„Créée seulement à la fin du XIX^e siècle, la Théorie des Ensembles s'est rapidement développée dans de nombreuses directions. Ses éléments font désormais partie de la culture générale, au même titre que les éléments de l'Algèbre, de la Géométrie, du Calcul différentiel".

Emile Borel

(C. R. Paris t. 228, p. 1681, Séance du 30 Mai 1949)

CHAPITRE II

ENSEMBLES, ÉLÉMENTS, SOUS-ENSEMBLES

§ 7. Ensembles et leurs éléments. Étant donnés certains objets, nous pouvons en former des ensembles. Nous pouvons, par exemple, former les ensembles de lettres $\{a, b, c\}$, $\{c, d, f, g, h\}$, $\{b, f\}$.

Des nombres *naturels* (c'est-à-dire des entiers positifs), on peut former par exemple l'ensemble de tous les nombres naturels qui sont plus petits que 10, celui de tous les nombres impairs, celui de tous les nombres naturels compris entre 100 et 1000, l'ensemble de tous les nombres carrés etc.

Voici d'autres exemples d'ensembles: l'ensemble de tous les habitants d'une ville considérée; l'ensemble de tous les mots utilisés dans ce livre; l'ensemble de tous les nombres rationnels; l'ensemble de tous les points d'une droite; l'ensemble de toutes les sphères dans l'espace.

Les objets qui forment un ensemble sont dits ses *éléments*. Ainsi, par exemple, les éléments de l'ensemble $\{b, f\}$ sont les lettres b et f (et seulement ces lettres). Le même objet peut être à la fois élément de divers ensembles: le nombre 1 par exemple est l'élément de l'ensemble de tous les nombres naturels, en même temps qu'il est l'élément de l'ensemble de tous les nombres rationnels et l'élément de l'ensemble de tous les nombres réels positifs. Les ensembles peuvent donc avoir des éléments *communs*.

Pour qu'un ensemble soit défini, il faut et il suffit d'avoir fixé pour tout objet, s'il est, ou non, élément de cet ensemble.

Comme la plupart des mathématiciens (avec G. Cantor, R. Dedekind, P. Dirichlet et autres), nous n'exigeons cependant pas que nous sachions reconnaître, pour tout objet donné, s'il est, ou non, élément de l'ensemble considéré. L'ensemble, par exemple, de tous les nombres rationnels est bien défini, quoique nous ne sachions pas résoudre la question, si la constante d'Euler

$$C = \lim_{n=\infty} (1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n - \lg n)$$

est son élément ou si elle ne l'est pas.

Pareillement, on doit regarder comme bien défini l'ensemble formé des nombres 1 et 2, si le Grand Théorème de Fermat est vrai, et celui formé des nombres 3 et 4 dans le cas contraire [1]), quoique (au moins à l'heure actuelle) nous ne savons pas reconnaître, si le nombre 1 est élément de cet ensemble ou non. Néanmoins, le célèbre arithméticien Kronecker ne regardait comme bien définis que les ensembles satisfaisant à la condition que, pour tout objet, nous sachions reconnaître s'il en est, ou non, un élément [2]).

Pour exprimer que p est élément de l'ensemble E, on écrit

$$p \epsilon E.$$

On appelle ϵ *signe d'appartenance*. Le symbole $p \bar{\epsilon} E$ désigne que p n'appartient pas à l'ensemble E.

On a évidemment

$$(p \bar{\epsilon} E) \equiv (p \epsilon E)' \quad \text{et} \quad (p \bar{\epsilon} E)' \equiv (p \epsilon E).$$

L'ensemble des éléments $a, b, \ldots, l$ sera désigné par $\{a, b, \ldots, l\}$. Ainsi par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, on a $a \epsilon E$, $b \epsilon E$ et $c \epsilon E$, mais on a $d \bar{\epsilon} E$, si d n'est aucun des objets a, b, c.

[1]) Au lieu du Grand Théorème de Fermat, on peut prendre évidemment n'importe quel problème non résolu.

[2]) Cette attitude est typique aussi pour les intuitionistes. Cf. Th. Skolem, *Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik*, C. R. Congrès des Math. Scandinaves, 1929.

A l'aide de la notion d'ensemble et du signe d'appartenance, *l'identité* des objets peut être définie:

Deux objets a et b sont identiques dans ce cas (et dans ce cas seulement) où, pour tout ensemble E tel que $a \epsilon E$, on a aussi $b \epsilon E$ [1]).

§ 8. Egalité et inégalité des ensembles. Nous regardons deux ensembles comme égaux lorsque tout élément de l'un est élément de l'autre et réciproquement. En symbole: A et B étant des ensembles, on a

$$(A = B) \equiv \prod_p [(p \epsilon A) \equiv (p \epsilon B)].$$

Ainsi, à l'aide des symboles logiques, la relation d'égalité des ensembles peut être définie par celle d'appartenance. On a p. ex.

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{a, c, b\} = \{a, b, c, a\};$$

l'ensemble ne dépend donc ni de l'ordre ni des répétitions dans l'énumération de ses éléments.

Comme exemple de deux ensembles égaux, on peut considérer l'ensemble de tous les triangles equilatéraux et celui de tous les triangles dont les trois hauteurs sont égales. Deux ensembles égaux peuvent donc être regardés comme un même ensemble de deux manières différentes.

Si les ensembles A et B ne sont pas égaux, il existe (par définition) soit un élément de A qui n'est pas élément de B, soit un élément de B qui n'est pas élément de A (les deux alternatives étant possibles à la fois). L'inégalité des ensembles A et B sera désignée par

$$A \neq B.$$

Ainsi

$$(A \neq B) \equiv (A = B)',$$

$$(A \neq B) \equiv \sum_p ([(p \epsilon A)(p \bar{\epsilon} B)] + [(p \epsilon B)(p \bar{\epsilon} A)]).$$

Il est parfois difficile sinon impossible à l'état actuel de la science, bien que possible peut-être à l'avenir, de résoudre la question, si deux ensembles donnés, A et B, sont égaux ou ne le sont pas, même dans les cas où nous savons reconnaître pour tout objet donné, s'il est ou non, élément de A (élément de B). Voici quelques exemples.

[1]) Cf. A. Mostowski, Fund. Math. 32, p. 205, Déf. I; L. Couturat, *Les principes des Mathematiques*, Paris 1905 p. 24—25.

1. Soit A l'ensemble de tous les entiers $m \geq 1$; soit B l'ensemble de tous les entiers positifs n pour lesquels il existe au moins un nombre premier p, tel que $n < p \leq 2n$.

Il est évident que, abstraction faite de la longueur des calculs nécessaires, nous savons reconnaître, pour tout n, s'il est ou non élément de B. Cependant la démonstration de l'égalité $A = B$, dite postulat de Bertrand [1]) n'est pas facile. Elle ne fut donnée qu'en 1850 par Tchebycheff.

2. Soit A l'ensemble de tous les nombres pairs dépassant 2; soit B l'ensemble de tous les nombres pairs qui sont sommes de deux nombres premiers. En effectuant un nombre fini d'épreuves, on peut évidemment reconnaître pour tout nombre pair donné s'il est ou non élément de B. Cependant, à l'état actuel de la science, nous ne savons pas résoudre la question, si on a l'égalité $A = B$ (dite hypothèse de Goldbach), ou bien si $A \neq B$.

3. Soit $A = \{1, 2\}$, et soit B l'ensemble dont les éléments sont les nombres $1, 2$ et tous les nombres pairs $2n > 2$ jouissant de deux propriétés suivantes: 1° $2n$ n'est pas somme de deux nombres premiers, 2° tout nombre pair $2m$ tel que $2 < 2m < 2n$, est somme de deux nombres premiers. On voit sans peine que l'ensemble défini B admet tout au plus 3 éléments et qu'en affectuant un nombre fini d'épreuves nous savons reconnaître, si un nombre donné est ou non un élément de B. Cependant nous ne savons pas, si l'on a $A = B$ ou $A \neq B$, quoique A et B soient des ensembles finis; nous ne savons même si l'ensemble B a 2 ou 3 éléments.

4. Soit A l'ensemble de tous les entiers positifs n pour lesquels le nombre $2^n + 1$ est premier. Nous ne savons pas si l'on a $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ ou non.

5. Soit $m = 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ et $A = \{1, m\}$; soit B l'ensemble de tous les diviseurs naturels du nombre m. Evidemment, en effectuant un nombre fini moindre que m de divisions, on peut reconnaître, si l'on a $A = B$ ou $A \neq B$, mais pratiquement cette opération est si longue que nous ne savons pas jusqu'aujourd'hui résoudre la question, malgré que chacun des ensembles A et B soit formé d'un nombre fini (ne dépassant pas m) d'entiers positifs.

---

[1]) Voir, par exemple, J. A. Serret, *Cours d'Algèbre Supérieure*, volume II, 5e édit. Paris 1885, p. 226, où la démonstration du postulat de Bertrand occupe 28 pages.

§ 9. Ensemble formé d'un seul élément. D'après la notation adoptée, $\{a\}$ désigne l'ensemble formé d'un seul élément, à savoir qui est l'objet a. On pourrait dire que, là où il n'y a qu'un seul élément, il n'y a pas d'ensemble, mais, en effet, ce n'est qu'une question de terminologie. L'exigence que tout ensemble ait au moins 2 éléments, comporte certains inconvénients. Ainsi, par exemple, on ne pourrait parler de l'ensemble des racines d'une équation qu'en sachant qu'elle en a au moins deux. On ne pourrait non plus parler de l'ensemble de tous les nombres premiers pairs.

Une question plus importante qui s'impose est celle: peut-on regarder l'ensemble $\{a\}$ comme identique ou non à son unique élément a.

Si a n'est pas lui-même un ensemble, il n'est pas légitime d'écrire $\{a\} = a$, parce qu'à gauche on a un ensemble, tandis qu'à droite on a un objet qui ne l'est pas. Mais même dans le cas où a est un ensemble, l'égalité $\{a\} = a$ peut être fausse. En effet, d'après la définition du signe ϵ, on a pour tout a: $a \epsilon \{a\}$, ce qui donnerait pour $\{a\} = a$

$$a \epsilon a;$$

cependant il n'est pas vrai pour tout ensemble qu'il est élément de soi-même, puisque, p. ex. l'ensemble de tous les nombres entiers n'est pas un nombre. Pareillement un ensemble formé de deux lettres distinctes n'est pas une lettre. Il faut donc faire distinction entre l'ensemble $\{a\}$ formé d'un seul élément et cet élément lui-même [1]).

On peut même aller plus loin, en affirmant qu'en formant de certains objets un ensemble, on crée une chose nouvelle, distincte de chacun de ces objets. A ce point de vue aucun ensemble ne serait son propre élément; en symbole, on aurait:

$$\prod_p (p \overline{\epsilon} p).$$

De même, aucun ensemble ne serait élément d'aucun de ses éléments; en symbole: $(a \epsilon P) \rightarrow (P \overline{\epsilon} a)$.

La relation ϵ est donc *asymétrique:* qu'elle n'est ni symétrique ni réflexive, on le voit déjà du fait que $1 \epsilon \{1\}$, mais $\{1\} \overline{\epsilon} 1$ et $1 \overline{\epsilon} 1$.

---

[1]) W. Wilkosz, *Podstawy teoretyczne arytmetyk klasycznych*, Cracovie 1936, p. 22, écrit à ce sujet: „Depuis le temps de Peano et Frege on regarde tout au moins comme fort incommode, sinon impossible, *d'identifier* les termes $\{a\}$ et a. Cela détruirait la simplicité des lois formelles de la logique et de la mathématique".

Si E est un ensemble formé d'un seul élément, nous désignerons cet élément par ιE; on a donc pour tout objet x

$$\iota\{x\}=x.$$

Ainsi ιE n'est un objet déterminé que si E est un ensemble formé d'un seul élément: dans ce cas on a aussi $E=\{\iota E\}$.

Pour exprimer qu'un ensemble donné E a un seul élément, on peut se passer de la notion de nombre (un): il suffit de dire que l'ensemble E jouit de la propriété suivante: il existe un objet p tel que $p\epsilon E$ et que la formule $q\epsilon E$ entraîne $q=p$ (Cf. § 5 p. 28). En symbole:

$$\sum_p \Big((p\epsilon E)\prod_q [(q\epsilon E)\to(q=p)]\Big).$$

Nous avons ainsi une définition logique du nombre 1; de même, à l'aide de l'ensemble vide, on peut donner une définition logique du nombre 0 (Cf. § 10, p. 43).

Couturat attribue à ce fait „une importance capitale pour la démonstration de cette thèse que l'Arithmétique repose sur des fondements purement logiques; car cette thèse est bien près d'être démontrée quand on l'a établie pour les deux premiers nombres entiers, 0 et 1" [1]). Pareillement, la proposition „l'ensemble E a deux (et seulement deux) éléments" équivaut à la proposition

$$\sum_p\sum_q\Big[(p\epsilon E)(q\epsilon E)(p\neq q)\prod_r ((r\epsilon E)\to[(r=p)+(r=q)])\Big].$$

On a aussi les formules:

$$\prod_p\prod_q[(p\epsilon\{q\})\equiv(p=q)],\qquad \prod_p\prod_q[(\{p\}=\{q\})\equiv(p=q)].$$

D'après une remarque de N. Lusin [2]), un ensemble formé d'un seul élément (p. ex. d'un seul nombre réel) ne doit pas être regardé comme un être simple, puisque parfois cet élément peut être obtenu seulement par une construction très compliquée et exigeant une série d'opérations intermédiaires qui doivent être effectuées au préalable.

[1]) L. Couturat, *Les principes des Mathématiques*, Paris 1905, p. 26. On y trouve aussi (au renvoi) mention du fait que la définition logique de quelques premiers nombres naturels se trouve déjà chez Leibniz.

[2]) N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, p. 18.

Il y a des cas où on a défini un ensemble formé d'un seul nombre naturel, mais que l'on ne sait pas calculer, même approximativement. Soit p. ex. E l'ensemble formé du nombre 1, si le Grand théorème de Fermat est vrai, et, dans le cas contraire, du plus petit exposant n pour lequel le grand théorème de Fermat est faux. Quel que soit le nombre m, nous ne savons pas évaluer le nombre qui est l'élément unique de l'ensemble E avec une erreur plus petite que m.

Vu cet exemple, il faut fixer ce que c'est *définir* (effectivement) un nombre et ce que c'est le *calculer*.

Définir (effectivement) un objet, veut dire énoncer une propriété telle qu'il existe un et un seul objet ayant cette propriété; ou bien: nommer une fonction propositionnelle qui soit vraie pour un et seulement un objet [1]), ou encore: définir un ensemble tel que 1° l'objet en question en est un élément et 2° cet ensemble n'admet qu'un seul élément. Une telle propriété est dite propriété caractéristique de l'objet considéré. Un objet peut naturellement avoir plusieurs propriétés caractéristiques. Les différentes propriétés caractéristiques d'un même objet sont équivalentes, c'est-à-dire chacune d'elles implique chacune des autres.

Calculer un nombre naturel (supposé défini), veut dire l'écrire dans la numération décimale, abstraction faite des difficultés techniques et de la longueur du temps qui y est nécessaire. Ainsi p. ex. nous savons calculer le plus petit nombre premier dépassant 10^{1000}, de même que le nombre $2^{10^{10}}$, quoique ce dernier a quelques milliards de chiffres.

Au lieu de cette définition de la calculabilité d'un nombre naturel, M. A. Mostowski propose la suivante:

$P(x)$ étant une fonction propositionnelle qui est vraie pour un seul nombre naturel, nous disons que nous savons *calculer* ce nombre, lorsque nous savons transformer la fonction propositionnelle $P(x)$ en une fonction propositionnelle équivalente ayant la forme $x=1+1+\ldots+1$, c'est-à-dire où on a à droite le symbole formé des signes 1 liés par le signe $+$ [2]).

Si l'on adopte cette définition, il devient clair pourquoi la calculabilité dépend de la définition du nombre. D'après cette remar-

[1]) Cf. A. Tarski, Przegląd Filozoficzny 37 (1934), p. 441—442.

[2]) Cf. la définition du chiffre chez D. Hilbert et P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934, p. 21.

que de M. Mostowski, la calculabilité est donc une propriété non pas des *nombres* naturels, mais de leurs définitions. Il est aisé en effet de démontrer par l'induction que tout nombre naturel est calculable. Cependant, comme nous avons vu (p. 41), on connait des définitions des nombres naturels dont nous ne savons pas déduire (tout au moins actuellement) aucun moyen de calculer ces nombres. Telle est, par exemple, la définition suivante du nombre (naturel) x:

$$x = 1 + \overline{\lim_{n=\infty}} (\mathrm{E}\, 10^n \pi - 10\, \mathrm{E}\, 10^{n-1} \pi) \text{ [1]}.$$

Nous disons que nous savons calculer un entier préalablement défini, lorsque nous savons reconnaître s'il est ou s'il n'est pas égal à 0, et dans ce dernier cas, déterminer son signe ainsi qu'écrire sa valeur absolue dans la numération décimale.

Nous disons que nous savons calculer un nombre rationnel (défini au préalable), si nous savons le présenter sous la forme p/q avec p entier et q naturel que nous savons calculer tous les deux.

Nous disons que nous savons calculer le nombre réel x à $1/n$ près, si nous savons calculer un nombre rationnel r, tel que $|x-r| < 1/n$.

Nous disons que nous savons calculer le nombre réel x avec une approximation arbitraire si nous savons le calculer à $1/n$ près pour toutes les valeurs naturelles de n [2]).

On sait définir un nombre rationnel a que nous savons calculer avec une approximation arbitraire, mais, à l'état actuel de la science, nous ne connaissons aucune méthode permettant de décider si on a ou non $a=0$. Posons à ce but $a=0$, si tout nombre pair dépassant 2 est somme de deux nombres premiers; sinon, soit a l'inverse du plus petit nombre pair dépassant 2 qui n'est pas somme de deux nombres premiers. Pour calculer le nombre a à $1/2n$ près, il suffit d'examiner si chacun des nombres $4, 6, 8, \ldots, 2n$ est somme de deux nombres premiers (ce qu'on peut toujours achever dans un temps fini, abstraction faite de la longueur des calculs nécessaires). Si c'est le cas, posons $r=0$, sinon, posons $r=1/2k$ où $2k$ est le plus petit nombre de notre suite qui n'est pas somme de deux nombres premiers. Nous pouvons donc calculer le nombre r; comme on voit sans peine, on a toujours $0 \leqslant a-r < 1/2n$ [1]) [2]).

[1]) $\mathrm{E}t$ désigne l'entier de t (le plus grand qui ne dépasse pas t).

[2]) Une autre notion de calculabilité des nombres réels (traités comme des suites de nombres naturels) a été introduite par A. Church et a fait l'objet de plusieurs travaux de Church et de ses élèves; voir Hilbert et Bernays, loc. cit. vol. II, Supplément II.

§ 10. L'ensemble vide. Il arrive souvent que l'on considère l'ensemble E de tous les objets satisfaisant à une condition C, sans savoir d'avance s'il existe au moins un objet qui lui satisfasse, l'ensemble, par exemple, de toutes les racines d'une équation donnée). S'il n'existe aucun objet qui satisfaisse à la condition C, nous disons que l'ensemble E est *vide* et nous écrivons

$$E = 0 \text{ [3]}).$$

Ainsi, par exemple, l'ensemble de tous les nombres rationnels x satisfaisant à l'équation $x^2=2$ est vide.

Parfois nous ne savons pas (dans l'état actuel de la science) comment résoudre la question si un ensemble E est vide ou non. C'est par exemple le cas de l'ensemble de tous les exposants pour lesquels le Grand Théorème de Fermat est faux, ou le cas de tous les nombres naturels n pour lesquels 2^{n+16} est un nombre premier.

On a évidemment pour tout ensemble E:

$$(E=0) \equiv \prod_p (p \,\overline{\epsilon}\, E) \quad \text{et} \quad (E \neq 0) \equiv \sum_p (p \,\epsilon\, E).$$

L'ensemble formé d'un seul élément qui est un ensemble vide, n'est pas vide lui-même.

Il résulte de la définition d'égalité des ensembles que, si les ensembles E_1 et E_2 sont vides, on a $E_1 = E_2$. On peut donc dire qu'il existe un seul ensemble vide.

Il s'ensuit que, si l'ensemble E est non vide, il existe au moins un élément de l'ensemble E. Le plus souvent on démontre qu'un ensemble donné E est non vide, en définissant un certain objet p et en prouvant ensuite que cet objet p est un élément de l'ensemble E.

[1]) D'après E. Borel (Jour. de Math., Ser. 6, vol. 8, 1912, p. 164, renvoi 1) il serait fort intéressant de pouvoir donner un exemple de deux nombres, dont les développements décimaux sont égaux *pratiquement* mais dont nous ne savons pas s'ils soient égaux ou non. Les nombres a et 0 présentent un exemple de deux tels nombres.

[2]) Un exemple (plus compliqué) du nombre réel dont nous ne savons pas décider s'il est nul, positif ou négatif, a été donné par L. E. J. Brouwer dans Jour. f. reine u. angewandte Math., 154, p. 3.

[3]) Dans le cas douteux il faut préciser si 0 désigne l'ensemble vide ou le nombre 0. Pour éviter ce doute certains auteurs désignent l'ensemble vide par Λ.

Une telle démonstration est dite *effective* [1]). Or, ce n'est pas la méthode unique de démontrer qu'un ensemble est non vide; on peut le démontrer aussi en réduisant à l'absurde l'hypothèse que l'ensemble considéré est vide (démonstration *apagogique*).

L'existence des éléments d'un ensemble peut être aussi une conséquence d'axiomes acceptés ou bien des théorèmes déjà établis. Ces démonstrations d'existence ne donnent pas, en général, des moyens nécessaires pour nommer un élément ou pour le construire [2]).

Si nous pouvons définir un objet individuel jouissant d'une propriété donnée P, nous disons que nous savons donner un *exemple effectif* d'un objet ayant la propriété P. La démonstration d'existence des éléments d'un ensemble donné n'exige pas que l'on donne un exemple effectif d'un élément de cet ensemble.

Donc, si nous savons seulement qu'un ensemble est non vide, nous n'avons pas droit d'affirmer que nous sachions nommer univoquement un de ces éléments ou que nous sachions *choisir* un élément de cet ensemble. On peut définir des ensembles non vides dont nous ne savons nommer actuellement aucun élément.

Voici un exemple. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions réelles $f(x)$ d'une variable réelle x, qui ne sont pas de la forme ax (où a est une constante) et qui satisfont, pour x et y réels, à l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Sans trancher la question si l'ensemble F est vide ou non, posons $E=F$, si $F\neq 0$, et désignons par E l'ensemble formé d'une seule fonction $f(x)=x$, si $F=0$. L'ensemble E est évidemment non vide, mais nous ne savons pas, à l'état actuel de la science, définir effectivement aucun élément de l'ensemble E (ce qui n'exclut pas la possibilité de le faire à l'avenir) [3]).

[1]) La notion d'effectivité est une notion logique appartenant à la *métamathématique*. Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 2, p. 112; B. Knaster et C. Kuratowski, ibid., p. 125; A. Lindenbaum, Ann. Soc. Pol. Math. 10, p. 118; C. Kuratowski, *Topologie* I, Monogr. Mat. 3, 1933 p. 109.

[2]) On pourrait citer comme exemple le raisonnement connu d'Euclide que si $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des nombres premiers donnés (en nombre fini), il existe un nombre premier distinct de chacun d'eux. Mais ce raisonnement ne nous fournit directement aucun moyen de construire un tel nombre (il serait plus facile de le *nommer*, p. ex. comme le plus petit nombre premier distinct de chacun des nombres de notre suite). On pourrait cependant donner facilement une méthode de construire un tel nombre: il suffirait de calculer (par des divisions successives) le plus petit diviseur >1 du nombre $p_1 p_2 \dots p_n + 1$.

[3]) Si l'on voulait affirmer que la fonction $f(x)=x$ est élément de E, on devrait démontrer au préalable que l'ensemble F est vide, ce que l'on ne sait pas faire (et il résulte de l'axiome du choix que $F\neq 0$).

On pourrait aussi (ce qui serait d'ailleurs beaucoup plus difficile) définir un ensemble non vide des nombres réels, dans lequel nous ne savons aujourd'hui désigner effectivement aucun élément [1]).

Du fait qu'il existe des ensembles non vides dans lesquels nous ne savons choisir (au moins actuellement) aucun élément, résulte à plus forte raison que nous ne savons pas définir une loi d'après laquelle à tout ensemble non vide E correspondrait un élément déterminé $\varepsilon(E)$ de cet ensemble [2]).

§ 11. Ensembles d'ensembles. On peut former des ensembles d'objets qui sont eux-mêmes des ensembles. Des objets a, b, c, d, e, par exemple, nous pouvons former deux ensembles $P=\{a,b\}$ et $Q=\{c,d,e\}$ et en prenant ces deux ensembles comme éléments, nous pouvons construire un nouvel ensemble $E=\{P,Q\}=\{\{a,b\},\ \{c,d,e\}\}$.

L'ensemble E a donc deux éléments P et Q. Il faut le distinguer de l'ensemble $T=\{a,b,c,d,e\}$ que l'on obtient en réunissant en un ensemble tous les éléments de P et tous les éléments de Q. L'ensemble T a cinq éléments: a, b, c, d, e, aucun d'eux n'est l'élément de E. Or, a est un élément de l'élément P de E. Donc: *un élément de l'élément d'un ensemble peut ne pas être élément de cet ensemble.* La relation ϵ n'est donc pas transitive: les formules $a \epsilon P$ et $P \epsilon E$ n'entraînent pas la formule $a \epsilon E$.

Dans des cas particuliers, un élément de l'élément d'un ensemble peut être élément de ce dernier: a par exemple est un élément de l'ensemble $\{a,b\}$ et aussi de l'ensemble $\{a,\{a,b\}\}$ dont $\{a,b\}$ est un élément.

Il existe des ensembles E tels que pour tous deux de ses éléments un d'eux est élément de l'autre (et la relation ϵ est transitive pour les éléments de E). Par exemple,

$$E=\{0,\{0\},\{0,\{0\}\},\ \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}\}\ ^{3)}.$$

Si A et B sont deux ensembles égaux (dans le sens de la définition d'égalité des ensembles du nº 8) et si $A \epsilon P$, on a aussi

[1]) Voir p. ex. W. Sierpiński, Fund. Math. 18, p. 191. (Le problème de donner un exemple d'un tel ensemble a été posé pour la première fois par E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2 édition, Paris 1918, p. 161).

[2]) L'hypothèse qu'une telle loi existe, équivaut à *l'axiome du choix*, qui ne fut pas admis par tous les mathématiciens (Cf. la fin du § 25).

[3]) De tels ensembles étaient utilisés par E. Zermelo, Fund. Math. 16, p. 31–32 (§ 2).

$B \epsilon P$ [1]) (puisque nous considérons deux ensembles égaux comme un seul ensemble). Dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles, ce fait est considéré comme axiome I *(Axiome relationnel, Axiom der Bestimmtheit)* [2]).

Le fait que, si A et B sont deux ensembles distincts, il existe toujours un ensemble $\{A, B\}$ dont les éléments sont les ensembles A et B et qui n'a pas d'autres éléments, est considéré dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles comme axiome II *(Axiome des paires)* [3]).

L'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ (où a et b sont deux éléments quelconques qui peuvent être égaux entre eux) [4]) a une importance particulière.

Pour que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}, \tag{1}$$

il faut et il suffit que

$$a = c \quad \text{et} \quad b = c. \tag{2}$$

En effet, il résulte de (1) que $\{c\} \epsilon \{\{a\}, \{a, b\}\}$, donc que $\{c\} = \{a\}$, ou bien $\{c\} = \{a, b\}$. Cette dernière égalité n'est possible que si $a = b$ (puisque l'ensemble $\{c\}$ n'a qu'un seul élément). On a donc toujours $\{c\} = \{a\}$, d'où $c = a$.

Dans le cas où $a \neq b$, la formule (1) donne $\{a, b\} = \{c, d\}$ (puisque $\{a, b\} \epsilon \{\{c\}, \{c, d\}\}$, la formule $\{a, b\} = \{c\}$ étant impossible car maintenant $a \neq b$), donc, du fait que $c = a$ il s'ensuit que $\{a, b\} = \{a, d\}$, ce qui donne (vu que $a \neq b$) $b = d$.

Dans le cas où $a = b$, la formule (1) donne $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, d'où $\{c, d\} = \{a\}$, et $c = d = a = b$, donc encore $b = d$.

Dans tous les cas, la formule (1) entraîne les formules (2). D'autre part, les formules (2) entraînent évidemment la formule (1). Les formules (1) et (2) sont donc équivalentes.

---

[1]) Cf. la définition d'identité du nº 7.

[2]) Voir E. Zermelo, Math. Annalen, 65, p. 263, Ax. I.; A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen über die Grundlagung der Mengenlehre*, Leipzig—Berlin 1927, p. 67. Zermelo exprime d'ailleurs cet axiome non pas pour les ensembles A et B, mais pour des objets quelconques appartenant au domaine considéré.

[3]) E. Zermelo, loc. cit., p. 263, Axiom II (der Elementarmengen), A. Fraenkel, loc. cit., p. 70, Axiom der Paarung.

[4]) Cf. C. Kuratowski, Fund. Math. 2, p. 171; aussi N. Wiener, Proc. Cambridge Math. Soc. 17 (1912—1914), p. 387—390.

Posons, pour abréger,

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

On a donc

$$[(a, b) = (c, d)] \equiv [(a = c)(b = d)].$$

En particulier, si $a \neq b$, on a $(a, b) \neq (b, a)$. L'ensemble (a, b) (qu'il faut distinguer de l'ensemble $\{a, b\}$) dépend donc de l'ordre des éléments a et b. On le nomme *paire ordonnée* d'éléments a et b. La notion de paire ordonnée se réduit ainsi à la notion d'ensemble.

On peut définir, à l'aide des paires ordonnées, des triades ordonnés: ce sont les ensembles $(a_1, (a_2, a_3))$; des quadruples ordonnés: ce sont les ensembles $(a_1, (a_2, (a_3, a_4)))$; et, généralement, des suites (ordonnées) d'un nombre fini quelconque de termes [1]).

On pourrait nommer *individus* (Urelemente) les objets qui ne sont pas des ensembles, ensembles de 1[er] ordre — les ensembles dont les éléments sont des individus, ensembles de deuxième ordre — les ensembles dont les éléments sont soit des individus, soit des ensembles de 1[er] ordre, et ainsi de suite. Donc, p. ex., si a, b, c, d, e sont des individus, $\{a, b, c\}$ est un ensemble de 1[er] ordre, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\{a, \{b, c\}\}$ et $\{\{a\}\}$ sont des ensembles de deuxième ordre, $\{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$ et $\{\{a, b\}, \{c, \{d, e\}\}\}$ sont des ensembles de troisième ordre, etc. On pourrait aussi considérer des ensembles d'ordres infinis, l'ensemble $\{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \ldots\}$ par exemple.

L'existence de l'ensemble

$$Z_0 = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \ldots\}$$

(où 0 désigne l'ensemble vide) est regardé dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles comme axiome VII *(Axiome de l'infini)*. On l'exprime:

Il existe au moins un ensemble Z jouissant de deux propriétés suivantes: l'ensemble vide est élément de Z et, si p est un élément quelconque de Z, l'ensemble $\{p\}$ est aussi élément de Z [2]).

Quant à l'ensemble Z_0, excepté la notation, il se confond avec l'ensemble de tous les nombres naturels [3]).

Au lieu de l'axiome VII, Lindenbaum et Mostowski introduisent l'axiome suivant:

---

[1]) Cf. P. Bernays, Jour. of Symbolic Logic, 2 (1937), p. 71.

[2]) E. Zermelo, loc. cit., p. 266—267, A. Fraenkel, loc. cit., p. 99.

[3]) Cf. A. Fraenkel, loc. cit., p. 100.

Il existe une suite infinie d'objets distincts qui ne sont pas des ensembles [1]).

Dans l'axiome de l'infini, on emploie *l'infini actuel* qu'il faut distinguer de l'infini potentiel que l'on rencontre dans le Calcul infinitésimal [2]). Leibniz, un des créateurs de ce Calcul, adopte l'infini actuel. Il a écrit [3]): „Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur".

L'opinion contraire est celle des finitistes qui n'admettent pas l'infini actuel. „Il n'y a pas d'infini actuel — écrit H. Poincaré [4]), ce que nous appelons infini, c'est uniquement la possibilité de créer sans cesse des nouveaux objets, quelque nombreux que soient les objets déjà créés". Le même auteur dit: „Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire: tous les nombres entiers qu'on a inventés, et tous ceux que l'on pourra inventer un jour ...et c'est ce «que l'on pourra» qui est l'infini" [5]).

D'après Zénon, élève de Parménide, chaque division change l'unité en pluralité et, de plus, si l'on commence une fois à diviser, cette opération ne peut pas être interrompue, mais elle se répétera à l'infini, ainsi que toute entité divisée sera composée d'un nombre infiniment *grand* de parties infiniment *petites*. Zénon en conclut qu'elle sera à la fois *grande* et *petite*, et que, puisque rien ne peut être à la fois grand et petit, il n'existe ni division ni pluralité [6]).

Les finitistes n'admettent aucun ensemble infini, et en particulier ils n'admettent l'ensemble de tous les nombres naturels. On peut construire d'après eux un ensemble fini quelconque de nombres naturels,

[1]) C. R. Soc. Sc. et Lettres, Varsovie Cl. III, 31 (1938) p. 29—31. A la page 29 au lieu de „une suite infinie" on lit „un ensemble au moins dénombrable" et, à la page 31 — „ensemble infini".

[2]) Remarquons que déjà vers 1270 Petrus Julianus Hispanus distinguait entre l'infini en acte, *in facto*, et l'infini en devenir, *in fieri* (Cf. P. Sergescu, *Le développement de l'idée de l'infini mathématique au XIV-e siècle*. Conférence faite au Palais de la Découverte le 6 décembre 1947, p. 8).

[3]) *Opera omnia*, Studi. Ludov. Dutens, vol. II, I partie, p. 243.

[4]) Acta Mathematica 32 (1909), p. 156.

[5]) Cf. A. A. Fraenkel, Scripta Math. 13 (1947), p. 20.

[6]) Je le cite d'après A. Krokiewicz, Sprawozdania Polskiej Akademii Umiejętności (Comptes rendus polonais de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, 48 (1947), pp. 344—345).

On peut concevoir *chaque* nombre naturel, ce qui d'après eux, ne permet pas d'affirmer que tous les nombres naturels existent à la fois. En acceptant ce point de vue, on ne peut parler non plus de l'ensemble de *tous* les points d'un segment. On peut seulement construire des ensembles formés d'un nombre fini de points.

Il est à remarquer que L. Couturat a consacré tout un livre à la notion d'infini [1]).

M. P. Sergesco écrit ainsi: [2]) „En général l'antiquité hellénique n'admettait pas l'infini. On trouve pourtant des considérations philosophiques, qui impliquent la notion d'infini. Voici, par exemple, un texte significatif d'Anaxagore († en 428 av. J.-C.): «Par rapport au petit, il n'y a pas de minimum, mais il y a toujours un plus petit, car il n'est pas possible que l'être soit anéanti par la division. De même, par rapport au grand, il y a toujours un plus grand, et il est égal au petit en pluralité, et en elle-même chaque chose est à la fois grande et petite» (Tannery, *Pour l'Histoire de la science hellène*, p. 312).

Aristote (384 — 322 av. J.-C.) n'admettait pas des grandeurs infinies, mais par contre, étant contre la théorie atomique de Leucippe, il acceptait la divisibilité à l'infini. Or, les deux infinis se font pendant, ce qu'Aristote n'a pas saisi".

On pourrait nommer un ensemble *homogène* de deuxième ordre, si chacun de ses éléments était un ensemble de premier ordre. Par induction les ensembles dont les éléments sont des ensembles homogènes de n — 1-ème ordre pourraient être nommés ensembles homogènes de n-tième ordre. Certains auteurs, par exemple Russell, n'admettent que les ensembles homogènes [3]).

En ce qui concerne la structure des ensembles, on peut aussi introduire la notion de leur *isomorphisme* (Mirimanoff, Sierpiński [4])).

En ce qui concerne la construction des ensembles, on se pose la question quels peuvent être les éléments qui ne sont pas des ensembles (non-ensembles, éléments primitifs, individus, Urelemente)

[1]) L. Couturat, *De l'infini mathématique*, Paris 1896, XXIV + 668 p.

[2]) *Les recherches sur l'infini mathématique jusqu'à l'établissement de l'Analyse infinitésimale*, Actualités Scientifiques et industrielles No 1083, Paris 1949, p. 3.

[3]) B. Russell, *Mathematical Logic as based on the theory of types*, Amer. Jour. of Math. 30 (1908), pp. 222—262.

[4]) Fund. Math. 3, pp. 50—51.

et dont on peut former les ensembles. Ici Zermelo et Fraenkel représentent deux opinions extrêmes. Le premier ne fait aucune restriction quant aux éléments des ensembles en laissant libre leur nature et leur variété[1]). Le second ne considère que les ensembles que l'on peut obtenir de l'ensemble vide, en se servant de l'opération de former un ensemble d'ensembles qui sont déjà construits, (par exemple des ensembles

$$\{0\},\ \{\{0\}\},\ \{\{\{0\}\}\},\ \{\{0\},\ \{\{0\}\},\ \{\{\{0\}\}\},\ \ldots\},\ \{\{\{0\},\ \{\{0\}\},\ \{\{\{0\}\}\},\ \ldots\}\}\quad \text{etc.})$$

On pourrait dire aussi que, pour Fraenkel, l'unique élément primitif est l'ensemble vide. Un tel domaine d'ensembles selon lui a la vertu d'être délimité mathématiquement avec plus de précision, et semble suffire dans tous les cas, même dans ceux de l'application. D'ailleurs, d'après Fraenkel, le point de vue de Zermelo (éléments primitifs quelconques) est aussi admissible[2]).

En admettant la possibilité de construire les ensembles non homogènes, nous adopterons ici l'opinion que les ensembles peuvent être formés seulement d'éléments (qui sont ou qui ne sont pas des ensembles) préalablement construits. De ce point de vue aucun ensemble n'est ni son propre élément, ni un élément de son élément. (cf. § 9).

L'ensemble de tous les ensembles U (appelé aussi *ensemble universel*), qui est évidemment son propre élément, ne satisfait pas à cette condition. Or, les propriétés de l'ensemble U impliquent des contradictions. Nous les nommons *antinomies*.

Soit par exemple l'ensemble R formé de tous les ensembles — et seulement de ces ensembles — qui appartiennent à U et qui ne sont pas ses propres éléments. Demandons si l'ensemble R est ou non son propre élément. Le premier cas est évidemment impossible, vu la définition de l'ensemble R. Or, si l'ensemble R n'est pas son propre élément, il résulte de sa définition qu'il est un élément de R, ce qui est absurde.

Il est aussi facile de prouver cette contradiction en employant le calcul logique. En effet, d'après la définition de l'ensemble R on a pour $X \epsilon U$:

$$(X \epsilon R) \equiv (X \overline{\epsilon} X),$$

[1]) E. Zermelo, *Fund. Math.* **16**, p. 29—47.

[2]) A. Fraenkel. Enseignement Math. **34**, p. 41; cf. aussi A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3e édition, Berlin 1928, p. 308.

d'où, en particulier, pour $X = R$:

$$(R \epsilon R) \equiv (R \overline{\epsilon} R).$$

Mais (voir § 7)

$$(R \overline{\epsilon} R) \equiv (R \epsilon R)',$$

donc

$$(R \epsilon R) \equiv (R \epsilon R)',$$

ce qui forme une contradiction (une proposition fausse) puisque le côté droit est la négation du côté gauche.

C'est la célèbre antinomie de Russell. Elle a suscité un grand nombre de travaux[1]).

L'explication de l'antinomie est de notre point de vue très simple. Les ensembles peuvent être formés d'objets qui ne sont pas des ensembles ou d'ensembles qui sont déjà formés uniquement par étapes. L'ensemble universel U, de même que l'ensemble R, évidemment ne satisfont pas à cette condition.

Le principe d'homogénéité des types, proposé par Russell (et Ramsay), avait aussi pour but d'éviter les antinomies. Le principe de la construction graduelle d'ensembles trouve sa forme précise dans l'axiomatique de Zermelo. Ce principe est lié étroitement à la théorie des types, dont il affaiblit les suppositions en admettant des ensembles non homogènes. Mais en même temps ce principe élargit cette théorie en admettant des types infinis[2]).

Il est à remarquer que les créateurs de la théorie des ensembles ne connaissaient pas le problème de types et que la découverte des antinomies a provoqué entre eux une émotion considérable (Frege, *Grundgesetze der Arithmetik,* II, Nachtrag, p. 253). Récemment on essayait d'affaiblir encore plus les suppositions de la théorie des types (Quine), ou de créer une théorie d'ensembles qui n'emploierait pas la théorie des types (Curry), mais on a trouvé des contradictions dans des systèmes ainsi construits.

[1]) D. Mirimanoff, *Les antinomies de Russell* etc., Enseignement Math. **19** (1917), p. 39; cf. ibid. **21** (1920), p. 32; K. Menger, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. **37** (1928), p. 298; Th. Skolem, *Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik* (C. R. Congr. Math. Scandinaves, Oslo 1929); A. Fraenkel et J. Bar-Hillel, *Le problème des antinomies et ses développements récents,* Revue de Métaphysique et de Morale, 1938, p. 226; E. Zermelo, Fund. Math. **16**, p. 47; voir aussi A. Fraenkel *Einleitung in die Mengenlehre,* 3 édition, Berlin 1928, § 13: *Die Antinomien der Mengenlehre,* pp. 209—220, où l'on trouve la littérature ultérieure (p. 218—219).

[2]) Voir A. Tarski, *Wahrheitsbegriff in formalisierten Sprachen,* Studia Philosophica **1**, Lwów 1936, p. 261—405, „Nachwort".

Le problème suivant nous rappelle l'antinomie de Russell. Une bibliothèque peut contenir, entre autres livres, aussi des catalogues. Dans ces catalogues peuvent figurer entre autres aussi des catalogues. Il peut être des catalogues qui ne figurent pas dans eux-mêmes. Peut-on trouver dans une bibliothèque un catalogue dans lequel figurent tous ces derniers? [1]).

Le paradoxe du barbier ressemble aussi à l'antinomie de Russell. Le barbier du village rase tous les habitants du village qui ne se rasent pas aux-mêmes. La question se pose, si ce barbier se rase lui-même?

Les antinomies du catalogue, du barbier, ainsi que celle, bien connue, du menteur sont des *antinomies* dites *de sémantique*.

En parlant ici d'antinomies, rappelons celle du *plus petit nombre naturel qui ne peut pas être défini par aucune phrase contenant moins de vingt mots*. L'ensemble E de tous les nombres naturels qui peuvent être définis par des phrases contenant moins de vingt mots, est évidemment fini. Il existe donc des nombres naturels qui n'appartiennent pas à E et parmi eux il y a un qui est le plus petit. Or, ce nombre est défini par la phrase en italique qui a moins de 20 mots!

On trouve l'explication de cette antinomie en envisageant le fait que les définitions doivent être construites par étapes en utilisant exclusivement des objets préalablement définis. On ne peut pas parler de *tous* les nombres naturels qui peuvent être définis au moyen de moins de 20 mots [2]).

Une autre antinomie du même genre est celle de Richard [3]), dont le raisonnement suivant présente une modification [4]).

L'ensemble de toutes les fonctions propositionnelles $P(x)$ d'une seule variable naturelle (c'est-à-dire dépendant d'une seule variable x qui appartient à l'ensemble de tous les nombres naturels) peut être rangé dans une suite infinie

(1) $$P_1(x),\quad P_2(x),\quad P_3(x), \ldots,$$

[1]) Th. Skolem, loc. cit., p. 9.
[2]) Cf. K. Grelling, *Mengenlehre*. Leipzig et Berlin 1924, p. 43.
[3]) Acta Mathematica **30** (1906), p. 295.
[4]) Cf. A. Mostowski, Kwartalnik Filozoficzny **16** (1946), p. 227 (en polonais).

par exemple en les ordonnant d'après le nombre de lettres nécessaires pour les écrire et, dans le cas du même nombre de lettres, d'après l'ordre lexicographique.

Désignons par $P(x)$ la fonction propositionnelle suivante d'une variable naturelle x:

(2) „La proposition $P_x(x)$ est fausse".

$P(x)$, en tant que fonction propositionnelle d'une variable naturelle, est un des termes de la suite (1), soit le n-ième. On a donc l'équivalence

(3) $$P(x) \equiv P_n(x), \text{ pour tout } x \text{ naturel.}$$

En particulier pour $x=n$:

(4) $$P(n) \equiv P_n(n).$$

Distinguons deux cas.

1^0 La proposition $P(n)$ est vraie. $P(x)$ désignant la phrase (2), on conclut que la proposition $P_n(n)$ est fausse. Donc $P(n)\equiv 1$ et $P_n(n)\equiv 0$, contrairement à (4).

2^0 La proposition $P(n)$ est fausse. D'après (4) on conclut que la proposition $P_n(n)$ est fausse, donc que (2) est vrai pour $x=n$, c'est-à-dire que $P(n)$ est vrai. On a aussi une contradiction.

D. Mirimanoff considère dans un de ses travaux [1]) l'ensemble E défini comme il suit:

$$E=\{a_1, b_1, E_1\},\quad E_1=\{a_2, b_2, E_2\},\quad E_2=\{a_3, b_3, E_3\}, \ldots,$$
$$E_n=\{a_{n+1},\ b_{n+1},\ E_{n+1}\}, \ldots$$

On a donc

$$E=\{a_1, b_1, \{a_2, b_2, \{a_3, b_3, \{\ldots\ \ldots\}\}\}\}.$$

Il donne l'interprétation suivante de l'ensemble E. La couverture d'un livre pour enfants est ornée d'une image E représentant deux enfants a_1 et b_1 qui regardent le livre même ou plutôt son image, c'est-à-dire l'image E_1 de l'image E. Sur cette image E_1 on aperçoit (ou on devine plutôt) les deux enfants en miniature a_2 et b_2, et l'image du livre E_2, déformés par la perspective. Tout cela théoriquement devrait continuer à l'infini.

[1]) Enseignement Math. **19** (1917), p. 212—213.

Or, nous ne pouvons pas obtenir un tel ensemble E en partant des objets qui ne sont pas des ensembles et en construisant une suite des ensembles contenant uniquement des éléments qui ne sont pas des ensembles ou bien des ensembles qui sont déjà construits. On peut notamment démontrer que, si l'on prend un élément d'un ensemble quelconque, ensuite un élément quelconque de cet élément, et ainsi de suite, alors, après un nombre fini de ces opérations on aboutit nécessairement à un élément qui n'est pas un ensemble [1]). (En d'autres termes, E étant un ensemble, il n'existe aucune suite infinie $e_1, e_2, e_3, \ldots$, telle que $e_1 \epsilon E$ et $e_{n+1} \epsilon e_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$). Evidemment l'ensemble de Mirimanoff ne satisfait pas à cette condition, puisqu'on a $E_{n+1} \epsilon E_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

Du fait que l'ensemble de tous les ensembles conduit à une antinomie, il résulte, à plus forte raison, que l'ensemble de tous les objets conduit à une antinomie. Il n'existe donc aucun ensemble qui contiendrait chaque objet. Il en résulte que, E étant un ensemble donné, il existe toujours un objet p, tel que $p \,\bar{\epsilon}\, E$ (du point de vue dont nous avons parlé au § 9, on a $E \,\bar{\epsilon}\, E$, quel que soit l'ensemble E).

§ 12. Sous-ensembles. Si tout élément de l'ensemble A est en même temps élément de l'ensemble B, on dit que A est un *sous-ensemble* (ou une partie) de l'ensemble B et on écrit:

$$A \subset B, \quad \text{ou} \quad B \supset A,$$

ce qu'on lit: „A est contenu dans B" ou „B contient A" [2]). Dans ce cas on dit aussi que B est sur-ensemble de A (le mot *partie* est ici employé dans un sens plus large que dans la langue courante, notamment il n'exclut pas l'égalité). On a donc, par définition du signe $\subset$:

$$(1) \qquad (A \subset B) \equiv \prod_x [(x \epsilon A) \rightarrow (x \epsilon B)].$$

[1]) La démonstration est basée sur la théorie des nombres transfinis. Dans la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo cette propriété constitue son „Axiom der Fundierung" (voir E. Zermelo, Fund. Math. 16, p. 31). Elle peut être aussi exprimée comme il suit: tout ensemble non vide E a au moins un élément dont aucun élément de E n'est pas un élément.

[2]) On dit parfois que „l'ensemble E contient l'élément p", ou que „l'élément p est contenu dans l'ensemble E" au lieu de dire $p \epsilon E$; l'emploi de cette expression peut provoquer des malentendus dans le cas où un ensemble a comme éléments des ensembles. On pourrait alors penser que $p \subset E$.

On nomme *inclusion* la relation entre deux ensembles exprimée par le signe $\subset$. C'est une relation *transitive*, c'est-à-dire que les formules

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset C$$

entraînent toujours la formule

$$A \subset C.$$

On a aussi, quel que soit l'ensemble A,

$$A \subset A,$$

c'est-à-dire que la relation $\subset$ est *réflexive*.

D'après (1) et la définition de l'égalité des ensembles, on conclut que, quels que soient les ensembles A et B,

$$[(A \subset B)(B \subset A)] \equiv (A = B);$$

c'est-à-dire que deux ensembles dont chacun est contenu dans l'autre sont égaux, et inversement. Il s'ensuit que, si les ensembles A et B sont distincts, l'une au plus des formules

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A$$

est vraie. La relation $\subset$ n'est donc pas symétrique.

En vertu de la formule (1) la relation d'inclusion se réduit (à l'aide des symboles logiques) à la relation d'appartenance. Mais celle-ci peut être aussi réduite à la relation d'inclusion, puisqu'on a, pour tout ensemble A,

$$\prod_x [(x \epsilon A) \equiv (\{x\} \subset A)].$$

Si A est un sous-ensemble de l'ensemble B, mais pas inversement, on dit que A est une ***partie aliquote*** ou un vrai sous-ensemble de B. Pour que l'ensemble A soit partie aliquote de l'ensemble B, il faut et il suffit qu'on ait

$$A \subset B \quad \text{et} \quad A \neq B \text{ [1])}.$$

L'ensemble $\{a, b, c\}$ par exemple a, sauf l'ensemble vide, six parties aliquotes:

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}.$$

[1]) Quelques auteurs (Hausdorff par exemple) écrivent $A \subset B$ seulement dans le cas où A est une partie aliquote de B, en écrivant $A \subseteq B$ dans le cas où A est un sous-ensemble de B (distinct ou non distinct de B).

L'ensemble $\{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$ a comme parties aliquotes, sauf l'ensemble vide, les ensembles

$$\{a\}, \quad \{\{a\}\}, \quad \{\{\{a\}\}\}, \quad \{a, \{a\}\}, \quad \{a, \{\{a\}\}\}, \quad \{\{a\}, \{\{a\}\}\}.$$

Comme on le voit facilement, un ensemble formé de n éléments a $2^n - 2$ parties aliquotes non vides. L'ensemble vide n'a aucune partie aliquote.

EXERCICES. 1. Soit E un ensemble fini, formé de n éléments distincts. Combien possède-t-il de sous-ensembles distincts, chacun formé de k éléments (où k est un nombre naturel $\leqslant n$)?

Réponse: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3.\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sous-ensembles.

2. k et $l > k$ étant deux nombres naturels, soit E un ensemble fini qui a tant de sous-ensembles distincts formés de k éléments, que de sous-ensembles distincts formés de l éléments. Combien d'éléments a l'ensemble E?

Réponse: $k+l$ éléments. La démonstration résulte de la propriété des coefficients $\binom{n}{k}$, d'après laquelle on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{l}$ seulement si $k = l$ ou bien $k + l = n$.

3. Trouver une famille F de sous-ensembles dont chacun a 3 éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, telle que tout sous-ensemble de E qui a 2 éléments soit contenu dans un ensemble (et seulement un) de la famille F.

Réponse: C'est la famille formée de 7 ensembles

$$\{1,2,3\}, \quad \{1,4,5\}, \quad \{1,6,7\}, \quad \{2,4,6\}, \quad \{2,5,7\}, \quad \{3,4,7\}, \quad \{3,5,6\}.$$

Il existe d'ailleurs bien d'autres solutions.

On peut demander pour quels n naturels peut-on trouver une famille F de sous-ensembles dont chacun a 3 éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, telle que tout sous-ensemble de E qui a 2 éléments soit contenu dans un (et seulement un) ensemble de la famille F. On peut démontrer que, pour qu'il existe une solution, il faut et il suffit que n soit un nombre de la forme $6k+1$ ou bien $6k+3$. La démonstration de la nécessité de cette condition est facile, celle de sa suffisance est beaucoup plus difficile; voir E. Netto, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Leipzig 1901, p. 206—211. Il est encore à remarquer que le problème analogue est résoluble pour l'ensemble de tous les nombres naturels, $E = \{1, 2, 3, \dots\}$ (ce qu'on démontre sans difficulté) et même pour les ensembles infinis E quelconques (dont la démonstration utilisant l'axiome du choix est plus difficile) [1]).

4. Démontrer que, dans toute suite finie d'ensembles distincts, il existe au moins un qui ne contient aucun autre d'entre eux.

Démonstration. Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ une suite finie d'ensembles distincts. Admettons que chacun de ces ensembles contient au moins un autre d'entre eux, qui est alors évidemment son vrai sous-ensemble. On peut ainsi obtenir une suite de $n+1$ ensembles de notre suite, $H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_{n+1}$, telle que, pour tout nombre $k = 1, 2, \dots, n$, l'ensemble H_{k+1} est un vrai sous-ensemble de H_k. Les ensembles $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$ seraient donc distincts, ce qui est impossible, étant donné qu'ils sont les termes de la suite $E_1, E_2, \dots, E_n$.

En utilisant la notion de partie aliquote on peut exprimer l'axiome de l'infini comme il suit:

Il existe un ensemble E d'ensembles, tel que, si $X \epsilon E$, il existe un $Y \epsilon E$, tel que X est une partie aliquote de Y [2]).

Il résulte de la définition du sous-ensemble et de celle de l'ensemble vide, que ce dernier est un sous-ensemble de chaque ensemble. En effet, si $A = 0$, la proposition $x \epsilon A$ est fausse, quel que soit l'objet x. Donc, quel que soit x et quel que soit l'ensemble B, on a l'implication $(x \epsilon A) \rightarrow (x \epsilon B)$. Le côté droit de la formule (1) est donc une proposition vraie, ce qui démontre, d'après (1), que $A \subset B$, donc que $0 \subset B$.

D'autre part, on voit aisément que seul l'ensemble vide a la propriété d'être sous-ensemble de chaque ensemble.

Un sous-ensemble d'un ensemble peut être à la fois élément de cet ensemble; on a, par exemple, $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$ et $\{a\} \epsilon \{a, \{a\}\}$.

De même pour $E = \{a, b, \{a, b\}\}$ on a $\{a, b\} \subset E$ et $\{a, b\} \epsilon E$.

Il arrive que dans un ensemble non vide chaque élément forme sa partie aliquote, l'ensemble $Z = \{\Lambda\}$ par exemple, ou l'ensemble $T = \{\Lambda, \{\Lambda\}\}$, où Λ désigne l'ensemble vide.

[1]) Voir W. Sierpiński, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 32—33, 1940—1945, Classe III, p. 13—16.

[2]) Cf. K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of the set theory*, Annals of Mathematical Studies N° 3, Princeton (1940), p. 5.

Les ensembles jouissant de la propriété que chacun de ses éléments est son sous-ensemble joue un rôle important dans les constructions métamathématiques [1]). Or, comme nous le démontrerons plus tard, il n'existe aucun ensemble non vide $\neq Z$, dont toute partie aliquote soit son élément.

Désignons par $U(E)$, pour tout ensemble E, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Le théorème: pour chaque ensemble E, il existe l'ensemble $U(E)$ — est considéré dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles comme *axiome IV* [2]).

Soit E un ensemble donné et soit $P(x)$ une fonction propositionnelle. Nous désignerons par

$$\mathop{E}\limits_{x \in E}[P(x)] \quad \text{ou} \quad \mathop{E}\limits_{x}[x \in E,\ P(x)]$$

l'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble E, pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie. On a évidemment pour tout ensemble E et pour toute fonction propositionnelle $P(x)$:

$$\mathop{E}\limits_{x \in E}[P(x)] \subset E,$$

$$\prod_{y}\left(\left(y \in \mathop{E}\limits_{x \in E}[P(x)]\right) \equiv [(y \in E)\,.\,P(y)]\right),$$

et

$$\mathop{E}\limits_{x \in E}[x \in E] = E.$$

Il existe, pour tout ensemble E et pour toute fonction propositionnelle $P(x)$, l'ensemble de tous les éléments et seulement de ces éléments x de E, pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie. Ce

[1]) Voir A Mostowski, Fund. Math. 33, p. 188 renvoi [6]); cf. A. Tarski, Fund. Math. 30 p. 69 et suivantes; K. Gödel Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 25 p. 220 et suiv., J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 27 (1928), Robinson, Journ. Symbolic Logic 2 (1937), P. Bernays ibid. P. Bernays propose d'appeler les ensembles jouissant de cette propriété *transitives.*

[2]) Voir E. Zermelo, Math. Ann. 65, p. 265 *(Axiom der Potenzmenge)*; cf. A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen,* p. 73. Il est à remarquer que R. Baire écrivait en 1905: „... de ce qu'un ensemble est donné, il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données. A plus forte raison je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble". Bull. Soc. Math. de France 33, p. 264.

théorème est considéré dans l'exposé axiomatique de la théorie des ensembles comme *axiome V* [1]).

Or, nous n'allons pas jusqu'à affirmer que pour toute fonction propositionnelle $P(x)$ (ou pour toute propriété P) il existe l'ensemble de tous les objets vérifiant cette fonction (ou possédant la propriété P) [2]). Cette affirmation nous conduirait tout de suite à l'antinomie de Russell; il suffirait de prendre comme $P(x)$ la proposition: „x est un ensemble qui n'est pas son propre élément".

§ 13. Le plus petit (le plus grand) ensemble à propriété donnée. Nous appellerons *le plus petit* (respectivement *le plus grand*) ensemble à propriété donnée P [3]) un ensemble E jouissant de la propriété P et tel que tout ensemble à propriété P contient l'ensemble E (respectivement est contenu dans E). Ainsi, par exemple, $\{1\}$ est le plus petit ensemble auquel appartient le nombre 1, et en même temps le plus grand ensemble contenu dans chacun des deux ensembles $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$. L'ensemble vide est le plus petit, et en même temps le plus grand ensemble contenu dans chaque ensemble. Il n'existe pas pour toute propriété P le plus petit (respectivement le plus grand) ensemble à propriété P. Il n'existe pas, par exemple, le plus petit ensemble infini formé de nombres naturels, quoiqu'il existe un, qui est le plus grand. Mais il n'existe ni le plus petit ni le plus grand ensemble fini non vide, formé de nombres naturels.

On voit que, si pour une propriété donnée P il existe le plus petit respectivement le plus grand ensemble à propriété P, il est unique (puisque, s'ils étaient deux, A et B, on aurait, vu la définition du plus petit respectivement du plus grand ensemble à propriété donnée, $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$). Pour une propriété donnée P,

[1]) Voir E. Zermelo, Math. Ann. 65, p. 265 (*Axiom der Aussonderung,* Ax. III); cf. A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen,* p. 75. Il existe beaucoup de travaux ayant pour but de préciser la notion de fonction propositionnelle (respectivement la notion de propriété de x) dont il s'agit dans cet axiome (ainsi, par exemple, E. Zermelo, Fund. Math. 14, p. 339, Th. Skolem, ibid. 15 p. 337, A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*). Divers auteurs comprennent cet axiome différemment.

[2]) Suivant Peano, quelques auteurs désignent cet ensemble par $x \ni P(x)$. M. B. Levi ne partage pas l'opinion que l'opération $\ni$ implique l'antinomie; voir *Rend. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere* 66 (1933), p. 250 (10).

[3]) Au lieu de considérer les ensembles à une propriété donnée P, on pourrait considérer les ensembles formant une famille donnée F d'ensembles.

il peut exister le plus petit ensemble à propriété P, sans qu'il existe le plus grand (ou inversement). Ils peuvent exister aussi tous les deux, sans être égaux. Le lecteur trouvera des exemples correspondants.

Nous dirons qu'un ensemble E à propriété P est *irréductible* (respectivement *saturé*) par rapport à la propriété P, s'il n'existe aucune partie aliquote de E (respectivement aucun ensemble dont E soit une partie aliquote) jouissant de la propriété P [1]).

Il peut arriver que, pour une propriété P donnée, il n'existe aucun ensemble irréductible (respectivement saturé) par rapport à P. Il peut arriver aussi qu'il existe plusieurs tels ensembles. Ainsi, par exemple, il n'existe aucun ensemble qui soit irréductible par rapport à la propriété d'être un ensemble infini de nombres naturels, ni aucun ensemble qui soit saturé par rapport à la propriété d'être un ensemble fini de nombres naturels. Mais chaque ensemble formé de cinq éléments est, par rapport à la propriété d'avoir cinq éléments, irréductible et en même temps saturé.

Le plus petit (respectivement le plus grand) ensemble à propriété donnée est évidemment irréductible (respectivement saturé) par rapport à cette propriété, mais pas inversement (puisqu'il n'existe, par exemple, ni le plus petit ni le plus grand ensemble formé de cinq éléments).

Il existe des propriétés P telles que tout ensemble qui les possède est, par rapport à elles, irréductible (et alors, comme on le voit facilement, aussi saturé, et inversement). Telle est, par exemple, la propriété d'ensemble d'avoir cinq éléments.

EXERCICES. 1. Donner l'exemple d'une propriété P d'ensembles, telle qu'il existe un (et seulement un) ensemble irréductible par rapport à la propriété P, mais qu'il n'existe aucun ensemble qui soit le plus petit à propriété P.

Réponse: La propriété d'être ou l'ensemble $\{1,2\}$, ou bien un ensemble infini de nombres naturels.

2. Démontrer que, pour tout ensemble linéaire borné, contenant plus d'un point, il existe un plus petit segment de droite contenant cet ensemble.

[1]) Ces notions ont été introduites par S. Janiszewski dans sa thèse (Journal de l'Ecole Polytechnique 1912, chapitre I). Cf. A. Tarski, Fund. Math. 6, p. 48—49.

3. Un ensemble de points H situé dans le plan (ou dans l'espace) est dit convexe, s'il jouit de la propriété suivante: „si p et q sont deux points distincts de H, chaque point du segment (rectiligne) joignant p et q appartient à H.

Démontrer que, E étant un ensemble plan quelconque (contenant plus d'un point), il existe le plus petit ensemble plan convexe contenant E.

Démonstration. On prouve facilement que l'ensemble de tous les points s du plan, pour lesquels il existe au moins un segment rectiligne contenant s et dont les extrémités sont des points de E, vérifie notre condition.

4. Donner l'exemple d'un ensemble plan borné E, tel qu'il n'existe pas le plus petit cercle (l'intérieur du cercle et sa circonférence) contenant E.

Réponse. Chaque segment de droite, ainsi que chaque triangle ou rectangle.

Remarque. On peut cependant démontrer que, E étant un ensemble plan borné quelconque (contenant plus d'un point), il existe dans le plan un (et seulement un) cercle K contenant E et dont le rayon est plus petit que le rayon de tout autre cercle contenant E. Un tel cercle est évidemment un ensemble irréductible par rapport à la propriété d'être un cercle contenant l'ensemble E (mais non pas par rapport à la propriété d'être un ensemble contenant E), mais il peut exister plusieurs cercles irréductibles par rapport à cette propriété.

Si, en particulier, E est le segment $-1 \leqslant x \leqslant 1$ situé sur l'axe d'abscisses, le cercle K correspondant est, comme on le démontre facilement, le cercle $x^2+y^2 \leqslant 1$. Ce cercle n'est pas cependant contenu dans tout cercle contenant notre segment; K n'est pas contenu dans le cercle $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 2$ par exemple. Ce dernier n'est pas irréductible par rapport à la propriété d'être un cercle contenant E, puisqu'il contient le cercle $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{5}{4}$. Or, ce dernier cercle est irréductible par rapport à la propriété d'être un cercle contenant l'ensemble E. Pareillement le cercle $x+(y-1)^2 \leqslant 2$.