CHAPITRE IV

FONCTIONS. IMAGES D'ENSEMBLES. RELATIONS.

§ 23. Fonctions; correspondances. Soient donnés deux ensembles A et B et un ensemble $S \subset A \times B$. S'il existe pour un élément x de A un et un seul élément y de B, tel que $(x, y) \in S$, nous dirons que l'ensemble S *fait correspondre* univoquement l'élément y à l'élément x.

Tout ensemble $S \subset A \times B$ fait donc correspondre univoquement certains éléments de l'ensemble A (dont l'ensemble peut être, en particulier, vide) aux éléments de l'ensemble B. Notamment à chaque élément $x \in A$ pour lequel il existe un et un seul élément y, tel que $(x, y) \in S$, S fait correspondre l'élément y. Nous pouvons alors écrire $y = f_S(x)$.

Soit P l'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble A, pour lesquels il existe un et un seul élément y de B, tel que $(x, y) \in S$, et soit Q l'ensemble de tous les éléments $f_S(x)$, où $x \in P$. A tout élément x de P correspond donc univoquement un élément de Q (mais aux éléments distincts de P ne correspondent pas nécessairement des éléments distincts de Q), et tout élément de Q correspond à un au moins élément de P. On dit alors qu'on a défini une *fonction* f (univoque) des éléments de l'ensemble P, dont les valeurs sont des éléments de l'ensemble Q; on appelle l'ensemble Q *image* de l'ensemble P obtenu à l'aide de la fonction considérée, et on le désigne par $f(P)$. Pour que l'ensemble $S \subset A \times B$ définisse une fonction (univoque) des éléments de l'ensemble A, dont les valeurs appartiennent à B (mais n'épuisent pas nécessairement tout l'ensemble B), il faut et il suffit que toute parallèle à l'axe des abscisses ait un et un seul élément commun avec l'ensemble S. L'ensemble S est appelé alors *image géométrique* de la fonction qu'il définit.

La notion de fonction (univoque) définie dans un ensemble donné se réduit ainsi à la notion d'ensemble.

On pourrait aussi appeler *fonction* (univoque) tout ensemble de paires ordonnées, dans lequels il n'y a pas deux paires ayant le même précédent [1]); $f(x)$ est alors le second élément (univoque) de la paire dont le premier élément est x. Si les ensembles A et B sont de 1[er] ordre, la fonction définie dans A, dont les valeurs appartiennent à B, sera déterminée par un ensemble de 3[e] ordre, notamment par l'ensemble des paires ordonnées $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (les paires sont alors des ensembles de 2[e] ordre).

Les notions de correspondance et de fonction peuvent ainsi être introduites à l'aide de la notion d'ensemble, sans intervention des notions non-mathématiques. Il est à remarquer que dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (1904, fascicule 1, tome I, volume 1, p. 2) on trouve la soi-disant définition suivante de la correspondance, utilisant des notions non-mathématiques.

„Dire qu'à un objet d'une collection *correspond* un objet déterminé d'une autre collection, c'est dire que la pensée de l'objet de la première collection éveille la pensée de l'objet de la seconde collection".

Dans l'Algèbre des propositions (§ 5), nous avons introduit la notion de correspondance, qu'on doit considérer comme plus générale que celle de fonction. Il n'existe pas par exemple une fonction dont les arguments seraient tous les ensembles et dont les valeurs seraient les ensembles de tous les sous-ensembles des ensembles-arguments, puisque l'ensemble de tous les arguments, c'est-à-dire l'ensemble dans lequel la fonction est définie, serait l'ensemble de tous les ensembles ce qui, comme nous le savons, implique une antinomie. Cependant il existe une correspondance qui fait correspondre à tout ensemble l'ensemble de tous ses sous-ensembles. Cette correspondance est déterminée par la fonction propositionnelle:

„x est un ensemble et y est l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble x".

Pour cette notion de correspondance, plus générale que celle de fonction, Mirimanoff et Fraenkel ont introduit (indépendamment l'un de l'autre) l'*Axiome de substitution: Si à tout élément d'un ensemble donné correspond un objet, les objets correspondants ainsi forment un ensemble* [2]).

---

[1]) Cf. A. Tarski, Fund. Math. 6, p. 58, Déf. 5.

[2]) Axiom (VIII) der Ersetzung; voir A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen*..., p. 115. Si l'on remplace dans l'énoncé de cet axiome la notion générale de correspondance par la notion plus étroite de fonction, considérée ci-dessus, on obtient une proposition qui est une conséquence d'autres axiomes de la théorie des ensembles.

Si $P(x,y)$ est une fonction propositionnelle de deux variables et si A et B sont deux ensembles donnés, l'ensemble

$$\mathop{E}_{x\in A}\Big[\sum_{y\in B} P(x,y)\Big]$$

est la projection de l'ensemble $\mathop{E}_{x\in A,\, y\in B}[P(x,y)]$ sur l'axe des abscisses. En effet, on a

$$\Big(x_0 \in \mathop{E}_{x\in A}\Big[\sum_{y\in B} P(x,y)\Big]\Big) \equiv \Big[(x_0\in A)\sum_{y\in B} P(x_0,y)\Big] \equiv$$
$$\equiv \sum_{y\in B}\Big((x_0,y)\in \mathop{E}_{x\in A,\, y\in B}[P(x,y)]\Big).$$

Soient f une fonction définie dans un ensemble A et $f(A)$ son image, c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments $f(x)$, où $x\in A$. Au lieu de $f(A)$, on écrit aussi $\{f(x)\}_{x\in A}$. On a

$$\prod_x\Big([y\in f(A)]\equiv\sum_x[(x\in A)\,(y=f(x))]\Big).$$

Il en résulte l'interprétation géométrique de l'ensemble $f(A)$: c'est la projection sur l'axe des ordonnées de l'image géométrique de la fonction f (c'est-à-dire de l'ensemble $\mathop{E}_{(x,y)}[x\in A, y=f(x)]$).

Une suite infinie peut être considérée comme cas particulier d'une fonction, où l'ensemble des arguments est l'ensemble de tous les nombres naturels.

L'ensemble de toutes les fonctions univoques, définies pour tous les éléments de l'ensemble A et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble B, est désigné par B^A.

Pour toute paire d'ensembles non vides A et B, la puissance B^A est donc un ensemble non vide bien défini.

Deux fonctions f et g définies pour les éléments d'un ensemble A même différemment, sont regardées comme égales (ce qu'on écrit: $f=g$) dans ce cas (et seulement dans ce cas) où l'on a $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in A$. L'affirmation que deux fonctions f et g, définies dans l'ensemble A, sont distinctes, équivaut donc à la proposition suivante:

$$\sum_x[(x\in A)\,(f(x)\neq g(x))].$$

Soit, en particulier, A l'ensemble formé de trois éléments distincts, $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, et soit B l'ensemble formé de deux éléments distincts, $B=\{b_1,b_2\}$.

L'ensemble B^A est formé ici de 8 fonctions distinctes dont les valeurs pour a_1,a_2,a_3 sont respectivement b_1,b_1,b_1, ou b_2,b_1,b_1, ou b_1,b_2,b_1, ou b_1,b_1,b_2, ou b_1,b_2,b_2, ou b_2,b_1,b_2, ou b_2,b_2,b_1, ou b_2,b_2,b_2. L'ensemble A^B est alors formé de 9 fonctions distinctes dont les valeurs pour b_1 et b_2 sont respectivement a_1,a_1, ou a_1,a_2, ou a_1,a_3, ou a_2,a_1, ou a_2,a_2, ou a_2,a_3, ou a_3,a_1, ou a_3,a_2, ou a_3,a_3.

Si les ensembles A et B sont finis et si l'ensemble A a m éléments et l'ensemble B n éléments, l'ensemble B^A est formé de n^m fonctions distinctes.

En particulier, il peut être $A=B$. Si par exemple X désigne l'ensemble de tous les nombres réels, X^X désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle; si N désigne l'ensemble de tous les nombres naturels, X^N est l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable naturelle, ou, ce qui revient au même, l'ensemble de toutes les suites infinies aux termes réels.

§ 24. Propriétés des images. Si une fonction $f(x)$ est définie dans un ensemble A, elle est définie à plus forte raison dans tout sous-ensemble E de A. Pour tout ensemble $E\subset A$ l'ensemble $f(E)$ est alors bien défini.

Remarquons que, quelle que soit la fonction (univoque) f définie dans l'ensemble A, on a

$$f(E_1+E_2)=f(E_1)+f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1\subset A,\ E_2\subset A$$

et, généralement, quelle que soit la famille F d'ensembles contenus dans A, on a

$$f\Big(\sum_{E\in F} E\Big)=\sum_{E\in F} f(E).$$

Donc: *l'image d'une somme est toujours la somme des images.*

Quant à l'image d'une différence de deux ensembles, on peut affirmer seulement que

$$f(E_1-E_2)\supset f(E_1)-f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1\subset A,\ E_2\subset A,$$

c'est-à-dire que *l'image d'une différence contient la différence des images.*

Or, on a évidemment

$$f(E_1) \subset f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset E_2 \subset A,$$

c'est-à-dire que *l'image d'un sous-ensemble d'un ensemble est un sous-ensemble de l'image de cet ensemble.* Il en résulte que, quelle que soit la famille F de sous-ensembles de A, on a

$$(1) \qquad f\Big(\prod_{E \epsilon F} E\Big) \subset \prod_{E \epsilon F} f(E),$$

c'est-à-dire que *l'image d'un produit est contenu dans le produit des images.*

Soit A l'ensemble de tous les points du plan et soit, pour tout point p du plan, $f(p)$ la projection de ce point sur l'axe des abscisses, parallèle à l'axe des ordonnées. $f(p)$ est donc une fonction univoque, définie dans tout ensemble A. Si E_1 est l'ensemble de tous les points de l'axe des abscisses et E_2 l'ensemble de tous les points de la circonférence $x^2+y^2=1$, on a

$$f(E_1-E_2) \neq f(E_1)-f(E_2) \quad \text{et} \quad f(E_1 E_2) \neq f(E_1) f(E_2).$$

Or, si E_1 et E_2 sont des ensembles de points intérieurs de deux cercles dont le second est à l'intérieur du premier, on a

$$f(E_1-E_2) \neq f(E_1)-f(E_2), \quad \text{mais} \quad f(E_1 E_2) = f(E_1) f(E_2).$$

D'autre part, on peut démontrer que, si f est une fonction (univoque) définie dans un ensemble A quelconque, on a, quels que soient les ensembles $E_1 \subset A$ et $E_2 \subset A$,

$$[f(E_1-E_2) = f(E_1)-f(E_2)] \to [f(E_1 E_2) = f(E_1) f(E_1)].$$

On a, en effet, $E_1 = (E_1-E_2)+E_1 E_2$, d'où $f(E_1) = f(E_1-E_2)+$ $+f(E_1 E_2)$, vu l'additivité des images.

Or, si $f(E_1-E_2) = f(E_1)-f(E_2)$, on en trouve

$$f(E_1) = [f(E_1)-f(E_2)] + f(E_1 E_2),$$

d'où, en multipliant chaque côté par $f(E_2)$, et vu que

$$f(E_2)[f(E_1)-f(E_2)] = 0 \quad \text{et} \quad f(E_2) f(E_1 E_2) = f(E_1 E_2)$$

(puisque $f(E_1 E_2) \subset f(E_2)$), on trouve $f(E_1) f(E_2) = f(E_1 E_2)$, c. q. f. d.

Une fonction f définie dans un ensemble A et qui ne prend que des valeurs distinctes pour les éléments distincts de A — c'est-à-dire telle que $[(p_1 \epsilon A)(p_2 \epsilon A)(p_1 \neq p_2)] \to [f(p_1) \neq f(p_2)]$ — est appellée fonction *à valeurs distinctes* (ou fonction univalente) dans l'ensemble A. Une fonction à valeurs distinctes dans un ensemble est, à plus forte raison, une fonction à valeurs distinctes dans tout sous-ensemble de celui-ci. Mais elle peut ne pas être à valeurs distinctes dans un sur-ensemble de cet ensemble. Ainsi par exemple la fonction $f(x)=x^2$ est à valeurs distinctes dans l'ensemble de tous les nombres réels positifs, mais elle n'est pas à valeurs distinctes dans l'ensemble de tous les nombres réels, puisque $f(-1)=f(1)$.

Une fonction à valeurs distinctes définie dans un ensemble fini et dont les valeurs appartiennent à cet ensemble, le transforme en lui-même. Donc, si l'on suppose les éléments de l'ensemble fini rangés dans une suite, notre fonction détermine une *permutation* de cette suite (et inversement, toute permutation de notre suite détermine une fonction à valeurs distinctes, définie pour l'ensemble d'éléments de cette suite). Il en est autrement pour les ensembles non finis. La fonction $f(n)=2n$ par exemple est à valeurs distinctes dans l'ensemble de tous les nombres naturels et elle le transforme dans une de ses parties aliquotes.

Si la fonction f est à valeurs distinctes dans l'ensemble A et si la fonction g est à valeurs distinctes dans l'ensemble $f(A)$, la fonction $\varphi(x)=g(f(x))$ est à valeurs distinctes dans l'ensemble A.

Soit f une fonction (univoque) qui est à valeurs distinctes dans l'ensemble A, et posons $B=f(A)$. Il existe alors, pour tout élément y de l'ensemble B, un et un seul élément x de l'ensemble A, tel que $f(x)=y$. Vu que $[y \epsilon f(A)] \equiv \sum_x [(x \epsilon A)(f(x)=y)]$, il en résulte qu'un tel x existe. L'unicité de cet élément x s'ensuit de la remarque que, si $x_1 \epsilon A$, $x_2 \epsilon A$, $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1)$ étaient égaux à $f(x_2)$, la fonction f ne pourrait pas être à valeurs distinctes dans l'ensemble A. Désignons cet élément unique x (qui correspond ainsi à l'élément y de B) par $f^{-1}(y)$ [1].

f^{-1} est une fonction univoque définie dans l'ensemble B et à valeurs distinctes dans B, puisque, vu la définition de la fonction f^{-1}, on a

[1] Pour distinguer cet élément du nombre $1/f(y)$ (si $f(y)$ est un nombre), certains auteurs le désignent par $f_{-1}(y)$. On pourrait écrire aussi $f^*(y)$.

(2) $$\prod_{y\in B}([x=f^{-1}(y)]\equiv[(x\in A)(f(x)=y)]);$$

donc, si $f^{-1}(y_1)=x$ et $f^{-1}(y_2)=x$, on aurait $f(x)=y_1$ et $f(x)=y_2$, d'où $y_1=y_2$.

La fonction f^{-1}, définie dans l'ensemble $B=f(A)$, est appelée *inverse* de la fonction f (définie dans A et à valeurs distinctes dans A).

Pour tout élément x de l'ensemble A, il existe un et un seul élément y de B, tel que $f^{-1}(y)=x$, à savoir l'élément $y=f(x)$. En effet, si pour un élément donné $x\in A$ on pose $y=f(x)$, on a $f^{-1}(y)=x$, vu la définition de la fonction f^{-1}; d'autre part l'élément y étant unique, la fonction f^{-1} est, comme nous l'avons démontré ci-dessus, à valeurs distinctes dans B.

La fonction $f(x)$, définie dans l'ensemble A, est donc inverse de la fonction f^{-1} définie dans l'ensemble B. Les fonctions f et f^{-1} sont donc réciproquement inverses. Ainsi, outre la formule (2), nous avons la formule

(3) $$\prod_{x\in A}([y=f(x)]\equiv[(y\in B)(f^{-1}(y)=x)]).$$

Nous pouvons écrire aussi:

$$\prod_{x\in A}\prod_{y\in B}([y=f(x)]\equiv[x=f^{-1}(y)].$$

D'après (3) on trouve tout de suite:

(4) $$f^{-1}(f(x))=x \quad \text{pour} \quad x\in A$$

et d'après (2):

(5) $$f(f^{-1}(y))=y \quad \text{pour} \quad y\in B.$$

Nous pouvons donc dire que les opérateurs f et f^{-1} se détruisent mutuellement.

D'après (4) et (5) nous voyons que

$$f^{-1}(f(A))=A \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B))=B;$$

vu que $f(A)=B$, la première de ces formules prouve que $f^{-1}(B)=A$.

Signalons encore la formule

$$f^{-1}(T)=\mathop{E}_{x\in A}[f(x)\in T]$$

pour tout ensemble $T\subset f(A)$.

Si la fonction f est univoque et à valeurs distinctes dans l'ensemble A, l'ensemble $B=f(A)$ est dit *image biunivoque* de l'ensemble A, obtenue à l'aide de la fonction f. Alors l'ensemble $A=f^{-1}(B)$ est une image biunivoque de l'ensemble B, obtenue à l'aide de la fonction f^{-1}.

On dit aussi qu'il existe alors entre les éléments des ensembles A et B une *correspondance biunivoque* (ou parfaite). A tout élément x de A correspond un et un seul élément de B, à savoir l'élément $f(x)$, et à tout élément y de B correspond un et un seul élément de A, à savoir l'élément $f^{-1}(y)$.

Une correspondance biunivoque peut exister entre les éléments d'un ensemble et ceux d'une partie aliquote de cet ensemble; ainsi par exemple la fonction $f(n)=2n$ établit une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble de tous les nombres naturels et les éléments de l'ensemble de tous les nombres pairs. On dit alors que l'ensemble considéré est infini au sens de Dedekind. Déjà Galileo Galilei savait qu'il existe une correspondance biunivoque entre les nombres naturels et leurs carrés [1]).

Il est à remarquer que l'axiome de l'infini, dont nous avons parlé au § 11, peut être exprimé comme il suit: *il existe un ensemble qui est en correspondance biunivoque avec un de ses vrais sous-ensembles* [2]).

EXEMPLES. 1. Soit A l'ensemble de tous les nombres réels et posons, pour $x\in A$,

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|},$$

où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre x. La fonction f est à valeurs distinctes dans l'ensemble A. En effet, si l'on pose pour un nombre donné $x\in A$

(6) $$y=\frac{x}{1+|x|},$$

[1]) *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (1638); voir Oswald Klassiker **11**, p. 29; cf. Kasner; Bull. of the Amer. Math. Soc. **11** (1905), p. 455; aussi E. Carruccio: *Galileo precursore della teoria degli insiemi*, Bolletino Unione Mat. Italiana, II s. **4** (1942), pp. 175—189.

[2]) Voir P. Bernays, *Journal of Symbolic Logic* **6** (1941), p. 5.

on aura $|y|<1$. Si $x \geqslant 0$, (6) donne $y(1+x)=x$, d'où (vu que $1-y\neq 0$, d'après $|y|<1$):

$$x=\frac{y}{1-y}.$$

Si $x<0$, (6) donne $y(1-x)=x$, d'où (vu que $1+y\neq 0$, d'après $|y|<1$):

$$x=\frac{y}{1+y}.$$

Vu que, d'après (6), les nombres x et y ont toujours le même signe, les deux cas peuvent être réunis dans une formule

$$x=\frac{y}{1-|y|}.$$

Le lecteur voudra démontrer ensuite que $f(A)=B$ est l'ensemble de tous les nombres réels intérieurs à l'intervalle $(-1,1)$ et que la fonction

$$f^{-1}(y)=\frac{y}{1-|y|}$$

définie dans l'ensemble B est inverse de la fonction $f(x)$ définie dans l'ensemble A. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble de tous les nombres réels et ceux de l'ensemble de tous les nombres réels intérieurs à l'intervalle $(-1,1)$.

2. Soit A l'ensemble de tous les nombres réels situés à l'intérieur d'un intervalle donné (a,b), c'est-à-dire de tels x réels que $a<x<b$ (où a et $b>a$ sont deux nombres réels donnés). Posons, pour $x\in A$,

$$f(x)=\frac{2x}{b-a}-\frac{a+b}{b-a}.$$

La fonction f fait correspondre biunivoquement à l'ensemble A l'ensemble B de tous les nombres réels intérieurs à l'intervalle $(-1,1)$.

3. Soit N l'ensemble de tous les nombres naturels et posons pour tout élément (m,n) du produit cartésien $N\times N$:

$$f((m,n))=2^{m-1}(2n-1).$$

La fonction f fait correspondre biunivoquement l'ensemble N à l'ensemble $N\times N$.

On peut démontrer aisément que la fonction

$$g((m,n))=\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n)-m+1$$

jouit de la même propriété.

Soit f une fonction à valeurs distinctes définie dans l'ensemble A, f^{-1} sa fonction inverse, définie dans l'ensemble $B=f(A)$, et F une famille donnée d'ensembles contenus dans A. Comme nous le savons, la formule (1) de la p. 116 est alors vraie. Pareillement, pour toute famille F_1 d'ensembles contenus dans B, on a la formule

$$f^{-1}\Big(\prod_{H\in F_1}H\Big)\subset\prod_{H\in F_1}f^{-1}(H)$$

et, en particulier, si F_1 est la famille de tous les ensembles $f(E)$, où $E\in F$:

$$f^{-1}\Big(\prod_{E\in F}f(E)\Big)\subset\prod_{E\in F}f^{-1}(f(E)).$$

L'image d'un sous-ensemble d'un ensemble étant le sous-ensemble de l'image de cet ensemble, on obtient:

$$ff^{-1}\Big(\prod_{E\in F}f(E)\Big)\subset f\Big(\prod_{E\in F}f^{-1}(f(E))\Big),$$

d'où, vu que les opérations f et f^{-1} se détruisent mutuellement:

$$\prod_{E\in F}f(E)\subset f\Big(\prod_{E\in F}E\Big), \tag{7}$$

ce qui donne, d'après (1), l'égalité:

$$f\Big(\prod_{E\in F}E\Big)=\prod_{E\in F}f(E). \tag{8}$$

C'est-à-dire: *pour une fonction à valeur distinctes l'image du produit est toujours égale au produit des images.*

On peut aussi démontrer la formule (8), pour les fonctions à valeurs distinctes, sans avoir recours aux fonctions inverses. D'après (1) il suffit de démontrer l'inclusion (7). Soit $a\in\prod_{E\in F}f(E)$ et soit E_0 un ensemble donné de la famille F; on a donc $a\in f(E_0)$ et il existe un élément x_0 de E_0, tel que $a=f(x_0)$. Or, si E est un ensemble quelconque de la famille F, nous aurons aussi $a \in f(E)$ et il existera un élément x de E, tel que $a = f(x)$. On a donc $f(x_0) = f(x)$; vu que $x_0 \in A$ et $x \in A$ (puisque $x \in E \in F$ et $E \subset A$ pour $E \in F$) et que la fonction f est à valeurs distinctes dans A, on trouve $x_0 = x$; d'après $x \in E$, on a $x_0 \in E$; x_0 est l'élément de chaque ensemble E de la famille F, d'où $x_0 \in \prod_{E \in F} E$ et $a = f(x_0) \in f\left(\prod_{E \in F} E\right)$. Nous avons ainsi démontré l'inclusion (7), c. q. f. d.

Nous démontrerons maintenant que, si la fonction f est à valeurs distinctes dans l'ensemble A, on a

$$(9) \qquad f(E_1 - E_2) = f(E_1) - f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset A, \ E_2 \subset A_1,$$

c'est-à-dire: *pour une fonction à valeurs distinctes l'image d'une différence de deux ensembles est toujours la différence des images de ces ensembles.*

L'image d'une différence contenant (pour toute fonction) la différence des images, il suffit de démontrer que

$$(10) \qquad f(E_1 - E_2) \subset f(E_1) - f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset A, \ E_2 \subset A.$$

Soit donc $a \in f(E_1 - E_2)$; il existe un élément $x \in E_1 - E_2$, tel que $a = f(x)$. Si $x \in E_1 - E_2$, on a $x \in E_1$, donc $a = f(x) \in f(E_1)$. S'il était $a \in f(E_2)$, il existerait un élément $x' \in E_2$, tel que $a = f(x')$ et on aurait $f(x) = f(x')$. Vu que $x \in E_1 \subset A$ et $x' \in E_2 \subset A$ et vu que la fonction f est à valeurs distinctes dans A, on trouverait $x = x'$, donc, d'après $x' \in E_2$, $x \in E_1$, malgré la formule $x \in E_1 - E_2$. On voit que $a \bar{\in} f(E_2)$, donc, d'après $a \bar{\in} f(E_1)$, on a $a \in f(E_1) - f(E_2)$. L'inclusion (10) est ainsi démontrée, et le théorème est établi.

On peut démontrer le théorème suivant [1]):

Toute fonction à valeurs distinctes définie dans l'ensemble A et dont les valeurs appartiennent aussi à A, détermine une (et une seule) décomposition de l'ensemble A en une série infinie d'ensembles disjoints (qui peuvent, en particulier, être vides),

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots,$$

où

$$f(A_1) = A_1 \quad \text{et} \quad f(A_n) = A_{n+1} \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \ldots$$

(c'est-à-dire la fonction f transforme biunivoquement l'ensemble A_1 en lui-même et fait correspondre aux autres termes de la série leurs successeurs).

[1]) Voir ma note dans les C. R. Soc. Sc. Varsovie 28 (1935), p. 1.

En particulier, si A est l'ensemble de tous les nombres réels et $f(x)$ la fonction définie dans A par les conditions $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$, on a $A_1 = A$ et $A_n = 0$ pour $n = 2, 3, \ldots$. Le résultat est le même, si f est la fonction définie dans le même ensemble A par la formule $f(x) = x + 1$. Or, si A est l'ensemble de tous les nombres naturels, nous avons, pour la fonction $f(x) = x + 1$, $A_1 = 0$ et, pour $n = 2, 3, \ldots$, l'ensemble A_n est formé d'un seul élément $n - 1$.

Dans un ensemble fini E de n éléments on a $n!$ fonctions différentes à valeurs distinctes et dont les valeurs appartiennent à E (en d'autres termes, il existe $n!$ transformations biunivoques pour un ensemble fini ayant n éléments en lui-même). Comme l'a démontré M[lle] Sophie **Piccard**, il existe parmi ces $n!$ fonctions au moins une paire telle que chacune de nos $n!$ fonctions est une superposition (finie) des fonctions constituant cette paire (c'est-à-dire elle est de la forme $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k(x)$, où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sont des fonctions appartenant à notre paire de fonctions) [1]).

Le même auteur a démontré [2]) que parmi les n^n fonctions univoques définies dans un ensemble à n éléments et dont les valeurs appartiennent à cet ensemble, il existe trois fonctions ayant cette propriété que chacune de nos n^n fonctions est une superposition (finie) de ces trois fonctions (M. S. **Eilenberg** [3]) a démontré que, si $n > 1$, le nombre 3 ne peut pas être remplacé dans ce théorème par un nombre plus petit).

Il est à remarquer que l'étude des fonctions de deux (et à plus forte raison de plusieurs) variables définies dans un ensemble ayant deux ou trois éléments et ne prenant que les valeurs de cet ensemble, conduit aux problèmes non triviaux et parfois difficiles.

E étant un ensemble donné, désignons par $F_n(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions de n variables, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définies pour $x_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et dont les valeurs appartiennent à E. Si $E = \{1, 2\}$, l'ensemble $F_2(E)$ est formé de 16 fonctions différentes. Or, parmi ces 16 fonctions, il existe une, soit $\varphi(x, y)$, telle que toute fonction de l'ensemble $F_2(E)$ s'obtient en superposant un nombre fini de fois la fonction φ. En d'autres mots, $F_2(E)$ est le plus petit ensemble Φ de fonctions, auquel appartient la fonction $\varphi(x, y)$ et tel que, si la fonction $f(x, y)$ appartient à Φ, les fonctions $f(x, \varphi(x, y))$, $f(\varphi(x, y), y)$

[1]) Fund. Math. 24, p. 298.
[2]) l. c. [3]) Fund. Math. 24, p. 212.

et $f(\varphi(x,y),\varphi(x,y))$ y appartiennent aussi, ainsi que les fonctions que l'on obtient en remplaçant une des variables x, y par l'autre. Notre condition est vérifiée par la fonction φ, définie comme il suit:

$$\varphi(1,1)=2, \quad \varphi(1,2)=\varphi(2,1)=\varphi(2,2)=1$$

et aussi par la fonction φ', où

$$\varphi'(1,1)=\varphi'(1,2)=\varphi'(2,1)=2, \quad \varphi'(2,2)=1,$$

M. E. Żyliński [1]) a démontré que seulement ces deux fonctions jouissent de cette propriété. On peut démontrer plus généralement que toute fonction de la famille $F_n(E)$, où $n=1,2,\ldots$, s'obtient en superposant un nombre fini de fois la fonction φ (ou bien la fonction φ') dans laquelle il faut remplacer les variables x et y par des variables choisies convenablement entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Comme on le voit, cette proposition n'est qu'une forme mathématique d'un théorème de l'algèbre des propositions [2]).

Pour $E=\{1,2,3\}$ la famille $F_2(E)$ est formée de 19681 fonctions. Ici encore on peut démontrer (ce qui n'est pas d'ailleurs facile) qu'il existe une fonction $\psi(x,y)$, telle que toute fonction de $F_2(E)$ est une superposition (finie) de la fonction ψ. La fonction ψ peut être définie, par exemple, comme suit:

$$\psi(1,2)=\psi(1,3)=\psi(2,2)=1$$

$$\psi(2,3)=\psi(3,2)=\psi(3,3)=2$$

$$\psi(1,1)=\psi(2,1)=\psi(3,1)=3.$$

Les recherches analogues concernant les ensembles finis quelconques sont encore plus difficiles.

Soit m un nombre naturel donné >1 et soit $E=\{1,2,\ldots m\}$. Posons $F(E)=F_1(E)+F_2(E)+\ldots$. En utilisant un résultat de E. L. Post [3]), Donald Webb a démontré [4]) qu'il existe une fonction $\mu(x,y)$ de la famille $F_2(E)$, telle que toute fonction de la famille $F(E)$ s'obtient en superposant un nombre fini de fois la fonction μ.

[1]) Fund. Math. 7, p. 203.

[2]) Cf. § 4.

[3]) Amer. Journ. of Math. 43 (1921), pp. 180—181.

[4]) D. Webb, Amer. Jour. of Math. 58 (1936), pp. 193—194. Cf. M. Wajsberg, Wiadomości Matematyczne 43 (1936), pp. 166—167.

Autrement dit, $F(E)$ coïncide avec la plus petite famille S de fonctions à laquelle appartient la fonction $\mu(x,y)$, et telle que si les fonctions $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ et $g(x_{k+1},x_{k+2},x_n)$ appartiennent à S, la fonction $\mu(f(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ g(x_{k+1},x_{k+2}\ldots,x_n))$, ainsi que toutes les fonctions que l'on obtient en échangeant ou en identifiant entre elles certaines des variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$, appartiennent à S.

Les démonstrations de E. L. Post et D. Webb utilisent les symboles de la logique à m valeurs. Le théorème en question peut être démontré en symboles mathématiques comme suit:

Désignons par $\rho(x)$ le reste de la division de l'entier x par le nombre m et posons

$$(1) \qquad \mu(x,y)=\rho\,|\min(x,y)|+1, \quad \text{pour} \quad x\in E,\ y\in E.$$

Pour démontrer que la fonction $\mu(x,y)$ jouit des propriétés désirées, posons

$$(2) \qquad \varphi(x)=\rho(x)+1, \quad \text{pour} \quad x\in E \quad \text{et}$$

$$(3) \qquad \psi(x,y)=\min(x,y), \quad \text{pour} \quad x\in E,\ y\in E.$$

D'après (1), (2) et (3) on trouve

$$(4) \qquad \varphi(x)=f(x,x), \quad \text{pour} \quad x\in E$$

$$(5) \qquad \psi(x,y)=\varphi^{m-1}[f(x,y)], \quad \text{pour} \quad x\in E,\ y\in E$$

(où $\varphi^k(x)$ désigne la k-ième itérée de la fonction $\varphi(x)$), ce qui prouve que $\varphi\in S$ et $\psi\in S$. D'après (3), la fonction $\min(x,y)$ appartient donc à S, et, comme on a évidemment pour $k>1$ et $x_i\in E$ $(i=1,2,\ldots k)$

$$\min(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\min(\min(x_1,x_2,\ldots,x_k),x_{k+1}),$$

on conclut par induction que la fonction $\min(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ appartient à S pour $k=2,3,4,\ldots$.

Posons $\vartheta_0(x)=x$ pour $x\in E$ et, pour $k=1,2,\ldots$

$$(6) \qquad \vartheta_k(x)=\psi(\vartheta_{k-1}(x),\ \varphi^k(x));$$

or, d'après (2), la fonction $\varphi(x)$ représente la substitution

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, m-1, m \\ 2, 3, \ldots, \quad m, 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la fonction $\varphi^k(x)$, où $k=1,2,\ldots,m-1$ représente la substitution

$$\begin{pmatrix} 1, & 2,\ldots,m-k, & m-k+1,\ldots,m \\ k+1, & k+2,\ldots, & m, & 1,\ldots,k \end{pmatrix}.$$

On démontre par induction que pour $k=1,2,\ldots,m$, $\vartheta_k(x)$ représente la substitution

$$\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,m-k, & m-k+1, & m-k+2,\ldots,m \\ 1,2,\ldots,m-k, & 1, & 1,\ldots,1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\vartheta_m(x)=1, \quad \text{pour} \quad x\in E.$$

Vu que $\vartheta_0(x)=x$ pour $x\in E$, il résulte de (6) et de $\varphi\in S$ que $\mu_m\in S$. Or, on vérifie que, pour $q=1,2,\ldots,m$ et pour $x\in E$, la fonction

$$\tau_q(x)=\varphi^{m-1}\psi(\varphi^{m-1}\psi(\varphi\,\vartheta_m(x),x),\varphi^q(x)) \tag{7}$$

représente la substitution

$$\begin{pmatrix} 1, & 2,\ldots,m \\ q, & m,\ldots,m \end{pmatrix}.$$

Posons, pour n naturel

$$\mu_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\varphi\,[\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)]. \tag{8}$$

On aura alors $\mu_n\in S$.

Vu la propriété de la fonction (7), on conclut que la fonction $\tau_q[\mu_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)]$ est égale à m pour tous les systèmes de nombres $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de E sauf pour $x_1=x_2=\ldots=x_n=m$, où $\tau_q[\mu_n(m,m,\ldots m)]=q$ (puisque, d'après (2), on a $\varphi\rho[\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)]=1$ seulement pour $x_1=x_2=\ldots=x_n=m$). Il en résulte que la fonction

$$\nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,q}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\tau_q\,\mu_n[\varphi^{m-k_1}(x),\varphi^{m-k_2}(x),\ldots,\varphi^{m-k_n}(x)] \tag{9}$$

est égale à m pour tous les systèmes de nombres $x_1,x_2,\ldots x_n$ de E, sauf pour le système $x_1=k_1$, $x_2=k_2,\ldots,x_n=k_n$, pour lequel on a $\nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,q}(k_1,k_2,\ldots,k_n)=q$ (puisqu'on a $\varphi^{m-k}(x)=m$ seulement pour $x=k$).

Or, d'après (7) et (8), la formule (9) prouve que $\nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,q}\in S$ pour $k_1,k_2,\ldots,k_n$, q naturels $\leqslant m$.

Soit maintenant $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ une fonction quelconque de la famille F. On a, pour $x_i\in E$, $i=1,2,\ldots,n$:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\min_{\substack{k_i=1,2,\ldots,m \\ i=1,2,\ldots,m}} \nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,f(k_1,k_2,\ldots,k_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{10}$$

puisque, d'après la propriété de la fonction (9), on a

$$\nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,f(k_1,k_2,\ldots,k_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=m$$

pour tous les systèmes $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de nombres de E, sauf pour le système $x_1=k_1$, $x_2=k_2,\ldots,x_n=k_n$, pour lequel

$$\nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,f(k_1,k_2,\ldots,k_n)}(k_1,k_2,\ldots,k_n)=f(k_1,k_2,\ldots,k_n).$$

Vu que $\nu_{k_1,k_2,\ldots,k_n,q}\in S$, la formule (10) prouve que $f\in S$. On a donc $F\subset S$ et la propriété désirée de la fonction $\mu(x,y)$ est démontrée.

On peut démontrer que les fonctions de plusieurs variables, où toutes les valeurs des variables ainsi que celles des fonctions appartiennent à un ensemble donné (fini ou infini), se réduisent par superpositions aux fonctions de deux variables (pour les ensembles infinis la démonstration utilise l'axiome du choix) [1].

Envisageons encore le théorème suivant:

$f_1(p)$, $f_2(y),\ldots$ étant une suite infinie de fonctions définies dans un ensemble infini quelconque E et dont les valeurs appartiennent également à E, il existe deux fonctions de la même nature, telles que toute fonction de la suite considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions [2].

Une simple démonstration de ce théorème a été donnée par S. Banach [3].

EXERCICES. 1. Démontrer que la fonction $g(x,y)=x+y$ (pour x et y réels) peut être exprimée à l'aide de la fonction $f(x,y)=x-y$ (et de ses superpositions).

Réponse. On vérifie qu'il y a pour x et y réels:

$$g(x,y)=f(x,f(f(x,x),y)).$$

[1]) Voir ma note dans Fund. Math. 33, p. 169.
[2]) W. Sierpiński, Fund. Math. 24, p. 209.
[3]) Fund. Math. 25, p. 5.

R é m a r q u e. On peut démontrer que la fonction f ne peut pas être exprimée à l'aide des superpositions de la fonction g.

2. Démontrer que, si $f(x)$ est une fonction (univoque) définie dans un ensemble E et telle que $f(E) \subset E$, et si $ff(x)=x$ pour $x \in E$, alors $f(x)$ est une fonction à valeurs distinctes dans E et on a $f(E)=E$ et $f^{-1}(x)=f(x)$ pour $x \in E$.

3. Démontrer que, si $f(x)$ est une fonction univoque définie dans un ensemble E, telle que $f(E)=E$, la fonction f peut ne pas être à valeurs distinctes dans E (mais seulement dans ce cas, où l'ensemble E n'est pas fini).

4. Démontrer que, si $f(x)$ est une fonction (univoque) définie dans un ensemble E et telle que $f(E) \subset E$ et $fff(x)=x$ pour $x \in E$, alors $f(x)$ est une fonction à valeurs distinctes dans E et on a $f(E)=E$ et $f^{-1}(x)=ff(x)$ pour $x \in E$.

5. Démontrer que la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ définie dans l'ensemble E de tous les nombres réels distincts de 0 et de 1, satisfait aux conditions de l'exercice 4.

6. Soit E un ensemble donné quelconque. n étant un nombre naturel, nous appelons *famille* F_n toute famille non vide F de fonctions $f(x)$ définies pour $x \in E$ et vérifiant les conditions suivantes: 1⁰ si $f \in F_n$, alors $f(x)$ ne prend que les valeurs 0,1 et 2; 2⁰ pour $f \in F_n$, l'ensemble $H_f = \underset{x \in E}{E}[f(x) \leqslant 1]$ a n éléments; 3⁰ f et g étant deux fonctions distinctes de la famille E_n, il existe toujours un élément x de l'ensemble E (dépendant de f et de g), tel que l'on a $f(x) \leqslant 1$, $g(x) \leqslant 1$ et $f(x) \neq g(x)$.

Démontrer le théorème suivant:

Quel que soit le nombre naturel n, toute famille F_n contient tout au plus $(n+1)!$ fonctions.

D é m o n s t r a t i o n. Notre théorème est évidemment vrai pour $n=1$. Soit n un nombre naturel >1 et supposons que notre théorème est vrai pour le nombre $n-1$. Soit F une famille F_n et soit $f_1(x)$ une fonction de la famille F. L'ensemble H_{f_1} a donc n éléments, soit $H_{f_1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; vu la définition de la famille F, il existe pour toute fonction f de la famille $F-\{f_1\}$ un indice i de la suite $1, 2, \ldots, n$, tel que $f(a_i) \leqslant 1$ et que $f(a_i) \neq f_1(a_i)$.

Si la famille F avait plus que $(n+1)!$ fonctions, la famille $F-\{f_1\}$ contiendrait au moins $(n+1)!$ fonctions. Il existerait alors au moins un indice k de la suite $1, 2, \ldots, n$, tel que la famille G de

toutes les fonctions f de la famille $F-\{f_1\}$, pour lesquelles $f(a_k) \leqslant 1$ et $f(a_k) \neq f_1(a_k)$, aurait au moins $(n+1)!: n$, éléments; elle aurait donc plus que $n!$ éléments. Vu que $f_1(a_k) \leqslant 1$ (puisque $a_k \in H_{f_1}$), $f(a_k) \leqslant 1$ et $f(a_k) \neq f_1(a_k)$ pour $f \in G$, toutes les fonctions f de la famille G ont pour $x=a_k$ la même valeur. Désignons maintenant, pour toute fonction f de G, par f' telle fonction que $f'(a_k)=2$ et $f'(x)=f(x)$ pour $x \in E-\{a_k\}$. Soit G' la famille de toutes les fonctions f' appartenant à G. Les familles G' et G ont évidemment le même nombre de fonctions; il en résulte que la famille G' a plus que $n!$ fonctions. Cela est impossible, puisque G' est évidemment une famille F_{n-1} et nous avons admis que notre théorème est vrai pour $n-1$.

Notre théorème est ainsi démontré par induction.

Il est à remarquer que nous ne savons rien sur les familles $F_{\aleph_0}$ (c'est-à-dire telles que pour $f \in E$ l'ensemble H_f est formé d'une suite infinie d'éléments); en particulier nous ne savons pas s'il existe des familles $F_{\aleph_0}$ dont la puissance dépasse celle du continu.

7. Appelons *courbe* tout ensemble plan superposable (par translation ou par rotation) à l'image géométrique d'une fonction d'une variable réelle.

Démontrer qu'il existe une courbe passant par tous les points du plan aux coordonnées rationnelles.

D é m o n s t r a t i o n. On voit sans peine que, pour qu'il existe une courbe passant par tous les points d'un ensemble plan E, il faut et il suffit qu'il existe une droite D situé dans le plan et telle que chaque droite du plan parallèle à D ait au plus un point commun avec l'ensemble E.

Si, en particulier, E est l'ensemble de tous les points du plan aux coordonnées rationnelles, toute droite parallèle à la droite $y=x\sqrt{2}$ a au plus un point commun avec l'ensemble E. En effet, si l'on avait, pour $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, où x_1, y_1, x_2 et y_2 sont des nombres rationnels, $y_1 = x_1\sqrt{2}+c$ et $y_2=x_2\sqrt{2}+c$, on ne pourrait pas avoir $x_1=x_2$, puisqu'on aurait alors $y_1=y_2$, donc $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$, contrairement à l'hypothèse. On aurait donc $x_1 \neq x_2$, d'où $\sqrt{2}=\dfrac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$, ce qui est impossible, le nombre $\sqrt{2}$ étant irrationnel.

R e m a r q u e. On peut démontrer (ce qui n'est pas d'ailleurs facile) que le plan n'est pas la somme d'un nombre fini de courbes [1]).

[1]) Voir S. M a z u r k i e w i c z, Fund. Math. 21 (1933), p. 43—45.

D'autre part, en admettant l'hypothèse du continu on peut démontrer que le plan est somme d'une suite infinie de courbes [1].

Les ensembles $f^{-1}(H)$ n'ont été définis jusqu'à présent que pour une fonction f à valeurs distinctes dans l'ensemble A et pour $H \subset f(A)$. On peut les généraliser en posant ex definitione, pour toute fonction univoque f définie dans l'ensemble A et pour tout ensemble $H \subset f(A)$,

$$f^{-1}(H) = \mathop{E}_{x \epsilon A} [f(x) \epsilon H].$$

Il est facile à vérifier que pour toute famille F d'ensembles contenus dans $f(A)$, on a les formules

$$f^{-1}\Big(\sum_{H \epsilon F} H\Big) = \sum_{H \epsilon F} f^{-1}(H), \qquad f^{-1}\Big(\prod_{H \epsilon F} H\Big) = \prod_{H \epsilon F} f^{-1}(H),$$

ainsi que la formule

$$f^{-1}(H_1 - H_2) = f^{-1}(H_1) - f^{-1}(H_2), \quad \text{pour} \quad H_1 \subset f(A),\ H_2 \subset f(A)$$

(quelle que soit la fonction univoque f définie dans A, pas nécessairement à valeurs distinctes dans A).

§ 25. Produit cartésien de plusieurs ensembles. Revenons au produit cartésien des ensembles (§ 22). Nous savons déjà que le produit cartésien de deux ensembles n'est pas commutatif. Or, il est facile d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble $E_1 \times E_2$ et ceux de l'ensemble $E_2 \times E_1$, en faisant correspondre à tout élément (a, b) de $E_1 \times E_2$ (qui est une paire ordonnée, où $a \epsilon E_1$ et $b \epsilon E_2$) l'élément (b, a) de $E_2 \times E_1$.

Nous savons aussi que le produit cartésien des ensembles n'est pas associatif. Or, il est facile d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble $(E_1 \times E_2) \times E_3$ et ceux de l'ensemble $E_1 \times (E_2 \times E_3)$, en faisant correspondre à tout élément $((a, b), c)$ du premier ensemble, l'élément $(a, (b, c))$ du second.

Si A_1, A_2 et B sont trois ensembles non vides et si $A_1 A_2 = 0$, il est facile d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles

$$B^{A_1 + A_2} \quad \text{et} \quad B^{A_1} \times B^{A_2},$$

[1]) Voir mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, p. 11.

en faisant correspondre à toute fonction f qui appartient à l'ensemble $B^{A_1+A_2}$ la paire ordonnée (φ, ψ), où φ et ψ sont deux fonctions telles que $\varphi \epsilon B^{A_1}$, $\psi \epsilon B^{A_2}$, $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \epsilon A_1$ et $\psi(x) = f(x)$ pour $x \epsilon A_2$.

Si A, B_1 et B_2 sont des ensembles non vides, on peut établir une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles

$$(B_1 \times B_2)^A \quad \text{et} \quad B_1^A \times B_2^A.$$

Enfin, si A, B et C sont des ensembles non vides, il est facile d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles

$$(B^A)^C \quad \text{et} \quad B^{A \times C}.$$

La notion de produit cartésien des ensembles peut être généralisée aux produits infinies, en entendant par produit cartésien infini d'ensembles

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots$$

l'ensemble de toutes les suites infinies

$$(p_1, p_2, p_3, \ldots),$$

où $p_k \epsilon E_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$.

Il est évident que, si n est un nombre naturel et si les ensembles E_k sont non vides pour $k = 1, 2, \ldots, n$, l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est non vide. Or, sans faire appel à *l'axiome du choix* nous ne savons pas démontrer que, si chaque ensemble E_k est non vide pour $k = 1, 2, \ldots$, l'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots$ est non vide.

Soit F une famille non vide quelconque d'ensembles Z, et désignons par $\mathop{\mathbf{P}}_{Z \epsilon F} Z$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(Z)$, définies pour $Z \epsilon F$ et telles que $f(Z) \epsilon Z$ pour $Z \epsilon F$. Dans le cas où $M = \{Z_1, Z_2\}$, nous avons évidemment

$$\mathop{\mathbf{P}}_{Z \epsilon \{Z_1, Z_2\}} Z = \mathop{\mathbf{P}}_{Z \epsilon \{Z_2, Z_1\}} Z$$

(puisque $\{Z_1, Z_2\} = \{Z_2, Z_1\}$), d'où il résulte que le produit considéré ne coïncide pas avec le produit cartésien $Z_1 \times Z_2$ (lequel, comme nous le savons, n'est pas commutatif).

Il est évident que, si la famille F est finie (non vide) et si les ensembles Z de la famille F sont non vides, l'ensemble $\mathop{\mathbf{P}}_{Z \epsilon F} Z$ est non vide. Or, nous ne savons pas démontrer sans faire appel à *l'axiome* *du choix* qu'il est de même pour les familles F non vides quelconques. On peut même démontrer qu'une telle assertion équivaut à l'axiome du choix.

Une autre modification du produit cartésien présente le *produit extérieur* d'une famille M d'ensembles disjoints que l'on représente par $\overset{*}{\prod\limits_{Z\in M}} Z$; c'est l'ensemble de tous les ensembles contenus dans $\sum\limits_{Z\in M} Z$ et qui ont un (et seulement un) élément commun avec chaque ensemble Z de la famille M. Le produit extérieur est commutatif et associatif, contrairement au produit cartésien qui, en général, ne jouit pas de ces propriétés.

La proposition: „le produit extérieur de toute famille non vide d'ensembles disjoints non vides est non vide", mise en doute par certains mathématiciens, porte le nom *d'axiome du choix* ou *d'axiome de Zermelo* [1]; les auteurs anglais l'appellent *multiplicative axiom*.

On peut énoncer l'axiome du choix autrement, en disant qu'il existe une fonction qui fait correspondre à chaque ensemble non vide un élément de cet ensemble.

M. K. Gödel a démontré que l'axiome du choix n'est pas contradictoire aux autres axiomes de la théorie des ensembles (si ces axiomes ne sont pas eux-mêmes contradictoires) [2].

On connait plusieurs propositions dont on sait démontrer qu'elles sont équivalentes à l'axiome du choix. Telle est la proposition T de M. Tarski:

T. E étant un ensemble non fini quelconque, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble E et son carré combinatoire $E\times E$ [3]).

Appelons *chaîne* toute famille F d'ensembles telle que, si A et B sont deux ensembles de F, on a soit $A\subset B$, soit $B\subset A$. Appelons *fermée* toute famille F d'ensembles telle que, F_1 étant une chaîne contenue dans F, la somme de tous les ensembles de F_1 est un ensemble de la famille F.

[1]) Zermelo, l. c., p. 266; Axiom VI (der Auswahl).

[2]) *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis*, Proceedings National Acad. Sciences 24 (1938), p. 556—557. Voir aussi le livre de K. Gödel paru sous même titre dans Annals of Math. Studies Princeton 1940.

[3]) A. Tarski, Fund. Math. 5 (1924), p. 147.

Le théorème de Zorn [1]) peut être exprimé comme il suit [2]):

Z. Il existe dans toute famille fermée d'ensembles au moins un ensemble qui n'est pas contenu dans aucun autre ensemble de cette famille.

On peut démontrer que *la proposition Z est équivalente à l'axiome du choix* [3]).

Nous dirons qu'une famille F d'ensembles jouit de la propriété T, si la condition $E\in F$ équivaut à celle que tout sous-ensemble fini de E appartienne à F.

On peut démontrer que l'axiome du choix équivant à la proposition suivante de O. Teichmüller:

Dans toute famille d'ensembles jouissant de la propriété T il existe au moins un ensemble qui n'est contenu dans aucun autre ensemble de cette famille [4]).

On connait plusieurs autres propositions équivalentes à l'axiome du choix, mais leurs énoncés ne sont pas si élémentaires.

§ 26. Relations définies dans un ensemble. Principe d'abstraction. On dit qu'une relation R est définie dans un ensemble E, quand il est déterminé, pour chaque paire d'éléments x et y de E (distincts ou non), si l'on a xRy ou non; dans ce dernier cas, on écrit non(xRy), x non Ry, $(xRy)'$ ou bien $xR'y$) [5]).

Deux relations R_1 et R_2 définies dans un ensemble E sont considérées comme égales, si l'on a, quels que soient les éléments x et y, $(xR_1y)\equiv(xR_2y)$.

Chaque relation R définie dans l'ensemble E détermine un sous-ensemble $P(R)$ du carré cartésien $E\times E$, à savoir celui qui est formé de tous ces éléments (x,y) de $E\times E$, pour lesquels xRy. Réciproquement, il existe pour tout sous-ensemble Z du produit cartésien $E\times E$ une (et une seule) relation R définie dans l'ensemble E et telle que $P(R)=Z$, à savoir la relation „xRy signifie que $(x,y)\in Z$".

[1]) M. Zorn, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), p. 667—670.

[2]) Cf. P. Bernays, Journ. of Symbolic Logic 8 (1943), p. 92.

[3]) Voir P. Bernays, l. c. p. 93 (Remark) et G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York 1948, p. 44 (Th. 10); cf. la note de T. Szele *On Zorn's lemma*, Publicationes Mathematicae I, Debrecen 1950, p. 254—256.

[4]) Deutsche Mathematik 4 (1939), p. 567—577; voir aussi P. Bernays, l. c., p. 93. G. Birkhoff, l. c., p. 42, th. (AC 3), attribue cette proposition à J. W. Tukey.

[5]) Cf. § 5.

Il en résulte qu'il existe 2^{n^2} relations différentes dans un ensemble à n éléments, puisque le carré combinatoire d'un ensemble à n éléments a 2^{n^2} sous-ensembles distincts (nous n'excluons ici ni la relation qui ne subsiste pour aucune paire d'éléments de l'ensemble considéré, ni la relation qui subsiste pour chaque paire d'éléments de cet ensemble).

La relation R définie dans l'ensemble E est dite *réflexive dans* E, si l'on a xRx pour $x\epsilon E$; *symétrique dans* E, si l'on a $(xRy)\equiv(yRx)$ pour $x\epsilon E$, $y\epsilon E$; *asymétrique dans* E, si $(xRy)\to(y \text{ non } Rx)$, pour $x\epsilon E$, $y\epsilon E$; *transitive dans* E, si $|(xRy)(yRz)|\to(xRz)$ pour $x\epsilon E$, $y\epsilon E$, $z\epsilon E$; *connexe* dans E, si, x et y étant deux éléments distincts de E, on a toujours $(x \text{ non } Ry)\to(yRx)$.

Pour qu'une relation R, symétrique et transitive, définie dans un ensemble E, soit réflexive, il faut et il suffit qu'il existe pour tout élément a de E un élément b de E (distincts de a ou non), tel que aRb.

Voici l'exemple d'une relation symétrique et transitive, non réflexive, définie dans l'ensemble de tous les nombres naturels: „aRb signifie qu'aucun des nombres a et b n'est pas $=1$". On a ici $1 \text{ non } R1$.

Une relation qui n'est pas vérifiée par aucune paire d'éléments d'un ensemble donné, est dans cet ensemble symétrique, transitive et non réflexive.

Une relation qui n'est pas symétrique est dite *non symétrique;* une telle relation peut ne pas être asymétrique (ainsi la relation $\leqslant$ pour les nombres naturels).

Une propriété plus forte que l'asymétrie est *l'acyclicité.* Une relation R définie dans l'ensemble E est dite *acyclique,* s'il n'existe aucune suite finie $p_1, p_2, ..., p_n$ d'éléments de E, telle que

$$p_1 Rp_2,\ p_2 Rp_3, ..., p_{n-1} Rp_n \quad \text{et} \quad p_n Rp_1 \text{ }^{1)}.$$

On voit qu'une relation acyclique et connexe est transitive.

Si R est une relation définie dans l'ensemble E, l'ensemble $\underset{x\epsilon E}{E}\left[\sum_y (xRy)\right]$ est appelé *domaine* de la relation R, l'ensemble $\underset{y\epsilon E}{E}\left[\sum_x (xRy)\right]$ — son *contre-domaine*, et la somme de ces deux ensembles est dite *champ* de la relation R.

Si l'on regarde comme parallèles deux droites qui coïncident, le parallélisme des droites (dans le plan ou dans l'espace) est alors

[1]) Cf. Zermelo, Fund. Math. 25, p. 137.

une relation réflexive, symétrique, transitive et non connexe. La perpendicularité des droites dans le plan est une relation symétrique, non réflexive, non transitive et non connexe.

Dans l'ensemble de tous les nombres réels la relation $x<y$ est asymétrique, transitive et connexe; la relation $x|y$ (y est divisible par x) est une relation réflexive, transitive, non symétrique, non asymétrique (puisque par exemple $-2|2$ et $2|-2$) et non connexe. Dans l'ensemble de tous les sous-ensemble d'un ensemble donné E, la relation $\subset$ est réflexive, transitive, non symétrique et non connexe, et la relation „être une partie aliquote" est asymétrique, transitive et non connexe. Dans l'ensemble de tous les hommes la relation „x est père de y" est asymétrique, non transitive et non connexe, et la relation „x est femme de y" est non réflexive, asymétrique et transitive (puisque l'hypothèse que x est femme de y et qu'en même temps y est femme de z, est fausse, quels que soient x, y et z).

Soient R une relation définie dans l'ensemble E et R_1 une relation définie dans l'ensemble E_1. On dit que les relations R et R_1 sont *semblables* (ou *isomorphes*), s'il existe une correspondance biunivoque $f(x)$ entre les éléments de l'ensemble E et ceux de l'ensemble E_1, telle que, pour $x\epsilon E$ et $y\epsilon E$, les formules xRy et $f(x)R_1 f(y)$ sont équivalentes.

EXERCICES. 1. Définir, dans l'ensembles E à 6 éléments, une relation symétrique R qui vérifie les conditions suivantes: il existe pour chaque élément a de E 3 éléments distincts de a avec lesquels a est en relation R, mais il n'existe pas 3 éléments distincts de E qui soient deux à deux en relation R (problème de M. K. Zarankiewicz).

Réponse. La relation R entre les éléments de l'ensemble $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ qui a lieu entre les nombres a et b dans ce cas (et seulement dans ce cas) où un de ces nombres est $\leqslant 3$ et l'autre >3.

Une autre solution fut donnée par M. A. Mostowski: c'est la relation R entre les sommets d'un hexagone régulier, qui a lieu entre deux sommets a et b dans ce cas (et seulement dans ce cas) où ils sont voisins ou bien opposés.

2. Définir, dans un ensemble E à 100 éléments, une relation symétrique R qui vérifie les conditions suivantes: il existe pour tout élément a de E au moins 66 éléments de E qui sont en relation R avec a, mais il n'existe pas 4 éléments de E dont chaque paire soit en relation R.

Réponse. La relation R entre les éléments de l'ensemble $E=\{1,2,...,100\}$ qui a lieu entre a et b dans ce cas (et seulement dans ce cas) où $\{a,b\}-\{1,2,...,33\}\neq 0$, $\{a,b\}-\{34,35,...,66\}\neq 0$ et $\{a,b\}-\{67,68,...,100\}\neq 0$. (K. Zarankiewicz) [1]).

Remarque. On peut démontrer que, si l'on a dans un ensemble E à 100 éléments une relation symétrique R telle qu'il existe pour tout élément a de E au moins 67 éléments de E qui sont en relation R avec a, il y a 4 éléments de E dont chaque paire est en relation R (K. Zarankiewicz).

3. Combien de relations symétriques y a-t-il dans un ensemble fini à n éléments?

Reponse: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

4. Démontrer que, si R est une relation symétrique et réflexive définie dans un ensemble E, on peut faire correspondre à tout élément a de E un ensemble $T(a)$ de sorte qu'on ait:

$$(aRb)\equiv(T(a)\,T(b)\neq 0)\quad\text{pour}\quad a\in E,\ b\in E.$$

Démonstration. Il suffit de désigner par $T(a)\,(a\in E)$ l'ensemble de tous les ensembles $\{a,x\}$ où x est un élément pour lequel la formule aRx est vraie.

5. Démontrer que, pour qu'une relation R soit symétrique et pour qu'on n'ait jamais xRx, il faut et il suffit qu'il existe une famille F d'ensembles non vides, telle que la relation de disjonction $(E_1 E_2=0)$ considérée dans F soit semblable à R [2]).

Principe d'abstraction [3]). *Si R est une relation réflexive, symétrique et transitive, définie dans l'ensemble E, E est une somme d'ensembles disjoints, telle que pour deux éléments x et y de E la formule xRy est vraie dans ce cas (et seulement dans ce cas) où x et y appartiennent au même terme de cette somme.*

Démonstration. Posons

$$T(a)=\underset{y\in E}{E}\,[aRy]. \tag{1}$$

[1]) Cf. K. Zarankiewicz, Colloquium Mathematicum I (1947), p. 13.

[2]) Voir E. Marczewski, Fund. Math. 33, p. 305.

[3]) Voir L. Couturat, *Les principes des Mathématiques*, Paris 1905, p. 49, H. Scholz, H. Schweitzer: *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion*, Leipzig 1935, V+108 p.

La relation R étant réflexive, nous avons d'après (1) $a\in T(a)$ pour $a\in E$. Or, si $a\in E$ et $b\in E$, on a soit $T(a)=T(b)$, soit $T(a)\cdot T(b)=0$. En effet, si $T(a)\cdot T(b)\neq 0$, il existe un élément $x\in T(a)\,T(b)$ et, vu la définition des ensembles $T(a)$ et $T(b)$, on a aRx et bRx. Soit y un élément quelconque de l'ensemble $T(a)$; d'après (1) on a aRy. La relation R étant symétrique et transitive, les formules bRx, aRx et aRy donnent tout de suite bRy, ce qui prouve que $y\in T(b)$. On a donc $T(a)\subset T(b)$. On démontre pareillement que $T(b)\subset T(a)$. Ainsi $T(a)=T(b)$. Nous avons démontré que $[T(a)\,T(b)\neq 0]\to\to[T(a)=T(b)]$, c. q. f. d.

Désignons maintenant par K l'ensemble de tous ces sous-ensembles (et seulement de ces sous-ensembles) Z de E, pour lesquels il existe au moins un élément x de E, tel que $T(x)=Z$ (nous pourrions évidemment écrire: $K=\{T(x)\}_{x\in E}$). Puisque $a\in T(a)$ pour $a\in E$, il existe pour tout élément a de E un ensemble Z de la famille K, tel que $a\in Z$ (à savoir l'ensemble $Z=T(a)$). On a donc $E\subset\sum_{Z\in K}Z$; vu qu'on a aussi $\sum_{Z\in K}Z\subset E$ (puisqu'on a $Z\subset E$ pour $Z\in K$), on trouve $E=\sum_{Z\in K}Z$. Les termes de cette somme sont disjoints. En effet, Z_1 et Z_2 étant deux termes distincts de la somme considérée, on a $Z_1\in K$, $Z_2\in K$, $Z_1\neq Z_2$; vu la définition de l'ensemble K, il existe des éléments a_1 et a_2 de l'ensemble E, tels que $T(a_1)=Z_1$, $T(a_2)=Z_2$. Or $Z_1\neq Z_2$, donc $T(a_1)\neq T(a_2)$, ce qui donne, comme nous le savons, $T(a_1)\,T(a_2)=0$, donc $Z_1 Z_2=0$.

Supposons maintenant que x et y sont des éléments du même terme Z de notre somme $E=\sum_{Z\in E}Z$. On a ici $Z\in K$, il existe donc un élément a de E, tel que $Z=T(a)$. D'après (1), vu que $x\in Z$ et $y\in Z$, on trouve aRx et aRy. D'où, la relation R étant symétrique et transitive, on a xRy.

Si enfin les éléments x et y appartiennent aux termes distincts de notre somme, donc respectivement aux sous-ensembles disjoints Z_1 et Z_2 de l'ensemble K, il ne peut pas être xRy, car il existerait alors des éléments a_1 et a_2 de E, tels que $Z_1=T(a_1)$, $Z_2=T(a_2)$, $x\in T(a_1)$ $y\in T(a_2)$. D'où, d'après (1), on aurait a_1Rx, a_2Ry; vu que xRy et que R est une relation symétrique et transitive, on obtiendrait a_1Ra_2, donc $a_2\in T(a_1)$ et, vu que $a_2\in T(a_2)$, $T(a_1)\,T(a_2)\neq 0$, c'est-à-dire $Z_1 Z_2\neq 0$, ce qui est impossible, les termes de notre somme étant, comme nous l'avons vu, disjoints.

Notre somme jouit ainsi de toutes les propriétés désirées et le principe d'abstraction est démontré.

Il existe une seule décomposition de l'ensemble E postulée dans le principe d'abstraction, si l'on ne considère pas comme distinctes deux décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes. Il est à remarquer que N. Lusin considère le principe d'abstraction comme un nouvel axiome *(axiome du partage)* [1]).

En rapport avec le principe d'abstraction, il est encore à remarquer que, si un ensemble E est une somme disjointe d'ensembles et si l'on désigne par R la relation entre deux éléments de E consistant en cela qu'ils appartiennent au même terme de la somme considérée, la relation R sera réflexive, symétrique et transitive. L'étude des relations réflexives, symétriques et transitives définies dans un ensemble donné se réduit ainsi à l'étude des décompositions de cet ensemble en termes disjoints.

On peut donc définir dans un ensemble donné E tant de relations réflexives, symétriques et transitives (dites relations d'équivalence), qu'il y a de décompositions de l'ensemble E en une somme d'ensembles disjoints et non vides, pourvu qu'on ne considère pas comme distinctes les décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes [2]).

EXERCICE. 1. Combien de relations réflexives, symétriques et transitives y a-t-il dans un ensemble à 4 éléments? Déterminer toutes ces relations.

Réponse. 15; cf. l'exercice 5 au § 17.

Soit F une famille d'ensembles et posons $S=\sum_{E\in F} E$. Soit R la relation définie dans l'ensemble S comme suit:

$$(xRy)\equiv\prod_{E\in F}[(x\in E)\equiv(y\in E)]\qquad \text{pour}\quad x\in S,\ y\in S.$$

La relation R est réflexive, symétrique et transitive. D'après le principe d'abstraction, l'ensemble S se décompose donc en une somme disjointe, telle que deux éléments du même terme sont toujours en relation R et deux éléments des termes différents ne le

[1]) Voir Fund. Math. **10** (1927), p. 83.

[2]) Un mémoire détaillié a été consacré aux relations d'équivalence (dans le sens précisé tout à l'heure) par M. O. Ore dans Duke Mathematical Journal, **9** (1941).

sont jamais. Les termes de la somme S obtenue ainsi s'appellent *atomes* de la famille F d'ensembles [1]).

Il est clair que tout élément a de la somme S appartient à un et un seul atome (de la famille F); désignons ce dernier par $A(a)$. Pour $a\in S$, désignons par $S(a)$ le produit de tous les ensembles de la famille F auxquels appartient a, et par $Q(a)$ la somme de tous les ensembles de la famille F auxquels a n'appartient pas. Nous aurons alors

$$A(a)=P(a)-Q(a)\quad \text{pour}\quad a\in S.$$

Il est facile à voir que

$$E=\sum_{a\in E}A(a)\quad \text{pour}\quad 0\neq E\in F.$$

En effet, si $E\in F$, $a\in E$ et $x\in A(a)$, on a (vu que $a\in A(a)$ et vu la définition des atomes) xRa, d'où, vu la définition de la relation R, $x\in E$. On a donc $A(a)\subset E$ pour $a\in E$, d'où $\sum_{a\in E}A(a)\subset E$. L'inclusion inverse est évidente, puisque $a\in A(a)$ pour $a\in S$ et puisque $E\subset S$.

Donc: *tout ensemble non vide de la famille F est une somme d'atomes de cette famille.*

On peut démontrer que, si F' est une famille disjointe d'ensembles telle que tout ensemble de la famille F est une somme d'ensembles de la famille F', tout atome de la famille F est une somme d'ensembles de la famille F' [2]).

Si chaque atome de la famille F est un ensemble de cette famille, celle-ci est dite *atomique*. On peut démontrer que tout ensemble linéaire est un ensemble de tous les atomes d'une famille formée d'une suite infinie d'ensembles linéaires.

Encore quelques mots sur la structure des atomes. Le lecteur démontrera facilement que, pour qu'un ensemble A soit atome de la famille F d'ensembles, il faut et il suffit qu'il soit un ensemble non vide de la forme

$$A=\prod_{E\in F_1}E-\sum_{E\in F-F_1}E,$$

où F_1 est une sous-famille de F.

En particulier, soit $F=\{E_1,E_2,\dots,E_n\}$ une famille finie d'ensembles. Désignons par C^0E l'ensemble E et par C^1E l'ensemble

[1]) Cf. A. Tarski, Fund. Math. **16**, p. 236 et ibidem **24**, p. 191. La notion d'atomes est due à M. Fréchet, Fund. Math. **5**, p. 210 (§ 2).

[2]) Voir S. Piccard, Fund. Math. **26**, Théorème I.

$(E_1+E_2+\ldots+E_n)-E$. Les atomes de la famille F seront les ensembles non vides de la forme

$$\prod_{k=1}^{n} C^{a_k} E \tag{1}$$

(où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est une suite formée de nombres 0 et 1) et chaque ensemble de cette forme sera un atome.

Il en résulte tout de suite qu'une famille formée de n ensembles a au plus 2^n-1 atomes distincts. Or, il existe des familles formées de n ensembles qui ont précisément 2^n-1 atomes; ainsi par exemple la famille $F=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, où E_k est l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble $1, 2, \ldots, n$ contenant l'élément k.

Tout ensemble non vide de la famille F est une somme d'atomes de cette famille. D'autre part, de p ensembles non vides et distincts on peut former (en prenant certains d'entre eux) 2^p-1 sommes différentes non vides. Donc, si une famille F d'ensembles non vides quelconques a p atomes (où p est un nombre naturel), cette famille a tout au plus 2^p-1 éléments distincts. Pour le nombre p_n d'atomes d'une famille formée de n ensembles non vides, on obtient l'inégalité $n \leqslant 2^{p_n}-1$, d'où, en désignant par $G(x)$ le plus petit entier $\geqslant x$, on trouve $p_n \geqslant G(lg_2(n+1))$. Or, il existe des familles de n ensembles, pour lesquelles précisément $p_n = G(lg_2(n+1))$, ainsi par exemple la famille de tous les $n=2^p-1$ sous-ensembles non vides de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$, pour laquelle les atomes sont les ensembles $\{1\}, \{2\}, \ldots \{p\}$.

Le nombre d'atomes d'une famille de n ensembles est donc compris (inclusivement) entre les nombres $G(lg_2(n+1))$ et 2^n-1, dont chacun peut être achevé pour certaines familles formées de n ensembles.

Le nombre p d'atomes d'une famille de 2^m ensembles non vides satisfaisant à l'inégalité $2^m \leqslant 2^p-1$, on trouve $p > m$. Une famille de 2^m ensembles non vides a donc au moins $m+1$ atomes distincts. Il en résulte que toute somme de 2^m ensembles non vides distincts est une somme de $m+1$ ensembles disjoints non vides, ce que nous avons démontré d'une autre manière au § 17.

Nous pouvons maintenant, pour chaque somme $E_1+E_2+\ldots+E_{2^m}$ de 2^m ensembles distincts non vides, déterminer effectivement une décomposition de cette somme en une somme de $m+1$ ensembles disjoints $H_1+H_2+\ldots+H_{m+1}$. Cette décomposition résulte du fait que,

pour toute famille finie d'ensembles donnés $E_1, E_2, \ldots, E_n$, nous savons ranger effectivement en une suite tous leurs atomes. En effet, ils sont, comme nous le savons, de la forme (1), et nous pouvons les ranger selon la valeur croissante des nombres $a_1+2a_2+2^2a_3+\ldots+2^{n-1}a_n$.

Il est à remarquer que l'on peut définir effectivement une suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, \ldots$, telle qu'en désignant par F la famille de tous les ensembles de cette suite, nous ne savons pas, à l'état actuel de la science, nommer aucun atome de la famille F.

M. Tarski[1]) appelle *idéal* d'un corps[2]) donné K d'ensembles toute famille non vide d'ensembles $J \subset K$, telle que

$$\text{si } X \in J \text{ et } J \in Y, \text{ alors } X+Y \in J$$

et

$$\text{si } X \in J,\ Y \in K \text{ et } Y \subset X, \text{ alors } Y \in J.$$

Ainsi, par exemple, tous les ensembles finis d'un corps donné d'ensembles forment un idéal de ce corps. Tout corps est son propre idéal.

M. Tarski[3]) appelle un idéal J d'un corps K *idéal premier* de ce corps, si $J \neq K$ et si J satisfait à la condition suivante:

$$\text{si } X \in K,\ Y \in K \text{ et } XY \in J, \text{ on a soit } X \in J, \text{ soit } Y \in J.$$

M. Tarski a étudié plusieurs propriétés des idéaux[4]).

§ 27. Théorèmes de Banach et de Cantor-Bernstein. Soit $f(E)$ une fonction dont les arguments E sont des sous-ensembles d'un ensemble donné M et dont les valeurs sont des ensembles. Pour tout ensemble $E \subset M$, $f(E)$ est donc un ensemble déterminé. On dit alors qu'on a une fonction de sous-ensembles de l'ensemble M. Si, en outre, on a toujours $f(E_1) \subset f(E_2)$ pour $E_1 \subset E_2 \subset M$, on dit que la fonction f est *non décroissante*.

Voici l'exemple d'une fonction qui est non décroissante. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie pour les éléments x d'un ensemble donné M, dont les valeurs sont des ensembles non vides; on dit alors que φ est une fonction multivoque définie dans l'ensemble M[5]).

---

[1]) Fund. Math. 32, p. 50.

[2]) On appelle *corps* d'ensembles une famille F d'ensembles, telle que la somme et la différence de deux ensembles de F appartient à F. Cf. § 30.

[3]) l. c., p. 56. [4]) l. c.

[5]) On obtient une fonction univoque, définie dans l'ensemble M, dans le cas où chacun des ensembles $\varphi(x)$ (où $x \in M$) est formé d'un seul élément et où l'on fait correspondre à x cet élément unique au lieu de l'ensemble $\varphi(x)$.

Posons

$$f(F)=\sum_{x\in E}\varphi(x) \quad \text{pour} \quad E\subset M;$$

$f(E)$ est alors une fonction non décroissante de sous-ensembles de M. La fonction f est, de plus, *absolument* additive, c'est-à-dire, quelle que soit la famille F de sous-ensembles de M, on a

$$f\Big(\sum_{E\in F}E\Big)=\sum_{E\in F}f(E).$$

On voit que toute fonction additive (même simplement additive) de sous-ensembles de M (c'est-à-dire satisfaisant à la condition $f(E_1+E_2)=f(E_1)+f(E_2)$ pour $E_1\subset M$, $E_2\subset M$) est non décroissante.

La notion de fonction additive d'ensembles peut être généralisée comme suit. Soit M un ensemble formé d'éléments quelconques, dans lequel on a défini arbitrairement la somme $a+b$ de deux éléments appartenant à M, de sorte que $a+b$ soit toujours un élément de M (bien déterminé par les éléments a et b de M) et que cette somme soit toujours commutative et associative (c'est-à-dire qu'on ait $a+b=b+a$ et $(a+b)+c=a+(b+c)$, pour $a\in M$, $b\in M$, $c\in M$). Soit maintenant S un ensemble donné et supposons qu'à tout ensemble $E\subset S$ on fait correspondre un élément $f(E)$ de M, de sorte que, A et B étant deux sous-ensembles disjoints de S, on ait toujours $f(A+B)=f(A)+f(B)$.

Soit n un nombre naturel et soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles donnés. Formons tous les produits $E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_k}$ (pas nécessairement différents) où $i_1, i_2, \ldots, i_k$ est une suite croissante de nombres naturels $\leqslant n$. Il existe 2^n-1 de tels produits. Divisons tous ces produits en deux classes, en rangeant dans la première tous ceux où k est un nombre impair, et dans la seconde tous ceux où k est un nombre pair. La première classe contient $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}$ produits, la seconde $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}-1$ produits (dont la forme est distincte, mais dont la valeur ne l'est pas nécessairement). Désignons ces produits respectivement par

$$N_1, N_2, \ldots, N_{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad P_1, P_2, \ldots, P_{2^{n-1}-1}.$$

On peut démontrer le suivant

Théorème [1]: *Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une suite finie d'ensembles dont la somme est S. Soit $f(E)$ une fonction qui fait correspondre à tout ensemble $E\subset S$ un élément $f(E)$ d'un ensemble M dans lequel on a défini une addition de deux éléments de M, qui est commutative et associative, et supposons que, A et B étant deux sous-ensembles disjoints de S, on a toujours $f(A+B)=f(A)+f(B)$. On a alors:*

$$f(E_1+E_2+\ldots+E_n)+f(P_1)+f(P_2)+\ldots+f(P_{2^{n-1}-1})=$$
$$=f(N_1)+f(N_2)+\ldots+f(N_{2^{n-1}}).$$

En particulier, cette égalité a lieu (pour toute suite finie $E_1, E_2, \ldots E_n$ d'ensembles), lorsque $f(E)$ est une fonction d'ensembles définie pour $E\subset E_1+E_2+\ldots+E_n$ et dont les valeurs sont des ensembles, telle qu'on a toujours $f(A+B)=f(A)+f(B)$ pour A et B disjoints. On obtient un autre cas particulier de notre théorème, en supposant que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis et que $f(E)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E; il résulte alors de notre théorème que

$$f(E)-f(E_1+E_2+\ldots+E_n)=f(E)-f(N_1)-f(N_2)-\ldots-f(N_{2^{n-1}})+$$
$$+f(P_1)+f(P_2)+\ldots+f(P_{2^{n-1}-1}),$$

pour tout ensemble fini $E\supset E_1+E_2+\ldots+E_n$.

On peut exprimer ce résultat de la façon suivante.

Etant donné un nombre fini m d'objets quelconques, soit m_{α_1} le nombre de ceux d'entre eux qui jouissent d'une propriété α_1, $m_{\alpha_1\alpha_2}$ le nombre de ceux qui jouissent à la fois des propriétés α_1 et α_2, et ainsi de suite.

Le nombre de ceux de nos objets qui ne jouissent d'aucune des propriétés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est

$$m-m_{\alpha_1}-m_{\alpha_2}-\ldots-m_{\alpha_n}+m_{\alpha_1\alpha_2}+m_{\alpha_1\alpha_3}+\ldots+m_{\alpha_{n-1}\alpha_n}-$$
$$-m_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}-\ldots\pm m_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\ {}^{2)}.$$

[1]) Voir ma Note qui paraîtra dans les C. R. de la Soc. Sc. de Varsovie, 1949.

[2]) Cf. J. J. Sylvester, C. R. Paris **96** (1883), p. 463; U. Yule, *An introduction to the theory of statistics*, London, Griffin 1916; G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* II, Berlin 1925, p. 119 (problème 21) et pp. 326—327. Ces derniers auteurs regardent cette proposition comme appartenant à la logique formelle.

On peut définir une correspondance biunivoque entre les fonctions d'ensemble définies pour les sous-ensembles d'un ensemble donné M et ne prenant que les valeurs 0 et 1, et les ensembles de fonctions définies dans M et ne prenant que les valeurs 0 et 1. A ce but, il suffit de faire correspondre à toute fonction $f(E)$ définie pour $E\subset M$ et ne prenant que les valeurs 0 et 1, l'ensemble de toutes les fonctions caractéristiques $\varphi_E(x)$ correspondant aux ensembles $E\subset M$, pour lesquels on a $f(E)=1$. Ainsi l'étude des fonctions d'ensemble ne prenant que 2 valeurs équivaut à l'études des ensembles de fonctions ne prenant que 2 valeurs.

Ce résultat est faux pour les fonctions ne prenant que 3 valeurs. Ainsi par exemple dans l'ensemble M formé d'un seul élément, il existe 9 fonctions de sous-ensembles de M (le sous-ensemble vide y inclus) ne prenant que les valeurs 0, 1 ou 2, tandis qu'il n'existe que 8 ensembles (l'ensemble vide y inclus) de fonctions définies dans M et ne prenant que les valeurs 0, 1 ou 2.

Dans le cas de 4 valeurs, nous retrouvons la situation constatée pour les 2 valeurs. Ainsi, pour tout ensemble M, on peut définir, (d'ailleurs d'une façon artificielle) la correspondance biunivoque désirée; nous le laissons au lecteur. Remarquons que, pour les fonctions ayant un contre-domaine fini, le cas de 2 et de 4 valeurs est exceptionnel.

Une fonction d'ensemble $f(E)$ (définie pour $E\subset M$) est dite *soustractive*, si l'on a $f(E_1-E_2)=f(E_1)-f(E_2)$ pour $E_1\subset M$, $E_2\subset M$. On démontre qu'une fonction soustractive est additive [1]); or, comme l'a démontré M. Ulam [2]) à l'aide de l'axiome du choix, il n'est pas nécessaire qu'elle soit dénombrablement additive (c'est-à-dire on n'a pas nécessairement $f(E_1+E_2+\ldots)=f(E_1)+f(E_2)+\ldots$ pour $E_k\subset M$, $k=1,2,\ldots$).

On peut aussi définir des fonctions non croissantes de sous-ensembles d'un ensemble donné M: ce sont les fonctions vérifiant la formule $f(E_1)\supset f(E_2)$ pour $E_1\subset E_2\subset M$. On démontre qu'une fonction d'ensemble définie dans l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné qui est en même temps non décroissante et non croissante, est constante (c'est-à-dire que l'on on a $f(E_1)=f(E_2)$ pour $E_1\subset M$, $E_2\subset M$). Or, il existe des fonctions d'ensemble définies

[1]) Et multiplicative, c'est-à-dire que $f(E_1E_2)=f(E_1)f(E_2)$ pour $E_1\subset M$, $E_2\subset M$; cf. C. Kuratowski et T. Posament, Fund. Math. **22**, p. 280.

[2]) Fund. Math. **14**, p. 231.

dans une famille d'ensembles, qui sont non décroissantes et non croissantes et cependant non constantes pour les ensembles de cette famille (ce cas se présente par exemple, si chaque paire d'ensembles de cette famille est disjointe).

Lemme. *Si $f(E)$ est une fonction non décroissante de sous-ensembles de l'ensemble M et s'il existe un ensemble $X\subset M$, tel que $f(X)\subset X$, il existe un ensemble $Q\subset M$, tel que $f(Q)=Q$.*

Démonstration. Il existe des sous-ensembles E de M, tels que

$$f(E)\subset E, \tag{1}$$

l'ensemble $E=X$ par exemple. Désignons par Q le produit de tous les ensembles $E\subset M$ vérifiant la formule (1). On aura donc $Q\subset M$ et, pour tout ensemble E pour lequel on a la formule (1),

$$Q\subset E$$

(puisque le produit des ensembles est contenu dans chaque facteur); d'où, la fonction f étant non décroissante, on trouve d'après (1)

$$f(Q)\subset f(E)\subset E,$$

donc $f(Q)\subset E$ pour tout facteur E du produit Q; d'où

$$f(Q)\subset Q. \tag{2}$$

Posons

$$T=f(Q); \tag{3}$$

d'après (2), nous aurons $T\subset Q$, d'où $f(T)\subset f(Q)$ et, d'après (3), $f(T)\subset T$, ce qui prouve que $E=T$ est un des ensembles $E\subset M$ vérifiant la formule (1), donc un des facteurs du produit Q; d'où $Q\subset T$, c'est-à-dire d'après (3)

$$Q\subset f(Q). \tag{4}$$

Les formules (2) et (4) donnent la formule $f(Q)=Q$.

Notre lemme est ainsi démontré. Il est à remarquer que l'ensemble Q satisfaisant à l'équation $f(Q)=Q$ est défini effectivement (pour chaque fonction f vérifiant les conditions de notre lemme).

Théorème 1[1]. *Si A et B sont deux ensembles et φ et ψ deux fonctions non décroissantes de sous-ensembles de A, respectivement de B, et telles que*

(5) $$\varphi(A) \subset B \quad \text{et} \quad \psi(B) \subset A,$$

nous savons définir les décompositions

(6) $$A = A_1 + A_2, \quad B = B_1 + B_2,$$

qui satisfont aux conditions

(7) $$A_1 A_2 = 0, \quad B_1 B_2 = 0, \quad \varphi(A_1) = B_1, \quad \psi(B_2) = A_2.$$

Démonstration. Posons, pour $E \subset A$,

(8) $$f(E) = A - \psi(B - \varphi(E));$$

ce sera une fonction de sous-ensembles de A; d'après (8), nous aurons

(9) $$f(A) \subset A.$$

φ étant une fonction non décroissante de sous-ensembles de A, on a

$$\varphi(E_1) \subset \varphi(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset E_2 \subset A,$$

donc

$$B - \varphi(E_1) \supset B - \varphi(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset E_2 \subset A,$$

ce qui donne, ψ étant une fonction non décroissante de sous-ensembles de B,

$$\psi(B - \varphi(E_1)) \supset \psi(B - \varphi(E_2)) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset E_2 \subset A,$$

d'où

$$A - \psi(B - \varphi(E_1)) \subset A - \psi(B - \varphi(E_2)) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset E_2 \subset A$$

et d'après (8)

(10) $$f(E_1) \subset f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset E_2 \subset A.$$

[1] Ce théorème, trouvé pour les fonctions univoques par S. Banach (Fund. Math. 6 (1924), p. 236, cf. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, pp. 90—93), fut ainsi généralisé par M. M. Knaster et Tarski; cf. Ann. Soc. Polonaise Math. 6 (1927), p. 133. Une démonstration du théorème de Banach a été donnée aussi par J. M. Whittaker, Proc. Edinbourgh Math. Soc. Ser. 2, vol. I, 1 (1927), p. 47.

La fonction f de sous-ensembles de A est donc, d'après (10), non décroissante et satisfait d'après (9) aux conditions de notre lemme (pour $M = A$, $X = A$). D'après ce lemme il existe un ensemble $A_1 \subset A$, tel que $f(A_1) = A_1$ [1], donc d'après (8)

(11) $$A - \psi(B - \varphi(A_1)) = A_1.$$

Posons:

(12) $$A - A_1 = A_2,$$

(13) $$\varphi(A_1) = B_1,$$

(14) $$B - B_1 = B_2.$$

En tenant compte de (12) et de $A_1 \subset A$, nous avons

(15) $$A = A_1 + A_2.$$

D'après $A_1 \subset A$ et (5), nous trouvons $B_1 = \varphi(A_1) \subset \varphi(A) \subset B$, donc $B_1 \subset B$, et la formule (14) donne

(16) $$B = B_1 + B_2.$$

D'après (12) et (14) on trouve ensuite

(17) $$A_1 A_2 = 0 \quad \text{et} \quad B_1 B_2 = 0.$$

Enfin, d'après (13) et (14), on a $B - \varphi(A_1) = B_2$ et la formule (11) donne $A - \psi(B_2) = A_1$, d'où, vu que $A_1 \subset A$, on trouve $\psi(B_2) = A - A_1$ et, d'après (12),

(18) $$\psi(B_2) = A_2.$$

Les formules (15), (16), (17), (13) et (18) donnent les formules (6) et (7), ce qui prouve que notre théorème est vrai.

Il résulte du renvoi [1] et des formules (12), (13) et (14) que les décompositions (6) qui vérifient les conditions (7) peuvent être définies effectivement pour tout couple d'ensembles A et B et pour tout couple de fonctions φ et ψ satisfaisant aux conditions de notre théorème.

Corollaire. *Si l'on a défini dans l'ensemble A une fonction à valeurs distinctes qui sont des éléments de l'ensemble B, et si l'on a défini dans B une fonction à valeurs distinctes qui sont des éléments de A, on sait définir une correspondance biunivoque f entre les éléments de A et ceux de B.*

[1] L'ensemble A_1 peut être défini effectivement, ce qui résulte de la démonstration de notre lemme.

Démonstration. Soit φ une fonction à valeurs distinctes définie dans A et telle que $\varphi(A)\subset B$, et soit ψ une fonction à valeurs distinctes, définie dans B et telle que $\psi(B)\subset A$. Les fonctions $\varphi(E)$ et $\psi(E)$ de sous-ensembles de A, respectivement de B, vérifierons les hypothèses du théorème; nous savons donc déterminer les décompositions vérifiant les formules (6) et (7).

Posons
$$f(x)=\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x\in A_1$$
et
$$f(x)=\psi^{-1}(x) \quad \text{pour} \quad x\in A_2,$$

où ψ^{-1} désigne la fonction inverse à la fonction ψ; ψ^{-1} existe dans l'ensemble A_2, puisque ψ est une fonction à valeurs distinctes dans B, et, d'après (6) et (7), on a $B_2\subset B$ et $\psi(B_2)=A_2$. La fonction f est ainsi définie dans l'ensemble $A=A_1+A_2$. Elle est à valeurs distinctes dans cet ensemble, puisque la fonction φ est à valeurs distinctes dans l'ensemle $\psi(B)\supset A_2$, et on a $\varphi(A_1)\cdot\psi^{-1}(A_2)=B_1B_2=0$. Finalement, on a $f(A)=f(A_1+A_2)=f(A_1)+f(A_2)=\varphi(A_1)+\psi^{-1}(A_2)=$ $=B_1+B_2=B$. La fonction f transforme donc, d'une façon biunivoque, l'ensemble A en B. Notre corollaire est ainsi démontré.

Voici une démonstration directe de notre corollaire. Posons

$$R=A-\psi(B) \tag{19}$$
et
$$A_1=R+\psi\varphi(R)+\psi\varphi\psi\varphi(R)+\psi\varphi\psi\varphi\psi\varphi(R)+\ldots \tag{20}$$

et définissons les ensembles A_2, B_1 et B_2 par les formules (12), (13) et (14).

L'image d'une somme d'ensembles étant la somme de leurs images, la formule (20) donne de suite

$$R+\psi\varphi(A_1)=A_1. \tag{21}$$

D'après (14), ψ étant une fonction à valeurs distinctes dans B, nous trouvons
$$\psi(B_2)=\psi(B-B_1)=\psi(B)-\psi(B_1). \tag{22}$$

Puisque $\psi(B)\subset A$, on a, d'après (19), $\psi(B)=A-R$; or, d'après (13), on a $\psi(B_1)=\psi\varphi(A_1)$. En tenant compte de (22), on a donc

$$\psi(B_2)=(A-R)-\psi\varphi(A_1)=A-[R+\psi\varphi(A_1)],$$

ce qui donne, d'après (21) et (12),

$$\psi(B_2)=A-A_1=A_2.$$

La démonstration ultérieure coïncide avec la démonstration du corollaire ci-dessus.

Voici une application de notre corollaire. Soit A l'ensemble de tous les nombres réels t, tels que $0<t\leqslant 1$, et soit $B=A\times A$. Les éléments de B sont donc des paires ordonnées (x,y), où $x\in A$ et $y\in A$. Posons, pour $t\in A$, $\varphi(t)=(t,1)$; ce sera évidemment une fonction à valeurs distinctes définie dans A et telle que $\varphi(A)\subset B$. Soit $z=(x,y)$ un élément de B; x et y sont donc deux nombres réels, tels que $0<x\leqslant 1$ et $0<y\leqslant 1$. Développons les nombres x et y en fractions décimales illimitées, contenant chacune une infinité de chiffres non nuls; nous savons que tout nombre réel >0 et $\leqslant 1$ n'a qu'un seul développement pareil, à savoir

$$x=0,x_1x_2x_3\ldots \quad \text{et} \quad y=0,y_1y_2y_3\ldots.$$

Posons ensuite
$$\psi(z)=0,x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots;$$

ce sera un nombre de l'ensemble A, bien déterminé par z. La fonction $\psi(z)$ est à valeurs distinctes dans B et on a $\psi(B)\subset A$ [1]).

On sait donc définir, d'après notre corollaire, une correspondance biunivoque entre les éléments de A et ceux de B, donc entre les points du segment $0<t\leqslant 1$ et ceux du carré $0<x\leqslant 1$, $0<y\leqslant 1$. On en déduit l'existence d'une correspondance biunivoque entre les points d'une droite et ceux d'un plan. Soit, dans cette correspondance, $f_0(x,y)$ le point de la droite, correspondant au point (x,y) du plan, et soit $(\varphi(t),\ \psi(t))$ le point du plan, correspondant au point t de la droite. On aura évidemment, pour x et y réels,

$$\varphi(f_0(x,y))=x, \qquad \psi(f_0(x,y))=y. \tag{*}$$

Or, soit $f(x,y)$ une fonction réelle quelconque de deux variables réelles. Posons, pour t réels,

$$F(t)=f(\varphi(t),\ \psi(t)); \tag{**}$$

ce sera une fonction réelle d'une variable réelle (déterminée par la fonction f). D'après (**) et (*), nous trouvons pour x et y réels:

$$F(f_0(x,y))=f(\varphi(f_0(x,y)),\ \psi(f_0(x,y)))=f(x,y).$$

[1]) On a ici $\psi(B)\neq A$, puisque par exemple $10/11=0{,}909090\ldots\in A-\psi(B)$.

Donc: il existe pour toute fonction réelle $f(x,y)$ de deux variables réelles une fonction réelle $F(t)$ d'une variable réelle, telle qu'on a pour x et y réels:

$$f(x,y)=F(f_0(x,y)).$$

Nous pouvons donc dire *qu'il existe une fonction réelle $f_0(x,y)$ de deux variables réelles, telle que toute fonction réelle de deux variables réelles est une fonction d'une variable réelle de la fonction f_0* [1]).

Quant à la fonction f_0 qui intervient dans ce théorème, on pourrait même démontrer qu'elle peut avoir la forme $g(x)+h(y)$, où g et h sont des fonctions d'une seule variable [2]).

Soit maintenant $f(x,y,z)$ une fonction réelle quelconque de trois variables réelles. $f_0(x,y)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant les mêmes que les fonctions ci-dessus, posons, pour u et v réels, $g(u,v)=f(u,\varphi(v),\psi(v))$. D'après (*) nous trouvons pour x,y,z réels

$$g(x,f_0(y,z))=f(x,\varphi(f_0(y,z)),\psi(f_0(y,z)))=f(x,y,z).$$

Donc: il existe une fonction réelle $f(x,y)$ de deux variables réelles, satisfaisant à la condition suivante: pour toute fonction réelle $f(x,y,z)$ de trois variables réelles, il existe une fonction réelle $g(x,y)$ de deux variables réelles, telle qu'on a pour x,y,z réelles

$$f(x,y,z)=g(x,f_0(y,z)).$$

Pareillement, $f(x,y,z,t)$ étant une fonction réelle quelconque de quatre variables réelles, si l'on pose, pour u et v réels, $h(u,v)=$ $=f(\varphi(u),\psi(u),\varphi(v),\psi(v))$, on trouve, d'après (*), pour x,y,z,t réels:

$$f(x,y,z,t)=h(f_0(x,y),f_0(z,t)).$$

Il en résulte que les fonctions de trois ou quatre variables se réduisent, par superpositions, aux fonctions de deux variables [3]).

Il est à remarquer que l'on peut démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu, qu'il existe une fonction réelle $f_0(x,y)$ de deux variables réelles, satisfaisant à la condition suivante: pour chaque

[1]) Cf. L. Bieberbach, Journ. f. reine u. angewandte Math. **165**, p. 92; A. Lindenbaum, Fundamenta Mathematicae **20**, p. 26; W. Sierpiński, Prace Matematyczno-Fizyczne **41**, p. 171.

[2]) Voir A. Lindenbaum, l. c. p. 27 et W. Sierpiński, l. c. p. 173, renvoi [1]).

[3]) W. Sierpiński, Prace Matematyczno-Fizyczne **41**, p. 174.

fonction réelle $f(x,y)$ de deux variables réelles, il existe une fonction $\varphi(t)$ d'une variable réelle à valeurs distinctes et telle que pour x et y réels on a

$$f(x,y)=f_0(\varphi(x),\varphi(y))\ ^{1)}.$$

Il résulte du corollaire de la p. 147 le théorème suivant:

Théorème 2 (de Cantor-Bernstein). *Si l'ensemble B est une image biunivoque d'un sous-ensemble de l'ensemble A et si A est une image biunivoque d'un sous-ensemble de B, l'ensemble B est une image biunivoque de l'ensemble A.*

Lorsque l'ensemble B est une image biunivoque de l'ensemble A, on écrit $A\sim B$ et on dit que l'ensemble B a la même puissance que l'ensemble A. La relation $\sim$ entre les ensembles est réflexive, symétrique et transitive. A l'aide de la notion d'égalité des puissances, le théorème de Cantor-Bernstein peut être exprimé comme suit:

Deux ensembles dont chacun a la même puissance qu'un sous-ensemble de l'autre, ont la même puissance.

Il en résulte en particulier que, si l'ensemble A a la même puissance que son sous-ensemble C, chaque ensemble B intermédiaire entre C et A (c'est-à-dire tel que $A\supset B\supset C$) a la même puissance que A.

Le théorème suivant de Tarski [2]) peut être considéré comme généralisation de la proposition ci-dessus:

Si $A\supset B\supset C$, $A_1\supset C_1$, $A\sim A_1$ et $C\sim C_1$, il existe un ensemble B_1, tel que $A_1\supset B_1\supset C_1$ et $B\sim B_1$.

Voici l'idée de la démonstration de ce théorème.

Soit $f(A)=A_1$ et $g(C)=C_1$. Posons

$$M=(B-C)+g^{-1}(C_1)\cdot g^{-1}(B-C)+g^{-1}fg^{-1}(C_1)\cdot g^{-1}fg^{-1}(B-C)+$$
$$+g^{-1}fg^{-1}fg^{-1}(C_1)\,g^{-1}fg^{-1}fg^{-1}f(B-C)+\ldots,$$

$N=B-M$. L'ensemble cherché est $B_1=f(M)+g(N)$.

EXERCICES. 1. Démontrer que si $A-B\sim B-A$, on a $A\sim B$ (mais pas inversement).

[1]) W. Sierpiński, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 1936, p. 8 et Fundamenta Mathematicae **27**, p. 9.

[2]) Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III **19** (1926), p. 302, Théorème 15.

D é m o n s t r a t i o n. Soit f la transformation biunivoque de $A-B$ en $B-A$. Si l'on pose encore $f(x)=x$ pour $x \in AB$, on voit que la fonction f transforme l'ensemble A en B d'une façon biunivoque. Or, si $A=\{2,3,4,...\}$, $B=\{1,4,5,6,...\}$, on a évidemment $A \sim B$, mais on n'a pas $A-B \sim B-A$, l'ensemble $A-B$ ayant deux éléments et l'ensemble $B-A$ un seul.

2. Démontrer que si $X \supset Y$ et $Y \sim Y+Z$, on a $X \sim X+Z$.

D é m o n s t r a t i o n. On a $Y \subset Y+(Z-X) \subset Y+Z$. Vu que $Y \sim Y+Z$ et d'après le théorème 2 on a $Y \sim Y+(Z-X)$. Or, $X+Z= =(X-Y)+[Y+(Z-X)]$; ces ensembles sont disjoints. On a donc $X+Z \sim (X-Y)+Y=X$, c. q. f. d.

Les propositions concernant la relation $\sim$ sont parfois difficiles à démontrer, surtout si l'on veut se passer de l'axiome du choix. A titre d'exemple, nous citerons sans démontrer les propositions suivantes.

Si M, N, P et Q sont quatre ensembles, tels que $MN=PQ=0$, $M \sim N$, $P \sim Q$ et $M+N \sim P+Q$, et si l'on a déterminé les correspondances biunivoques φ, ψ et ϑ établies respectivement entre M et N, P et Q, $M+N$ et $P+Q$, on peut déterminer une correspondance biunivoque entre M et P [1]).

S'il existe deux décompositions différentes de l'ensemble E, à savoir $E=M+N$ où $MN=0$ et $E=P+Q$ où $PQ=0$, et s'il existe une transformation biunivoque $\varphi(x)$ de M en N et une transformation biunivoque $\psi(x)$ de P en Q, alors les ensembles M et Q se décomposent en 4 parties disjointes de sorte que $M=M_1+M_2+ +M_3+M_4$, $Q=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$, $Q_1=M_1$, $Q_2=\psi(M_2)$, $Q_3=\varphi(M_3)$, $Q_4=\psi\varphi(M_4)$ [2]).

Si A et B sont deux ensembles tels que $A \sim B$, il existe des ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 tels que $A-B=C_1+C_2$, $B-A=D_1+D_2$, $C_1C_2=D_1D_2=0$, $C_1 \sim D_1$, $C_2+AB \sim AB \sim D_2+AB$ [3]).

Il est encore à remarquer, en rapport avec le théorème de C a n t o r - B e r n s t e i n, que la proposition suivante est équivalente à l'axiome du choix:

[1]) Voir W. S i e r p i ń s k i, Fundamenta Mathematicae **3**, p. 1—6; la démonstration ne fait pas usage de l'axiome du choix.

[2]) Voir C. K u r a t o w s k i, Fundamenta Mathematicae **6**, p. 240—242. La démonstration utilise l'axiome du choix (voir p. 241, renvoi [1])).

[3]) Lemme de A. T a r s k i énoncé sans démonstration dans les Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie **19** (1926) p. 301. Pour la démonstration ne faisant pas appel à l'axiome du choix, voir W. S i e r p i ń s k i, Fundamenta Mathematicae **34**, p. 113.

De deux ensembles quelconques, un au moins est une image biunivoque d'un sous-ensembles de l'autre [1]).

On peut démontrer aussi que la proposition suivante équivaut à l'axiome du choix:

De deux ensembles non vides, un au moins est une image univoque de l'autre [2]).

Une autre proposition équivalente à l'axiome du choix est que, M étant un ensemble non fini quelconque, on a $(M \times M) \sim M$; une autre encore que, si M et N sont deux ensembles quelconques tels que $(M \times M) \sim (N \times N)$, on a $M \sim N$ [3]).

Soient R l'ensemble de tous les nombres rationnels et X l'ensemble de tous les nombres réels. L'hypothèse de Cantor que, E étant un ensemble infini de nombres réels, on a soit $E \sim R$, soit $E \sim X$, est connue sous le nom de *l'hypothèse du continu*. On ne sait pas si elle est vraie ou fausse. J'ai consacré à cette hypothèse une monographie [4]).

En 1938 K. G ö d e l a démontré que l'hypothèse du continu n'est pas contradictoire aux autres axiomes de la théorie des ensembles habituellement admis (l'axiome du choix y inclus), s'ils ne sont pas contradictoires eux-mêmes [5]).

On peut démontrer que l'hypothèse du continu équivaut à la proposition suivante:

L'ensemble de tous les points du plan est somme d'une suite infinie d'ensembles $E_1+E_2+...$, tels que pour $n=1,2,...$ tout ensemble E_{2n-1} a un seul point sur toute parallèle à l'axe des abscisses et l'ensemble E_{2n} a un seul point sur toute parallèle à l'axe des ordonnées [6]).

[1]) Voir F. H a r t o g s, Math. Ann. **76** (1915), p. 443; W. S i e r p i ń s k i, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 232.

[2]) Ce théorème a été énoncé sans démonstration par A. L i n d e n b a u m dans les Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, **19** (1926), p. 312, théorème 82 (L) A_6; pour la démonstration, voir W. S i e r p i ń s k i ibid. **39** (1946), séance du 8 novembre 1946 et Fundamenta Mathematicae **34**, p. 161.

[3]) Théorème de A. T a r s k i, Fundamenta Mathematicae **5**, p. 147.

[4]) W. S i e r p i ń s k i, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, X+194 p.

[5]) Proc. Nat. Acad. Sc. **24**, p. 556—557. Voir aussi le livre de K. G ö d e l cité à la p. 57, renvoi [2]).

[6]) Voir W. S i e r p i ń s k i, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, séance du 24 février 1919; aussi Fundamenta Mathematicae **5**, p. 179.

Une autre proposition équivalente à l'hypothèse du continu est la suivante:

L'espace euclidien E à trois dimensions est une somme de trois ensembles E_i $(i=1,2,3)$ tels que, si l'on désigne par OX_i $(i=1,2,3)$ les trois axes des coordonnées de l'espace E, l'ensemble E_i est fini sur toute droite parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,3$ [1]).

Ainsi, on peut exprimer l'hypothèse du continu en termes de la géométrie élémentaire sans utiliser la notion d'infini.

Or, l'hypothèse que, M étant un ensemble infini, $U(M)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de M, et E un ensemble tel que $E \subset U(M)$, on a soit $E \sim U(M)$, soit $E \sim M_1$, où M_1 est un ensemble tel que $M_1 \subset M$, porte le nom de *l'hypothèse généralisée du continu*. Elle aussi, comme l'a démontré M. Gödel [2]), n'est pas contradictoire aux autres axiomes de la théorie des ensembles habituellement admis, s'ils ne sont pas contradictoires eux-mêmes.

§ 28. Correspondances multivoques.

On dit qu'on a nommé *une correspondance m-n-voque* entre deux ensembles A et B, si l'on a défini une loi d'après laquelle à tout élément p de A correspond un sous-ensemble $B(p)$ de B formé de n éléments distincts, de sorte que, q étant un élément quelconque de B, il existe m éléments distincts p de A, tels que $q \in B(p)$.

En utilisant l'axiome du choix, Dénes König a démontré [3]) que, s'il existe pour un nombre naturel n une correspondance n-n-voque (autrement: bi-n-voque) entre deux ensemble A et B, il existe aussi une correspondance biunivoque entre A et B, qui ne fait correspondre deux éléments que si ces éléments correspondent l'un à l'autre par la correspondance bi-n-voque donnée. Comme je l'ai démontré [4]), l'emploi de l'axiome du choix dans la démonstration de ce théorème est, dans l'état actuel de la science, inévitable même pour $n=2$. Or, la démonstration du théorème de D. König (à l'aide de l'axiome du choix) n'est pas facile, même pour $n=2$; elle est difficile pour $n=3$. Remarquons qu'elle n'est pas triviale même pour les ensembles A et B finis.

Le théorème de D. König équivaut au théorème suivant:

[1]) Voir W. Sierpiński, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 232 (1951), p. 1046.

[2]) l. c. p. 153, renvoi [5]).

[3]) Fundamenta Mathematicae 8, p. 114.

[4]) W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae, 34, p. 39.

Soient n un nombre naturel, $A \times B$ le produit cartésien de deux ensembles A et B, et P un ensemble $\subset A \times B$, tel que toute parallèle à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées rencontre P précisément en n points: il existe alors un sous-ensemble P_1 de P, tel que toute parallèle à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées rencontre P_1 précisément en un point.

On démontre aisément que, s'il existe entre deux ensembles *finis* A et B une correspondance n-n-voque (où n est un nombre naturel donné), les ensembles A et B on le même nombre d'éléments. En effet, il correspond alors à tout élément a de A un ensemble $E(a)$ formé de n éléments distincts de B, et il existe, pour tout élément b de B, n éléments distincts a de A, tels que $b \in E(a)$. Soit P l'ensemble de toutes les paires ordonnées (a,b), telles que $a \in E$ et $b \in E(a)$. Si A a k éléments et B a l éléments, on peut diviser l'ensemble P (d'après les éléments a) en k ensembles disjoints dont chacun a n éléments, et pareillement (d'après les éléments b) en l ensembles disjoints dont chacun a n éléments. On a donc $kn = ln$, d'où $k=l$, c. q. f. d.

Or, sans admettre l'axiome du choix nous ne savons pas démontrer que, si A et B sont deux ensembles entre lesquels il existe une correspondance 2-2-voque, on a $A \sim B$.

§ 29. La Topologie comme chapitre de la Théorie générale des ensembles.

La Topologie des espaces abstraits est l'étude des ensembles K, pour les sous-ensembles desquels on a défini une fonction $f(E)$ (dite dérivée de l'ensemble E) qui jouit des trois simples propriétés suivantes:

1^0 si $E=0$, alors $f(E)=0$,

2^0 si $E_1 \subset E \subset K$, alors $f(E_1) \subset f(E) \subset K$,

3^0 si les ensembles $E_1 \subset K$ et $E_2 \subset K$ ne diffèrent que par un nombre fini d'éléments, alors $f(E_1)=f(E)$.

Notre but n'est pas de développer la Topologie; mais, à titre d'exemple, nous déduirons de ces hypothèses, au moyen des définitions convenables, deux théorèmes importants, à savoir celui Cantor et celui de Borel.

Soient K un ensemble donné et f une fonction donnée de sous-ensembles de K jouissant des propriétés 1^0, 2^0 et 3^0. Au lieu de $f(E)$, nous écrirons E' et nous appelerons l'ensemble E' *dérivé* de l'ensemble E.

Définition 1. L'ensemble $E \subset K$ est dit *fermé*, si $E' \subset E$; et *ouvert*, si son complémentaire $K-E$ est fermé.

Nous démontrerons que *le produit d'un ensemble quelconque d'ensembles fermés est fermé.* En effet, soit $P = \Pi E$ un produit donné des ensembles fermés E. Nous avons donc $P \subset E$ pour tout facteur E du produit P, d'où (la fonction $f(E)=E'$ jouissant de la propriété 2⁰) $P' \subset E'$, donc $P' \subset E$, puisque, l'ensemble E étant fermé, on a $E' \subset E$. La formule $P' \subset E$ subsistant pour tout facteur E du produit P, il en résulte que $P' \subset \Pi E$, donc $P' \subset P$, ce qui prouve que l'ensemble P est fermé, c. q. f. d.

En appliquant ce résultat aux complémentaires (par rapport à K), nous verrons (moyennant les formules de De Morgan, voir p. 87) que *la somme d'un ensemble quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

Définition 2. L'ensemble $E \subset K$ est dit *compact* s'il est fini, ou bien si tout son sous-ensemble infini a son ensemble dérivé non vide.

Il résulte de cette définition *qu'un sous-ensemble d'un ensemble compact est toujours compact.*

Théorème de Cantor. *Si*

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \tag{1}$$

est une suite infinie descendante d'ensembles non vides fermés, compacts et contenus dans $\subset K$, leur produit est non vide.

Démonstration. Choisissons dans chaque ensemble E_n $(n=1,2,\ldots)$ un élément p_n[1]) et soit $P=\{p_1, p_2, \ldots\}$. Si l'ensemble P est fini, un au moins des éléments $p_1, p_2, \ldots$ figure dans la suite $p_1, p_2, \ldots$ une infinité de fois et, d'après (1), est un élément de chaque ensemble E_n $(n=1,2,\ldots)$; ainsi leur produit est non vide. Supposons donc maintenant que l'ensemble P est infini. Comme sous-ensemble infini de l'ensemble compact E_1, l'ensemble P a son dérivé P' non vide. Soit p un élément de P' et soit $P_n = \{p_n, p_{n+1}, p_{n+1}, \ldots\}$, pour $n=1,2,\ldots$. Les ensembles P et P_n ne diffèrent que par un nombre fini d'éléments. On a de 3⁰ $P_n' = P'$, donc $p \in P_n'$ pour $n=1,2,\ldots$. Or, d'après (1), on a évidemment $P_n \subset E_n$, donc, d'après la propriété 2⁰ de la fonction $f(E)=E'$, $P_n' \subset E_n'$. D'autre part, l'ensemble E_n étant fermé, on a $E_n' \subset E_n$; donc $p \in P_n' \subset E_n' \subset E_n$, d'où $p \in E_n$ pour $n=1,2,\ldots$. Le théorème de Cantor est ainsi démontré.

[1]) Notre démonstration fait ici usage de l'axiome du choix.

Théorème de Borel. *Soit E un ensemble fermé et compact. Si*

$$E_1, E_2, E_3, \ldots \tag{2}$$

est une suite infinie d'ensembles ouverts, telle que

$$E \subset E_1 + E_2 + E_3 + \ldots, \tag{3}$$

il existe un nombre naturel n, tel que

$$E \subset E_1 + E_2 + \ldots + E_n. \tag{4}$$

Démonstration. Posons pour $n=1,2,\ldots$

$$E_1+E_2+\ldots+E_n = S_n, \qquad K-S_n = F_n, \qquad EF_n = H_n.$$

On a évidemment $S_{n+1} \supset S_n$, donc $F_{n+1} \subset F_n$ et $H_{n+1} \subset H_n$ pour $n=1,2,\ldots$, c'est-à-dire que $H_1, H_2, \ldots$ est une suite descendante. Les ensembles S_n (étant des sommes d'ensembles ouverts) sont ouverts, donc leurs complémentaires F_n sont fermés, de même que les ensembles $H_n = EF_n$ (étant des produits de deux ensembles fermés) qui sont aussi compacts (en tant que sous-ensembles de l'ensemble compact E). Si encore les ensembles H_n étaient non vides pour $n=1,2,\ldots$, leur produit H serait alors, d'après le théorème de Cantor, non vide, et on aurait pour $n=1,2,\ldots$:

$$H \subset H_n \subset F_n = K - S_n,$$

donc $HS_n = 0$ pour $n=1,2,\ldots$, et, d'après $E_n \subset S_n$, à plus forte raison $HE_n = 0$ pour $n=1,2,\ldots$, d'où, d'après (3), $HE=0$, ce qui est impossible, puisque $H \neq 0$ et $H \subset H_n \subset E$.

Il existe donc un nombre naturel n, tel que $H_n = 0$, d'où $EF_n = 0$, ce qui donne $E(K-S_n)=0$, donc $E \subset S_n$. L'existence d'un nombre naturel n pour lequel on a l'inclusion (4) est ainsi établie et le théorème de Borel est démontré.

Encore quelques mots sur le rapport des espaces abstraits considérés ci-dessus aux espaces (V) de Fréchet. Un ensemble quelconque K est dit espace (V), si à chaque élément K on a fait correspondre une famille non vide de sous-ensembles de K appelés *voisinages* de cet élément (cette correspondance peut être d'ailleurs tout à fait arbitraire).

E étant un ensemble $\subset K$, nous appelons ***élément d'accumulation*** de E tout élément a de K, tel qu'à tout voisinage de a appartient une infinité d'éléments de E.

Si l'on désigne par $f(E)$ l'ensemble de tous les éléments d'accumulation de E, on vérifie aisément que la fonction $f(E)$ satisfait aux conditions 1^0, 2^0 et 3^0.

D'autre part, soit $f(E)$ une fonction définie pour les sous-ensembles E de K et jouissant des propriétés 1^0, 2^0 et 3^0. p étant un élément donné de K, considérons comme son voisinage tout ensemble $H \subset K$, tel que $p \epsilon K - f(K-H)$.

On peut vérifier que, si l'on donne pour l'ensemble K la définition ci-dessus des éléments d'accumulation, et si l'on appelle dérivé E' de l'ensemble $E \subset K$ l'ensemble de tous les éléments d'accumulation de E, on aura $E' = f(E)$ pour $E \subset K$.

Ainsi, pour notre définition des éléments d'accumulation, l'étude des espaces (V) de Fréchet équivaut à celle des espaces abstraits considérés ci-dessus.

Quant aux espaces dits *topologiques*, leur étude n'est autre chose que l'étude de certaines fonctions additives de sous-ensembles d'un ensemble donné K (espace topologique), à savoir l'étude des fonctions $F(E)$ (fermetures de E) définies pour les sous-ensembles E de K et dont les valeurs sont des sous-ensembles de K (c'est-à-dire $F(E) \subset K$ pour $E \subset K$) et qui satisfont aux trois conditions suivantes:

1) $F(X+Y) = F(X) + F(Y)$ pour $X \subset K$, $Y \subset K$;

2) si $X = 0$ ou bien si X ne contient qu'un seul élément, on a

$$F(X) = X;$$

3) $F(F(X)) = F(X)$ pour $X \subset K$ [1] [2].

Ainsi la Topologie peut être considérée comme un chapitre de la Théorie générale des ensembles.

La théorie des espaces métriques comme chapitre de la Théorie générale des ensembles. La théorie des espaces métriques (distanciés) est l'étude des ensembles M formés d'éléments quelconques, où l'on a fait correspondre à tout système (ordonné) x, y de deux éléments de M un nombre réel non négatif $\rho(x,y)$, dit *distance* entre x et y. La distance doit vérifier pour $x \epsilon M$, $y \epsilon M$ et $z \epsilon M$ trois conditions suivantes (dites axiomes de distance):

[1]) Voir C. Kuratowski, *Topologie* I, p. 15.

[2]) Dans un espace topologique l'ensemble dérivé $E' = f(E)$ (satisfaisant aux conditions 1^0, 2^0 et 3^0) peut être défini comme celui de tous les éléments p de K, tels que $p \epsilon F(E - \{p\})$; on a alors $F(E) = E + f(E)$ pour $E \subset K$. Ainsi les espaces topologiques ne sont que des cas particuliers des espaces abstraits.

1) on a, pour $x \epsilon M$ et $y \epsilon M$, $\rho(x,y) = 0$ dans ce cas (et seulement dans ce cas) où $x = y$ (axiome de coïncidence);

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ pour $x \epsilon M$ et $y \epsilon M$ (axiome de symétrie);

3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ pour $x \epsilon M$, $y \epsilon M$ et $z \epsilon M$ (axiome de triangle).

A. Lindenbaum [1]) a remarqué que si l'on accepte l'axiome 1, les axiomes 2) et 3) peuvent être remplacés par un seul axiome:

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(y,x) + \rho(y,z).$$

Les espaces métriques ont été étudiés par M. Fréchet [2]), F. Hausdorff [3]) et ensuite par plusieurs auteurs.

On a étudié aussi les espaces *semi-métriques* où la distance satisfait seulement aux axiomes 1) et 2) [4]) et même des espaces où la distance n'est assujettie à aucune des conditions 1), 2) et 3) [5]). On a finalement étudié des espaces dans lesquels la distance n'est pas nécessairement un nombre réel [6]).

§ 30. Théorème de la diagonale [7]).

Etant donnée une fonction $f(t)$ qui fait correspondre à chaque élément t d'un ensemble T un sous-ensemble de T, l'ensemble $\underset{t \epsilon T}{E}[t \bar{\epsilon} f(t)]$ n'est pas une valeur de cette fonction.

Démonstration. Soit f une fonction qui fait correspondre à chaque élément t d'un ensemble donné T un sous-ensemble $f(t)$ de T et admettons qu'il existe un élément $t_0 \epsilon T$, vérifiant la formule

$$f(t_0) = \underset{t \epsilon T}{E}[t \bar{\epsilon} f(t)]. \tag{1}$$

[1]) Fundamenta Mathematicae **8**, p. 211.

[2]) M. Fréchet, Rendiconti di Palermo **22** (1906), p. 17.

[3]) F. Hausdorff, *Grunzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 211.

[4]) K. Menger, Math. Annalen **100**, p. 115; Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver, **40**; Proc. Akad. Amsterdam **30**, p. 710; Chittenden, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), p. 161.

[5]) P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie* I, Berlin 1935, p. 28.

[6]) K. Menger, Math. Zeitschr. **33**, p. 396. Cf. aussi M. Fréchet, *De l'écart numérique à l'écart abstrait*, Portugaliae Mathematica **5** (1946), et A. Appert, *Espaces majorés*, C. R. Acad. Sc. Paris **232** (1951), p. 1536.

[7]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie* I, p. 175.

Or, s'il était $t_0 \in f(t_0)$, on aurait, d'après (1), $t_0 \notin f(t_0)$; s'il était $t_0 \notin f(t_0)$, on aurait, d'après (1), $t_0 \in f(t_0)$. On arrive donc toujours à une contradiction. Ainsi un $t_0 \in T$ vérifiant la formule (1) n'existe pas et notre théorème est démontré.

Corollaire. *T étant un ensemble non vide, il n'existe aucune transformation biunivoque de l'ensemble T en l'ensemble $U(T)$* (de tous les sous-ensembles de T).

D é m o n s t r a t i o n. Soit T un ensemble non vide et admettons qu'il existe une transformation biunivoque f de l'ensemble T en l'ensemble $U(T)$. L'ensemble $E = \underset{t \in T}{E}\,[t \notin f(t)]$, en tant qu'élément de l'ensemble $U(T)$, serait donc une des valeurs de la fonction f, ce qui est impossible, vu le théorème de la diagonale. Notre corollaire est ainsi démontré.

CHAPITRE V

FAMILLES D'ENSEMBLES ET OPÉRATIONS SUR CES FAMILLES

§ 31. Familles d'ensembles. Familles d'ensembles établissant un ordre. On appelle *famille d'ensembles* un ensemble dont les éléments sont des ensembles. Exemple: l'ensemble $U(E)$ de tous les sous-ensembles de l'ensemble E.

Si Φ est une famille de sous-ensembles d'un ensemble donné E, nous disons que la famille Φ *établit un ordre* dans l'ensemble E, lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes: [1])

1) X et Y étant deux ensembles quelconques de la famille Φ, on a $X \subset Y$ ou bien $Y \subset X$ (les familles Φ vérifiant cette condition sont dites *croissantes* ou familles d'ensembles croissants);

2) p et q étant deux éléments distincts de l'ensemble E, il existe au moins un ensemble H de la famille Φ, tel que l'ensemble $H \cdot \{p, q\}$ est formé d'un seul élément.

Soient p et q deux éléments distincts de E et soient H_1 et H_2 deux ensembles de la famille Φ vérifiant la condition 2). Chacun des ensembles $H_1 \cdot \{p, q\}$ et $H_2 \cdot \{p, q\}$ est donc formé d'un seul élément. D'après 1) on a $H_1 \subset H_2$ ou bien $H_2 \subset H_1$. Donc un au moins des ensembles $H_1 \cdot \{p, q\}$ et $H_2 \cdot \{p, q\}$ est contenu dans l'autre. Chacun de ces ensembles étant formé d'un seul élément, on peut en conclure qu'ils sont égaux. On a donc $H_1 \cdot \{p, q\} = H_2 \cdot \{p, q\}$. Le produit $H \cdot \{p, q\}$ ne dépend donc pas (pour p et q donnés) du choix de l'ensemble H qui vérifie la condition 2).

Si (pour deux éléments distincts p et q de E) on a $H \cdot \{p, q\} = \{p\}$, quel que soit l'ensemble H vérifiant la condition 2), posons $p \prec q$. Donc, si pour deux éléments distincts p et q de E on n'a pas $p \prec q$, on a $H \cdot \{p, q\} \neq \{p\}$, quel que soit l'ensemble H vérifiant la condi-

[1]) Cf. C. K u r a t o w s k i, Fundamenta Mathematicae 2, p. 161.