE \epsilon \Phi'_{sd}$. Or, d'après $\Phi'_{sd} \subset \Phi'_{ds}$, on a $CE \epsilon \Phi'_{ds}$, d'où en passant aux complémentaires (et en vertu des formules de De Morgan) $E \epsilon \Phi_{sd}$. On a donc $\Phi_{ds} \subset \Phi_{sd}$.

La formule (1) est ainsi établie. Il en résulte que (pour toute famille Φ d'ensembles) $\Phi_{sds} = \Phi_{dss} = \Phi_{ds} = \Phi_{sd}$, d'où $\Phi_{sdsd} = \Phi_{sdd} = \Phi_{sd}$. Pour toute famille Φ d'ensembles, les termes de la suite

$$\Phi,\ \Phi_s,\ \Phi_{sd},\ \Phi_{sds},\ \Phi_{sdsd},\ \Phi_{sdsds},\ \ldots$$

sont donc égaux à partir du troisième. Pareillement pour la suite (de familles d'ensembles)

$$\Phi,\ \Phi_d,\ \Phi_{ds},\ \Phi_{dsd},\ \Phi_{dsds},\ \Phi_{dsdsd},\ \ldots.$$

Une famille F d'ensembles, pour laquelle on a $\Phi_s = \Phi_d = \Phi$, est dite *anneau d'ensembles*. Pour qu'une famille Φ d'ensembles soit anneau, il faut et il suffit que la somme ainsi que le produit de chaque paire d'ensembles de la famille Φ appartiennent à cette famille.

Une famille Φ d'ensembles, pour laquelle $\Phi_s = \Phi$, est dite (simplement) additive et la famille, pour laquelle $\Phi_d = \Phi$, est dite (simplement) multiplicative. Un anneau d'ensembles est donc une famille d'ensembles (simplement) additive et en même temps (simplement) multiplicative.

Φ_{sd} est le plus petit anneau d'ensembles contenant la famille Φ (c'est-à-dire que Φ_{sd} est un anneau d'ensembles contenant la famille Φ et qui est contenu dans tout anneau d'ensembles qui contient Φ).

Soit F une famille (simplement) additive d'ensembles. On peut donc effectuer, sur les ensembles de la famille F, l'opération „+" qui est commutative, associative et telle que, pour tout élément a de la famille F, on a $a + a = a$.

Soit maintenant E un ensemble quelconque, tel qu'une opération désignée par le symbole $+$ est définie pour ses éléments. Supposons que cette opération est commutative, associative et vérifiant la relation $a+a=a$ pour $a \epsilon E$. On peut faire correspondre à tout élément a de E un sous-ensemble $S(a)$ de E, de sorte qu'on ait $S(a) \neq S(b)$ pour $a \epsilon E$, $b \epsilon E$ et $a \neq b$, et que, pour $a \epsilon E$, $b \epsilon E$ et $c \epsilon E$, l'égalité $a = b + c$ soit équivalente à l'égalité $S(a) = S(b) + S(c)$.

Pour obtenir une telle correspondance il suffit de faire correspondre à tout élément a de E l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas de la forme $a+x$, où $x \epsilon E$. Or, il est à remarquer que, si l'on faisait correspondre à tout élément a de E l'ensemble $P(a)$ de tous les éléments de E qui sont de la forme $a+x$, où $x \epsilon E$, on aurait $P(a) \neq P(b)$ pour $a \epsilon E$, $b \epsilon E$ et $a \neq b$, mais, pour $a \epsilon E$, $b \epsilon E$ et $c \epsilon E$, l'égalité $a = b + c$ serait équivalente à l'égalité $P(a) = P(b) \cdot P(c)$.

Désignons, pour toute famille Φ d'ensembles, par Φ_ρ la famille de tous les ensembles qui ou bien appartiennent à Φ ou bien sont des différences de deux ensembles de la famille Φ. On a évidemment, pour toute famille Φ d'ensembles,

$$\Phi \subset \Phi_\rho.$$

Il existe des familles Φ d'ensembles, pour lesquelles toutes les familles

$$\Phi,\quad \Phi_\rho,\quad \Phi_{\rho\rho},\quad \Phi_{\rho\rho\rho},\ \ldots$$

sont distinctes; ainsi par exemple la famille Φ formée de l'ensemble de tous les nombres naturels et de tous les ensembles formés d'un seul nombre naturel.

Si $\Phi=\Phi_\rho$, on a $\Phi=\Phi_d$ puisqu'on a $AB=A-(A-B)$.

Il peut arriver cependant que l'on ait $\Phi=\Phi_\rho$ et $\Phi\neq\Phi_s$ (par exemple pour une famille formée de l'ensemble vide et de deux ensembles disjoints non vides). Il existe aussi des familles Φ d'ensembles, pour lesquelles on a $\Phi=\Phi_d$ et $\Phi\neq\Phi_\rho$ (par exemple la famille Φ formée d'un seul ensemble non vide, ou bien la famille Φ formée de deux ensembles non vides dont l'un est une partie aliquote de l'autre).

Une famille Φ d'ensembles pour laquelle on a $\Phi=\Phi_s=\Phi_\rho$ est dite *corps d'ensembles*. Pour qu'une famille Φ d'ensembles soit corps, il faut et il suffit que toute somme et toute différence de deux ensembles de Φ appartienne a Φ. Exemple: la famille de tous les sous-ensembles finis (l'ensemble vide y inclus) d'un ensemble donné.

EXERCICES. 1. Démontrer que, si Φ est la famille de tous les intervalles $a\leqslant x<b$ (a et b réels), la familles Φ_s est un corps d'ensembles.

2. Démontrer que les ensembles des points de l'intervalle (0,1) qui sont des sommes d'un nombre fini d'intervalles ouverts et d'un ensemble fini, forment un corps d'ensembles.

La multiplication d'un nombre fini d'ensembles se réduisant aux soustractions (§ 16), on voit que tout *corps d'ensembles* est un *anneau d'ensembles*, mais pas inversement. Ainsi par exemple la famille formée de deux ensembles distincts dont l'un est un sous-ensemble de l'autre, est un anneau d'ensembles sans être corps d'ensembles. On peut démontrer que $\Phi_{\rho s\rho s}$ (aussi $\Phi_{\rho ds}$) est le plus petit corps d'ensembles contenant la famille Φ d'ensembles) [1]. On peut aussi démontrer que, si l'on désigne par $\Psi=\Phi_{ds}$ le plus petit anneau contenant Φ, $\Psi_{\rho s}$ est alors le plus petit corps contenant Φ [2]).

Théorème 3. *Si la famille Φ d'ensembles est un anneau, $\Phi_{\rho\rho}$ est la famille de toutes les sommes de deux ensembles de la famille Φ_ρ* [3]).

[1]) Voir ma note dans Fundamenta Mathematicae **30**, p. 14. Il existe des familles finies d'ensembles, telles que $\Phi_{\rho s\rho s}\neq\Phi_{\rho s\rho}$, par exemple la famille formée de trois ensembles $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$ et $\{2,4\}$; voir S. Piccard, Fundamenta Mathematicae **26**, p. 265.

[2]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 16.

[3]) W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae **3**, p. 119, lemmes 1 et 2.

Démonstration. Si $E\epsilon\Phi_{\rho\rho}$, on a

$$E=(E_1-E_2)-(E_3-E_4)$$

où $E_i\epsilon\Phi$ pour $i=1,2,3,4$. Or, on a l'identité

$$(E_1-E_2)-(E_3-E_4)=[E_1-(E_2+E_3)]+(E_1E_4-E_2).$$

Si Φ est un anneau d'ensembles, on a $E_2+E_3\epsilon\Phi$ et $E_1E_4\epsilon\Phi$; il résulte donc de notre identité que E est une somme de deux ensembles de la famille Φ_ρ.

D'autre part, soit E une somme de deux ensembles de la famille Φ_ρ; nous pouvons donc poser

$$E=(E_1-E_2)+(E_3-E_4)$$

où $E_i\epsilon\Phi$, pour $i=1,2,3,4$. Or, on a l'identité

$$(E_1-E_2)+(E_3-E_4)=[(E_1+E_3)-E_2E_4]-[(E_2+E_4)-(E_1E_4+E_2E_3)].$$

Φ étant un anneau d'ensembles, les ensembles E_1+E_3, E_2E_4, E_2+E_4 et $E_1E_4+E_2E_3$ appartiennent à Φ. On a donc $E\epsilon\Phi_{\rho\rho}$. Notre théorème est ainsi démontré.

§ 33. Familles Φ_σ et Φ_δ et leurs propriétés. Désignons, pour toute famille Φ d'ensembles, par Φ_σ, respectivement par Φ_δ, la famille de tous les ensembles E de la forme

$$E=E_1+E_2+E_3+\ldots, \tag{1}$$

respectivement de la forme

$$E=E_1E_2E_3\ldots, \tag{2}$$

où $E_1, E_2, \ldots$ est une suite d'ensembles de la famille Φ (suivant la notation ordinaire des fonctions, on devrait écrire $\sigma(\Phi)$ au lieu de Φ_σ et $\delta(\Phi)$ au lieu de Φ_δ).

Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, nous avons évidemment:

$$\Phi\subset\Phi_\sigma \quad \text{et} \quad \Phi\subset\Phi_\delta, \tag{3}$$

puisque dans les formules (1) et (2) on peut poser $E_n=E$ pour $n=1,2,\ldots$, où E est un ensemble donné de la famille Φ.

Il existe des familles Φ d'ensembles, telles que $\Phi\neq\Phi_\sigma=\Phi_\delta$ (exemple: la famille finie Φ du paragraphe précédent, pour laquelle $\Phi\neq\Phi_s=\Phi_d$).

Il existe aussi des familles Φ d'ensembles, telles que $\Phi = \Phi_\sigma \neq \Phi_\delta$ (exemple: famille formée de trois ensembles $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ et $\{1,2,3\}$) ainsi que des familles Φ, telles que $\Phi = \Phi_\delta \neq \Phi_\sigma$ (exemple: famille formée de trois ensembles 0, $\{1\}$ et $\{2\}$).

On voit sans peine que $(\Phi_\sigma = \Phi_\rho = \Phi) \rightarrow (\Phi_\delta = \Phi)$.

Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a

$$\Phi_{\sigma\sigma} = \Phi_\sigma \quad \text{et} \quad \Phi_{\delta\delta} = \Phi_\delta. \tag{4}$$

En effet, si $E \in \Phi_{\delta\delta}$, il existe une suite infinie $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots$ d'ensembles de Φ_δ, telle que $E = E^{(1)} E^{(2)} \ldots$. Puisque $E^{(n)} \in \Phi_\delta$ pour n donné, il existe une suite infinie $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots$ d'ensembles de Φ, telle que $E^{(n)} = E_1^{(n)} E_2^{(n)} \ldots$. On a donc

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}. \tag{5}$$

Les ensembles formant la suite double

$$\begin{array}{l} E_1^{(1)},\ E_2^{(1)},\ E_3^{(1)}, \ldots \\ E_1^{(2)},\ E_2^{(2)},\ E_3^{(2)}, \ldots \\ E_1^{(3)},\ E_2^{(3)},\ E_3^{(3)}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

peuvent être rangés par la *méthode de la diagonale* en une suite simple

$$E_1^{(1)},\ E_1^{(2)},\ E_2^{(1)},\ E_1^{(3)},\ E_2^{(2)},\ E_3^{(1)},\ E_1^{(4)}, \ldots$$

où l'on a écrit d'abord le terme unique $E_1^{(1)}$, pour lequel la somme des indices (supérieur et inférieur) est 2, ensuite les deux termes de la deuxième diagonale $E_1^{(2)}$ et $E_2^{(1)}$, pour lesquels la somme des indices est 3 (en les ordonnant d'après les indices inférieurs croissants), ensuite les 3 termes de la troisième diagonale $E_1^{(3)}, E_2^{(2)}, E_3^{(1)}$, pour lesquels la somme des indices est 4, et ainsi de suite.

D'après (5) nous avons évidemment

$$E = E_1^{(1)} E_1^{(2)} E_2^{(1)} E_1^{(3)} E_2^{(2)} E_3^{(1)} E_1^{(4)} \ldots$$

(puisque le produit des ensembles ne dépend ni de leur ordre ni de leur groupement), donc $E \in \Phi_\delta$. D'où $\Phi_{\delta\delta} \subset \Phi_\delta$. D'autre part, d'après $\Phi \subset \Phi_\delta$ on a $\Phi_\delta \subset \Phi_{\delta\delta}$. Ainsi $\Phi_{\delta\delta} = \Phi_\delta$. On démontre pareillement la première des formules (4).

$\Phi_{\sigma\delta}$ est évidemment la famille de tous les ensembles E ayant la forme

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)} \quad \text{où} \quad E_k^{(n)} \in \Phi \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots,$$

et $\Phi_{\delta\sigma}$ est la famille de tous les ensembles E ayant la forme

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)} \quad \text{où} \quad E_k^{(n)} \in \Phi \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

On peut démontrer qu'il existe des familles Φ d'ensembles, telles que $\Phi_{\sigma\delta} \neq \Phi_{\delta\sigma}$ (exemple: la famille Φ de tous les segments fermés d'une droite [1]), mais cette démonstration n'est pas facile.

On démontre sans peine que, pour tout anneau Φ d'ensembles, $\Phi_{\sigma d} = \Phi_\sigma$ et on en déduit à l'aide des formules de De Morgan que, pour tout anneau Φ d'ensembles, $\Phi_{\delta s} = \Phi_\delta$.

Il existe des familles Φ d'ensembles, pour lesquelles

$$\Phi \neq \Phi_\sigma = \Phi_{\sigma\delta}$$

(la famille $\Phi = \{0, \{1\}, \{2\}\}$ par exemple), ainsi que les familles Φ pour lesquelles

$$\Phi \neq \Phi_\sigma \neq \Phi_{\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma}$$

(la famille $\Phi = \{\{1\}, \{2\}\}$ par exemple). Or, sans utiliser *l'hypothèse du continu*, nous ne savons pas démontrer l'existence des familles Φ d'ensembles, pour lesquelles

$$\Phi_{\sigma\delta} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta}\ ^{2});$$

dans l'état actuel de la science nous ne savons pas décider (même en utilisant l'hypothèse du continu) s'il existe une famille Φ d'ensembles, pour laquelle

$$\Phi_{\sigma\delta\sigma} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}\ ^{3}).$$

---

[1]) On peut démontrer que l'ensemble de tous les nombres rationnels appartient ici à la famille $\Phi_{\delta\sigma} - \Phi_{\sigma\delta}$.

[2]) Voir ma Note dans Recueil Math. Moscou **43**, p. 303.

[3]) Voir A. Kolmogoroff, Fundamenta Mathematicae **25**, p. 578 (Problème 65) et. W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae **30**, p. 65.

On peut démontrer que, si Φ est une famille d'ensembles dont les éléments sont des nombres naturels, on a

$\Phi_{\sigma\delta}=\Phi_{\delta\sigma}$ [1]), $\Phi_{\rho\sigma\rho\sigma\rho}=\Phi_{\rho\sigma\rho\sigma}$ [2]), $\Phi_{\rho\delta\rho\delta\rho}=\Phi_{\rho\delta\rho\delta}$ [3]), $\Phi_{\rho\sigma\delta\sigma}=\Phi_{\rho\sigma\delta\rho}=\Phi_{\rho\sigma\delta}$ [4]).

Φ étant une famille donnée, il existe toujours des familles Ψ pour lesquelles $\Psi\subset\Phi$ et $\Psi=\Psi_\sigma=\Psi_\delta$, par exemple la famille Ψ de tous les sous-ensembles de l'ensemble $\sum\limits_{E\in\Phi}E$. Le produit P de toutes ces familles Ψ est la plus petite famille contenant la famille Ψ et pour laquelle toute somme et tout produit d'une suite infinie d'ensembles de la famille Φ appartient à la famille P (en d'autres termes, P est la plus petite famille d'ensembles pour laquelle $\Phi\subset P=P_\sigma=P_\delta$). Désignons cette famille P d'ensembles par Φ_B. Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a

$$\Phi\subset\Phi_B=\Phi_{B\sigma}=\Phi_{B\delta}=\Phi_{BB}$$

et, quelles que soient les familles Φ et Φ' d'ensembles,

$$(\Phi\subset\Phi')\to(\Phi_B\subset\Phi'_B).$$

On peut démontrer que $\Phi_{\rho B}$ est la plus petite famille Ψ d'ensembles, telle que $\Phi\subset\Psi=\Psi_\rho=\Psi_\sigma$. Or, il existe des familles Φ d'ensembles, telles que $\Phi_{B\rho}\neq\Phi_{\rho B}$, la famille $\Phi=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ par exemple (puisque $\{1,3\}\in\Phi_{\rho B}-\Phi_{B\rho}$).

La famille Φ_B peut être décomposée en sous-familles dites *classes* de Borel comme il suit.

Soit M le plus petit ensemble de familles d'ensembles, pour lequel 1° $\Phi\in M$ et 2° si $\Psi=\Psi_1+\Psi_2\ldots$, où $\Psi_1\subset\Psi_2\subset\ldots$, et si $\Psi_n\in M$ pour $n=1,2,\ldots$, alors $\Psi_\sigma\in M$ et $\Psi_\delta\in M$. L'ensemble M existe et il est unique; c'est le produit de tous les ensembles M satisfaisant aux conditions 1° et 2°.

Les éléments de l'ensemble M sont les *classes boréliennes* déterminées par la famille Φ d'ensembles [5]).

[1]) Voir W. Sierpiński, C. R. Acad. Bulgare 53 (1935), p. 187, formule (18). Cf. aussi le théorème 9 de A. Koźniewski et A. Lindenbaum dans Fund. Math. 25, p. 353 (pour $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=\gamma=1$).

[2]) W. Sierpiński, l. c. p. 182, formule (3); aussi S. Piccard, Fund. Math. 26, p. 265.

[3]) W. Sierpiński, l. c., p. 191, formule (24).

[4]) W. Sierpiński, l. c., p. 190.

[5]) Cf. C. Kuratowski, Fundamenta Mathematicae 3, p. 22 § 7.

Les classes Ψ pour lesquelles on a $\Psi_\sigma=\Psi$ (respectivement $\Psi_\delta=\Psi$) sont dites dénombrablement *additives* (respectivement *multiplicatives*).

Les classes boréliennes pour la famille Φ sont les familles suivantes:

$$\Phi,\ \Phi_\sigma,\ \Phi_{\sigma\delta},\ \Phi_{\sigma\delta\sigma},\ \ldots,$$

$$\Phi_\delta,\ \Phi_{\delta\sigma},\ \Phi_{\delta\sigma\delta},\ \ldots,$$

$$\Psi_\sigma=(\Phi+\Phi_\sigma+\Phi_{\sigma\delta}+\Phi_{\sigma\delta\sigma}+\cdots)_\sigma,\ \Psi_{\sigma\delta},\ \Psi_{\sigma\delta\sigma},\ \ldots,$$

$$\Psi_\delta,\ \Psi_{\delta\sigma},\ \Psi_{\delta\sigma\delta},\ \ldots,$$

$$\Theta_\sigma=(\Psi+\Psi_\sigma+\Psi_{\sigma\delta}+\cdots)_\sigma,\ \Theta_{\sigma\delta},\ \ldots;\ \Theta_\delta,\ \Theta_{\delta\sigma},\ \ldots,$$

$$(\Phi_\sigma+\Psi_\sigma+\Theta_\sigma+\cdots)_\sigma,\ (\Phi_\sigma+\Psi_\sigma+\Theta_\sigma+\cdots)_\delta,\quad\text{etc.}$$

On peut démontrer que $\Phi_B=\sum\limits_{\Psi\in M}\Psi$.

On peut aussi démontrer, ce qui n'est pas d'ailleurs facile, qu'il existe des familles Φ d'ensembles, pour lesquelles toute classe borélienne est $\neq\Phi_B$ (exemple: la famille Φ de tous les segments fermés d'une droite).

Désignons maintenant par Φ_Σ, respectivement Φ_Δ, la famille de tous les ensembles qui sont des sommes, respectivement des produits, d'un ensemble quelconque d'ensembles appartenant à la famille Φ. On démontre qu'on a, quelle que soit la famille Φ d'ensembles,

$$\Phi_{\Sigma\Sigma}=\Phi_\Sigma,\quad \Phi_{\Delta\Delta}=\Phi_\Delta,\quad \Phi_{\Sigma\Delta}=\Phi_{\Delta\Sigma}$$

$$(\text{donc}\quad \Phi_{\Sigma\Delta\Sigma}=\Phi_{\Sigma\Delta}\quad\text{et}\quad \Phi_{\Delta\Sigma\Delta}=\Phi_{\Delta\Sigma})$$

et

$$\Phi_{\rho\Sigma\rho\Sigma\rho}=\Phi_{\rho\Sigma\rho\Sigma}$$ [1])

($\Phi_{\rho\Sigma\rho\Sigma}$ est la plus petite famille Ψ d'ensembles, pour laquelle $\Phi\in\Psi=\Psi_\rho=\Psi_\Sigma$).

L'idée la plus simple de démontrer la formule $\Phi_{\Sigma\Delta}=\Phi_{\Delta\Sigma}$ est la suivante. Soit Φ une famille donnée d'ensembles et soit E un ensemble de la famille $\Phi_{\Sigma\Delta}$. Il existe donc une sous-famille Ψ de la famille Φ_Σ, telle que

$$E=\prod_{X\in\Psi}X. \tag{1}$$

[1]) Voir S. Piccard, Fund. Math. 26, p. 264, Th. II.

D'après $\Psi \subset \Phi_\Sigma$ on a, pour $X \epsilon \Psi$, $X \epsilon \Phi_\Sigma$; l'ensemble X est donc la somme d'une famille Θ_X d'ensembles de la famille Φ, ainsi

(2) $$X = \sum_{Y \epsilon \Theta_X} Y \quad \text{où} \quad \Theta_X \subset \Phi \qquad (\text{pour } X \epsilon \Psi).$$

Soit F la famille de toutes les fonctions $f(X)$ qui font correspondre à tout ensemble $X \epsilon \Psi$ un ensemble de la famille Θ_X. Soit f une fonction donnée de la famille F; on a donc $f(X) \epsilon \Theta_X$ pour $X \epsilon \Psi$ et, d'après (2), $f(X) \subset X$ pour $X \epsilon \Psi$, donc, d'après (1), $\prod_{X \epsilon \Psi} f(X) \subset E$ pour $f \epsilon F$; on a donc

(3) $$\sum_{f \epsilon F} \prod_{X \epsilon \Psi} f(X) \subset E.$$

D'autre part, soient p un élément donné de l'ensemble E et X un ensemble quelconque de la famille Ψ. D'après (1) on a donc $p \epsilon X$ et, étant donné $X \epsilon \Psi$, la formule (2); nous en concluons qu'il existe un ensemble $Y_{p,X} \epsilon \Theta_X$, tel que $p \epsilon Y_{p,X}$. Posons $f_p(X) = Y_{p,X}$ pour $X \epsilon \Psi$; on aura évidemment $f_p \epsilon F$ et $p \epsilon f_p(X)$ pour $X \epsilon \Psi$, donc $p \epsilon \prod_{X \epsilon \Psi} f_p(X)$, d'où $p \epsilon \sum_{f \epsilon F} \prod_{X \epsilon \Psi} f(X)$ pour $p \epsilon E$, ce qui donne

(4) $$E \subset \sum_{f \epsilon F} \prod_{X \epsilon \Psi} f(X).$$

Les formules (3) et (4) donnent l'égalité

(5) $$E = \sum_{\epsilon F} \prod_{X \epsilon \Psi} f(X).$$

Or $f(X) \epsilon \Theta_X \subset \Phi$, donc $f(X) \epsilon \Phi$ pour $X \epsilon \Psi$, $f \epsilon F$. La formule (5) prouve que $E \epsilon \Phi_{\Delta\Sigma}$. Ceci étant démontré pour tout ensemble arbitraire de la famille $\Phi_{\Sigma\Delta}$, on a $\Phi_{\Sigma\Delta} \subset \Phi_{\Delta\Sigma}$.

Soient S la somme de tous les ensembles de la famille Φ et Φ' la famille de tous les ensembles $S - E$ où $E \epsilon \Phi$. La formule $\Phi_{\Sigma\Delta} \subset \Phi_{\Delta\Sigma}$ étant démontrée pour toute famille Φ d'ensembles, on a aussi $\Phi'_{\Sigma\Delta} \subset \Phi'_{\Delta\Sigma}$. Or, d'après la formule généralisée de De Morgan, $E \epsilon \Phi_{\Delta\Sigma}$ donne $S - E \epsilon \Phi'_{\Sigma\Delta}$, donc $S - E \epsilon \Phi'_{\Delta\Sigma}$; en appliquant encore une fois la formule de De Morgan, on a $E \epsilon \Phi_{\Sigma\Delta}$. On a donc $\Phi_{\Delta\Sigma} \subset \Phi_{\Sigma\Delta}$ et, comme nous avons trouvé ci-dessus l'inclusion inverse, on a $\Phi_{\Sigma\Delta} = \Phi_{\Delta\Sigma}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer que cette démonstration utilise l'axiome du choix, puisque, pour tout ensemble $X \epsilon \Psi$, nous avons choisi un terme $Y_{p,X}$ de la somme (2) sans fixer une loi de tels choix. Pour éviter l'appel à l'axiome du choix, on pourrait modifier notre démonstration comme il suit [1]).

Soit $E \epsilon \Phi_{\Sigma\Delta}$; on a donc la formule (1) où $\Psi \subset \Phi_\Sigma$. Désignons par P_p, pour $p \epsilon E$, le produit de tous les ensembles $Y \epsilon \Phi$, tels que $p \epsilon Y$. Nous aurons évidemment $P_p \epsilon \Phi_\Delta$ pour $p \epsilon E$. Je dis que

(6) $$E = \sum_{p \epsilon E} P_p.$$

Soit en effet $q \epsilon E$. D'après (1) il existe donc un ensemble $X \epsilon \Psi$ tel que $q \epsilon X$ et, puisque $X \epsilon \Psi \subset \Phi_\Sigma$, il existe un ensemble $Y \epsilon \Phi$, tel que $q \epsilon Y$. L'ensemble Y est donc facteur du produit P_q, d'où (vu la définition de ce produit) $q \epsilon P_q$, donc $q \epsilon \sum_{p \epsilon E} P_p$. Nous avons démontré que

(7) $$E \subset \sum_{p \epsilon E} P_p.$$

D'autre part, soit $q \epsilon \sum_{p \epsilon E} P_p$. Il existe donc un élément $p \epsilon E$, tel que $q \epsilon P_p$. Soit un ensemble quelconque $X \epsilon \Psi$. Etant donné que $p \epsilon E$, on a d'après (1) $p \epsilon X$; comme $X \epsilon \Psi \subset \Phi_\Sigma$, X est une somme d'ensembles de la famille Φ et il existe un terme Y de cette somme, pour lequel $p \epsilon Y$. On a donc $p \epsilon Y \epsilon \Phi$ et Y est un facteur du produit P_p, d'où $P_p \subset Y$; d'après $q \epsilon P_p$, $q \epsilon Y \subset X$, ce qui donne $q \epsilon X$. On a donc $q \epsilon X$ pour $X \epsilon \Psi$, d'où d'après (1) $q \epsilon E$. Nous avons démontré que $\sum_{p \epsilon E} P_p \subset E$ et la formule (7) donne l'égalité (6).

Vu que $P_p \epsilon \Phi_\Delta$ pour $p \epsilon E$, l'égalité (6) prouve que $E \epsilon \Phi_{\Delta\Sigma}$. Il est ainsi démontré que la formule $E \epsilon \Phi_{\Sigma\Delta}$ entraîne $E \epsilon \Phi_{\Delta\Sigma}$. On a donc $\Phi_{\Sigma\Delta} \subset \Phi_{\Delta\Sigma}$; nous avons démontré cette inclusion sans faire appel à l'axiome du choix. Or, nous avons vu auparavant que la démonstration de la formule $(\Phi_{\Sigma\Delta} \subset \Phi_{\Delta\Sigma}) \rightarrow (\Phi_{\Delta\Sigma} \subset \Phi_{\Sigma\Delta})$ n'utilise pas l'axiome du choix. La formule $\Phi_{\Sigma\Delta} = \Phi_{\Delta\Sigma}$ est ainsi démontrée sans qu'on ait fait appel à l'axiome du choix.

Si Φ est une famille d'ensembles, pour laquelle $\Phi_\Sigma = \Phi_\Delta = \Phi$, il existe une famille Ψ d'ensembles disjoints, pour laquelle $\Phi = \Psi_\Sigma$;

---

[1]) Cf. A. Tarski, Fundamenta Mathematicae **16**, p. 239, th. 47.

c'est par exemple la famille Ψ de tous les atomes de la famille Φ. D'autre part, si Ψ est une famille d'ensembles disjoints qui contient l'ensemble vide et si $\Phi=\Psi_\Sigma$, on a $\Phi_\Sigma=\Phi_\Delta=\Phi$.

Les familles Φ d'ensembles, pour lesquelles $\Phi_\Sigma=\Phi$, sont dites *complètement additives* et celles pour lesquelles $\Phi_\Delta=\Phi$ — *complètement multiplicatives*.

On démontre facilement que $(\Phi_\Sigma=\Phi_\rho=\Phi)\longrightarrow(\Phi_\Delta=\Phi)$.

On peut démontrer [1]) que les atomes de la famille Φ coïncident avec les ensembles de la famille $\Phi_{\rho\Sigma\rho}$ qui ne contiennent aucun autre ensemble de cette famille.

Désignons, pour une famille Φ d'ensembles, par Φ_λ la famille de tous les ensembles de la forme $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ où $E_n\in\Phi$ pour $n=1,2,\dots$ On peut démontrer (ce qui n'est pas facile) que *si la famille Φ d'ensembles est un anneau, on a $\Phi_\lambda=\Phi_{\sigma\delta}\Phi_{\delta\sigma}$* [2]).

Si la famille Φ d'ensembles est un anneau, on a

$$\Phi_{\sigma d}=\Phi_\sigma$$

(ce qui résulte de la formule $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_mB_n$ et de la remarque qu'une suite double d'ensembles A_mB_n peut être, par la méthode des diagonales, rangée en une suite simple).

Soit maintenant Φ un anneau d'ensembles et soit $E=\Phi_{\delta s}$. Désignons par Φ' la famille de tous les ensembles qui sont complémentaires des ensembles de la famille Φ par rapport à la somme S de tous les ensembles de la famille Φ. Φ étant un anneau, Φ' est également un anneau, d'où $\Phi'_{\sigma d}=\Phi'_\sigma$. D'après $E\in\Phi_{\delta s}$ et vu les formules de De Morgan, nous trouvons que $S-E\in\Phi_{\sigma d}$, donc $S-E\in\Phi'_\sigma$, d'où, en prenant les complémentaires par rapport à S et vu les formules de De Morgan, $E\in\Phi_\delta$. On a donc $\Phi_{\delta s}\subset\Phi_\delta$ et, comme $\Phi_\delta\subset\Phi_{\delta s}$, on a $\Phi_{\delta s}=\Phi_\delta$. Donc:

Si la famille Φ d'ensembles est un anneau, on a

$$\Phi_{\sigma d}=\Phi_\sigma \quad \text{et} \quad \Phi_{\delta s}=\Phi_\delta.$$

---

1) S. Piccard, Fund. Math. **26**, p. 264–265.

2) Voir W. Sierpiński, C. R. Acad. Sciences Paris **192** (1931), p. 1626; cf. Fund. Math. **18**, p. 21 (formule 81).

EXERCICES. 1. Φ étant une famille quelconque d'ensembles, telle que tout ensemble de Φ est une somme de deux ensembles distincts de Φ, démontrer que tout ensemble de Φ est une somme d'un nombre fini quelconque et aussi une somme d'une série infinie d'ensembles distincts de Φ.

Démonstration. Si $E\in\Phi$, on a $E=E_1+H_1$, où $E_1\in\Phi$, $H_1\in\Phi$ et $E_1\neq H_1$. S'il était à la fois $E_1-H_1=0$ et $H_1-E_1=0$, on aurait $E_1=H_1$, ce qui est impossible. Une au moins des formules $E_1-H_1\neq0$ et $H_1-E_1\neq0$ est vraie et nous pouvons supposer que c'est la première. De même nous pouvons poser $H_1=E_2+H_2$, où $E_2\in\Phi$, $H_2\in\Phi$, $E_2-H_2\neq0$ etc. On a évidemment, pour n naturel, $E_{n+1}\subset H_1$, donc $E-E_{n+1}\supset E-H_1\supset E_1-H_1\neq0$ d'où $E_{n+1}\neq E$ pour n naturels. D'autre part, on a pour n et k naturels $E_{n+k}\subset H_n$, $E_n-H_n\neq0$, donc $E_{n+k}\neq E_n$. Nous voyons que les ensembles $E_1,E_2,E_3,\dots$ sont tous distincts (mais E et E_1 ne le sont pas nécessairement!). Or, on a évidemment les formules $E=E_1+H_1$, $E=E_1+E_2+E_3+\dots+E_n+H_n$ pour $n=1,2,\dots$. L'ensemble E est donc une somme d'un nombre fini quelconque d'ensembles distincts de la famille Φ. Or, comme $E=H_1+E_1$ et $E_k\subset E$ pour $k=1,2,\dots,$ on trouve $E=H_1+E_1+E_2+E_3+\dots$ et, les ensembles $E_1,E_2,\dots$ étant tous distincts, l'ensemble H_1 est égal à un au plus d'ensembles de cette suite. On en déduit immédiatement que E est une somme d'une série infinie d'ensembles de la famille Φ.

2. Φ étant une famille quelconque d'ensembles, telle que tout ensemble E de Φ est une somme de deux ensembles de Φ distincts de E, démontrer que tout ensemble de Φ est une somme d'une série infinie d'ensembles de Φ distincts de E et distincts entre eux.

Démonstration. Si $E\in\Phi$, on a $E=E_1+H_1$ où $E_1\in\Phi$, $H_1\in\Phi$, $E_1\neq E$ et $H_1\neq E$; il en résulte que $E_1\neq H_1$. Nous pouvons supposer, comme ci-dessus, que $E_1-H_1\neq0$. On a pareillement $H_1=E_2+H_2$, où $E_2\in\Phi$, $H_2\in\Phi$, $E_2\neq H_1$ et $H_2\neq H_1$; nous pouvons supposer que $E_2-H_2\neq0$ etc. On démontre ensuite que $E=E_1+H_1+E_2+E_3+\dots$ et que $E,E_1,H_1,E_2,E_3,E_4,\dots$ sont des ensembles distincts de Φ.

3. Donner l'exemple d'une famille Φ d'ensembles, telle que tout ensemble de Φ soit somme de trois ensembles disjoints de Φ, mais qu'aucun ensemble de Φ ne soit somme de deux ensembles disjoints de Φ.

Réponse. Telle est la famille de tous les ensembles $E_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$, où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est une suite finie quelconque formée de nombres 0, 1 et 2, et où $E_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ désigne l'ensemble de toutes les suites finies ayant au moins n termes, formées de nombres 0, 1 et 2 et dont les n premiers termes sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4. Démontrer que, si Φ est une famille quelconque d'ensembles de nombres naturels, telle que tout ensemble de Φ est une somme de deux ensembles disjoints de Φ, tout ensemble de Φ est somme d'une série infinie d'ensembles disjoints de Φ.

Démonstration. Si $E \epsilon \Phi$, on a $E = E_1 + H_1$, où $E_1 \epsilon \Phi$, $H_1 \epsilon \Phi$ et $E_1 H_1 = 0$; nous pouvons supposer que E_1 contient le plus petit nombre de E. Pareillement, étant donné que $H_1 \epsilon \Phi$, on a $H_1 = E_2 + H_2$, où $E_2 \epsilon \Phi$, $H_2 \epsilon \Phi$ et $E_2 H_2 = 0$; nous pouvons supposer que E_2 contient le plus petit nombre de H_1, et ainsi de suite. On voit que $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sont des ensembles disjoints de Φ et que $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ (puisque $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ contient les n premiers nombres de E rangés d'après leur grandeur).

Il est à remarquer qu'il existe des familles Φ d'ensembles, telles que tout ensemble de Φ est somme de deux ensembles disjoints de Φ, mais qu'aucun ensemble de Φ n'est somme d'une infinité d'ensembles disjoints de Φ. On peut démontrer que telle est par exemple la famille de tous les ensembles $E_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$, où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est une suite finie quelconque formée de nombres 0 ou 1, et où $E_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ désigne l'ensemble de toutes les suites infinies formées de nombres 0 et 1, dont les n premiers termes sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. Démontrer que, si Φ est une famille d'ensembles, pour laquelle tout ensemble de la famille Φ est une somme de trois ensembles distincts de Φ, tout ensemble de Φ est aussi une somme de deux ensembles distincts de Φ.

Démonstration. Si $E \epsilon \Phi$, on a $E = E_1 + E_2 + E_3$ où E_1, E_2 et E_3 sont des ensembles distincts de Φ. Un au moins d'entre eux, soit E_1, n'est pas égal à E et on a évidemment $E = E + E_1$, ce qui prouve que E est une somme de deux ensembles distincts de Φ,

6. Démontrer que si Φ est une famille d'ensembles telle que $\Phi = \{X_\xi\}_{\xi \epsilon E}$ (c'est-à-dire si Φ est la famille de tous les ensembles X_ξ, où $\xi \epsilon E$), si l'ensemble E est une somme disjointe d'ensembles, $E = \sum_{\eta \epsilon H} E_\eta$, et si Γ est la famille de tous les sous-ensembles G de E qui ont un et un seul élément commun avec chaque ensemble E_η, où $\eta \epsilon H$, alors

$$\prod_{\eta \epsilon H} \sum_{\xi \epsilon E_\eta} X_\xi = \sum_{G \epsilon \Gamma} \prod_{\xi \epsilon G} X_\xi \text{ [1]}.$$

7. Démontrer que la proposition de l'exercice 6 peut être généralisée comme il suit:

Si Φ est une famille d'ensembles, telle que $\Phi = \{X_\xi\}_{\xi \epsilon E}$, si E est une somme (pas nécessairement disjointe) d'ensembles $E = \sum_{\eta \epsilon H} E_\eta$, et si F est la famille de toutes les fonctions $f(\eta)$ définies pour $\eta \epsilon H$ et telles que $f(\eta) \epsilon E_\eta$, on a l'égalité

$$\prod_{\eta \epsilon H} \sum_{\xi \epsilon E_\eta} X_\xi = \sum_{f \epsilon F} \prod_{\eta \epsilon H} X_{f(\eta)},$$

ainsi que l'égalité qu'on en obtient en remplaçant le symbole Π par Σ et inversement.

(Cf. la démonstration de la formule $\Phi_{\Sigma\Delta} = \Phi_{\Delta\Sigma}$, p. 173).

§ 34. Un théorème sur les anneaux d'ensembles.

Théorème 4. *Si Φ est un anneau d'ensembles et si l'on a $E \epsilon \Phi_\sigma$, $H \epsilon \Phi_\delta$ et $H \subset E$, il existe un ensemble P, tel que $P \epsilon \Phi_\sigma \Phi_\delta$ et $H \subset P \subset E$.*

Lemme. *Si E_n et H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont deux suites infinies d'ensembles, telles que*

(1) $$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \quad \text{et} \quad H_1 \supset H_2 \supset \ldots,$$

et

(2) $$E_1 + E_2 + \ldots \supset H_1 H_2 H_3 \ldots,$$

on a

(3) $$E_1 H_1 + E_2 H_2 + \ldots = H_1 (E_1 + H_2)(E_2 + H_3)(E_3 + H_4) \ldots .$$

Démonstration du lemme. Soient E_n et H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ deux suites infinies d'ensembles, satisfaisant aux conditions (1) et (2); posons

[1] R. Vaidyanathaswamy, *Treatise on Set Topology*, Part I, p. 10, Madras 1947. L'auteur appelle cette formule *loi distributive générale de l'Algèbre des ensembles.*

(4) $$P = E_1 H_1 + E_2 H_2 + \ldots$$

(5) $$Q = H_1 (E_1 + H_2)(E_2 + H_3)(E_3 + H_4) \ldots .$$

Soit p un élément de l'ensemble P. D'après (4) il existe un indice n, tel que $p \epsilon E_n H_n$, d'où il résulte d'après (1) que

$$p \epsilon E_k \quad \text{pour} \quad k \geqslant n \quad \text{et} \quad p \epsilon H_k \quad \text{pour} \quad k \leqslant n,$$

ce qui donne

$$p \epsilon H_1 \quad \text{et} \quad p \epsilon E_k + H_{k+1} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

et, d'après (5), $p \epsilon Q$. On a donc $P \subset Q$.

D'autre part, soit q un élément de l'ensemble Q. Posons

(6) $$H = H_1 H_2 H_3 \ldots$$

et distinguons deux cas.

1° $q \epsilon H$. D'après (2) et (6) il existe un indice n, tel que $q \epsilon E_n$, et d'après (6) on a $q \epsilon H_n$, donc $q \epsilon E_n H_n$, ce qui donne d'après (4) $q \epsilon P$.

2° $q \bar{\epsilon} H$. D'après (6) il existe un indice k, tel que $q \bar{\epsilon} H_k$; soit m le plus petit de ces indices k. On ne peut pas avoir $m = 1$, puisque d'après $q \epsilon Q$ et (5), on a $q \epsilon H_1$. On a donc $m = n+1$, où n est un nombre naturel, et il résulte de la définition du nombre m que $q \epsilon H_{m-1}$, donc que $q \epsilon H_n$. Or, d'après (5) et vu que $q \epsilon Q$, on a $q \epsilon E_n + H_{n+1}$, ce qui donne, vu que $q \bar{\epsilon} H_m = H_{n+1}$, $q \epsilon E_n$. On a donc $q \epsilon E_n H_n$, et d'après (4) $q \epsilon P$.

On a donc dans tous les cas $Q \subset P$ et, puisque nous avons établi ci-dessus que $P \subset Q$, on a $P = Q$. Vu les formules (4) et (5) la formule (3) est vraie. Notre lemme est ainsi démontré.

D é m o n s t r a t i o n du t h é o r è m e. Φ étant un anneau d'ensembles, soient E et H deux ensembles, tels que $E \epsilon \Phi_\sigma$, $H \epsilon \Phi_\delta$, $H \subset E$. D'après $E \epsilon \Phi_\sigma$ et $H \epsilon \Phi_\delta$ il existe des suites infinies d'ensembles M_n et N_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de la famille Φ et telles que

(7) $$E = M_1 + M_2 + \ldots, \quad H = N_1 N_2 N_3 \ldots .$$

Posons

(8) $$E_n = M_1 + M_2 + \ldots + M_n, \quad H_n = N_1 N_2 \ldots N_n, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Φ étant un anneau d'ensembles et vu que $M_n \epsilon \Phi$ et $N_n \epsilon \Phi$ pour $n = 1, 2, \ldots$, nous trouvons $E_n \epsilon \Phi$ et $H_n \epsilon \Phi$ pour $n = 1, 2, \ldots$; d'après (8) on a les formules (1); d'après (7) et (8) on trouve

(9) $$E = E_1 + E_2 + \ldots, \quad H = H_1 H_2 H_3 \ldots,$$

ce qui donne, d'après $H \subset E$, la formule (2). D'après notre lemme on a donc la formule (3). Définissons maintenant l'ensemble P par la formule (4). D'après (3) nous aurons

(10) $$P = H_1 (E_1 + H_2)(E_2 + H_3)(E_3 + H_4) \ldots .$$

Les formules (4) et (9) donnent $P \subset E$ et les formules (9) et (10) donnent $H \subset P$. On a donc $H \subset P \subset E$.

Enfin, vu que les ensembles E_n et H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ appartiennent à l'anneau Φ, on conclut que les termes de la série (4), de même que les facteurs du produit (10), appartiennent à Φ, donc, d'après (4) et (10), on a $P \epsilon \Phi_\sigma$ et $P \epsilon \Phi_\delta$. Notre théorème est ainsi démontré.

§ 35. Théorèmes sur la séparabilité des ensembles. Si Φ est une famille donnée d'ensembles, si E et H sont des ensembles donnés (appartenant ou n'appartenant pas à Φ) et s'il existe des ensembles P et Q, tels que

$$P \epsilon \Phi, \quad Q \epsilon \Phi, \quad PQ = 0, \quad E \subset P \quad \text{et} \quad H \subset Q,$$

nous disons que les ensembles E et H sont *séparables* Φ. (En d'autres termes, les ensembles E et H sont séparables Φ, si on peut les couvrir par des ensembles disjoints de la famille Φ).

Théorème 5. *Si Φ est un corps d'ensembles, chaque paire d'ensembles de la famille Φ_δ est séparable $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Φ un corps d'ensembles et soient M et N deux ensembles disjoints de la famille Φ_δ. On a donc $M = M_1 M_2 M_3 \ldots$ et $N = N_1 N_2 N_3 \ldots$, où $M_n \epsilon \Phi$ et $N_n \epsilon \Phi$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Posons $Q = M_1 + N_1$, $H = M$ et $E = Q - N$. La famille Φ étant un corps d'ensembles, on a $Q \epsilon \Phi$, et, d'après $N_n \epsilon \Phi$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on a $E = Q - N = Q - \prod_{n=1}^{\infty} N_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Q - N_n) \epsilon \Phi_\sigma$. Or, d'après $H = M$, $E = Q - N$, $MN = 0$ et $M \subset M_1 \subset Q$, on a $H \subset E$, $H \epsilon \Phi_\delta$, $E \epsilon \Phi_\sigma$, et la famille Φ, étant un corps, est un anneau d'ensembles. Il existe donc d'après le théorème 4 un ensemble $P \epsilon \Phi_\sigma \Phi_\delta$, tel que $H \subset P \subset E$, donc $M \subset P \subset Q - N$, d'où, d'après $N \subset N_1 \subset Q$, on trouve $N \subset Q - P$.

D'après $P \epsilon \Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$ et $Q \epsilon \Phi$, vu que Φ est un corps, nous concluons que $Q - P \epsilon \Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$. On a donc $M \subset P$, $N \subset P - Q$, où P et $Q - P$ sont des ensembles disjoints de la famille $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$, ce qui prouve notre théorème.

Théorème 6. *Si Φ est un corps d'ensembles et si $E_1, E_2, \ldots, E_m$ $(m \geqslant 2)$ est une suite finie d'ensembles de la famille Φ_δ, il existe des ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_m$ de la famille $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$, tels que $H_1 H_2 \ldots H_m = 0$ et $E_k \subset H_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$.*

Démonstration. Pour $m = 2$, notre théorème coïncide avec le théorème 5. Soit maintenant m un nombre naturel $\geqslant 2$ et supposons que notre théorème est vrai pour m ensembles. Soient $E_1, E_2, \ldots E_m, E_{m+1}$ $m+1$ ensembles de la famille Φ_δ tels que $E_1 E_2 \ldots E_m E_{m+1} = 0$. Etant donné que $E_m \epsilon \Phi_\delta$ et que $E_{m+1} \epsilon \Phi_\delta$, on a aussi $E_m E_{m+1} \epsilon \Phi_\delta$. Notre théorème étant vrai pour m ensembles, il existe des ensembles $L_1, L_2, \ldots, L_m$ de la famille $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$ pour lesquels $L_1 L_2 \ldots L_m = 0$ et $E_k \subset L_k$ où $k = 1, 2, \ldots, m-1$, et $E_m E_{m+1} \subset L_m$. Φ étant un corps d'ensembles et, vu que $E_m \epsilon \Phi_\delta$, $E_{m+1} \epsilon \Phi_\delta$ et $L_m \epsilon \Phi_\sigma$, les ensembles $E_m - L_m$ et $E_{m+1} - L_m$ appartiennent à Φ_δ et, d'après $E_m E_{m+1} \subset L_m$, sont disjoints. D'après le théorème 5, il existe des ensembles M_1 et M_2 de la famille $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$, tels que $M_1 M_2 = 0$, $E_m \subset M_1$ et $E_{m+1} \subset M_2$. Posons

$$H_k = L_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad H_m = L_m + M_1, \quad H_{m+1} = L_m + M_2.$$

Or, les ensembles $L_1, L_2, \ldots, L_m$ appartiennent à $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$ et $\Phi_{\delta s} = \Phi_\delta$ (puisque Φ en tant que corps, est anneau, voir p. 168 et p. 176), donc les ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_m, H_{m+1}$ appartiennent à $\Phi_\sigma \cdot \Phi_\delta$. On a

$$H_1 H_2 \ldots H_m H_{m+1} = L_1 L_2 \ldots L_{m-1} (L_m + M_1)(L_m + M_2) =$$
$$= L_1 L_2 \ldots L_m + L_1 L_2 \ldots L_{m-1} M_1 M_2 = 0$$

(puisque $L_1 L_2 \ldots L_m = 0$ et $M_1 M_2 = 0$). Finalement on a

$$E_k \subset L_k = H_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad E_m \subset M_1 \subset H_m,$$
$$E_{m+1} \subset M_2 \subset H_{m+1}.$$

En supposant que le théorème 6 est vrai pour m ensembles, nous avons démontré qu'il est vrai aussi pour $m+1$ ensembles. Il est donc démontré par induction.

Remarquons que l'on peut démontrer un théorème plus général que le théorème 6, à savoir le

Théorème 7. *Si Φ est un corps d'ensembles et E^k $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles de la famille Φ_δ, pour laquelle $E^1 E^2 E^3 \ldots = 0$, il existe une suite infinie d'ensembles H^k $(k = 1, 2, \ldots)$ de la famille $\Phi_\delta \cdot \Phi_\sigma$, pour laquelle $H^1 H^2 H^3 \ldots = 0$ et $E^k \subset H^k$ où $k = 1, 2, \ldots$.*

Ce théorème résulte sans peine du lemme suivant.

Lemme [1]. *Si E_n^k $(k = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ est une suite double d'ensembles, telle que*

$$E_n^k \supset E_{n+1}^k \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

et si, en posant

$$E^k = \prod_{n=1}^{\infty} E_n^k \qquad \textit{pour} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

on a

$$\prod_{k=1}^{\infty} E^k = 0,$$

alors, en posant

$$H^k = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(E_n^k - \prod_{\substack{i \leqslant n+1 \\ i \neq k}} E_k^i \Big) \qquad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

on a

$$H^k = E_1^k \prod_{n=1}^{\infty} \Big[E_{n+1}^k + \Big(E_1^k - \prod_{\substack{i \leqslant n+1 \\ i \neq k}} E_n^i \Big) \Big] \qquad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$E^k \subset H^k \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

et

$$\prod_{k=1}^{\infty} H^k = 0.$$

Pour obtenir du théorème 7 le théorème 6, il suffit de poser $E^k = E_m$ pour $k = m+1, m+2, \ldots$.

[1]) J'ai démontré ce lemme dans Fund. Math. 23, p. 296—298.

Théorème 8. *Si Φ est un corps d'ensembles et si E et H sont des ensembles de la famille Φ_δ, les ensembles $E-H$ et $H-E$ sont séparables Φ_σ.*

Lemme. *Si E, H, M, N, E_n et H_n $(n=1,2,...)$ sont des ensembles quelconques, tels que*

(1) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...$ (2) $H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset ...$

(3) $E = E_1 E_2 E_3 ...,$ (4) $H = H_1 H_2 H_3 ...,$

(5) $$M = (E_1 - H_1) + (E_2 H_1 - H_2) + (E_3 H_2 - H_3) + ...$$

(6) $$N = (H_1 - E_1) + (E_1 H_2 - E_2) + (E_2 H_3 - E_3) + ...,$$

alors

(7) $MN = 0,$ (8) $E - H \subset M,$ (9) $H - E \subset N.$

Démonstration du lemme. Soient E, H, M, N, E_n et H_n des ensembles satisfaisant aux conditions (1) — (6). Admettons qu'il existe un élément $p \in MN$. Il existe donc d'après (5) et (6) des nombres naturels k et l, tels que $p \in E_k - H_k$ et $p \in H_l - E_l$. Or $p \in E_k$, $p \bar{\epsilon} H_k$, $p \in H_l$, $p \bar{\epsilon} E_l$. Si $k \leqslant l$, alors d'après $p \bar{\epsilon} E_l$ et d'après (1) on a $p \bar{\epsilon} E_k$, ce qui est impossible (puisque $p \in E_k$); si $k > l$, alors d'après $p \bar{\epsilon} H_k$ et d'après (2) on a $p \bar{\epsilon} H_l$, ce qui est aussi impossible (puisque $p \in H_l$). La formule (7) est donc vraie.

Soit maintenant $p \in E - H$; on a donc $p \bar{\epsilon} H$ et d'après (4) il existe des nombres naturels m tels que $p \bar{\epsilon} H_m$: soit m le plus petit d'entre eux. Si $m=1$, on a $p \bar{\epsilon} H_1$. Or, d'après $p \in E - H$ et d'après (3), on a $p \in E_1$, donc $p \in E_1 - H_1$. Si $m > 1$, on a, vu la définition du nombre m, $p \in H_{m-1}$, $p \bar{\epsilon} H_m$ et, d'après $p \in E - H \subset E$ et d'après (3), on a $p \in E_m$, donc $p \in E_m H_{m-1} - H_m$. D'après (5) on a dans chacun de nos deux cas $p \in M$. La formule (8) est donc vraie. On démontre pareillement la formule (9).

Démonstration du théorème 8. Soit Φ un corps d'ensembles et soient E et H des ensembles de la famille Φ_δ. Il en résulte, comme nous le savons (cf. la démonstration du théorème 4), qu'il existe des suites d'ensembles E_n et H_n $(n=1,2,...)$ de la famille Φ, pour lesquels on a les formules (1), (2), (3) et (4). Définissons ensuite les ensembles M et N par les formules (5) et (6). Φ étant un corps d'ensembles, il résulte des formules $E_n \in \Phi$ et $H_n \in \Phi$ pour $n=1,2,...$ que les termes des séries (5) et (6) appartiennent à Φ, d'où $M \in \Phi_\sigma$ et $N \in \Phi_\sigma$. Or, d'après les formules (1)—(6) et d'après notre lemme, on a les formules (7), (8) et (9). Les ensembles E et H sont donc séparables Φ_σ et le théorème 8 est démontré.

Rémarquons qu'on peut démontrer un théorème plus général que le théorème 8, à savoir le

Théorème 9. *Si Φ est un corps d'ensembles et $E^1, E^2, ..., E^m$ une suite finie d'ensembles de la famille Φ_δ, il existe une suite $H^1, H^2, ..., H^m$ d'ensembles de la famille Φ_σ, pour laquelle on a $H^1 H^2 ... H^m = 0$ et*

$$E^k - E^1 E^2 ... E^m \subset H^k, \quad pour \quad k=1,2,...,m.$$

Ce théorème est une suite facile du

Lemme [1]. *Si m est un nombre naturel >1 et E_n^k $(k=1,2,...,m;$ $n=1,2,...)$ sont des ensembles tels que*

$$E_n^k \supset E_{n+1}^k \quad pour \quad k=1,2,...,m; \quad n=1,2,...,$$

alors, en posant

$$E^k = \prod_{n=1}^{\infty} E_n^k, \quad pour \quad k=1,2,...,m$$

et

$$H^k = \Big(E_n^k - \prod_{i \neq k} E_1^i\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(E_n^k \prod_{i \neq k} E_{n-1}^i - \prod_{i \neq k} E_n^i\Big), \quad pour \quad k=1,2,...,m$$

(où $\prod_{i \neq k} Z_i$ désigne le produit $Z_1 Z_2 ... Z_{k-1} Z_{k+1} ... Z_m$), *on a*

$$E^k - \prod_{i=1}^{m} E_i \subset H^k, \quad pour \quad k=1,2,...,m$$

et

$$\prod_{k=1}^{m} H^k = 0.$$

§ 36. Opération (A) et ses propriétés. Si l'on a fait correspondre à toute suite finie de nombres naturels $n_1, n_2, ..., n_k$ un ensemble $E_{n_1, n_2, ..., n_k}$, on dit qu'on a un *système déterminant* $S = [E_{n_1, n_2, ..., n_k}]$. L'ensemble

[1]) J'ai démontré ce lemme dans Fund. Math. 23, p. 300—303, Lemme III.

$$N(S) = N[E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}] = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

où la sommation $\sum\limits_{n_1, n_2, \ldots}$ s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$, est dit *noyau* du système déterminant S.

Donc, pour qu'on ait $p \in N(S)$, où $S = [E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}]$, il faut et il suffit qu'il existe une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$, telle que

$$p \in E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \ldots .$$

Φ étant une famille d'ensembles, désignons par Φ_A la famille de tous les noyaux des systèmes déterminants formés d'ensembles de la famille Φ.

Dans le cas particulier où Φ est la famille de tous les segments d'une droite, Φ_A est la famille de tous les ensembles *analytiques* linéaires. Les ensembles analytiques, découverts par Michel Souslin en 1917 et étudiés surtout par N. Lusin et plusieurs autres auteurs, jouent un rôle essentiel dans la théorie des ensembles de points et dans la théorie des fonctions d'une variable réelle. N. Lusin a consacré un livre [1]) aux ensembles analytiques.

Quelle que soit la famle Φ d'ensembles, on a

$$\Phi \subset \Phi_A, \tag{1}$$

puisque tout ensemble E est évidemment noyau du système déterminant $[E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}]$, où, pour toute suite finie $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de nombres naturels, on a $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E$.

Théorème 10. *Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a*

$$\Phi_{AA} = \Phi_A. \tag{2}$$

Démonstration. Soit E un ensemble de la famille Φ_{AA}. L'ensemble E est donc le noyau d'un système déterminant formé d'ensembles de la famille Φ_A, soit

$$E = N[E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}] = \sum_{r_1, r_2, \ldots} \prod_{s=1}^{\infty} E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}. \tag{3}$$

[1]) N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1928. Voir aussi W. Sierpiński, *Les ensembles projectifs et analytiques*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. 112, Paris 1950, où, p. 30, se trouve la bibliographie ultérieure.

Soit $r_1, r_2, \ldots, r_s$ une suite finie de nombres naturels. L'ensemble $E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}$, en tant qu'appartenant à la famille Φ_A, est le noyau d'un système déterminant formé d'ensembles de la famille Φ,

$$E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = N[E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}] = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{4}$$

Nous savons que pour tout nombre naturel k il existe des nombres naturels p_k et q_k bien déterminés par le nombre k et tels que

$$k = 2^{p_k - 1}(2q_k - 1). \tag{5}$$

D'après (5) on a

$$q_k \leqslant k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

D'après (6) et (5), si $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est une suite finie de nombres naturels, les nombres naturels

$$p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_{q_k}} \quad \text{et} \quad q_{n_{2q_k - 1}}, q_{n_{2(2q_k-1)}}, \ldots, q_{n_{2^{p_k-1}(2q_k-1)}}$$

sont bien déterminés (par $n_1, n_2, \ldots, n_k$). Nous pouvons donc définir un système déterminant $[E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}]$, en posant pour toute suite finie $n_1, n_2, \ldots n_k$ de nombres naturels

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E^{p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots p_{n_{q_k}}}_{q_{n_{2q_k-1}}, q_{n_{2(2q_k-1)}}, \ldots, q_{n_{2^{p_k-1}(2q_k-1)}}}. \tag{7}$$

Je dis que

$$E = N[E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}] = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{8}$$

En effet, soit x un élément de $N[E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}]$. Il existe donc une suite infinie $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels, telle que

$$x \in E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Posons

$$r_s = p_{n_s} \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

et soit s un nombre naturel donné. Posons

$$j_h = q_{n_{2^{h-1}(2s-1)}} \quad \text{pour} \quad h = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Or, d'après (7), (10) et (11), nous avons

$$E_{n_1,n_2,\dots,n_{2^{h-1}(2s-1)}} = E^{r_1,r_2,\dots,r_s}_{j_1,j_2,\dots,j_h} \quad \text{pour} \quad h=1,2,\dots$$

(puisque, d'après (5), on a $p_{2^{h-1}(2s-1)}=h$ et $q_{2^{h-1}(2s-1)}=s$, pour $h=1,2,\dots$), ce qui prouve d'après (9) que

$$x \in E^{r_1,r_2,\dots,r_s}_{j_1,j_2,\dots,j_h} \quad \text{pour} \quad h=1,2,\dots$$

donc, d'après (4), que $x \in E^{r_1,r_2,\dots,r_s}$. On a donc

$$(12) \qquad x \in E^{r_1,r_2,\dots,r_s} \quad \text{pour} \quad s=1,2,\dots,$$

ce qui prouve d'après (3) que $x \in E$.

Nous avons démontré ainsi que

$$(13) \qquad N[E_{n_1,n_2,\dots,n_k}] \subset E.$$

Soit, d'autre part, x un élément de l'ensemble E. D'après (3) il existe donc une suite infinie de nombres naturels $r_1, r_2, \dots$, pour laquelle les formules (12) sont vraies.

D'après (12) et (4) il existe pour tout s naturel une suite infinie de nombres naturels $m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \dots$, telle que

$$(14) \qquad x \in E^{r_1,r_2,\dots,r_s}_{m_1^{(s)}, m_2^{(s)},\dots,m_k^{(s)}} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots.$$

Posons

$$(15) \qquad n_h = 2^{r_h-1}(2m^{(q_h)}_{p_h}-1) \quad \text{pour} \quad h=1,2,\dots.$$

Vu que d'après (5) $p_{2^{r-1}(2s-1)}=r$ et $q_{2^{r-1}(2s-1)}=s$, on a $p_{n_h}=r_h$, $q_{n_h}=m^{(q_h)}_{p_h}$; si $h=2^{i-1}(2q_k-1)$, on a donc $q_h=q_k$ et $p_h=i$. Donc $q_{n_{2^{i-1}(2q_k-1)}}=m_i^{(q_k)}$, d'où d'après (7)

$$E_{n_1,n_2,\dots,n_k} = E^{r_1,r_2,\dots,r_s}_{m_1^{(q_k)}, m_2^{(q_k)},\dots,m_{p_k}^{(q_k)}}$$

et, d'après (14) (pour $s=q_k$),

$$x \in E_{n_1,n_2,\dots,n_k} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots.$$

Donc $x \in N[E_{n_1,n_2,\dots,n_k}]$. Nous avons démontré que

$$E \subset N[E_{n_1,n_2,\dots,n_k}],$$

ce qui donne d'après (13) la formule (8).

Or, d'après (7) les ensembles $E_{n_1,n_2,\dots n_k}$ appartiennent tous à la famille Φ: la formule (8) prouve que $F \in \Phi_A$. Nous avons ainsi démontré que $\Phi_{AA} \subset \Phi_A$, et puisque d'après (1) $\Phi_A \subset \Phi_{AA}$, on a la formule (2).

Notre théorème est donc démontré.

Corollaire 1. *Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a*

$$(16) \qquad \Phi_\sigma \subset \Phi_A \quad \textit{et} \quad \Phi_\delta \subset \Phi_A.$$

D é m o n s t r a t i o n. Si $E = H_1 + H_2 + \dots$, où $H_n \in \Phi$ pour $n=1,2,\dots$, posons, pour toute suite finie $n_1, n_2, \dots, n_k$ de nombres naturels,

$$E_{n_1,n_2,\dots,n_k} = H_{n_1}.$$

On voit que $E = N[E_{n_1,n_2,\dots,n_k}]$.

Si $E = H_1 H_2 H_3 \dots$, posons, pour toute suite finie $n_1, n_2, \dots, n_n$ de nombres naturels,

$$E_{n_1,n_2,\dots,n_k} = H_k.$$

On voit que $E = N[E_{n_1,n_2,\dots,n_k}]$.

Les formules (16) sont établies.

D'après (16) et le théorème 10, nous avons pour toute famille Φ d'ensembles

$$\Phi_{A\sigma} \subset \Phi_A \quad \text{et} \quad \Phi_{A\delta} \subset \Phi_A;$$

d'après (1) la famille $\Psi = \Phi_A$ satisfait à la formule

$$\Phi + \Psi_\sigma + \Psi_\delta \subset \Psi$$

et, comme Φ_B est la plus petite famille Ψ d'ensembles satisfaisant à cette formule (voir p. 172), nous avons $\Phi_B \subset \Phi_A$. Nous avons donc le suivant corollaire:

Corollaire 2. *Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a*

$$\Phi_B \subset \Phi_A.$$

Un système déterminant $[E_{n_1, n_2, ..., n_k}]$ est appelé *système d'unicité,* si, $m_1, m_2, ...$ et $n_1, n_2, ...$ étant deux suites infinies différentes de nombres naturels (c'est-à-dire des suites telles qu'il existe au moins un nombre k pour lequel $m_k \neq n_k$), on a toujours

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1, m_2, ..., m_k} E_{n_1, n_2, ..., n_k} = 0.$$

Désignons, pour toute famille Φ d'ensembles, par Φ_U la famille de tous les ensembles qui sont des noyaux des systèmes d'unicité formés d'ensembles de la famille Φ. On peut démontrer que, quelle que soit la famille Φ d'ensembles,

$$\Phi_{UU} = \Phi_U \text{ [1]}.$$

On peut aussi démontrer que, quelle que soit la famille Φ d'ensembles, toute somme d'une suite finie ou infinie d'ensembles disjoints de la famille Φ_U appartient à Φ_U [2]) et que tout produit d'une suite finie ou infinie d'ensembles (disjoints ou non) de la famille Φ_U appartient à Φ_U [3]).

§ 37. Forme abstraite du Théorème de Souslin. Nous dirons que deux systèmes déterminants $[E_{n_1, n_2, ..., n_k}]$ et $[H_{n_1, n_2, ..., n_k}]$ sont en relation R, s'il existe pour chaque paire de suites infinies de nombres naturels $p_1, p_2, ...$ et $q_1, q_2, ...$ un nombre naturel s, tel que

$$E_{p_1, p_2, ..., p_s} H_{q_1, q_2, ..., q_s} = 0.$$

Théorème 11 [4]). (Forme abstraite du théorème de Souslin). *Si E et H sont des noyaux des systèmes déterminants formés d'ensembles d'une famille Φ et qui sont en relation R, les ensembles E et H sont séparables Φ_B.*

Lemme. *Si $E_1, E_2, ...$ et $H_1, H_2, ...$ sont deux suites infinies d'ensembles, telles que pour tout m et n naturels les ensembles E_m et H_n sont séparables Φ_B, les ensembles*

[1]) Voir Fundamenta Mathematicae **21**, p. 255, Théorème III. La démonstration est assez longue (pp. 256—261).

[2]) L. c. p. 251, Th. I et p. 253, Th. I[a].

[3]) L. c., p. 253, Th. II.

[4]) Cf. W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae **25**, p. 29.

$$(17) \qquad E = E_1 + E_2 + ... \quad et \quad H = H_1 + H_2 + ...$$

sont aussi séparables Φ_B.

Démonstration du lemme. Soient $E_1, E_2, ...$ et $H_1, H_2, ...$ deux suites infinies d'ensembles, tels que pour tout m et n naturels les ensembles E_m et H_n sont séparables Φ_B. Il existe donc pour tout système (m, n) d'indices deux ensembles $M_{m,n}$ et $N_{m,n}$, tels que

$$(18) \qquad M_{m,n} \in \Phi_B, \quad N_{m,n} \in \Phi_B, \quad M_{m,n} N_{m,n} = 0, \quad E_m \subset M_{m,n}, \quad H_n \subset N_{m,n}.$$

Posons

$$(19) \qquad M = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} M_{m,n}, \qquad N = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} N_{m,n}.$$

D'après (18) et (19) nous trouvons immédiatement $M \in \Phi_B$, $N \in \Phi_B$ et $MN = 0$, et d'après (17), (18) et (19) $E \subset M$ et $H \subset N$. Les ensembles E et H sont donc séparables Φ_B, et notre lemme est démontré.

Démonstration du théorème 11. Soient $E = N[E_{n_1, n_2, ..., n_k}]$ et $H = N[H_{n_1, n_2, ..., n_k}]$ les noyaux de deux systèmes déterminants formés d'ensembles de la famille Φ et qui sont en relation R. Posons pour tout système fini $r_1, r_2, ..., r_s$ de nombres naturels

$$(20) \qquad E^{r_1, r_2, ..., r_s} = E_{r_1} E_{r_1, r_2} ... E_{r_1, r_2, ..., r_s} \sum_{n_1, n_2, ...} E_{r_1, r_2, ..., r_s, n_1} E_{r_1, r_2, ..., r_s, n_1, n_2} ...$$

et

$$(21) \qquad H^{r_1, r_2, ..., r_s} = H_{r_1} H_{r_1, r_2} ... H_{r_1, r_2, ..., r_s} \sum_{n_1, n_2} H_{r_1, r_2, ..., r_s, n_1} H_{r_1, r_2, ..., r_s, n_1, n_2} ...$$

Il résulte des formules (20) et (21) que

$$(22) \qquad E = E^1 + E^2 + ..., \quad H = H^1 + H^2 + ...$$

et, pour toute suite finie $r_1, r_2, ..., r_s$ de nombres naturels,

$$(23) \qquad E^{r_1, r_2, ..., r_s} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{r_1, r_2, ..., r_s, n}, \quad H^{r_1, r_2, ..., r_s} = \sum_{n=1}^{\infty} H^{r_1, r_2, ..., r_s, n}.$$

Admettons, contrairement à l'énoncé du théorème, que les ensembles E et H ne sont pas séparables Φ_B. Il résulte immédiatement de notre lemme et des formules (22) qu'il existe deux nombres naturels p_1 et q_1, tels que les ensembles E^{p_1} et H^{q_1} ne sont pas séparables Φ_B. Or, d'après (23), nous avons

$$E^{p_1} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{p_1, n} \quad \text{et} \quad H^{q_1} = \sum_{n=1}^{\infty} H^{q_1, n}$$

et nous concluons (d'après notre lemme) qu'il existe des nombres naturels p_2 et q_2, tels que les ensembles E^{p_1, p_2} et H^{q_1, q_2} ne sont pas séparables Φ_B.

En raisonnant ainsi de suite, nous obtenons deux suites infinies de nombres naturels $p_1, p_2, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots$, telles que pour $s = 1, 2, \ldots$ les ensembles

$$E^{p_1, p_2, \ldots, p_s} \quad \text{et} \quad H^{q_1, q_2, \ldots, q_s} \tag{24}$$

ne sont pas séparables Φ_B.

Or, d'après (20) et (21)

$$E^{p_1, p_2, \ldots, p_s} \subset E_{p_1, p_2, \ldots, p_s} \quad \text{et} \quad H^{q_1, q_2, \ldots, q_s} \subset H_{q_1, q_2, \ldots, q_s}. \tag{25}$$

Si, pour un s naturel, les ensembles $E_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ et $H_{q_1, q_2, \ldots, q_s}$ étaient disjoints, les ensembles (24) seraient d'après (25), séparables Φ et, à plus forte raison, séparables Φ_B, ce qui est impossible. On a donc

$$E_{p_1, p_2, \ldots, p_s} H_{q_1, q_2, \ldots, q_s} \neq 0 \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots$$

contrairement à l'hypothèse que les systèmes déterminants $[E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}]$ et $[H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}]$ sont en relation R.

L'hypothèse que les ensembles E et H ne sont pas séparables Φ_B implique donc une contradiction. Le théorème 11 est ainsi démontré.

§ 38. Le crible de Lusin. Soit R l'ensemble de tous les nombres rationnels (respectivement de tous les nombres rationnels contenus entre 0 et 1). Si à tout nombre r de R on a fait correspondre un ensemble E_r, on dit qu'on a défini un *crible* $[E_r]$. On appelle *noyau* du crible $[E_r]$ l'ensemble de tous les éléments p pour lesquels il existe une suite infinie décroissante de nombres de R (dépendant de p)

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots,$$

telle que

$$p \in E_{r_n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

On peut démontrer que le noyau du crible $[E_r]$ est noyau d'un système déterminant $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ formé d'ensembles E_r constituant le crible $[E_r]$ [1]. La proposition inverse n'est pas vraie (par exemple le système déterminant $\{H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, où $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \{(-1)^k\}$ pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, a comme noyau l'ensemble vide. Cependant l'ensemble vide n'est pas un noyau du crible formé seulement des ensembles $\{1\}$ et $\{-1\}$).

Φ étant une famille d'ensembles, désignons par Φ_K la famille formée de tous les noyaux des cribles formés d'ensembles de la famille Φ.

On peut démontrer que, si la famille Φ est (simplement) multiplicative (c'est-à-dire si $\Phi = \Phi_d$), on a

$$\Phi_K = \Phi_A \text{ [2]} \quad \text{et} \quad \Phi_{KK} = \Phi_K$$

(ces formules peuvent être en défaut pour les familles Φ quelconques d'ensembles) [3].

§ 39. Les opérations de Hausdorff. Soit N un ensemble de suites infinies $n_1, n_2, \ldots$ formées de nombres naturels. Posons, pour toute suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$,

$$H_N(E_1, E_2, \ldots) = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies $n_1, n_2, \ldots$ formant l'ensemble N. H_N est donc une opération sur les suites infinies d'ensembles. Les fonctions H_N dites *fonctions de Hausdorff* [4]) dépendent d'une suite infinie de variables.

On peut démontrer que la famille de toutes les fonctions de Hausdorff est la plus petite famille Φ de fonctions d'une suite infinie d'ensembles satisfaisant à deux conditions suivantes:

1° chacune des fonctions

$$f_k(E_1, E_2, \ldots) = E_k,$$

où $k = 1, 2, \ldots$, appartient à Φ;

---

[1]) Voir W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae **11**, p. 17—18.
[2]) l. c., p. 18.
[3]) Voir W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae **34**, p. 71.
[4]) F. Hausdorff les appelle fonctions δs; voir par exemple Fund. Math. **20**, p. 100.

2^0 la somme et le produit d'un ensemble quelconque de fonctions de la famille Φ appartient à Φ [1]).

Désignons, pour toute famille Φ d'ensembles, par $H_N(\Phi)$ la famille de tous les ensembles $H_N(E_1, E_2, ...)$, où $E_k \epsilon \Phi$ pour $k = 1, 2, ...$. On a alors pour toute famille Φ d'ensembles et pour tout ensemble non vide N de suites infinies de nombres naturels

$$\Phi \subset H_N(\Phi),$$

et

$$(\Phi \subset \Psi) \to [H_N(\Phi) \subset H_N(\Psi)].$$

Il est facile à démontrer qu'il existe une opération de Hausdorff H_N, telle que pour toute famille Φ d'ensembles

$$H_N(\Phi) = (\Phi_A);$$

il suffit de prendre comme N l'ensemble de toutes les suites infinies $n_1, n_2, ...$, telles que la suite infinie $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, n_4 - n_3, ...$ soit une suite extraite de la suite géométrique $1, 2, 4, 8, ...$ [2]).

En effet, si entre les ensembles $E_1, E_2, ...$ et les ensembles du système déterminant $\{H_{n_1, ..., n_k}\}$ on a la relation

$$E_{2^{n_1}-1+2^{n_1+n_2}-1+...+2^{n_1+n_2+...+n_k}-1} = H_{n_1, n_2, ..., n_k},$$

quelle que soit la suite finie de nombres naturels $n_1, n_2, ..., n_k$, alors

$$H_N(E_1, E_2, ...) = \sum_{n_1, n_2, ...} H_{n_1} H_{n_1, n_2} H_{n_1, n_2, n_3} ....$$

On peut donc considérer l'opération (A) comme cas particulier de l'opération de Hausdorff.

Or, on peut démontrer qu'il n'existe aucune opération de Hausdorff H_N, telle que l'on ait pour toute famille Φ d'ensembles $H_N(\Phi) = \Phi_B$ [3]).

On peut démontrer que, H_M et H_N étant deux opérations quelconques de Hausdorff, il existe toujours une opération de Hausdorff H_Q, telle que pour toute famille Φ d'ensembles on a

$$H_Q(\Phi) = H_M(H_N(\Phi)) \text{ [4])}.$$

1) Voir ma note dans C. R. Soc. Sc. Varsovie **19**, Classe III (1927) p. 463.
2) Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1935, p. 93.
3) Voir W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae **10**, p. 427.
4) Fundamenta Mathematicae **15**, p. 201.

On peut aussi démontrer que, $H_{N_1}, H_{N_2}, ...$ étant une suite infinie quelconque d'opérations de Hausdorff, il existe une opération de Hausdorff H_Q, telle que

$$H_Q(\Phi) \supset H_{N_k}(\Phi), \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ...,$$

quelle que soit la famille Φ d'ensembles [1]).

Une fonction d'une suite infinie d'ensembles $f(E_1, E_2, ...)$ est dite d'après Kantorovitch et Livenson [2]) *fonction analytique positive*, si les formules

$$(1) \qquad p \epsilon f(E_1, E_2, ...) \quad \text{et} \quad q \bar{\epsilon} f(H_1, H_2, ...)$$

entraînent toujours l'existence d'un au moins nombre naturel k, tel que

$$(2) \qquad p \epsilon E_k \quad \text{et} \quad q \bar{\epsilon} H_k.$$

On peut démontrer que les fonctions analytiques positives coïncident avec les fonctions de Hausdorff.

En effet, on vérifie que toute fonction de Hausdorff est une fonction analytique positive. D'autre part, f étant une fonction analytique positive donnée, on peut démontrer que, pour trouver une fonction de Hausdorff H_N pour laquelle $f = H_N$, il suffit de prendre comme N l'ensemble de toutes les suites infinies $n_1, n_2, ...$ de nombres naturels, telles que $E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} ... \subset f(E_1, E_2, ...)$, quelle que soit la suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, ...$.

Kantorovitch et Livenson appellent une fonction d'une suite infinie d'ensembles $f(E_1, E_2, ...)$ *fonction analytique*, si les formules (1) entraînent toujours l'existence d'un nombre naturel k, tel qu'on a ou les formules (2) ou bien les formules

$$p \bar{\epsilon} E_k \quad \text{et} \quad q \epsilon H_k \text{ [3])}.$$

Soit $f(E_1, E_2, ...)$ une fonction d'une suite infinie d'ensembles, qui est égale à la somme de tous les produits $E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} ...$, où la sommation s'étend à toutes les suites infinies croissantes de nombres naturels $n_1, n_2, ...$, pour lesquelles on a $E_{n_1} \supset E_{n_2} \supset E_{n_3} \supset ...$. On peut démontrer qu'elle n'est pas une fonction analytique (et, à plus forte raison, qu'elle n'est pas une fonction de Hausdorff). Mais alors la

1) Fundamenta Mathematicae **16**, p. 1.
2) Fundamenta Mathematicae **18**, p. 225.
3) l. c., p. **224—225**.

famille de tous les ensembles $f(E_1, E_2, ...)$, où $E_1, E_2, ...$ sont des ensembles linéaires fermés, est la famille de tous les ensembles analytiques linéaires [1]).

EXERCICES. 1. Soit E un ensemble quelconque. Posons, pour $A \subset E$, $f_A(x) = -1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 1$ si $x \in E - A$, et convenons d'écrire $f_C = f_A \cdot f_B$ pour exprimer que $f_C(x) = f_A(x) f_B(x)$ pour $x \in E$. Démontrer que, pour $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E$, on a

$$(f_C = f_A \cdot f_B) \equiv [C = (A - B) + (B - A)].$$

2. Soient E un ensemble non vide et $f(X)$ une fonction qui fait correspondre à tout ensemble $X \subset E$ un ensemble $f(X)$ telle qu'on a

$$f(X) - f(Y) \subset A \quad \text{pour} \quad X \subset E, \quad Y \subset E. \tag{1}$$

Démontrer que la condition (1) équivaut à la condition

$$f(X) \subset A + \prod_{Z \subset E} f(Z) \quad \text{pour} \quad X \subset E. \tag{2}$$

3. Soit f une fonction qui fait correspondre aux sous-ensembles d'un ensemble donné E des ensembles. Démontrer que, pour que f soit (simplement) additive, c'est-à-dire telle que

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y) \quad \text{pour} \quad X \subset E, \quad Y \subset E, \tag{3}$$

il faut et il suffit que la formule

$$Z \subset X + Y \subset E \tag{4}$$

entraîne toujours la formule

$$f(Z) \subset f(X) + f(Y). \tag{5}$$

Démonstration. Supposons que la fonction f est additive, c'est-à-dire qu'on a la formule (3). En posant $T = (X+Y) - Z$, nous avons d'après (4) $X + Y = Z + T$ et, la fonction f étant additive, $f(X) + f(Y) = f(X+Y) = f(Z+T) = f(Z) + f(T)$, ce qui donne la formule (5). La condition est donc nécessaire.

[1]) Voir ma note dans Fundamenta Mathematicae **6**, p. 100.

Supposons d'autre part que la formule (4) entraîne la formule (5). Pour $Z = X + Y$ nous avons donc $f(X+Y) \subset f(X) + f(Y)$ et nous concluons, pour $X = Y = T$, que la formule $Z \subset T$ entraîne la formule $f(Z) \subset f(T)$, d'où, pour $Z = X$ et $T = X + Y$, nous voyons qu'on a toujours $f(X) \subset f(X+Y)$. De même $f(Y) \subset f(X+Y)$, d'où $f(X) + f(Y) \subset f(X+Y)$. Puisque nous avons déja trouvé que $f(X+Y) \subset f(X) + f(Y)$, nous obtenons l'égalité (3). La condition est aussi suffisante.

4. Soit f une fonction qui fait correspondre aux sous-ensembles d'un ensemble donné E des ensembles. Démontrer que, pour que la formule

$$E \supset Z \supset X + Y \tag{6}$$

entraîne toujours la formule

$$f(Z) \supset f(X) + f(Y), \tag{7}$$

il faut et il suffit que la fonction f soit monotone, c'est-à-dire qu'on ait

$$f(Z) \supset f(T) \quad \text{pour} \quad E \supset Z \supset T. \tag{8}$$

Démonstration. Supposons que pour la fonction f la formule (6) entraîne toujours la formule (7). Soit $E \supset Z \supset T$; en posant $X = Y = T$, nous avons la formule (6) ce qui d'après l'hypothèse entraîne la formule (7), et, dans notre cas, la formule $f(Z) \supset f(T)$. On a donc la formule (8) et la condition est nécessaire.

D'autre part, si la fonction f remplit la condition (8), et si les ensembles X, Y et Z satisfont à la formule (6), on a $Z \supset X$ et $Z \supset Y$, d'où d'après (8) $f(Z) \supset f(X)$ et $f(Z) \supset f(Y)$, ce qui donne la formule (7). La condition est donc suffisante.

5. Soit f une fonction faisant correspondre aux sous-ensembles d'un ensemble donné E des ensembles. Démontrer que, pour que la fonction f soit dénombrablement additive, c'est-à-dire pour qu'elle vérifie la formule

$$f(X_1 + X_2 + X_3 + ...) = f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) + ...$$
$$\text{pour} \quad X_i \subset E \quad \text{où} \quad i = 1, 2, ...,$$

il faut et il suffit que la formule

$$X \subset X_1 + X_2 + ... \subset E$$

entraîne la formule

$$f(X) \subset f(X_1) + f(X_2) + ...$$

6. Soit $f(X)$ une fonction qui fait correspondre aux ensembles $X \subset E$ des ensembles. Supposons qu'elle vérifie la condition

$$X \subset f(X) \quad \text{pour} \quad X \subset E \tag{9}$$

et supposons qu'il existe pour tout ensemble $Y \subset E$ au moins un ensemble $X \subset E$, tel que $f(X) = Y$. Démontrer qu'on a pour les ensembles finis $X \subset E$ la formule $f(X) = X$, et que cette formule peut être en défaut pour les ensembles X infinis.

Démonstration. Comme $0 \subset E$, il existe un ensemble $X \subset E$, tel que $f(X) = 0$ et, d'après (9), on a $X \subset f(X)$, donc $X = 0$. On a donc $f(0) = 0$. Supposons qu'il existe des ensembles finis $X_k \subset E$, ayant k éléments pour lesquels $f(X_k) \neq X_k$. Supposons que n est le plus petit nombre naturel pour lequel a lieu la dernière inégalité, et que l'ensemble X_n la vérifie. Or, d'après l'hypothèse sur la fonction f, il existe un ensemble $X \subset E$, tel que $f(X) = X_n$; on a donc $X \neq X_n$ et, étant donné que, d'après (9), $X \subset f(X) = X_n$, on conclut que l'ensemble X a au plus $n-1$ éléments. Il résulte donc de la définition du nombre n qu'on a $f(X) = X$, donc $X = X_n$, ce qui est impossible.

Nous avons ainsi démontré qu'on a $f(X) = X$ pour les ensembles finis $X \subset E$.

Soit maintenant E l'ensemble de tous les nombres naturels et définissons, pour $X \subset E$ la fonction $f(X)$ comme il suit. Si $X \subset E$ et l'ensemble $E - X$ est infini ou vide, posons $f(X) = X$ et, si l'ensemble $E - X$ est fini non vide, soit $f(X)$ l'ensemble formé de l'ensemble X et du plus grand nombre naturel appartenant à l'ensemble $E - X$. On a évidemment $f(E - \{1\}) = E \neq E - \{1\}$.