CHAPITRE III

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES

§ 14. Somme, produit et différence de deux ensembles. Nous appelons *somme* (ou *réunion*) des ensembles A et B et nous désignons par $A+B$ l'ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à un au moins des ensembles A et B [1]). Nous appelons *produit* (ou *intersection*) des ensembles A et B et nous désignons par $A.B$ (ou simplement par AB)· l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Nous appelons *différence* des ensembles A et B et nous désignons par $A-B$ l'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

On a donc par définition, quels que soient les ensembles A et B:

$$\prod_x ((x \in A+B) \equiv [(x \in A) + (x \in B)]),$$

$$\prod_x ((x \in AB) \equiv [(x \in A)(x \in B)]),$$

$$\prod_x ((x \in A-B) \equiv [(x \in A)(x \,\bar{\in}\, B)]).$$

Si l'on a $AB \neq 0$, $A-B \neq 0$ et $B-A \neq 0$, on dit parfois que les ensembles A et B *se croisent* (ou *se rencontrent*). Les définitions de la somme, du produit et de la différence de deux ensembles, ainsi que celle de l'ensemble vide entraînent immédiatement les formules:

[1]) Quelques auteurs (Carathéodory et Hausdorff par exemple) désignent l'addition des ensembles dans le cas général par $\dotplus$, en utilisant le signe $+$ seulement dans le cas où les termes n'ont pas d'éléments communs.

$$E+0=E,\quad E\cdot 0=0,\quad E-0=E,\quad 0-E=0,\quad E+E=E,\quad E\cdot E=E,$$

quel que soit l'ensemble E.

On voit que la formule $AB=0$ exprime que les ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, et la formule $A-B=0$ exprime que l'on a $A \supset B$ [1]).

On a aussi $(A+B=0) \equiv [(A=0)(B=0)]$.

Il est facile à démontrer qu'on a, quels que soient les ensembles A et B,

$$(A-B=A) \equiv (B-A=B), \quad (A+B=A-B) \equiv (B=0),$$

$$(A-B=AB) \equiv (A=0), \quad A-B=(A+B)-B=A-AB,$$

$$A=(A+B)-(B-A).$$

Nous laissons au lecteur de démontrer les équivalences

$$(A+B \subset C) \equiv [(A \subset C)\cdot(B \subset C)], \quad (AB \supset C) \equiv [(A \supset C)\cdot(B \supset C)],$$

$$(A \subset B+C) \equiv (A-B \subset C) \equiv (A-C \subset B),$$

$$(A-B=B-A) \equiv (A=B)$$

ainsi que de démontrer (par contre-exemples) qu'aucune des trois formules suivantes n'équivaut à aucune des deux autres:

$$A=B+C, \qquad A-B=C, \qquad A-C=B.$$

On voit sans peine qu'il y a, quels que soient les ensembles A et B: $(A \subset B) \equiv (A+B=B)$, l'inclusion des ensembles se réduisant ainsi (à l'aide de l'égalité des ensembles) à leur addition. Or, comme on le peut vérifier facilement:

$$(A+B=C) \equiv [(A \subset C)(B \subset C) \prod_X ([(A \subset X)(B \subset X)] \rightarrow (C \subset X))].$$

Donc, l'addition des ensembles se réduit (à l'aide des symboles logiques) à l'inclusion des ensembles.

Autrement dit: *la somme de deux ensembles forme le plus petit ensemble contenant ces ensembles.*

[1]) On peut réduire la notion d'inclusion à celle de différence de deux ensembles (et de leur égalité), sans faire intervenir la notion d'ensemble vide, en vertu d'équivalence: $(A \subset B) \equiv (A-B=A-A)$.

On a aussi l'équivalence:

$$(A+B=C)\equiv\prod_X\{[(A\subset X)\cdot(B\subset X)]\equiv(C\subset X)\}.$$

Pareillement, non seulement l'inclusion des ensembles se réduit, à l'aide de l'égalité, à leur multiplication, puisqu'on a

$$(A\subset B)\equiv(AB=A),$$

mais aussi la multiplication des ensembles se réduit (à l'aide des symboles logiques) à l'inclusion des ensembles, puisqu'on a:

$$(AB=C)\equiv[(C\subset A)(C\subset B)\prod_X([(X\subset A)(X\subset B)]\rightarrow(X\subset C))].$$

En d'autres mots: *le produit de deux ensembles forme le plus grand ensemble contenu dans ces ensembles.*

On a aussi l'équivalence:

$$(AB=C)\equiv\prod_X\{[(X\subset A)\cdot(X\subset B)]\equiv(X\subset C)\}.$$

La multiplication de deux ensembles à l'aide de la formule

$$AB=A-(A-B)$$

se réduit aussi à la soustraction des ensembles.

On a encore les formules:

$$(A=AB)\equiv(B=A+B)\ ^{1)},\quad (A=B)\equiv(AB=A+B),$$

$$(A\subset B\subset C)\equiv(A+B=BC),\quad (A=B)\equiv[(A+C=B+C)(AC=BC)],$$

$$(A-B=C)\equiv[(C\subset A\subset B+C)(BC=0)],$$

quels que soient les ensembles A, B et C.

En rapport avec la soustraction des ensembles pour deux ensembles donnés A et B, il se pose le problème de déterminer tous les ensembles X satisfaisant à l'équation $A+X=B$.

---

[1]) *L'axiome d'absorption* de K. Menger, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 37, p. 313, Axiom IV.

On voit aisément que l'inclusion $A\subset B$ est la condition nécessaire pour qu'il existe au moins un ensemble X satisfaisant à notre équation. Si cette condition est remplie, il faut et il suffit, pour que l'ensemble X satisfasse à notre équation, que X soit de la forme $X=(B-A)+AT$, où T est un ensemble quelconque (ou bien, ce qui revient au même, que X soit de la forme $X=(B-A)+T$, où T est un sous-ensemble quelconque de A). En particulier, si $A\subset B$, il existe un seul ensemble X disjoint avec A et tel que $A+X=B$, à savoir l'ensemble $B-A$.

En rapport avec la multiplication des ensembles, il se pose le problème suivant: quel résultat peut-on obtenir sur la *division* des ensembles? En d'autres termes, que peut-on dire, pour deux ensembles donnés A et B, sur la détermination de tous les ensembles X pour lesquels on a $AX=B$? Comme on le voit facilement, l'inclusion $B\subset A$ est la condition nécessaire pour qu'il existe au moins un ensemble X satisfaisant à notre équation. Si cette condition est remplie, on voit que, pour que l'ensemble X satisfasse à notre équation, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $X=B+(T-A)$, où T est un ensemble quelconque. En particulier, si $B\subset A$, il existe un seul ensemble $X\subset A$, tel que $AX=B$, à savoir l'ensemble $X=B$.

§ 15. Somme et produit d'un ensemble quelconque d'ensembles. La notion de somme et de produit d'ensembles peut être généralisée pour un nombre quelconque, fini ou infini, d'ensembles. Soit F un ensemble quelconque dont les éléments sont des ensembles; nous les désignerons par E. Nous appelons somme d'ensembles E formant l'ensemble F et nous désignons par

$$\sum_{E\in F}E\ ^{1)}$$

l'ensemble S formé de ces éléments (et seulement de ces éléments) qui appartiennent au moins à un ensemble appartenant à F. On a donc

$$\prod_x\left(\left(x\in\sum_{E\in F}E\right)\equiv\sum_E[(E\in F)(x\in E)]\right).$$

On pourrait dire aussi que la somme d'une famille d'ensembles est le plus petit ensemble contenant chacun des ensembles de cette famille.

---

[1]) Le symbole $\sum\limits_{E\in F}$ est à distinguer du quantificateur $\sum\limits_{E}$.

Dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles la supposition que, pour toute famille F d'ensembles E, il existe l'ensemble $\sum_{E\in F} E$ (formé de tous les éléments appartenant à au moins un E et seulement de ces éléments) est regardée comme *axiome III* [1]).

Nous introduisons encore la notation suivante. Si A est un ensemble donné, si à tout élément p de A on a fait correspondre un ensemble $E(p)$ et si M désigne l'ensemble de tous les ensembles $E(p)$, où $p \in A$, nous désignerons par $\sum_{p\in A} E(p)$ la somme de tous les ensembles formant l'ensemble M. En particulier, la somme d'une suite finie ou infinie d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sera désignée par

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots .$$

Souvent, au lieu de $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$, on écrit $\sum_{k=1}^{n} E_k$ et on désigne la somme d'une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ aussi par $\sum_{k=1}^{\infty} E_k$.

On appelle *produit* des ensembles E formant une famille d'ensembles, l'ensemble de ces éléments (et seulement de ces éléments) qui appartiennent à chaque ensemble E appartenant à la famille F. Cet ensemble est désigné par

$$\prod_{E\in F} E \text{ [2])}.$$

On a donc

$$\prod_x \left(\left(x \in \prod_{E\in F} E\right) \equiv \prod_E [(E \in F) \to (x \in E)]\right).$$

On peut dire aussi que le produit d'une famille quelconque d'ensembles est le plus grand ensemble contenu dans chacun de ces ensembles (l'énoncé reste vrai dans le cas où ce produit est un ensemble vide).

Si A est un ensemble donné et si M est la famille de tous les ensembles $E(p)$, où $p \in A$, on désigne par $\prod_{p\in A} E(p)$ le produit de tous les ensembles formant l'ensemble M. En particulier, le produit d'une

[1]) Voir E. Zermelo, Math. Ann. 65, p. 265 (*Axiom der Vereinigung*, Ax. V); cf. A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen*, p. 71.

[2]) Le symbole $\prod_{E\in M}$ est à distinguer du quantificateur $\prod_E$.

suite finie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sera désigné par

$$E_1 E_2 \ldots E_n, \quad \text{ou par} \quad \prod_{k=1}^{n} E_n,$$

et le produit d'une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ sera désigné par

$$E_1 E_2 E_3 \ldots, \quad \text{ou par} \quad \prod_{k=1}^{\infty} E_n.$$

Il n'est pas nécessaire d'introduire dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles un axiome qui garantisse l'existence du produit d'une famille quelconque d'ensembles, puisqu'une telle existence résulte de *l'axiome V* (§ 12). Pour la différence de deux ensembles, le cas est pareil.

§ 16. Propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles. Evidemment la somme d'une famille quelconque d'ensembles est *commutable* et *associative*, de même que le produit. On a par exemple, quels que soient les ensembles A, B et C:

$$A+B=B+A, \quad AB=BA, \quad (A+B)+C=A+(B+C), \quad (AB)C=A(BC).$$

De même, ni la somme ni le produit d'un nombre quelconque (même infini) d'ensembles ne dépend de l'ordre et du groupement des termes (respectivement facteurs).

Non seulement la multiplication des ensembles est distributive par rapport à l'addition des ensembles, mais aussi leur addition est distributive par rapport à leur multiplication. Notamment, quels que soient les ensembles A, B et C, on a

$$(A+B)C = AC+BC \quad \text{et} \quad AB+C=(A+C)(B+C).$$

Le lecteur pourra le vérifier, en s'appuyant sur les définitions de la somme et du produit d'ensembles (il faudra montrer que tout élément de l'ensemble à gauche de l'égalité à démontrer est un élément de l'ensemble à droite de cette égalité, et inversement).

Chacune des trois opérations — addition, multiplication et soustraction des ensembles — est distributive par rapport à elle-même; en effet, on a, quels que soient les ensembles A, B et C:

$$(A+B)+C=(A+C)+(B+C), \qquad (AB)C=(AC)\cdot(BC),$$
$$(A-B)-C=(A-C)-(B-C).$$

Toutes les règles du calcul algébrique des polynômes sont applicables aussi aux polynômes formés d'ensembles à l'aide de l'addition et de la multiplication, l'addition et la multiplication des ensembles étant commutables, associatives et distributives. Il est à remarquer que les formules

$$E+E=E, \qquad EE=E \qquad \text{(lois de tautologie)}$$

permettent de simplifier les formules contenant des termes semblables ou des puissances d'ensembles, quel que soit l'ensemble E.

Pour simplifier les formules, on fait aussi usage des lois *d'absorption* pour les ensembles:

$$A+AB=A, \qquad A(A+B)=A,$$

quels que soient les ensembles A et B.

Ainsi il est facile à démontrer que

$$(A+B)(A+C)(B+C)=AB+AC+BC$$

(A, B, C étant des ensembles arbitraires).

Mais les règles du calcul algébrique ne sont plus applicables lorsqu'il s'agit d'expressions que l'on obtient à l'aide de la soustraction des ensembles. Si par exemple $AC\neq 0$, on a

$$A+(B-C)\neq (A+B)-C,$$

(puisqu'alors l'élément $p\,\epsilon\, AC$ appartient au côté gauche sans appartenir au côté droit) et, si $C-A\neq 0$, on a

$$(A-B)+C\neq A-(B-C);$$

donc en particulier, si $B-A\neq 0$, on a

$$(A-B)+B\neq A.$$

On voit aussi facilement que l'on a $(A-B)+B=(A+B)-B$ dans ce cas (et seulement dans ce cas) où $B=0$ (le côté gauche étant l'ensemble $A+B$ et le côté droit — l'ensemble $A-B$). Nous laissons au lecteur de démontrer qu'on a aussi

$$[(A-B)+C=(A+C)-B]\equiv(BC=0),$$

$$[(A-B)+B=A]\equiv(B\subset A), \qquad [(A+B)-B=A]\equiv(AB=0).$$

Quels que soient les ensembles A, B et C, on a les formules

$$A-(B+C)=(A-B)-C, \qquad (A-B)C=AC-BC=AC-B,$$

$$(A+B)-C=(A-C)+(B-C) \text{ [1]}, \qquad A-(B-C)=(A-B)+AC,$$

$$A-(B-A)=A, \qquad AB-C=(A-C)(B-C) \text{ [2]},$$

$$A-BC=(A-B)+(A-C).$$

EXERCICES. 1. Démontrer qu'on a, quels que soient les ensembles A, B et C:

a) $(A-B)+C=[(A+C)-B]+BC$,

b) $A+(B-C)=[(A+B)-C]+AC$,

c) $(A-B)+C=[A-(B-C)]+(C-A)$;

quels que soient les ensembles A, B, C et D:

d) $(A-B)(C-D)=AC-(B+D)$,

e) $(A-B)-(C-D)=[A-(B+C)]+(AD-B)$,

f) $(A-B)+(C-D)=[(A+C)-(B+D)]+(AD-B)+(BC-D)$,

g) $A-D\subset(A-B)+(B-C)+(C-D)$,

h) $A-[B-(C-D)]=(A-B)+(AC-D)$;

quels que soient les ensembles A, B, C, D et E:

i) $A-\{B-[C-(D-E)]\}=(A-B)+(AC-D)+ACE$

et, en particulier:

$$A-\{A-[B-(B-C)]\}=ABC.$$

2. Déterminer toutes les opérations différentes $A\curlyvee B$ sur deux ensembles, dont le résultat peut être obtenu en partant de ces ensembles et en effectuant un nombre fini (dans un ordre qui est déterminé par l'opération considérée) d'additions et de soustractions d'ensembles.

Réponse. Il y a 8 de ces opérations: $A\curlyvee B=A$, B, $A+B$, $A-B$, $B-A$, $A-(A-B)$, $(A-B)+(B-A)$, $0\,(=A-A)$.

[1] Loi de distribution de la soustraction par rapport à l'addition.
[2] Loi de distribution de la soustraction par rapport à la multiplication.

On peut dire aussi que la famille de ces 8 ensembles envisagés est la plus petite famille des ensembles à laquelle appartiennent les ensembles A et B et telle que la somme et la différence de deux ensembles de cette famille appartiennent toujours à cette famille.

3. Répondre à la question que l'on obtient de 2 en remplaçant la soustraction par la multiplication.

Réponse. Il y a 4 de ces opérations: $A \curlyvee B = A, B, A+B, AB$.

4. Déterminer la plus petite famille d'ensembles à laquelle appartiennent deux ensembles A et B et telle que la différence de deux ensembles de cette famille soit toujours un ensemble de cette famille.

Réponse. Cette famille est formée de 6 ensembles: A, B, $A-B$, $B-A$, $A-(A-B) = B-(B-A)$, 0 (ces six ensembles peuvent être deux à deux distincts, si l'on choisit convenablement les ensembles A et B).

Il est à remarquer que le problème devient beaucoup plus difficile pour trois ensembles A, B, C.

5. Déterminer la plus petite famille d'ensembles à laquelle appartiennent 4 ensembles A, B, C, D et telle que la somme de deux ensembles de cette famille appartienne toujours à cette famille.

Réponse. Cette famille est formée de 15 ensembles: $A, B, C, D, A+B, A+C, A+D, B+C, B+D, C+D, B+C+D, A+C+D, A+B+D, A+B+C, A+B+C+D$.

6. Calculer le nombre des ensembles de la plus petite famille d'ensembles à laquelle appartiennent les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et telle que la somme de deux ensembles de cette famille lui appartienne également.

Réponse: $2^n - 1$.

7. Déterminer la plus petite famille d'ensembles à laquelle appartiennent les ensembles A, B, C et telle que la somme et le produit de deux ensembles de cette famille lui appartiennent également.

Réponse. Cette famille est formée de 17 ensembles: $A, B, C, A+B, A+C, B+C, A+B+C, AB, AC, BC, ABC, A+BC, B+AC, C+AB, A(B+C), B(A+C), C(A+B)$.

8. Calculer le nombre des ensembles de la plus petite famille d'ensembles à laquelle appartiennent les ensembles A, B, C et telle que la somme et la différence de deux ensembles de cette famille lui appartiennent également.

Réponse. 128. C'est l'ensemble vide et toutes les sommes possibles qu'on peut former de 7 ensembles suivants: ABC, $BC-A$, $AC-B$, $AB-C$, $A-(B+C)$, $B-(A+C)$, $C-(A+B)$.

9. Remplacer dans le problème 8 les ensembles A, B, C par les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (où n est un nombre naturel donné).

Réponse. 2^{2^n-1}.

10. Démontrer que, si les ensembles A et B sont finis et ont le même nombre d'éléments, les ensembles $A-B$ et $B-A$ ont le même nombre d'éléments. Donner des exemples de deux ensembles infinis A et B, tels que: a) l'ensemble $A-B$ soit fini et l'ensemble $B-A$ soit infini, b) les ensembles $A-B$ et $B-A$ soient finis, ayant les nombres d'éléments distincts.

Réponse. a) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 4, 5, \ldots\}$;
b) $A = \{1\} + \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 5\} + \{2, 4, 6, \ldots\}$.

11. Démontrer que la somme $A+B$ et le produit AB de sous-ensembles A et B d'un ensemble donné E peuvent être exprimés par la fonction $f(A, B) = (E-A) + (E-B)$ (comme superpositions de cette fonction).

Démonstration.

$$A+B = f(f(A, A), f(B, B)), \quad AB = f(f(A, B), f(A, B))$$

(cf. la propriété de l'expression $A' + B'$ dans l'algèbre des propositions, § 4).

12. Démontrer que l'on a, quels que soient les ensembles A, B, C et D:

$$ABC + BCD + CDA + DAB =$$
$$= (A+B)(A+C)(A+D)(B+C)(B+D)(C+D)$$

et

$$(A+B+C)(B+C+D)(C+D+A)(D+A+B) =$$
$$= AB + AC + AD + BC + BD + CD.$$

13. Démontrer le théorème suivant de W. V. Quine:[1]) *$E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant un nombre fini d'ensembles et k un nombre naturel $\leqslant n$, la somme S de tous les produits de k de ces ensembles (aux indices distincts) est égale au produit P de toutes les sommes de $n-k+1$ de ces ensembles (aux indices distincts).*

[1]) W. V. Quine, Journ. London Math. Soc. 8 (1933), pp. 89—95.

L'identité $AB+BC+CA=(A+B)(B+C)(C+A)$ ainsi que les formules de l'exercice 12 ne sont que des cas particuliers de ce théorème.

Démonstration. La formule $S\subset P$ est une conséquence immédiate du lemme suivant:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-k+1}$ *étant deux suites croissantes de nombres naturels* $\leqslant n$, *on a, quels que soient les ensembles* $E_1, E_2, \ldots, E_n$, *la formule* $E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \ldots E_{\alpha_k} \subset E_{\beta_1}+E_{\beta_2}+\ldots+E_{\beta_{n-k+1}}$.

En effet, les $n+1$ nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-k+1}$ qui sont tous naturels et $\leqslant n$, ne peuvent être tous distincts et, vu que $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k$ et $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{n-k+1}$; on en conclut qu'au moins un des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, soit α_q, est égal à un des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-k+1}$; on a donc $E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \ldots E_{\alpha_k} \subset E_{\alpha_q} \subset E_{\beta_1}+E_{\beta_2}+\ldots+E_{\beta_{n-k+1}}$.

Pour démontrer la formule $P\subset S$, supposons que $p\,\bar\epsilon\, S$. Vu la définition de la somme S, le nombre de tous les indices i pour lesquels on a $p\,\bar\epsilon\, E_i$, est donc $>n-k$, donc $\geqslant n-k+1$, et il existe des indices $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{n-k+1}$, tels que $p\,\bar\epsilon\, E_i$ pour $i=\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-k+1}$, donc $p\,\bar\epsilon\, E_{\beta_1}+E_{\beta_2}+\ldots+E_{\beta_{n-k+1}}$, d'où, d'après la définition du produit P, on trouve $p\,\bar\epsilon\, P$. Nous avons démontré que la formule $p\,\bar\epsilon\, S$ entraîne la formule $p\,\bar\epsilon\, P$, ce qui prouve que $P\subset S$.

On a donc $S\subset P$ et $P\subset S$, ce qui donne $S=P$, c. q. f. d.

14. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant une suite finie quelconque d'ensembles, démontrer que

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+\ldots+(A_{n-1}-A_n)+\\+(A_n-A_1)+A_1A_2\ldots A_n.$$

15. Quels que soient les ensembles A et B, on a

$$[(AB=0)(B\subset A)]\rightarrow(B=0).$$

16. Soient A, B, C trois ensembles finis qui ont respectivement n_1, n_2 et n_3 éléments et dont chaque paire a un élément (et seulement un) commun. Combien d'éléments peut avoir l'ensemble $A+B+C$?

Réponse. $n_1+n_2+n_3-2$, s'il existe un élément commun à tous les trois ensembles, et $n_1+n_2+n_3-3$ dans le cas contraire.

17. Soient A, B, C, D quatre ensembles finis qui ont respectivement n_1, n_2, n_3 et n_4 éléments et dont chaque paire a un élément (et seulement un) commun. Combien d'éléments peut avoir l'ensemble $A+B+C+D$?

Réponse. $s-3$, $s-5$ ou $s-6$, où $s=n_1+n_2+n_3+n_4$; notamment $s-3$ s'il existe un élément commun à tous les quatre ensembles, $s-5$ s'il existe un élément commun à trois de nos ensembles mais n'appartenant pas au quatrième, et $s-6$ dans les autres cas.

18. Remplacer, à l'aide des opérations arithmétiques sur les ensembles, deux inclusions $A\subset B$ et $C\subset D$ par une seule, équivalente à leur ensemble.

Réponse. $[(A\subset B)(C\subset D)]\equiv[(A-B)+(C-D)\subset 0]$.

19. Remplacer, à l'aide des opérations arithmétiques sur les ensembles, deux égalités des ensembles $A=B$ et $C=D$ par une seule qui leur équivaille.

Réponse. $[(A=B)(C=D)]\equiv[(A-B)+(B-A)+(C-D)+ +(D-C)=0]$.

Comme on le voit facilement, les égalités pour les ensembles peuvent être ajoutées, retranchées et multipliées membre à membre, comme les égalités numériques.

En vertu de la formule $A-B=A-AB$, toute différence des ensembles peut être remplacée par une différence de deux ensembles dont le second est contenu dans le premier.

On peut démontrer que, pour les ensembles A, B et C, les formules

$$A\subset(B-C)+(C-B),\quad B\subset(A-C)+(C-A),\\ C\subset(A-B)+(B-A)\tag{1}$$

entraînent les formules

$$A=(B-C)+(C-B),\quad B=(A-C)+(C-A),\\ C=(A-B)+(B-A).\tag{2}$$

Admettons, en effet, que les formules (1) soient vérifiées, mais que la formule $B-C\subset A$ soit fausse. Il existerait alors un élément p tel que $p\,\epsilon\, B$, $p\,\bar\epsilon\, C$ et $p\,\bar\epsilon\, A$, donc $p\,\bar\epsilon\,(A-C)+(C-A)$ ce qui contredit la deuxième des formules (1). On a donc $B-C\subset A$. Pareillement on démontre que $C-B\subset A$. On a donc $(B-C)+(C-B)\subset A$, ce qui donne d'après (1) la première des égalités (2). Des raisonnements analogues conduisent aux deux autres égalités (2).

On démontre aussi que chacune des formules (2) entraîne les deux autres. Le lecteur voudra l'étudier géometriquement, en représentant les ensembles B et C à l'aide de deux cercles qui se croisent.

Il est aisé de démontrer que

$$(A\supset C)\to[A-(B-C)=(A-B)+C],$$

$$[(A\subset B)(C\subset D)]\to[(A-D)\subset(B-C)],$$

ainsi que de donner un exemple d'ensembles pour lesquels le signe $\to$ ne peut pas être remplacé par le signe $\equiv$. On a aussi les formules

$$(B\subset A)\equiv[A=(A-B)+B],\quad (A\subset B\subset C)\equiv[B=(A-B)+BC]\ ^{1)},$$

$$(A\subset B\subset C)\equiv[(B-A)+(C-B)=0]\ ^{2)},$$

$$[AC+(B-C)=0]\to(AB=0),\qquad (A-B=A-C)=(AB=AC).$$

Il est aussi facile à démontrer que, pour tout ensemble X, l'égalité $AX+(B-X)=0$ a lieu dans le cas (et seulement dans le cas) où $A=B=0$ [3]).

EXERCICE. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B, on a les formules

$$(A\subset B)\to[(B\subset A)\equiv(B=A)]$$

$$\{[(B\subset A)\equiv(B=A)]\to(A\subset B)\}\equiv[(A\subset B)+(B\subset A)].$$

On voit aisément que les formules

$$A_n\subset B_n\quad\text{pour}\quad n=1,2,\ldots,$$

entraînent

$$A_1+A_2+\ldots\subset B_1+B_2+\ldots\quad\text{et}\quad A_1A_2A_3\ldots\subset B_1B_2B_3\ldots.$$

On peut donc ajouter et multiplier membre à membre les inclusions du même sens (en nombre fini ou infini).

La multiplication d'un nombre fini quelconque d'ensembles se réduit à leur soustraction (ce qu'on démontre facilement par l'induction) d'après les identités

$$A_1A_2=A_2-(A_2-A_1)\quad\text{et}\quad A_1A_2\ldots A_n=A_n-(A_n-A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

[1]) Cf. la formule analogue de Poretzky, considérée dans l'Algèbre de la Logique; voir L. Couturat, loc. cit. p. 40.

[2]) Cf. le théorème analogue de Schröder, ibidem, p. 41.

[3]) Cf. le théorème analogue de E. Müller, ibidem, p. 49.

Or, quelle que soit la suite finie ou infinie d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$, on a

$$A_1A_2A_3\ldots=A_1-[(A_1-A_2)+(A_1-A_3)+\ldots]$$

et généralement, pout toute famille F d'ensembles:

$$\prod_{E\in F}E=E_1-\sum_{E\in F}(E_1-E)\quad\text{où}\quad E_1\in F.$$

Donc la multiplication d'une famille quelconque d'ensembles se réduit à leur addition et soustraction.

Il est encore à remarquer qu'on a les formules

$$(A_1-B_1)(A_2-B_2)(A_3-B_3)\ldots=A_1A_2A_3\ldots-(B_1+B_2+\ldots),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(A_nX+B_n)=X\prod_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)+\prod_{n=1}^{\infty}B_n,$$

quels que soient les ensembles X, A_n et B_n $(n=1,2,\ldots)$.

A titre d'exercice, nous laissons au lecteur de démontrer que, quelle que soit la famille F d'ensembles, on a les formules

$$\sum_{A\in F}\sum_{B\in F}(A-B)=\sum_{A\in F}A-\prod_{B\in F}B,$$

$$E-\sum_{A\in F}\sum_{B\in F}(A-B)=E\prod_{B\in F}B,\quad\text{pour}\quad E\in F$$

ainsi que de prouver qu'on a pour une famille (non vide) F l'égalité $\sum_{E\in F}E=\prod_{E\in F}E$ dans ce cas (et seulement dans ce cas) où la famille F est formée d'un seul ensemble.

§ 17. Sommes disjointes. Une somme d'ensembles sans éléments communs deux à deux s'appelle *disjointe*. Quels que soient les ensembles A et B, on a les décompositions suivantes en sommes disjointes:

$$A=(A-B)+AB,\qquad A+B=A+(B-A),$$

$$A+B=(A-B)+(B-A)+AB,$$

$$A+B+C=(A-B)+(B-C)+(C-A)+ABC.$$

La somme d'une suite finie ou infinie d'ensembles peut être facilement transformée en une somme disjointe en vertu des formules:

$$A_1 + A_2 + \ldots = A_1 + (A_2 - A_1) + [A_3 - (A_1 + A_2)] + \\ + [A_4 - (A_1 + A_2 + A_3)] + \ldots .$$

Tout ensemble non vide E est une somme disjointe d'ensembles dont chacun est formé d'un seul élément; à savoir, si $E = \{a, b, c, \ldots\}$, on a $E = \{a\} + \{b\} + \{c\} + \ldots$ et, généralement,

$$E = \sum_{p \in E} \{p\}$$

(ce qui, évidemment, ne signifie pas que tout ensemble soit la somme de ses éléments, bien que l'on dise parfois que l'ensemble $E = \{a, b, \ldots\}$ *se compose* d'éléments $a, b, \ldots$). Or, on le voit sans peine, tout ensemble E est la somme (généralement non disjointe) de tous ses sous-ensembles; on peut l'écrire:

$$E = \sum_{T \subset E} T.$$

Une somme de deux ensembles distincts non vides, $E_1 + E_2$, peut être toujours présentée comme somme de deux ensembles disjoints non vides.

En effet, E_1 et E_2 étant des ensembles distincts, un au moins des ensembles $E_1 - E_2$ et $E_2 - E_1$ est non vide. Si $E_1 - E_2 \neq 0$, $(E_1 - E_2) + E_2$ est une décomposition désirée; si $E_1 - E_2 = 0$, $E_1 + (E_2 - E_1)$ est une décomposition désirée.

Toute somme de trois ensembles distincts non vides n'est pas nécessairement une somme de trois ensembles disjoints non vides. Telle est, par exemple, la somme $\{1\} + \{2\} + \{1, 2\}$. Cependant, toute somme de quatre ensembles distincts non vides est une somme de trois ensembles disjoints non vides. Généralement, il est facile à démontrer que toute somme de 2^n ensembles distincts non vides est une somme de $n+1$ ensembles disjoints non vides.

En effet, soit S une somme de 2^n ensembles distincts non vides. Si l'ensemble S avait n ou moins d'éléments, il aurait au plus $2^n - 1$ sous-ensembles distincts non vides et ne pourrait être une somme de 2^n ensembles distincts non vides. L'ensemble S a donc au moins $n+1$ éléments. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ des éléments distincts de S. La décomposition désirée est évidemment

$$S = \{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_n\} + (S - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}).$$

La méthode employée ci-dessus n'est qu'une démonstration de pure existence de la décomposition désirée et ne nous donne pas effectivement cette décomposition; néanmoins, elle est tout à fait correcte et ne peut être attaquée même par les adversaires de l'axiome du choix, puisqu'en choisissant arbitrairement les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ de S nous n'y avons utilisé qu'un nombre fini de choix, sans préciser leur loi. Une détermination effective d'une telle décomposition n'est pas facile, même dans le cas $n = 2$. Le lecteur voudra bien réflechir comment, à l'aide de quatre ensembles distincts non vides E_1, E_2, E_3 et E_4, on pourrait déterminer trois ensembles disjoints non vides H_1, H_2 et H_3, de sorte que l'on ait:

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = H_1 + H_2 + H_3.$$

Généralement, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ étant $m = 2^n$ ensembles non vides distincts, on peut déterminer $n+1$ ensembles non vides disjoints $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$, tels que $E_1 + E_2 + \ldots + E_m = H_1 + H_2 + \ldots + H_{n+1}$, en appliquant la méthode suivante.

Soit $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Ordonnons en une suite tous les $2^m - 1$ sous-ensembles non vides de M, $\{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$, d'après la grandeur des nombres $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_s}$; soit

$$M_1, M_2, \ldots, M_{2^m-1}$$

la suite ainsi obtenue. Posons, pour $k = 1, 2, \ldots, 2^m - 1$:

$$T_k = \prod_{i \in M_k} E_i - \sum_{j \in M - M_k} E_j .$$

On démontre facilement que les ensembles

$$(*) \qquad T_1, T_2, \ldots, T_{2^m-1}$$

sont disjoints et que tout ensemble de la suite $E_1, E_2, \ldots, E_m$ est une somme de quelques ensembles non vides de la suite $(*)$ (à savoir l'ensemble E_i est la somme de tous ces ensembles T_k dont l'indice k satisfait à la condition $i \in M_k$). Si le nombre des termes non vides de la suite $(*)$ était $\leqslant n$, leurs sommes donneraient au plus $2^n - 1$ ensembles distincts; on aurait alors $m \leqslant 2^n - 1$, ce qui est impossible, vu que $m = 2^n$. Il existe donc dans la suite $(*)$ au moins $n+1$ ensembles non vides: soient $H_1, H_2, \ldots, H_n$ les n premiers termes non vides de la suite $(*)$ et posons

$$H_{n+1} = E_1 + E_2 + \ldots + E_n - (H_1 + H_2 + \ldots + H_n).$$

Les ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ satisfont aux conditions imposées.

Il est encore plus difficile, ayant une suite infinie d'ensembles distincts non vides $E_1, E_2, E_3, \ldots$, déterminer une suite infinie $H_1, H_2, \ldots$ d'ensembles disjoints non vides, de sorte que l'on ait $E_1 + E_2 + \ldots = H_1 + H_2 + \ldots$ [1]).

On peut fixer une loi (qui d'ailleurs n'est pas simple) d'après laquelle, à tout ensemble donné E de nombres réels qui n'est ni fini ni vide, correspond une décomposition bien déterminée (par E) de l'ensemble E en une série infinie d'ensembles disjoints qui ne sont ni finis ni vides.

Cependant, à l'état actuel de la science, nous ne savons pas fixer une loi d'après laquelle, à tout ensemble E formé de trois éléments quelconques, correspondrait une décomposition bien déterminée (par E) de l'ensemble E en une somme de deux ensembles disjoints non vides.

Or, nous savons nommer (ce qui est d'ailleurs difficile) un ensemble infini de nombres réels, tel que nous ne savons déterminer aucune décomposition de cet ensemble en une somme de deux ensembles (pas nécessairement disjoints) dont un soit fini non vide.

Voici l'exemple d'une décomposition de l'ensemble de tous les nombres naturels, $E = \{1, 2, \ldots\}$, en une somme disjointe d'ensembles non finis:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots,$$

où $E = \{2^{n-1}\cdot 1,\ 2^{n-1}\cdot 3,\ 2^{n-1}\cdot 5, \ldots,\ 2^{n-1}(2k-1), \ldots\}$, pour $n = 1, 2, \ldots$.

Il est aisé de démontrer que l'ensemble de tous les points d'une droite est une somme disjointe d'ensembles dont chacun est formé de deux points (il suffit de réunir en paires chaque point à l'abscisse x avec le point à l'abscisse $x + (-1)^{Ex}$, où Ex désigne l'entier le plus grand, ne dépassant pas x).

Il est plus difficile de décomposer, en ensembles disjoints formés chacun de deux éléments, l'ensemble de tous les points du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$. Sans faire appel à *l'axiome du choix*, nous ne savons pas démontrer que tout ensemble infini est une somme disjointe d'ensembles dont chacun a deux éléments (même si l'on admet l'axiome du choix, la démonstration de cette proposition est difficile, puisqu'elle s'appuie sur le théorème de Zermelo sur le bon ordre [2])).

[1]) Ce problème a été résolu par C. Kuratowski: voir A. Tarski, Fundamenta Mathematicae **6**, p. 94—95.

[2]) Cf. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthiers-Villars, 1950, p. 234.

Il est à remarquer que J. von Neumann a démontré à l'aide de l'axiome du choix que le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ est la somme d'une suite infinie d'ensembles disjoints, superposables deux à deux (par translation). La démonstration n'est pas d'ailleurs facile [1]). Pour la droite toute entière, cette décomposition ne présente pas de difficulté (elle est $J_0 + J_1 + J_{-1} + J_2 + J_{-2} + \ldots$, où $J_k = [k \leqslant x < k+1]$, pour k entier).

Il est intéressant de remarquer que le triangle (à savoir, l'intérieur du triangle et son périmètre) est une somme disjointe de certains segments fermés de droite (c'est-à-dire contenant ses extrémités) [2]).

Le plan jouit de la même propriété (ce qui est plus difficile à démontrer) [3]), mais non pas la droite.

EXERCICES. 1. Calculer le nombre de toutes les décompositions d'un ensemble (fini) formé de n éléments en deux (respectivement en trois) ensembles disjoints non vides, si l'on ne regarde pas comme différentes deux décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes.

Réponse: $2^{n-1} - 1 \left(\text{resp. } \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}\right)$.

Donner ces décompositions pour $n = 4$.

2. Calculer le nombre de toutes les décompositions d'un ensemble (fini) à n éléments en une somme de deux ensembles ayant un et un seul élément commun, si l'on ne regarde pas comme différentes deux décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes.

Réponse: $2^{n-2}\cdot n$.

Donner ces décompositions pour $n = 3$ et pour $n = 4$.

3. Démontrer que, si l'on désigne, pour tout nombre réel x, par $E(x)$ l'ensemble de tous les nombres naturels $2^n(2Enx + 1)$ où $n = 1, 2, \ldots$ (et où Et désigne l'entier le plus grand $\leqslant t$) et si x et y sont deux nombres réels différents, les ensembles $E(x)\cdot E(y)$ sont finis.

[1]) Voir Fundamenta Mathematicae **11**, p. 230—238.

[2]) Cette proposition est due à M. H. Steinhaus, *Kalejdoskop Matematyczny* (en polonais), Lwów—Warszawa 1938, p. 8.

[3]) On peut même démontrer que le plan est une somme disjointe de segments fermés de droite, ayant tous la même longueur.

D é m o n s t r a t i o n. Si $2^p(2Epx+1)=2^q(2Eqy+1)$, on a $p=q$ et $Epx=Eqy$, donc $Epx=Epy$, d'où $|px-py|<1$, ce qui donne $p<1:|x-y|$. L'ensemble $E(x)\cdot E(y)$ a donc, pour $x\neq y$, moins que $1:|x-y|$ éléments.

4. Calculer le nombre de toutes les décompositions d'un ensemble à $2n$ éléments (où n est un nombre naturel) en une somme d'ensembles disjoints, formés chacun de deux éléments, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes.

R é p o n s e: $1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

5. Soit, pour n naturel, p_n le nombre des décompositions d'un ensemble à n éléments en une somme d'ensembles non vides et disjoints (où l'on ne regarde comme distinctes les décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes).

Calculer les nombres p_n pour $n\leqslant 5$. Déterminer toutes les décompositions pour l'ensemble $\{a,b,c,d\}$.

R é p o n s e: $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=5$, $p_4=15$, $p_5=52$.

Les décompositions de l'ensemble $\{a,b,c,d\}$ sont:

$$\{a\}+\{b\}+\{c\}+\{d\},\quad \{a\}+\{b\}+\{c,d\},\quad \{a\}+\{c\}+\{b,d\},$$
$$\{a\}+\{d\}+\{b,c\},\quad \{b\}+\{c\}+\{a,d\},\quad \{b\}+\{d\}+\{a,c\},$$
$$\{c\}+\{d\}+\{a,b\},\quad \{a,b\}+\{c,d\},\quad \{a,c\}+\{b,d\},$$
$$\{a,d\}+\{b,c\},\quad \{a\}+\{b,c,d\},\quad \{b\}+\{a,b,d\},$$
$$\{c\}+\{a,b,d\},\quad \{d\}+\{a,b,c\},\quad \{a,b,c,d\}.$$

Remarque. Les nombres p_n ont été étudiés par plusieurs auteurs. On a pour eux une formule de recursion:

$$p_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p_k,\quad \text{pour}\quad n=1,2,3,\ldots\ ^{1)}.$$

6. $E_1,E_2,\ldots$ étant une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels, démontrer qu'il existe une suite infinie $H_1,H_2,\ldots$ d'ensembles infinis disjoints, telle que $H_n\subset E_n$ pour $n=1,2,3,\ldots$.

[1] Cf. par exemple O. O r e, Duke Math. Jour. **9** (1941), p. 575.

D é m o n s t r a t i o n. n étant un nombre naturel, désignons par k_n et l_n les nombres naturels (bien déterminés par n), tels que $n=2^{k_n-1}(2l_n-1)$. Définissons maintenant par induction la suite infinie de nombres naturels $p_1,p_2,\ldots$ comme il suit. Soit p_1 le plus petit nombre de l'ensemble E_{k_1} et, pour $n>1$, p_n le plus petit nombre de l'ensemble (infini) $E_{k_n}-\{p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}\}$.

Posons $H_n=\{p_{2^n-1},p_{2^n-1\cdot 3},p_{2^n-1\cdot 5},\ldots\}$ pour $n=1,2,\ldots$ On voit facilement que les ensembles H_n $(n=1,2,\ldots)$ satisfont aux conditions du problème.

7. Démontrer que, si $E_1,E_2,\ldots$ est une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels, il existe une suite infinie d'ensembles infinis disjoints $H_1,H_2,\ldots$, telle que chacun des ensembles E_kH_l est infini (où k et l sont des nombres naturels).

8. Démontrer que, si le plan est divisé par des droites parallèles aux axes en carrés égaux, on peut ranger l'ensemble de tous ces carrés dans une suite infinie de sorte que chaque carré figure dans cette suite une seule fois et que deux termes consécutifs de cette suite soient toujours des carrés ayant un côte commun.

9. Démontrer que, si l'espace à 3 dimensions est divisé par trois familles de plans parallèles en cubes égaux, on peut ranger l'ensemble de tous ces cubes dans une suite infinie de sorte que chaque cube figure dans cette suite une seule fois et que deux termes consécutifs de cette suite soient toujours des cubes ayant une face commune.

S u i t e s d'e n s e m b l e s. Une suite d'ensembles $E_1,E_2,\ldots$ est dite *croissante* (au sens large du mot), si $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ldots$, et décroissante (au sens large du mot) ou *descendante*, si $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$.

Si la suite d'ensembles E_n $(n=1,2,\ldots)$ est descendante (ou, plus généralement, si l'on a $E_1\supset E_n$, pour $n=1,2,\ldots$), on a la formule

$$E_1=E_1E_2E_3\ldots+(E_1-E_2)+(E_2-E_3)+(E_3-E_4)+\ldots.$$

Toute somme d'une suite d'ensembles peut être toujours remplacée par une somme d'ensembles croissante (ayant respectivement les mêmes sommes partielles). En effet, en posant

$$E_1+E_2+\ldots+E_n=S_n,\qquad \text{pour}\quad n=1,2,\ldots,$$

nous aurons
$$E_1+E_2+\ldots=S_1+S_2+\ldots$$
et
$$S_1\subset S_2\subset S_3\subset\ldots.$$

Pareillement le produit d'une suite quelconque d'ensembles peut être remplacé par un produit descendant d'ensembles (ayant respectivement les mêmes produits partiels). En effet, en posant
$$E_1E_2\ldots E_n=P_n,\qquad \text{pour}\quad n=1,2,\ldots,$$
nous aurons
$$E_1E_2E_3\ldots=P_1P_2P_3\ldots\quad\text{et}\quad P_1\supset P_2\supset P_3\supset\ldots.$$

Il est facile à démontrer que, si les suites infinies d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$ sont croissantes, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nB_n=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}B_n$$
et que, si ces suites sont décroissantes, on a
$$\prod_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)=\prod_{n=1}^{\infty}A_n+\prod_{n=1}^{\infty}B_n.$$
Pour les suites infinies quelconques d'ensembles, on a les égalités
$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}B_n=\sum_{n=1}^{\infty}[(A_1+A_2+\ldots+A_n)(B_1+B_2+\ldots+B_n)]$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}A_n+\prod_{n=1}^{\infty}B_n=\prod_{n=1}^{\infty}(A_1A_2\ldots A_n+B_1B_2\ldots B_n).$$

Quelle que soit la suite des ensembles $E_{k,l}$ ($k=1,2,\ldots$; $l=1,2,\ldots$), on a la formule
$$\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}E_{k,l}=\sum^{*}E_{1,l_1}E_{2,l_2}E_{3,l_3}\ldots,$$
la sommation $\sum^*$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $(l_1, l_2, l_3, \ldots)$.

D'après A. Horn et A. Tarski, cette furmule exprime la *distributivité dénombrable* (de la multiplication d'ensembles par rapport à l'addition) [1]).

EXERCICES. 1. Donner un exemple de 4 ensembles (finis) A_1, B_1, A_2, B_2, tels que
$$A_1B_1+A_2B_2\neq(A_1+A_2)(B_1+B_2)\quad\text{et}\quad(A_1+B_1)(A_2+B_2)\neq A_1A_2+B_1B_2.$$

Réponse: $A_1=B_2=\{1\}$, $A_2=B_1=0$.

2. Démontrer l'équivalence
$$[A_1B_1+A_2B_2=(A_1+A_2)(B_1+B_2)]\equiv[(A_1+B_1)(A_2+B_2)=A_1A_2+B_1B_2]$$
pour les ansembles A_1, B_1, A_2, B_2 quelconques.

3. Donner un exemple de 6 ensembles (finis) $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, tels que
$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=(A_1+A_2+A_3)(B_1+B_2+B_3)$$
et que simultanément
$$(A_1+B_1)(A_2+B_2)(A_3+B_3)\neq A_1A_2A_3+B_1B_2B_3.$$

Réponse: $A_1=A_2=B_1=B_3=\{1\}$, $A_3=B_2=0$.

4. Démontrer que, si l'on a, pour un ensemble E, $E=A_n+B_n$ pour $n=1,2,\ldots$, on a aussi
$$E=\sum_{n=1}^{\infty}A_n+\prod_{n=1}^{\infty}B_n=\prod_{n=1}^{\infty}A_n+\sum_{n=1}^{\infty}B_n.$$

5. Démontrer que l'on a, pour toute suite infinie $A_1, A_2, \ldots$ d'ensembles,
$$A_1\subset\sum_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n+1})+\prod_{n=1}^{\infty}A_n$$
et que, si $A_1\supset A_2+A_3+\ldots$, le signe $\subset$ peut être remplacé par $=$.

Nous dirons qu'un ensemble infini A est *presque contenu* dans l'ensemble B, et nous écrirons $A\overset{*}{\subset}B$, si l'ensemble $A-B$ est fini (ou vide). On voit facilement que la relation $\overset{*}{\subset}$ est réflexive et transitive (puisqu'on a $A-C\subset(A-B)+(B-C)$, quels que soient les ensembles A, B et C).

[1]) Voir Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), p. 469.

Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ une suite finie d'ensembles infinis tels que, de deux ensembles de cette suite, un au moins est presque contenu dans l'autre. Il existe alors un ensemble de cette suite qui est presque contenu dans chaque ensemble de cette suite. En effet, cette proposition est évidemment vraie pour $n=2$. Admettons qu'elle soit vraie pour n ensembles; soient $E_1, E_2, \dots, E_n, E_{n+1}$ de tels ensembles que de chaque paire d'entre eux un ensemble (au moins) est presque contenu dans l'autre. D'après notre hypothèse il existe un indice $p_n \leqslant n$, tel que $E_{p_n} \overset{*}{\subset} E_k$ pour $k=1,2,\dots,n$. Or, il résulte de la propriété de notre suite d'ensembles que l'on a ou bien $E_{p_n} \overset{*}{\subset} E_{n+1}$ ou bien $E_{n+1} \overset{*}{\subset} E_{p_n}$. Dans le premier cas nous aurons évidemment $E_{p_n} \overset{*}{\subset} E_k$ pour $k=1,2,\dots,n+1$, dans le second, la relation $\overset{*}{\subset}$ étant transitive — $E_{n+1} \overset{*}{\subset} E_k$ pour $k=1,2,\dots n+1$. Notre proposition est donc vraie pour $n+1$ ensembles. Elle se trouve ainsi démontrée par l'induction.

Si l'on a une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels, telle que de deux ensembles de notre suite un au moins est toujours contenu dans l'autre, il n'existe pas nécessairement un ensemble non vide contenu dans chaque ensemble de notre suite (pour la suite $E_1, E_2, \dots$ par exemple, où $E_n = \{n, n+1, n+2 \dots\}$, pour $n=1,2,\dots$).

$E_1, E_2, \dots$ étant une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels, telle que de deux ensembles de cette suite un au moins est presque contenu dans l'autre, il existe un ensemble infini E qui est presque contenu dans chaque ensemble de notre suite [1].

En effet, soit n un nombre naturel donné. Comme nous l'avons démontré ci-dessus, il existe un indice $p_n \leqslant n$, tel que l'on a $E_{p_n} \overset{*}{\subset} E_n$ pour $k=1,2,\dots,n$. Les ensembles $E_{p_n} - E_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ sont donc finis; E_{p_n} étant infini, l'ensemble $E_1 E_2 \dots E_n = E_{p_n} - \sum_{k=1}^{n} (E_{p_n} - E_k)$ est infini. Il existe donc des nombres naturels $>n$ qui sont des éléments de l'ensemble $E_1 E_2 \dots E_n$. Soit m_n le plus petit d'entre eux et posons $E = \{m_1, m_2, \dots\}$. Puisque $m_n > n$ pour $n=1,2,\dots$, l'ensemble E sera infini. Or, nous avons évidemment $E - E_n \subset \{m_1, m_2, \dots, m_{n-1}\}$

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 33, p. 9.

pour $n=1,2,\dots$, donc $E \overset{*}{\subset} E_n$ pour $n=1,2,\dots$. L'ensemble E satisfait donc à notre théorème qui est ainsi démontré.

Il est à remarquer que l'on pourrait démontrer notre théorème pour les suites infinies d'ensembles infinis quelconques (pas nécéssairement formés de nombres naturels, mais formés par exemple de nombres réels), mais puisque dans le cas général nous ne savons pas définir une loi pour choisir les éléments m_n appartenant à $E_1 E_2 \dots E_n$, la démonstration devrait utiliser l'axiome du choix [1]).

EXERCICE. 1. Démontrer que, si $E_1, E_2, \dots$ et $H_1, H_2, \dots$ sont deux suites infinies d'ensembles, telles que $E_k \overset{*}{\subset} H_l$ pour k et l naturels, il existe un ensemble A, tel que $E_k \overset{*}{\subset} A \overset{*}{\subset} H_l$ pour chaque k et l naturels [2]).

Démonstration. Il suffit de poser $A = E_1 H_1 + E_2 H_1 H_2 + {}$ $+ E_3 H_1 H_2 H_3 + \dots$.

2. Démontrer que, si $E_i \overset{*}{\subset} H$ pour $i=1,2,\dots n$, on a $E_1 + E_2 + \dots$ $\dots + E_n \overset{*}{\subset} H$.

Démonstration. Cela résulte de la formule

$$(E_1 + E_2 + \dots + E_n) - H = (E_1 - H) + (E_2 - H) + \dots + (E_n - H).$$

3. Démontrer que, si $E \overset{*}{\subset} H_i$ pour $i=1,2,\dots n$, on a $E \overset{*}{\subset} H_1 H_2 \dots H_n$.

Démonstration. Cela résulte de la formule

$$E - H_1 H_2 \dots H_n = (E - H_1) + (E - H_2) + \dots + (E - H_n).$$

4. Définir deux familles d'ensembles, F_1 et F_2, qui remplissent deux conditions suivantes: 1° $E \overset{*}{\subset} H$ pour $E \in F_1$ et $H \in F_2$, 2° il n'existe aucun ensemble X tel que l'on ait $E \overset{*}{\subset} X \overset{*}{\subset} H$ pour $E \in F_1$ et $H \in F_2$.

Réponse. Soit, pour i naturel, E_i l'ensemble de tous les nombres naturels de la forme $2^{i-1}(2j-1)$ où $j=1,2,\dots$; posons $F_1 = \{E_1, E_2, \dots\}$; soit F_2 la famille de tous les ensembles H de nombres

[1]) Voir p. 45.

[2]) Cf. F. Rothberger, Annals of Math. 45 (1944), p. 400, Lemma 3b; W. Sierpiński, Fund. Math. 35 (1948), p. 141.

naturels tels que, quel que soit le nombre naturel i, l'ensemble $E_i - H$ a au plus un élément.

Pour la démonstration de ce que les familles F_1 et F_2 répondent à notre question, voir W. Sierpiński, Fund. Math. **35** (1948), p. 142.

5. N. Lusin appelle *mutuellement orthogonaux* deux ensembles qui ont un nombre fini (ou nul) d'éléments communs. Il appelle deux familles F_1 et F_2 d'ensembles mutuellement orthogonales, si chaque ensemble de la famille F_1 est orthogonal à chaque ensemble de la famille F_2. Le même auteur appelle deux familles F_1 et F_2 d'ensembles *séparables*, s'il existe deux ensembles disjoints M et N, tels que pour $E \epsilon F_1$ et $H \epsilon F_2$ les ensembles $E-M$ et $H-N$ sont finis (ou vides) [1]).

Démontrer que deux familles dont chacune est formée d'une suite infinie d'ensembles et qui sont mutuellement orthogonales, sont toujours séparables [2]).

§ 18. Complémentaires des ensembles et leurs propriétés. Si l'on a $B \subset A$, on appelle l'ensemble $A-B$ le *complémentaire* de l'ensemble B par rapport à l'ensemble A. L'ensemble B est alors le complémentaire de l'ensemble $A-B$ par rapport à l'ensemble A. Lorsqu'on étudie les sous-ensembles E d'un ensemble supposé fixe W, on désigne leurs complémentaires par rapport à W par $C(E)$, où, simplement, par CE [3]) (l'hypothèse que les ensembles étudiés fassent partie du même ensemble, ne diminue pas la généralité du raisonnement, puisque, F étant une famille donnée d'ensembles, chacun d'eux est un sous-ensemble de l'ensemble $\sum_{E \epsilon F} E$).

Quels que soient les sous-ensembles E, E_1, E_2 de l'ensemble, par rapport auquel on prend les complémentaires, il y a, comme on le voit facilement, les formules:

$$E \cdot CE = 0,$$

$$C(CE) = E \quad \text{(loi de la double complémentation)}$$

$$C(E_1 E_2) = CE_1 + CE_2, \qquad C(E_1 + E_2) = CE_1 \cdot CE_2.$$

[1]) N. Lusin, Izviéstia, Académie des Sciences de l'URSS **11** (1947), pp. 403—410.

[2]) Pour la démonstration, voir W. Sierpiński, Fund. Math. **35** (1948), p. 145.

[3]) Quelques auteurs écrivent E' au lieu de CE (ainsi Tarski, l. c. p. 57). Kuratowski *(Topologie)* I, p. 2) écrit $1-E$ au lieu de CE. Hahn écrit simplement $-E$ *(Reelle Funktionen*, Leipzig 1932, p. 2).

Donc, le complément du produit de deux ensembles est la somme de leurs compléments et le complément de la somme de deux ensembles est le produit de leurs compléments (ce sont les formules de De Morgan pour les ensembles). De même pour plusieurs ensembles (en nombre fini ou infini), notamment pour toute famille F d'ensembles:

$$C\prod_{E \epsilon F} E = \sum_{E \epsilon F} CE, \qquad C\sum_{E \epsilon F} E = \prod_{E \epsilon F} CE.$$

Voici la démonstration de la première formule:

$$\left(p \epsilon C\prod_{E \epsilon F} E\right) \equiv \left[(p \epsilon W)\left(p \,\bar{\epsilon} \prod_{E \epsilon F} E\right)\right] \equiv \left[(p \epsilon W) \cdot \sum_{E} ((E \epsilon F)(p \,\bar{\epsilon}\, E))\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{E} [(E \epsilon F)(p \epsilon CE)] \equiv \left(p \epsilon \sum_{E \epsilon F} CE\right).$$

La seconde formule peut être déduite de la première, en remplaçant E par CE et en appliquant ensuite la loi de la double complémentation.

La soustraction et la multiplication des ensembles se réduit, à l'aide des complémentaires, à l'addition; on a notamment les formules:

$$A-B = C(CA+B), \qquad AB = C(CA+CB),$$

et, généralement, quelle que soit la famille F d'ensembles:

$$\prod_{E \epsilon F} E = C\sum_{E \epsilon F} CE.$$

On a aussi

$$C(A-B) = CA + B,$$

$$A-B = A . CB.$$

Cette dernière formule prouve que la soustraction des ensembles se réduit, à l'aide des complémentaires, à la multiplication.

La formule $A \subset B$ équivaut, on le voit facilement, à la formule $CA \supset CB$; donc, il résulte des formules de De Morgan *le principe de dualité*. D'après ce principe, de chaque égalité entre les ensembles, obtenue par l'addition et la multiplication des ensembles, on peut déduire une autre égalité, en remplaçant partout les ensembles donnés par leurs complémentaires, l'addition par la multiplication et inversement. De chaque inclusion pour les ensembles, on déduit pareillement une autre inclusion, en remplaçant en plus le signe $\subset$ par le signe $\supset$ et inversement. En particulier, si l'on remplace seulement l'addition par la multiplication et inversement, toute identité pour les ensembles (c'est-à-dire toute égalité qui est vraie pour tous les ensembles) obtenue à l'aide de l'addition et de la multiplication des ensembles, donne une autre identité, même sans recours aux complémentaires. Ainsi l'identité $(A+B)C = AC+BC$ donne $AB+C=(A+C)(B+C)$; mais de l'identité $(A-B)C=AC-BC$ ne résulte pas l'identité $(A-B)+C=(A+C)-(B+C)$. De même l'identité $(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$ donne l'identité

$$AB+CD=(A+C)(A+D)(B+C)(B+D).$$

Si $E_1 \subset A$, $E_2 \subset A$, où A est l'ensemble par rapport auquel on prend les complémentaires,

$$A = E_1 E_2 + E_1 \mathrm{C} E_2 + E_2 \mathrm{C} E_1 + \mathrm{C} E_1 \cdot \mathrm{C} E_2$$

est une décomposition de l'ensemble A en termes disjoints. Généralement, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant n ensembles contenus dans A, on obtient une décomposition de A en une somme de 2^n ensembles disjoints, en développant (selon la loi de distributivité) le produit

$$(E_1 + \mathrm{C}E_1)(E_2 + \mathrm{C}E_2)\ldots(E_n + \mathrm{C}E_n)$$

(qui est égal à A, puisqu'on a $E_k + \mathrm{C}E_k = A$, pour $k=1,2,\ldots,n$).

On peut démontrer que chaque ensemble qui s'obtient en partant des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et en appliquant un nombre fini de fois (dans un ordre quelconque) les opérations $+$, $\cdot$ et C, est une somme de certains termes de notre décomposition. On pourrait appeler ces termes *constituantes* de l'ensemble A par rapport à ses sous-ensembles $E_1, E_2, \ldots E_n$.

Dans l'Algèbre des propositions, à la décomposition considérée ici correspond la décomposition de l'expression $(P_1+P_1')(P_2+P_2')\ldots(P_n+P_n')$.

§ 19. Parallélisme entre l'algèbre des propositions et l'algèbre des ensembles. Soit A l'ensemble par rapport auquel on prend les complémentaires; on a alors, quelle que soit la fonction propositionnelle $P(x)$:

$$\mathrm{C}\mathop{E}_{x\in A}[P(x)] = \mathop{E}_{x\in A}[(P(x))'] \tag{1}$$

et, quelles que soient les fonctions propositionnelles $P_1(x)$ et $P_2(x)$:

$$\mathop{E}_{x\in A}[P_1(x)+P_2(x)] = \mathop{E}_{x\in A}[P_1(x)] + \mathop{E}_{x\in A}[P_2(x)], \tag{2}$$

$$\mathop{E}_{x\in A}[P_1(x)\cdot P_2(x)] = \mathop{E}_{x\in A}[P_1(x)] \cdot \mathop{E}_{x\in A}[P_2(x)] \tag{3}$$

(où, du côté gauche, les symboles $+$ et $\cdot$ désignent la somme et le produit logique et, du côté droit, la somme et le produit d'ensembles).

A étant un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle, désignons par $\prod_{x\in A} P(x)$ la proposition qui affirme que la proposition $P(x)$ est vraie pour tout élément x de l'ensemble A, et par $\sum_{x\in A} P(x)$ — la proposition qui affirme l'existence d'un (au moins) élément x de l'ensemble A, pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie. Les symboles $\prod_{x\in A}$ et $\sum_{x\in A}$ sont donc des quantificateurs relativisés à l'ensemble A.

Comme on le voit facilement, quels que soient la fonction propositionnelle $P(x)$ et l'ensemble A, on a

$$\sum_{x\in A} P(x) \equiv \sum_{x} [(x\in A)\cdot P(x)], \qquad \prod_{x\in A} P(x) \equiv \prod_{x} [(x\in A)\rightarrow P(x)].$$

Les quantificateurs relativisés se réduisent ainsi (à l'aide du symbole ϵ) aux quantificateurs ordinaires. Aussi, quels que soient la famille F d'ensembles et l'objet x, on a

$$\prod_{X\in F}(x\in X) \equiv \Big(x \in \prod_{X\in F} X\Big), \qquad \sum_{X\in F}(x\in X) \equiv \Big(x\in \sum_{X\in F} X\Big).$$

E x e m p l e s. Si N est l'ensemble de tous les nombres naturels, considérons les formules:

$$\prod_{x\in N}\sum_{y\in N}(x<y), \qquad \sum_{x\in N}\prod_{y\in N}(x\leqslant y),$$

$$\prod_{x\in N}\sum_{y\in N}\Big[(x<y)\prod_{z\in N}((z\leqslant x)+(y\leqslant z))\Big];$$

la première exprime qu'il existe, pour tout nombre naturel, un nombre naturel plus grand, la deuxième qu'il existe un nombre naturel qui est le plus petit, la troisième que, parmi les nombres naturels qui sont plus grands qu'un nombre naturel donné, il existe un qui est le plus petit [1]).

La proposition

$$[P(1)]'+\sum_{x\in N}(P(x)\,[P(x+1)]')+\prod_{y\in N}P(y)$$

(la fonction propositionnelle $P(x)$ étant arbitraire) exprime le principe d'induction mathématique [2]).

Il est aisé de démontrer qu'il y a, quels que soient les ensembles A et B et la fonction propositionnelle $P(x,y)$ de deux variables,

$$\mathop{E}_{x\in A}\Big[\sum_{y\in B}P(x,y)\Big]=\sum_{y\in B}\mathop{E}_{x\in A}[P(x,y)] \tag{4}$$

et

$$\mathop{E}_{x\in A}\Big[\prod_{y\in B}P(x,y)\Big]=\prod_{y\in B}\mathop{E}_{x\in A}[P(x,y)], \tag{5}$$

où les symboles $\sum\limits_{y\in B}$ et $\prod\limits_{y\in B}$ ont du côté gauche le sens logique (comme quantificateurs relativisés à l'ensemble B) et du côté droit le sens de la théorie des ensembles (comme sommes, respectivement produits d'ensembles dépendants du paramètre y).

Voici par exemple la démonstration de la formule (4). On a

$$\Big(x_0\,\epsilon\mathop{E}_{x\in A}\Big[\sum_{y\in B}P(x,y)\Big]\Big)\equiv\Big[(x_0\,\epsilon\,A)\cdot\sum_{y\in B}P(x_0,y)\Big]\equiv\sum_{y\in B}\Big(x_0\,\epsilon\mathop{E}_{x\in A}P(x,y)\Big)\cdot$$

Si l'on écrit, comme le font quelques auteurs, E' au lieu de CE, donc, si l'on écrit la formule (1) sous la forme

$$\mathop{E}_{x\in A}[(P(x))']=\Big[\mathop{E}_{x\in A}P(x)\Big]', \tag{1-a}$$

les formules (1-a), (2), (3), (4) et (5) prouvent que l'opération E est commutable avec chacune des 5 opérations logiques $'$, $+$, $\cdot$, Σ, Π, chacune d'elles changeant alors son sens logique en celui de la théorie des ensembles (ou inversement) [3]).

[1]) Cf. Th. Skolem, *Über die Mathematische Logik*, Norsk Matematisk Tidsskrift 1928, p. 6.

[2]) Cf. Th. Skolem, ibid., p. 8.

[3]) Cf. C. Kuratowski et A. Tarski, Fund. Math. 17, p. 242.

Il est ici à remarquer que, quels que soient l'ensemble A et les fonctions propositionnelles $P(x)$ et $Q(x)$, on a les formules:

$$\Big[\prod_{x\in A}(P(x)\equiv Q(x))\Big]\equiv\Big(\mathop{E}_{x\in A}[P(x)]=\mathop{E}_{x\in A}[Q(x)]\Big),$$

$$\Big[\prod_{x\in A}(P(x)\rightarrow Q(x))\Big]\equiv\Big(\mathop{E}_{x\in A}[P(x)]\subset\mathop{E}_{x\in A}[Q(x)]\Big).$$

Il existe donc un parallélisme entre l'algèbre des propositions et l'algèbre des ensembles, a savoir: aux signes $\equiv$, $\rightarrow$, $+$, $\cdot$, $'$ de l'algèbre des propositions correspondent les signes $=$, $\subset$, $+$, $\cdot$, C de l'algèbre des ensembles. Nous verrons ensuite que ce parallélisme se justifie encore par cela que l'algèbre des propositions et l'algèbre des ensembles peuvent être regardées comme deux interprétations de l'Algèbre de Boole.

L'Algèbre de Boole. Désignons par 0 et 1 deux objets différents supposés fixes; soit $P(x)$ une fonction propositionnelle donnée. Désignons ensuite par le symbole $'$ une correspondance d'après laquelle à tout objet x pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie, correspond un objet x'; soient $\mathbf{c}$, $\sim$, $+$ et $\cdot$ quatre relations qui remplissent les conditions (axiomes) suivantes:

A_1 a) $P(x)\rightarrow(x\,\mathbf{c}\,x)$,
b) $[P(x)\,P(y)\,P(z)\,(x\,\mathbf{c}\,y)(y\,\mathbf{c}\,z)]\rightarrow(x\,\mathbf{c}\,z)$.

A_2 $[P(x)\,P(y)]\rightarrow((x\sim y)\equiv[(x\,\mathbf{c}\,y)(y\,\mathbf{c}\,x)])$.

A_3 a) $[P(x)\,P(y)]\rightarrow P(x+y)$,
b) $[P(x)\,P(y)]\rightarrow([x\,\mathbf{c}\,(x+y)]\,[y\,\mathbf{c}\,(x+y)])$,
c) $[P(x)\,P(y)\,P(z)\,(x\,\mathbf{c}\,z)(y\,\mathbf{c}\,z)]\rightarrow[(x+y)\,\mathbf{c}\,z]$.

A_4 a) $[P(x)\,P(y)]\rightarrow P(x\cdot y)$,
b) $[P(x)\,P(y)]\rightarrow([(x\cdot y)\,\mathbf{c}\,x]\,[(x\cdot y)\,\mathbf{c}\,y])$,
c) $[P(x)\,P(y)\,P(z)\,(z\,\mathbf{c}\,x)(z\,\mathbf{c}\,y)]\rightarrow[z\,\mathbf{c}\,(x\cdot y)]$.

A_5 a) $[P(x)\,P(y)\,P(z)]\rightarrow([x\cdot(y+z)]\sim[(x\cdot y)+(x\cdot z)])$,
b) $[P(x)\,P(y)\,P(z)]\rightarrow([x+(y\cdot z)]\sim[(x+y)\cdot(x+z)])$.

A_6 a) $P(0)\,P(1)$,
b) $P(x)\rightarrow[(0\,\mathbf{c}\,x)(x\,\mathbf{c}\,1)]$.

A_7 a) $P(x)\rightarrow P(x')$,
b) $P(x)\rightarrow[(x\cdot x')\sim 0]$,
c) $P(x)\rightarrow[(x+x')\sim 1]$.

On nomme *système ordinaire de l'Algèbre de Boole* [1]) le système des axiomes $A_1 - A_7$ et des théorèmes qui en résultent.

Les axiomes $A_1 - A_7$ seront remplis, si l'on prend comme $P(x)$ la fonction propositionnelle

« „x" est une proposition »,

si l'on désigne par 0 une proposition fausse et par 1 une proposition vraie, et si l'on remplace les symboles $\subset$ et $\sim$ respectivement par $\rightarrow$ et $\equiv$, en comprenant par $+$, $\cdot$ et $'$ respectivement la somme logique, le produit logique et la négation. Dans cette interprétation des symboles utilisés, tous les théorèmes déduits dans l'Algèbre de Boole seront vrais dans l'algèbre des propositions.

Désignons, d'autre part, par 1 un ensemble donné et prenons comme $P(x)$ la proposition

« x est un sous-ensemble de l'ensemble 1 ».

Tous les axiomes $A_1 - A_7$ seront, on le voit, remplis, si l'on désigne par 0 l'ensemble vide, si l'on remplace les symboles $\subset$ et $\sim$ respectivement par $\subset$ et $=$ et si l'on comprend par $+$ et $\cdot$ respectivement la somme et le produit d'ensembles et par x' l'ensemble $1-x$. Dans cette interprétation des symboles utilisés, tout théorème déduit dans l'Algèbre de Boole sera vrai dans l'Algèbre des ensembles.

l'Algèbre de Boole a ainsi deux interprétations importantes: l'une dans la logique (dans l'algèbre des propositions) et l'autre dans la théorie des ensembles (dans l'algèbre des ensembles).

Il est encore à remarquer qu'on appelle *Corps de Boole* tout ensemble A dans lequel sont définies deux opérations: l'une $\vee$, à deux arguments, qui est commutable et associative, et l'autre $'$, à un argument, telles que l'on a

$$(a' \vee b')' \vee (a' \vee b)' = a,$$

quels que soient les éléments a et b de A [2]).

Or, on appelle *corps généralisé de Boole* un quadruple ordonné $K = [A, \sim, \vee, ']$ formé d'un ensemble A, d'une relation binaire $\sim$, d'une opération à deux arguments $\vee$ et d'une opération à un argument $'$ qui vérifie les conditions suivantes (où $a \in A$, $b \in A$ et $c \in A$):

[1]) Cf. A. Tarski, Fund. Math. **24**, p. 179 et **25**, p. 509.

[2]) Voir A. Mostowski, Fund. Math. **29**, p. 35, Déf. *a*.

1. $a \sim a$,
2. si $a \sim b$, on a $b \sim a$,
3. si $a \sim b$ et $b \sim c$, on a $a \sim c$,
4. $a' \in A$, $(a \vee b) \in A$
5. si $a \sim b$, on a $a' \sim b'$ et $(a \vee c) \sim (b \vee c)$,
6. $(a \vee b) \sim (b \vee a)$,
7. $[(a \vee b) \vee c] \sim [a \vee (b \vee c)]$,
8. $[(a' \vee b')' \vee (a' \vee b)'] \sim a$ [1])

Il est à remarquer que récemment Lee Byrne base l'Algèbre de Boole sur deux axiomes seulement:

$$\text{I } (XY' = ZZ') \equiv (XY = X) \quad \text{et} \quad \text{II } (XY)Z = (YZ)X \text{ [2]}.$$

De ces axiomes il déduit, entre autres, les propositions suivantes (dont nous laissons la démonstration au lecteur):

1) $XX = X$ (de I) 2) $XY = YX$, 3) $(XY)Z = X(YZ)$, 4) $X'' = X$.

Il est à remarquer encore que l'on pourrait remplacer ici l'axiome II par l'axiome $(XY)Z \equiv Y(ZX)$ et que les axiomes I et II peuvent être remplacés par les axiomes

$$\text{I}' \ (X + Y' = Z + Z') \equiv (X + Y = X) \quad \text{et} \quad \text{II}' \ (X + Y) + Z = (Y + Z) + X$$

[la multiplication doit etre définie par la formule $XY = (X' + Y')'$].

EXERCICES. 1. Donner l'exemple d'une Algèbre de Boole dans un ensemble de 4 éléments, $E = \{a, b, c, d\}$.

Réponse. $a' = b$, $b' = a$, $c' = d$, $d' = a$; la multiplication est définie par la table

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

[1]) D'après une remarque de M. A. Mostowski, c'est le système d'axiomes de l'Algèbre de la logique envisagé par E. V. Huntington.

[2]) L. Byrne, *Two brief formulations of boolean algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), pp. 269—272.

2. Démontrer qu'il n'existe aucune Algèbre de Boole dans un ensemble formé de trois éléments.

Remarque. On peut démontrer que, dans un ensemble fini à n éléments, on peut définir une Algèbre de Boole dans le cas (et seulement dans ce cas) où $n=2^n$ (où $k=0,1,2,\ldots$).

3. Définir une Algèbre de Boole dans l'ensemble de tous les nombres naturels.

Remarque. On peut démontrer à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe une Algèbre de Boole dans tout ensemble infini.

On a étudié aussi des ensembles, pour les éléments desquels sont définies deux opérations: $+$ et $\cdot$, commutables et associatives et telles que $a\cdot a=a+a=a$ et $(ab=a)\equiv(a+b=b)$, quels que soient les éléments a es b de l'ensemble considéré. On les appelle *lattices* ou *structures*.

L'algébrisation de la théorie des opérations arithmétiques sur un nombre fini d'ensembles peut être aussi obtenue moyennant la construction suivante [1]),

Soit W un ensemble formé d'éléments quelconques dont un est désigné par 0. Deux opérations binaires sont définies dans W, à savoir l'addition et la multiplication (c'est-à-dire que, X et Y étant deux éléments de W, $X+Y$ et $X\cdot Y$ (ou XY) sont des éléments déterminés de W) et une opération (la complémentation) qui fait correspondre à tout élément X de W un élément X^c de W, de sorte que les conditions suivantes (axiomes) soient remplies.

Axiomes de la somme

$$S_1)\ X+Y=Y,\quad S_2)\ (X+Y)+Z=X+(Y+Z),\quad S_3)\ X+0=X.$$

Axiomes du produit

$$P_1)\ XY=YX,\quad P_2)\ (XY)Z=X(YZ),\quad P_3)\ X\cdot 0=0.$$

Axiome distributif

$$D)\ X(Y+Z)=XY+XZ.$$

[1]) Voir: H. Teresaka, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **14** (1938), p. 306; aussi *Die Theorie der topologischen Verbände*, extrait de Fund. Math. 33, p. 1—33 (paru en 1939). Cf. Th. Skolem: *Über gewisse „Verbände" oder „Lattices"*, Norske Akad. Oslo 1936, nr 7 et G. Birkhoff, *Lattices Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 25.

Axiomes du complémentaire

$$C_1)\ X^{cc}=X,\qquad C_2)\ XX^c=0.$$

Axiomes de De Morgan

$$C_3)\ (X+Y)^c=X^cY^c,\quad (XY)^c=X^c+Y^c.$$

Axiome de l'égalité

$$C_4)\ [(XY^c=0)(YX^c=0)]\to(X=Y).$$

Si X, Y et Z sont des ensembles formant un ensemble W d'ensembles et si X^c désigne le complémentaire de l'ensemble X par rapport à la somme de tous les ensembles constituant W, tous les axiomes envisagés sont évidemment vrais. Or, on peut développer la théorie des opérations arithmétiques sur un nombre fini d'ensembles en partant uniquement des axiomes cités ci-dessus, sans faire usage dans les démonstrations de ce que $X, Y, \ldots$ sont des ensembles. L'inclusion et la différence peuvent être définies ici d'une façon purement formelle; notamment la formule $X\subset Y$ (ou $Y\supset X$) est, par définition, équivalente à la formule $XY^c=0$, et la différence de deux ensembles est équivalente à la formule $X-Y=XY^c$.

Les démonstrations de plusieurs théorèmes qui sont presque évidents pour les ensembles peuvent être ici assez difficiles, ainsi par exemple la démonstration que voici de la transitivité de la relation $\subset$.

Quel que soit l'élément X de W, on a, d'après C_3, $XX^c=0$, d'où, d'après P_1, P_2 et P_3 on trouve, quels que soient les éléments X et Y de W:

$$(1)\qquad [X(Y+Y^c)]X^c=0.$$

Or, d'après C_3, C_1 et P_3 on a $(Y+Y^c)^c=Y^cY^{cc}=Y^c\cdot 0=0$, donc, d'après C_3 et S_3:

$$[X(Y+Y^c)]^c=X^c+(Y+Y^c)^c=X^c+0=X^c,$$

d'où, d'après C_3:

$$(2)\qquad X[X(Y+Y^c)]^c=XX^c=0.$$

D'après (1), (2) et C_4 on trouve

$$(3)\qquad X=X(Y+Y^c).$$

D'après (3) et D on a

$$(4)\qquad XZ^c=X(Y+Y^c)Z^c=XYZ^c+XY^cZ^c.$$

Si l'on a maintenant $X \subset Y$ et $X \subset Z$, par définition de la relation $\subset$, les formules $XY^c = 0$ et $YZ^c = 0$ sont vraies; d'où, d'après (4), P_2, P_3 et S_3, $XZ^c = X \cdot 0 + 0 \cdot Z^c = 0 + 0 = 0$, donc $XZ^c = 0$, ce qui prouve que $X \subset Z$, c. q. f. d.

En ajoutant aux opérations considérées ci-dessus (addition, multiplication, complémentation) *l'opération de la fermeture*, X^a, avec les axiomes

$$A_1)\ X^{aa} = X^a, \quad A_2)\ X \cdot X^{ac} = 0, \quad A_3)\ (X+Y)^a = X^a + Y^a,$$

M. Teresaka a développé dans son mémoire quelques chapitres de la Topologie, en achevant ainsi son algébrisation [1]) (cf. aussi § 28).

Comme exemple d'une conséquence des axiomes envisagés, citons l'identité de M. Kuratowski

$$X^{acacaca} = X^{aca} \text{ }^{2)}.$$

EXERCICES. 1. Former une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ dans laquelle figure chaque ensemble fini (non vide) de nombres naturels.

Résolution. On sait que tout nombre naturel n peut être (et cela d'une seule façon) présenté sous la forme

$$n = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \ldots + 2^{n_1+n_2+\ldots+n_k-1},$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est une suite finie de nombres naturels. Si l'on écrit dans cette forme le nombre naturel n et si l'on pose $E_n = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, on obtient évidemment la suite désirée d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$.

2. $E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie donnée d'ensembles de nombres naturels, déterminer un ensemble infini E de nombres naturels, distinct de chacun des ensembles E_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Résolution. Soit E l'ensemble formé de tous les nombres impairs et de tous ces nombres pairs 2^n (et seulement de ces nombres) pour lesquels on a $2n \bar{\epsilon} E_n$. Admettons que l'on a, pour un nombre naturel n, $E = E_n$. Si $2n \epsilon E$, on aurait (vu la définition de l'ensemble E), $2n \bar{\epsilon} E_n$, ce qui est impossible, puisque $E_n = E$. Si $2n \bar{\epsilon} E$, on a $2n \bar{\epsilon} E_n$, donc, d'après la définition de E, $2n \epsilon E$, ce qui est aussi impossible. L'hypothèse que $E = E_n$ implique donc une contradiction et, comme on le voit facilement, l'ensemble E satisfait aux conditions désirées. (Au lieu de l'ensemble de tous les nombres impairs, on peut prendre un sous-ensemble infini quelconque de cet ensemble. On peut donc définir une infinité d'ensembles distincts E satisfaisant aux conditions imposées).

[1]) M. Teresaka a introduit aussi (l. c. second travail, p. 12) les axiomes de la somme et du produit d'une infinité d'éléments.

[2]) Fund. Math. 3, p. 192.

3. Soit F une famille (infinie) d'ensembles de nombres naturels, ayant deux à deux un au plus élément commun. Déterminer une suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ formée de tous les ensembles de la famille F.

Résolution. Il suffit évidemment de ranger dans une suite (finie ou infinie) tous les ensembles de la famille F qui ont plus qu'un élément. Dans ce but, nous attacherons à chaque ensemble E de la famille F ayant plus qu'un élément un numéro $\nu(E)$ de sorte qu'on ait $\nu(E) \neq \nu(H)$, pour $E \neq H$. Soit donc E un ensemble de F formé au moins de deux nombres naturels, et soient m_E et n_E deux nombres naturels les plus petits qui appartiennent à E. Comme on le voit, la fonction $\nu(E) = 2^{m_E}(2n_E - 1)$ détermine la correspondance désirée. En effet, s'il était $\nu(E) = \nu(H)$, on aurait évidemment $m_E = m_H$ et $n_E = n_H$ et les ensembles E et H auraient au moins deux éléments communs, contrairement à la propriété de la famille F. Tous les ensembles E de F ayant plus qu'un élément peuvent donc être rangés dans une suite $G_1, G_2, \ldots$ d'après la grandeur des numéros correspondants $\nu(E)$. Or, les ensembles de F formés d'un seul élément, c'est-à-dire d'un seul nombre naturel, peuvent être rangés (s'ils existent) dans une suite $H_1, H_2, \ldots$ d'après la grandeur de ces nombres. La suite $H_1, G_1, H_2, G_2, \ldots$ (respectivement $0, H_1, G_1, H_2, G_2, \ldots$) jouit évidemment des propriétés désirées.

4. Soient p un nombre naturel donné et F une famille (infinie) d'ensembles de nombres naturels ayant deux à deux p éléments communs au plus. Déterminer une suite infinie formée de tous les ensembles de la famille F.

5. Soit $E_1, E_2, \ldots$ une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels ayant deux à deux un nombre fini d'éléments communs. Déterminer un ensemble infini E de nombres naturels, ayant avec chaque ensemble E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ un nombre fini d'éléments communs.

Résolution. Soit n un nombre naturel donné. D'après l'hypothèse, chacun des ensembles $E_k E_n$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ est fini, donc aussi leur somme; d'où il suit $R_n = E_n - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1}) \neq 0$. Soit k_n le plus petit nombre naturel appartenant à l'ensemble R_n. Posons $E = \{k_1, k_2, \ldots\}$. Comme $k_n \epsilon E_n - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1})$, tous les nombres $k_1, k_2, \ldots$ sont distincts et l'ensemble E est infini. Or, $k_n \bar{\epsilon} E_k$ pour $n > k$, donc l'ensemble $E_n E$ est fini (et contient $< k$ éléments). L'ensemble E jouit des propriétés désirées.

6. Donner l'exemple d'une suite infinie d'ensembles infinis disjoints formés de nombres naturels, $N_1, N_2, \ldots$, et d'une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$, tels qu'on ait

$$n_k \epsilon N_1 + N_2 + \ldots + N_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

et

$$(N_1 + N_2 + N_3 + \ldots) - \{n_1, n_2, \ldots\} = 0.$$

Résolution. $N_k = \{1 . 2^{k-1}, 3 . 2^{k-1}, 5 . 2^{k-1}, \ldots\}$ et $n_k = k$, pour $k = 1, 2, \ldots$ (puisque, si $k = 2^{l-1}(2m-1)$, on a $k \epsilon N_l$ et $k \geq 2^{l-1} \geq l$, d'où $k \epsilon N_1 + N_2 + \ldots + N_k$).

§ 20. L'expression $(A-B)+(B-A)$. Posons, quels que soient les ensembles A et B:

(1) $$A \circ B = (A - B) + (B - A)$$

L'expression (1) est appelée parfois *différence symétrique*.

Nous déduirons quelques propriétés de l'opération $\circ$ [1]).

L'opération $\circ$ est évidemment *commutative*, à savoir on a

$$A \circ B = B \circ A$$

quels que soient les ensembles A et B.

L'opération $\circ$ est *associative*. En effet, A_1, A_2 et A_3 étant trois ensembles quelconques et C désignant le complémentaire par rapport à l'ensemble $A_1 + A_2 + A_3$, on a, d'après (1):

$$A_1 \circ A_2 = A_1 \mathrm{C} A_2 + A_2 \mathrm{C} A_1,$$

d'où (d'après les formules de De Morgan):

$$\begin{aligned}(A_1 \circ A_2) \circ A_3 &= (A_1 \mathrm{C} A_2 + A_2 \mathrm{C} A_1) \mathrm{C} A_3 + A_3 \mathrm{C}(A_1 \mathrm{C} A_2 + A_2 \mathrm{C} A_1) = \\ &= A_1 \cdot \mathrm{C} A_2 \cdot \mathrm{C} A_3 + A_2 \cdot \mathrm{C} A_1 \cdot \mathrm{C} A_3 + A_3 (\mathrm{C} A_1 + A_2)(\mathrm{C} A_2 + A_1) = \\ &= A_1 \cdot \mathrm{C} A_2 \cdot \mathrm{C} A_3 + A_2 \cdot \mathrm{C} A_1 \cdot \mathrm{C} A_3 + A_3 \cdot \mathrm{C} A_1 \cdot \mathrm{C} A_2 + A_1 A_2 A_3\end{aligned}$$

(puisque $A_1 \mathrm{C} A_1 = A_2 \mathrm{C} A_2 = 0$).

[1]) H. Stone appelle l'opération $\circ$ formation de la différence symétrique de deux ensembles; voir Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936).

D'autre part

$$\begin{aligned}A_1 \circ (A_2 \circ A_3) &= A_1 \mathrm{C}(A_2 \mathrm{C} A_3 + A_3 \mathrm{C} A_2) + (A_2 \mathrm{C} A_3 + A_3 \mathrm{C} A_2) \mathrm{C} A_1 = \\ &= A_1 (\mathrm{C} A_2 + A_3)(\mathrm{C} A_3 + A_2) + (A_2 \mathrm{C} A_3 + A_3 \mathrm{C} A_2) \mathrm{C} A_1 = \\ &= A_1 \cdot \mathrm{C} A_2 \cdot \mathrm{C} A_3 + A_1 A_2 A_3 + A_2 \cdot \mathrm{C} A_1 \cdot \mathrm{C} A_3 + A_3 \cdot \mathrm{C} A_2 \cdot \mathrm{C} A_1\end{aligned}$$

(puisque $A_2 \mathrm{C} A_2 = A_3 \mathrm{C} A_3 = 0$).

On a donc

$$(A_1 \circ A_2) \circ A_3 = A_1 \circ (A_2 \circ A_3), \text{ c. q. f. d.}$$

Il résulte de la définition de l'opération $\circ$, que l'on a, quel que soit l'ensemble A,

$$A \circ A = 0 \quad \text{et} \quad A \circ 0 = 0 \circ A = A.$$

L'opération $\circ$ étant associative, il en résulte, quel que soient les ensembles A et B,

$$A \circ (A \circ B) = (A \circ A) \circ B = 0 \circ B = B.$$

Or, si l'on pose

(2) $$X = A \circ B,$$

on a

(3) $$A \circ X = B,$$

donc inversement: la formule (3) entraîne la formule (2).

Les formules (2) et (3) sont donc équivalentes.

L'opération $\circ$ étant commutative, ces formules sont aussi équivalentes à la formule $X \circ A = B$.

Il en résulte que, *quels que soient les ensembles A et B, il existe un et un seul ensemble X, tel que* $A \circ X = B$ (ou bien, l'opération $\circ$ étant commutative, tel que $X \circ A = B$).

L'opération $\circ$ admet donc une opération inverse univoque qui lui est égale.

Il résulte des propriétés de l'opération $\circ$ que nous avons démontrées, que si l'on applique cette opération aux sous-ensembles d'un ensemble quelconque E (ou bien seulement aux sous-ensembles finis de E), on obtient un *groupe abélien*.

Il est facile à démontrer que $A_1 \circ A_2 \circ A_3 \circ \ldots \circ A_n$ est l'ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à un nombre impair d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (pour $n = 2, 3, \ldots$).

Il résulte immédiatement de l'équivalence des formules (2) et (3) que l'on a, quels que soient les ensembles A, B et C,

$$[A=(B-C)+(C-B)]\equiv[B=(A-C)+(C-A)]\equiv$$
$$\equiv[C=(A-B)+(B-A)]\ ^{1)}.$$

On démontre facilement, quels que soient les ensembles A, B et C, les formules

$$A\circ C\subset(A\circ B)+(B\circ C) \quad \text{et} \quad A\cdot(B\circ C)=AB\circ AC$$

(distributivité de l'opération $\circ$ par rapport à la multiplication).

Il résulte des propriétés de l'opération $\circ$, que, si on l'applique aux sous-ensembles d'un ensemble donné, en l'appelant, pour le moment, *addition*, alors, avec la multiplication ordinaire des ensembles, elle donne un *anneau commutatif* au sens de l'Algèbre.

On vérifie facilement que:

$$A+B=(A\circ B)\circ AB, \quad A-B=(A\circ B)\cdot A;$$

ces formules prouvent que l'addition et la soustraction des ensembles se réduisent à la multiplication et l'opération $\circ$.

EXERCICE. 1. Soit R une relation entre les ensembles et soit ARB dans ce cas (et seulement dans ce cas) où l'ensemble $A\circ B$ a un nombre fini et pair d'éléments. Démontrer que la relation R est transitive.

Démonstration. Posons $M_1=(A_1-A_2)A_3$, $M_2=A_1-(A_2+A_3)$, $M_3=(A_2-A_1)A_3$, $M_4=A_2-(A_1+A_3)$, $M_5=A_1(A_2-A_3)$, $M_6=A_3-(A_1+A_2)$.

On a (pour les ensembles quelconques A_1, A_2 et A_3) les décompositions en sommes d'ensembles disjoints: $A_1\circ A_2=M_1+M_2+M_3+M_4$, $A_2\circ A_3=M_5+M_4+M_1+M_6$, $A_1\circ A_3=M_5+M_2+M_3+M_6$. Il en résulte qu, si les ensembles $A_1\circ A_2$ et $A_2\circ A_3$ sont finis, les ensembles $M_k\ (k=1,2,\dots,6)$ sont tous finis, donc aussi l'ensemble $A_1\circ A_3$ est fini. Désignons par m_k le nombre d'éléments de l'ensemble M_k et respectivement par p, q et r les nombres d'éléments des ensembles $A_1\circ A_2$, $A_2\circ A_3$ et $A_1\circ A_3$. Or $p=m_1+m_2+m_3+m_4$, $q=m_5+m_4+m_1+m_6$, $r=m_5+m_2+m_3+m_6$, donc $p+q=r+2m_1+2m_4$.

[1]) Cf. le théorème de Stanley Jevons, *Pure Logic*, 1864, p. 61; cf. L. Couturat, l. c. p, 37.

Si les nombres p et q sont pairs, il en est de même du nombre r. Donc, si A_1RA_2 et A_2RA_3, on a A_1RA_3, c. q. f. d.

2. Soient n un nombre naturel >2 et S_n une relation entre les ensembles, définie comme il suit: on a AS_nB dans ce cas (et seulement dans ce cas) où l'ensemble $A\circ B$ a un nombre fini d'éléments, divisible par le nombre n. Démontrer que la relation S_n n'est pas transitive.

Démonstration. Posons $A=\{1\}$, $B=\{2,3,\dots,n\}$ et $C=\{n+1\}$. Les ensembles $A\circ B$, $B\circ C$ et $A\circ C$ ont respectivement n, n et 2 éléments. On a donc AS_nB, BS_nC et (vu que $2<n$) $A\,\text{non}\,S_n\,C$, ce qui démontre que la relation S_n n'est pas transitive.

3. Soit E un ensemble quelconque et soient F et K deux familles quelconques de sous-ensembles de E. Appelons *fermés* les ensembles de la famille F, *compacts* — les ensembles de la famille K, *ouverts* — les ensembles $H\subset E$, tels que $E-H\,\epsilon\,F$.

Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes:

P[1]) Si A est un ensemble fermé et compact et Φ une famille d'ensembles ouverts $\subset E$, telle que $A\subset\sum_{H\epsilon\Phi}H$, il existe un nombre fini d'ensembles de la famille Φ, soit $H_1, H_2, \dots, H_n$, tels que $A\subset H_1+H_2+\dots+H_n$.

P[2]) Si Ψ est une famille d'ensembles fermés $\subset E$, dont un au moins est compact, et si le produit de chaque nombre fini d'ensembles de la famille Ψ est non vide, on a $\prod_{X\epsilon\Psi}X\neq 0\ ^{1)}$.

4. Démontrer que, quels que soient les ensembles A, B et X, on a l'équivalence $(A-X=B-X)\equiv[X\supset(A\circ B)]$.

5. Démontrer que, quelle que soit la suite infinie d'ensembles $A_1, A_2, \dots$, on a l'égalité

$$(A_1\circ A_2)+(A_2\circ A_3)+(A_3\circ A_4)+\dots=(A_1+A_2+A_3+\dots)-A_1A_2A_3\dots.$$

6. Démontrer que chacune des fonctions $f(A,B)=A+B$, $A-B$, $A\circ B$ jouit de la propriété du triangle:

$$f(A,C)\subset f(A,B)+f(B,C),$$

quels que soient les ensembles A, B et C. Démontrer aussi que la fonction $f(A,B)=AB$ ne jouit pas de cette propriété.

[1]) Voir S. Saks, Fund. Math. 2, p. 1–3.

7. Démontrer que, étant donnés un ensemble E et deux familles d'ensembles $\{A_\xi\}$ et $\{B_\xi\}$ où $\xi \in E$, on a:

$$\sum_{\xi\in E} A_\xi \circ \sum_{\xi\in E} B_\xi \subset \sum_{\xi\in E}(A_\xi \circ B_\xi) \quad \text{et} \quad \prod_{\xi\in E} A_\xi \circ \prod_{\xi\in E} B_\xi \subset \sum_{\xi\in E}(A_\xi \circ B_\xi).$$

8. Démontrer que, si l'on pose, pour les sous-ensembles X et Y d'un ensemble donné,

$$X \odot Y = XY + \mathrm{C}X \cdot \mathrm{C}Y,$$

l'opération $\odot$ est associative. Démontrer aussi que l'on a, pour tous les sous-ensembles A_1, A_2 et A_3 de E,

$$[(A_1 \odot A_2) \odot A_3] = [(A_1 \circ A_2) \circ A_3].$$

9. Pour les sous-ensembles X et Y d'un ensemble donné E, posons $f(X, Y) = \mathrm{C}X + \mathrm{C}Y$. Exprimer à l'aide de la fonction f les opérations $X+Y$, $X-Y$ et $X \cdot Y$ (pour $X \subset E$ et $Y \subset E$).

R é p o n s e. $X+Y = f(f(X,X), f(Y,Y))$,

$X-Y = f(f(X, f(Y,Y)),\ f(X, f(Y,Y)))$, $X \cdot Y = f(f(X,Y), f(X,Y))$.

§ 21. Limites des suites d'ensembles. Soit

(1) $$E_1, E_2, E_3, \ldots$$

une suite infinie d'ensembles.

On appelle *limite supérieure* (ou *complète*) de la suite (1) l'ensemble de tous les objets qui sont les éléments d'une infinité de termes de la suite (1) et on le désigne par

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n.$$

Donc, si N désigne l'ensemble de tous les nombres naturels, on a

(2) $$(p \in \overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n) \equiv \prod_{m\in N} \sum_{n\in N} (p \in E_{m+n}).$$

On appelle *limite inférieure* (ou *restreinte*) de la suite (1) l'ensemble de tous les objets qui sont les éléments de tous les ensembles de la suite (1) sauf, peut-être, un nombre fini; on désigne cet ensemble par

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n.$$

On a donc

$$(p \in \underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n) = \sum_{m\in N} \prod_{n\in N} (p \in E_{m+n}).$$

Les limites supérieure et inférieure d'une suite infinie d'ensembles (1) sont donc des ensembles bien définis (qui peuvent être vides). On voit facilement que:

(3) $$\underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n \subset \overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n,$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = (E_1+E_2+\ldots)(E_2+E_3+\ldots)(E_3+E_4+\ldots)\ldots,$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = E_1 E_2 E_3 \ldots + E_2 E_3 E_4 \ldots + E_3 E_4 E_5 \ldots + \ldots.$$

Il en résulte:

(4) $$\overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} E_k, \qquad \underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Voici, à titre d'exemple, comment on peut démontrer la première de ces formules, en utilisant la formule (2) et les propriétés de l'opération $\underset{p}{E}$:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = \underset{p}{E}\,[p \in \overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n] = \underset{p}{E}\Big[\prod_{m\in N}\sum_{n\in N}(p \in E_{m+n})\Big] =$$

$$= \prod_{m\in N}\sum_{n\in N}\underset{p}{E}\,(p \in E_{m+n}) = \prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{m+n} = \prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} E_{n+1} = \prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} E_n.$$

Si les termes de la suite (1) sont des sous-ensembles d'un ensemble A et si $\mathrm{C}E$ désigne l'ensemble $A - E$, on a

$$\mathrm{C}\,\overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = \underline{\lim_{n=\infty}}\, \mathrm{C}E_n, \qquad \mathrm{C}\,\underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = \overline{\lim_{n=\infty}}\, \mathrm{C}E_n,$$

ce qu'on peut déduire de (4) à l'aide des formules de De Morgan.

Si l'on a pour une suite infinie (1) d'ensembles

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n = \overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n,$$

on dit que la suite (1) est *convergente* (dans le sens de la théorie générale des ensembles)[1]), ou bien qu'elle a une *limite* (unique) que l'on désigne par

$$\lim_{n=\infty} E_n .$$

Pour que la suite d'ensembles (1) soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}E_k=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty}E_k$$

ou bien (comme on le peut démontrer facilement) que la proposition suivante soit vraie:

$$\prod_{x}\sum_{m\epsilon N}\Big(\prod_{n\epsilon N}(x\,\epsilon\,E_{m+n})+\prod_{n\epsilon N}(x\,\overline{\epsilon}\,E_{m+n})\Big).$$

On voit que toute suite infinie croissante (respectivement décroissante) est convergente et que,

$$\text{si}\quad E_1\subset E_2\subset\ldots,\qquad \lim_{n=\infty}E_n=E_1+E_2+\ldots$$

et

$$\text{si}\quad E_1\supset E_2\supset\ldots,\qquad \lim_{n=\infty}E_n=E_1E_2E_3\ldots .$$

Les suites infinies d'ensembles disjoints sont toujours convergentes; leur limite est évidemment l'ensemble vide.

Or, il est facile à vérifier que, quelle que soit la suite infinie (1) d'ensembles,

$$E_1+E_2+\ldots=\lim_{n=\infty}(E_1+E_2+\ldots+E_n),$$

$$E_1E_2E_3\ldots=\lim_{n=\infty}(E_1E_2\ldots E_n).$$

Donc: la somme d'une série infinie d'ensembles est la limite de leurs sommes partielles et le produit d'une suite infinie d'ensembles est la limite de leurs produits partiels (de même que pour les nombres réels).

Si $A_n\subset B_n$, pour $n=1,2,\ldots$, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n=\infty}}B_n,\qquad \underline{\lim_{n=\infty}}A_n\subset\underline{\lim_{n=\infty}}B_n .$$

[1]) Pour distinguer cette notion de celle de convergence d'une suite infinie d'ensembles qu'on emploie dans la théorie des espaces métriques.

Nous laissons au lecteur de démontrer que, si $A_1, A_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$ sont deux suites infinies quelconques d'ensembles, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}}(A_n+B_n)=\overline{\lim_{n=\infty}}A_n+\overline{\lim_{n=\infty}}B_n,$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}}A_nB_n=\underline{\lim_{n=\infty}}A_n\cdot\underline{\lim_{n=\infty}}B_n,$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}}(A_n+B_n)\supset\underline{\lim_{n=\infty}}A_n+\underline{\lim_{n=\infty}}B_n,$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}}A_nB_n\subset\overline{\lim_{n=\infty}}A_n\cdot\overline{\lim_{n=\infty}}B_n;$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}}(A_n-B_n)\subset\overline{\lim_{n=\infty}}A_n-\underline{\lim_{n=\infty}}B_n,$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}}(A_n-B_n)\supset\underline{\lim_{n=\infty}}A_n-\overline{\lim_{n=\infty}}B_n.$$

Il résulte de ces formules que, si les limites $\lim_{n=\infty}A_n$ et $\lim_{n=\infty}B_n$, existent, les limites suivantes existent aussi:

$$\lim_{n=\infty}(A_n+B_n)=\lim_{n=\infty}A_n+\lim_{n=\infty}B_n,$$

$$\lim_{n=\infty}A_nB_n=\lim_{n=\infty}A_n\cdot\lim_{n=\infty}B_n,$$

$$\lim_{n=\infty}(A_n-B_n)=\lim_{n=\infty}A_n-\lim_{n=\infty}B_n.$$

Fonctions caractéristiques des ensembles. Soient M un ensemble donné et E un sous-ensemble de M. Soit $f_E(p)$ la fonction définie dans l'ensemble M comme il suit: $f_E(p)=1$, si $p\,\epsilon\,E$ et $f_E(p)=0$, si $p\,\epsilon\,M-E$. La fonction $f_E(p)$ ainsi définie, nous l'appelons *fonction caractéristique* de l'ensemble E. On a évidemment

$$E=\mathop{E}_{x\epsilon M}[f_E(x)=1]\qquad\text{pour}\quad E\subset M.$$

F étant une famille quelconque de sous-ensembles E de M, on a en posant $P=\prod_{E\epsilon F}E$,

$$(1)\qquad f_P(p)=\prod_{E\epsilon F}f_E(p)\ \text{ pour }\ p\,\epsilon\,M\ \text{ et }\ f_P(p)=\min_{E\epsilon F}f_E(p)\ \text{ pour }\ p\,\epsilon\,M.$$

La fonction caractéristique du produit (d'une famille quelconque) d'ensembles est donc égale au produit des fonctions caractéristiques de ces ensembles.

Pour la somme des ensembles, il n'existe pas un théorème analogue; cependant

$$f_S(p) = \max_{E \in F} f_E(p) \quad \text{où} \quad S = \sum_{E \in F} E.$$

En désignant par CE le complémentaire de l'ensemble E par rapport à M, on a évidemment

$$(2) \qquad f_{CE}(p) = 1 - f_E(p), \quad \text{pour} \quad p \in M,\ E \subset M.$$

$E_1, E_2, E_3, \ldots$ étant une suite infinie de sous-ensemble de M, on a

$$f_{L_s}(p) = \overline{\lim_{n=\infty}} f_{E_n}(p) \quad (\text{pour } p \in M), \quad \text{où} \quad \overline{\lim_{n=\infty}} E_n = L_s$$

et où le symbole $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}$ a, à gauche, le sens de l'algèbre des ensembles et, à droite, le sens de l'analyse.

En effet, le côté gauche de notre formule, en tant que fonction caractéristique, ne prend que deux valeurs, 1 ou 0. Si l'on a $f_{L_s}(p) = 1$ pour un élément $p \in M$, on a $p \in L_s$, donc p appartient à une infinité de termes E_n de la suite $E_1, E_2, \ldots$; pour ces E_n, $f_{E_n}(p) = 1$. La suite $f_{E_1}(p), f_{E_2}(p), \ldots$ contient donc une infinité d'unités et, vu que les termes de cette suite sont les nombres 0 ou 1, on trouve $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} f_{E_n}(p) = 1$.

D'autre part, si $f_{L_s}(p) = 0$, on a $p \bar{\in} L_s$ et, pour n suffisamment grand, $p \bar{\in} E_n$, donc $f_{E_n}(p) = 0$, d'où l'on conclut que $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} f_{E_n}(p) = 0$.

Pareillement on démontre que

$$f_{L_i}(p) = \underline{\lim_{n=\infty}} f_{E_n}(p) \qquad (\text{pour } p \in M), \quad \text{où} \quad L_i = \underline{\lim_{n=\infty}} E_n.$$

Il en résulte que, si la suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ est convergente, on a

$$f_L(p) = \lim_{n=\infty} f_{E_n}(p) \qquad (\text{pour } p \in M), \quad \text{où} \quad L = \lim_{n=\infty} E_n.$$

On pourrait dire aussi: *pour qu'un ensemble E soit limite (respectivement limite supérieure, respectivement limite inférieure) d'une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit limite (respectivement limite supérieure, respectivement limite inférieure) de la suite de fonctions caractéristiques de ces ensembles.*

Vu la formule $\prod\limits_{E \in F} CE = C \sum\limits_{E \in F} E$, si l'on remplace dans (1) les ensembles E par leurs complémentaires, on obtient, en vertu de (2),

$$f_S(p) = 1 - \prod_{E \in F} [1 - f_E(p)] \qquad (\text{pour } p \in M), \quad \text{où} \quad S = \sum_{E \in F} S.$$

PROBLÈMES. 1. Donner l'exemple d'une suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles de nombres réels, dont aucune suite extraite (c'est-à-dire aucune suite $E_{n_1}, E_{n_2}, E_{n_3}, \ldots$, où $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$) n'est convergente. Démontrer que telle est la suite $E_1, E_2, \ldots$, où E_n désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\dfrac{1|}{|n_1} + \dfrac{1|}{|n_2} + \ldots$, pour lesquels il existe un (au moins) nombre naturel k, tel que $n_{2k} = n$.

2. Démontrer que l'on peut extraire une suite convergente de toute suite infinie d'ensembles de nombres naturels.

3. Démontrer que, si E_n^m ($m = 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$) est une suite infinie double d'ensembles de nombres naturels et si $E^m = \lim\limits_{n=\infty} E_n^m$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et $E = \lim\limits_{m=\infty} E^m$, il existe deux suites infinies croissantes de nombres naturels $m_1 < m_2 < \ldots$ et $n_1 < n_2 < \ldots$, telles que $E = \lim\limits_{k=\infty} E_{n_k}^{m_k}$. Démontrer que l'on ne peut pas remplacer, dans cet énoncé, les ensembles de nombres naturels par les ensembles de nombres réels (en particulier que cet énoncé est en défaut lorsque pour m et n naturels, E_n^m est l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\dfrac{1|}{|n_1} + \dfrac{1|}{|n_2} + \ldots$, où $n_m \geqslant n$).

4. Démontrer que, Φ étant une famille infinie d'ensembles, il existe toujours une sous-famille infinie Φ_1 de Φ, telle que deux ensembles de Φ_1 ou bien sont toujours disjoints ou bien ne le sont jamais.

D é m o n s t r a t i o n. Soit Φ une famille infinie d'ensembles; supposons qu'elle ne contient aucune sous-famille infinie d'ensembles disjoints; soit $E_1 \in \Phi$. S'il existe des ensembles appartenant à Φ et disjoints avec E_1, désignons un d'entre eux par E_2. S'il existe des ensembles appartenant à Φ et disjoints avec E_1 et E_2 à la fois, désignons par E_3 un d'entre eux. Supposons que les ensembles

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ appartenant à Φ sont déja définis; s'il existe des ensembles appartenant à Φ et disjoints avec chacun de ces n ensembles, désignons un d'entre eux par E_{n+1}. La suite $E_1, E_2, \ldots$ ne peut pas être infinie, vu que d'après notre hypothèse la famille Φ ne contient aucune sous-famille d'ensembles disjoints. Il existe donc une suite finie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'ensembles de Φ, telle que tout ensemble de la famille Φ a des éléments communs avec un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$. La famille Φ étant infinie, un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, soit $H_1 = E_k$, a des éléments communs avec une infinité d'ensembles de la famille Φ autres que H_1. Désignons leur famille par Ψ_1. Par le même raisonnement, nous trouverons dans Ψ_1 un ensemble H_2 et une sous-famille infinie de Ψ_2 de Ψ_1 formée d'ensembles dont chacun a des éléments communs avec H_2 (et évidemment aussi avec H_1). En raisonnant ainsi de suite, on obtient une suite infinie $H_1, H_2, \ldots$ d'ensembles distincts de la famille Φ, telle que chaque ensemble de cette suite a des éléments communs avec tout autre ensemble de ladite suite. $\Phi_2 = \{H_1, H_2, \ldots\}$ sera donc une sous-famille infinie de Φ, ne contenant pas d'ensembles disjoints [1]).

On dit qu'un ensemble E *possède une base*, s'il existe une suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ de sous-ensembles de E, telle que tout sous-ensemble de E est une limite d'une suite infinie d'ensembles dont chacun appartient à la suite $E_1, E_2, \ldots$.

On démontre facilement que l'ensemble E de tous les nombres naturels possède une base (formée de tous les sous-ensembles finis de E). Il est plus difficile à démontrer que l'ensemble de tous les nombres réels ne possède aucune base. Or, à l'aide de l'hypothèse du continu, on peut démontrer que, si l'ensemble infini E possède une base, il existe une suite infinie formée de tous les éléments de E [2]).

§ 22. Produit cartésien de deux ensembles. Par *produit cartésien* (ou *combinatoire*) de deux ensembles A et B, on comprend l'ensemble de toutes les paires ordonnées (x, y), où $x \epsilon A$ et $y \epsilon B$: un tel ensemble est désigné par $A \times B$. En général, le produit cartésien de deux ensembles dépend de leur ordre. Le produit cartésien n'est pas non plus associatif, puisque $(A \times B) \times C$ est l'ensemble de tous les

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 35. p, 173—174.

[2]) Cf. F. Hausdorff, Fund. Math. 20, p. 286, Problème 58, et W. Sierpiński, Fund. Math. 30, p. 1.

éléments de la forme $((x, y), z)$, où $x \epsilon A$, $y \epsilon B$ et $z \epsilon C$, et $A \times (B \times C)$ est l'ensemble de tous les éléments de la forme $(x, (y, z))$, où $x \epsilon A$, $y \epsilon B$ et $z \epsilon C$.

Quels que soient les ensembles A, B et C, on a

$$(A \pm B) \times C = (A \times C) \pm (B \times C),$$

$$A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C).$$

Le produit cartésien des ensembles est donc distributif par rapport à l'addition et à la soustraction, cependant les formules $A \times B \pm C = (A \pm C) \times (B \pm C)$ ne sont pas, en général, vraies.

Il résulte de la définition du produit cartésien que l'on a, quel que soit l'ensemble E,

$$E \times 0 = 0 \times E = 0.$$

D'autre part, il est évident que le produit cartésien de deux ensembles non vides est non vide.

On peut démontrer que, quels que soient les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4,

$$(E_1 E_2) \times (E_3 E_4) = (E_1 \times E_3)(E_2 \times E_4),$$

$$(E_1 \times E_2) - (E_3 \times E_4) = [(E_1 - E_3) \times E_2] + [E_1 \times (E_2 - E_4)]$$

et que, si les ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 ne sont pas vides,

$$[(E_1 \times E_2) = (E_3 \times E_4)] \equiv [(E_1 = E_3)(E_2 = E_4)].$$

Si les ensembles E_1, E_2, E_3, E_4, sont distincts entre eux et non vides, on a

$$[E_1 \times (E_2 - E_1) + E_2 \times (E_1 - E_2) = E_3 \times (E_4 - E_3) + E_4 \times (E_3 - E_4)] \equiv$$
$$\equiv [\{E_1, E_2\} = \{E_3, E_4\}].$$

On a aussi

$$(A_1 \times B_1) \subset (A \times B), \quad \text{si} \quad A_1 \subset A, \; B_1 \subset B.$$

EXERCICES. 1. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \times \sum_{l=1}^{\infty} B_l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (A_k \times B_l),$$

quels que soient les ensembles A_i et B_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

2. Démontrer que, si les ensembles A, B, C et D sont non vides, on a

$$(A\times B+B\times A=C\times D+D\times C)\equiv[\{A,B\}=\{C,D\}].$$

On voit que l'égalité $A\times B=B\times A$ ne peut être satisfaite par deux ensembles A et B non vides que dans le cas où $A=B$.

L'ensemble $E\times E$ est appelé *carré combinatoire* de l'ensemble E. On peut démontrer qu'il existe un ensemble non vide E, tel que $E\times E\subset E$ [1]).

Il n'existe aucun ensemble non vide E pour lequel on ait

$$(*)\qquad E\subset E\times E.$$

En effet, si E vérifiait $(*)$, alors, en désignant par a_0 un de ses éléments, on aurait d'après $(*)$: $a_0=(a_1,b_1)$, où $a_1\,\epsilon\,E$ et $b_1\,\epsilon\,E$. Mais alors $a_1=(a_2,b_2)$, où $a_2\,\epsilon\,E$, ce qui donne $a_2=(a_3,b_3)$, où $a_3\,\epsilon\,E$, et ainsi de suite. On aurait donc

$$a_n\,\epsilon\,a_{n-1}\quad\text{pour}\quad n=1,2,3,\ldots,$$

ce qui est impossible, comme nous le savons déjà (voir § 11) [2]).

Il en résulte qu'il n'existe aucune paire d'ensembles non vides A et B, pour lesquels on ait

$$(**)\qquad A\cdot B=A\times B.$$

En effet, si A et B vérifiaient $(**)$, on aurait (vu que $A\cdot B=B\cdot A$) $A\times B=B\times A$, ce qui pour des ensembles non vides est, comme nous le savons, équivalent à $A=B$. D'après $(**)$ on aurait $A=A\cdot A=A\times A$, donc $A\subset A\times A$. Or, nous avons vu que c'est impossible pour un ensemble non vide A.

Il est aussi facile à démontrer (ce que nous laissons au lecteur) que, si les ensembles A, B et C sont non vides, on a

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C).$$

Si A et B sont des ensembles linéaires situés respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, on peut traiter la paire ordonnée (x,y) comme point du plan ayant l'abscisse x et l'ordonnée y. $A\times B$ sera alors un ensemble plan, à savoir le produit (la partie commune) de l'ensemble de tous les points du plan situés sur les parallèles à l'axe des ordonnées qui passent par les points de l'axe des abscisses appartenant à l'ensemble A, et de l'ensemble de tous les points du plan situés sur les parallèles à l'axe des abscisses qui passent par les points de l'axe des ordonnées appartenant à B.

1) Pour avoir un tel ensemble, il suffit de prendre comme H un ensemble non vide quelconque et poser $E=H+(H\times H)+(H\times H\times H)+\ldots$.

2) Il est facile de voir, quelles modifications il faut faire dans ce raisonnement, si au lieu de la paire ordonnée (a,b) on considère l'ensemble $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

Soient maintenant A et B deux ensembles quelconques (pas nécessairement linéaires). Si $(a,b)\,\epsilon\,(A\times B)$, on appelle a *abscisse* et b *ordonnée* de l'élément (a,b). L'ensemble A est appelé aussi *axe des abscisses* et l'ensemble B *axe des ordonnées* du produit cartésien $A\times B$; l'élément a (respectivement b) est appelé *projection* de l'élément (a,b) sur l'axe des abscisses (respectivement des ordonnées). Pour $a\,\epsilon\,A$ (respectivement pour $b\,\epsilon\,B$), l'ensemble de tous les éléments (a,y) (respectivement (x,b)) de $A\times B$ est appelé *parallèle à l'axe des ordonnées* (respectivement *des abscisses*).

Si $S\subset A\times B$, on comprend par projection de l'ensemble S sur l'axe des abscisses (respectivement des ordonnées) l'ensemble des projections sur cet axe de tous les éléments de S. Si P est la projection sur l'axe des abscisses de l'ensemble $S\subset A\times B$, on a

$$\prod_x\Big((x\,\epsilon\,P)\equiv\sum_{y\,\epsilon\,B}[(x,y)\,\epsilon\,S]\Big).$$

Inversement: si la proposition que nous venons d'énoncer est vraie pour un ensemble P, cet ensemble est la projection de l'ensemble S sur l'axe des abscisses.