CHAPITRE I

ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

§ 1. L'équivalence des propositions. Soient A et B deux propositions quelconques. Nous écrirons

$$(1) \qquad A = B$$

dans le cas où elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses (et seulement dans ce cas). Deux propositions A et B satisfaisant à la formule (1) sont dites *équivalentes* et le symbole logique $=$ s'appelle *signe d'équivalence*.

Si l'on a la formule (1), on a évidemment aussi la formule

$$B = A;$$

la relation d'équivalence (entre propositions) est donc *symétrique*.

Si $A = B$ et $B = C$, on a évidemment $A = C$; la relation d'équivalence (entre propositions) est donc *transitive*.

Désignons par 1 une proposition vraie (p. ex. la proposition $2 \times 2 = 4$) et par 0 une proposition fausse (p. ex. la proposition $2 \times 2 = 5$).

La formule

$$P = 1$$

exprime donc que la proposition P est vraie, et la formule

$$P = 0$$

exprime que la proposition P est fausse.

1 et 0 sont dits *valeurs logiques.*

Quelle que soit la proposition P, on a soit $P = 1$, soit $P = 0$.

Voici ce qu'écrit au sujet de ce principe le logicien polonais J a n Ł u k a s i e w i c z dans son mémoire *La logique à deux valeurs* [1]):

„Tous les systèmes de la logique que l'on connait — la logique d'A r i s t o t e autant que celle de Stoïques, la logique formelle traditionnelle autant que la logique symbolique contemporaine, se basent sur le principe selon lequel toute proposition est soit vraie, soit fausse. J'appelle ce principe, qui est la base de toute la logique qu'on connait jusqu'à présent, principe *de deux valeurs* et j'appelle *logique à deux valeurs* la logique qui admet l'existence de *deux* et *seulement* de deux valeurs logiques: vrai et faux".

Quant à l'opinion des ainsi dits intuitionistes sur ce point, voir plus loin, § 4. On a aussi considéré des logiques à plusieurs valeurs.

Si A et B sont des propositions, la formule (1) est aussi une proposition qui peut être vraie ou fausse; on peut donc avoir

$$\text{soit} \quad (A \equiv B) \equiv 1, \quad \text{soit} \quad (A \equiv B) \equiv 0,$$

ce qui dépend des propositions quel'on substitue au lieu de A et de B. Ainsi on a par exemple

$$(1 \equiv 1) \equiv 1, \quad (1 \equiv 0) \equiv 0, \quad (0 \equiv 1) \equiv 0, \quad (0 \equiv 0) \equiv 1. \tag{2}$$

Quelle que soit la proposition P, *on a* $P \equiv P$, c'est-à-dire que la relation $\equiv$ est *reflexive.* On a donc $(P \equiv P) \equiv 1$.

On a aussi

$$(P \equiv 1) \equiv P \qquad \textit{(principe d'assertion).}$$

Quelles que soient les propositions A, B et C, on a

$$[A \equiv (B \equiv C)] \equiv [(A \equiv B) \equiv C], \tag{3}$$

ce qui exprime que la relation $\equiv$ est associative [2]).

[1]) Paru en polonais dans le journal Przegląd Filozoficzny **23** (1920), p. 4.

[2]) A. T a r s k i (Fund. Math. **4**, p. 199, renvoi [1])) attribue cette formule au professeur J. Ł u k a s i e w i c z. Elle peut être regardée comme un cas particulier d'un théorème de S. L e ś n i e w s k i (Fund. Math. **14**, p. 26, 6)) d'après lequel toute formule formée des lettres désignant des propositions et des signes $\equiv$ (et qui ne contient en outre que les paranthèses) est vraie, quelles que soient ces propositions, dans le cas où chaque lettre (désignant une proposition) y figure un nombre paire de fois et dans ce cas seulement.

Pour établir cette formule, il est à remarquer avant tout que la vérité ou la fausseté d'une formule logique ne dépend pas du sens des propositions dont elle est formée, mais seulement de leur valeur logique. Pour vérifier une formule logique il suffit donc d'examiner successivement les cas que l'on obtient en substituant à des propositions qu'elle contient les valeurs logiques 0 et 1 dans toutes les combinaisons possibles (dont le nombre est, comme on voit sans peine, 2^n, si la formule examinée est formée de n propositions). Naturellement, si une proposition figure dans la formule plusieurs fois, elle doit être remplacée partout par la même valeur logique.

Ainsi, pour vérifier la formule (3), nous avons à examiner 8 formules suivantes:

$$\begin{array}{ll}
[(1 \equiv 1) \equiv 1] \equiv [1 \equiv (1 \equiv 1)], & [(1 \equiv 1) \equiv 0] \equiv [1 \equiv (1 \equiv 0)], \\
[(1 \equiv 0) \equiv 1] \equiv [1 \equiv (0 \equiv 1)], & [(1 \equiv 0) \equiv 0] \equiv [1 \equiv (0 \equiv 0)], \\
[(0 \equiv 1) \equiv 1] \equiv [0 \equiv (1 \equiv 1)], & [(0 \equiv 1) \equiv 0] \equiv [0 \equiv (1 \equiv 0)], \\
[(0 \equiv 0) \equiv 1] \equiv [0 \equiv (0 \equiv 1)], & [(0 \equiv 0) \equiv 0] \equiv [0 \equiv (0 \equiv 0)].
\end{array}$$

Or, elles se déduisent aisément des formules (2). P. ex. pour vérifier la deuxième des huit formules en question, on peut y remplacer, en vertu de (2), $1 \equiv 1$ par 1 et $1 \equiv 0$ par 0, d'où $[(1 \equiv 1) \equiv 0] \equiv (1 \equiv 0) \equiv 0$ et pareillement $[1 \equiv (1 \equiv 0)] \equiv (1 \equiv 0) \equiv 0$. La formule $[(1 \equiv 1) \equiv 0] \equiv [1 \equiv (1 \equiv 0)]$ est donc vraie.

Nous laissons au lecteur à titre d'exercice de démontrer que, quelles que soient les propositions A, B, C et D, on a les formules:

$$[(A \equiv B) \equiv A] \equiv B, \quad (A \equiv B) \equiv [(A \equiv C) \equiv (C \equiv B)],$$
$$[A \equiv (B \equiv C)] \equiv [B \equiv (A \equiv C)],$$
$$[(A \equiv B) \equiv (C \equiv D)] \equiv [(A \equiv C) \equiv (B \equiv D)].$$

§ 2. L'implication. Pour exprimer que ou bien la proposition A est fausse ou bien la proposition B est vraie (ce qui n'exclue pas le cas où la proposition A est fausse en même temps que la proposition B est vraie), nous écrirons [1])

$$A \to B.$$

[1]) Certains auteurs emploient avec R u s s e l l et W h i t e h e a d le signe $\supset$ au lieu de $\to$; voir p. ex. L. C o u t u r a t, *Les principes des Mathématiques,* Paris 1905, p. 9; J. H e r b r a n d, *Recherches sur la théorie de la démonstration,* Travaux de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Cl. III, No 33, Varsovie 1930, p. 11 et suiv. J. Ł u k a s i e w i c z écrit *CAB* au lieu de $A \to B$. Voir p. e. C. R. de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Cl. III, **23** (1930), p. 55.

On lit cette formule: „A implique B" et l'on appelle le signe $\rightarrow$ *signe d'implication.*

Conformément à la définition de ce signe, on a donc pour toute proposition P (vraie ou fausse)

$$P \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow P,$$

d'où, en particulier

$$1 \rightarrow 1, \quad 0 \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow 0.$$

Il résulte immédiatement de la définition de l'implication que la formule $A \rightarrow B$ ne peut pas avoir lieu, si la proposition A est vraie et la proposition B est fausse. Donc: une proposition vraie n'implique que les propositions vraies (et elle les implique toutes). On a donc $(1 \rightarrow 0) \equiv 0$ et, quelle que soit la proposition Q:

$$(P \equiv 1) \rightarrow (Q \rightarrow P).$$

Une proposition fausse implique toutes les propositions, quelles qu'elles soient (vraies ou fausses). On a donc, quelle que soit la proposition Q:

$$(P \equiv 0) \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

On a aussi pour chaque proposition P:

$$(1 \rightarrow P) \equiv P, \quad (0 \rightarrow P) \equiv 1, \quad (P \rightarrow 1) \equiv 1, \quad (P \rightarrow 0) \equiv (P \equiv 0)$$

et, quelles que soient les propositions A, B et C:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)]$$

$$(A \rightarrow B) \equiv [(A \equiv 1) \rightarrow (B \equiv 1)], \quad (A \rightarrow B) \equiv [(B \equiv 0) \rightarrow (A \equiv 0)],$$

$$(A \rightarrow B) \equiv [A \rightarrow (A \equiv B)], \quad (A \rightarrow B) \equiv [(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)],$$

$$[(A \rightarrow B) \equiv (B \rightarrow A)] \equiv (A \equiv B).$$

Quelles que soient les propositions A et B, on a *le principe de réduction de* P e i r c e:

$$[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \equiv A.$$

Le sens et la valeur logique d'une formule formée des propositions et du signe $\rightarrow$ dépend de la dislocation des paranthèses. P. ex. si A, B et C sont des propositions fausses, la proposition

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

est vraie, et la proposition

$$(A \rightarrow B) \rightarrow C$$

est fausse [1]).

Pareillement, si A est fausse et si B et C sont vraies, la proposition $(A \equiv B) \rightarrow C$ est vraie et la proposition $A \equiv (B \rightarrow C)$ est fausse.

Or, on a toujours

$$[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$$

et même, quelles que soient les propositions A, B, C et D:

$$[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [D \rightarrow (B \rightarrow C)],$$

puisque

$$[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C).$$

Il est à remarquer qu'on a la *seconde forme de distributivité* de l'implication par rapport à elle-même, c. à d. on a toujours

$$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \equiv [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)].$$

Par contre, la première forme de distributivité de l'implication par rapport à elle-même est en défaut, puisqu'on a pour $A \equiv 1$, $B \equiv 1$, $C \equiv 0$:

$$[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \equiv 0, \quad [(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)] \equiv 1.$$

Cependant on a toujours

$$[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)].$$

On a aussi la *loi de commutation*

$$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \equiv [B \rightarrow (A \rightarrow C)]$$

et la formule

$$A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B]$$

qui peut être regardée comme la formule correspondant au syllogisme *modus ponens* des Stoïques [2]).

---

[1]) Quant à la possibilité d'écrire les formules logiques sans paranthèses, voir § 4.

[2]) Cf. J. Ł u k a s i e w i c z, *Elementy logiki matematycznej*, cours lithographié (en polonais), Varsovie 1929, p. 75.

Notons encore la formule

$$[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$$

(connue déjà vers l'an 200 de notre ère) qui figure comme axiome dans la théorie de la déduction de Hilbert [1]).

EXERCICES. Démontrer les formules suivantes:

$$P \to (Q \to P), \quad [(P \to Q) \to P] \to [Q \to (Q \to P)], \quad P \to [Q \to (P \equiv Q)]$$

$$[(P \to Q) \to (Q \to P)] \equiv (Q \to P), \quad [P \equiv (Q \to P)] \equiv [(P \to 0) \to Q] \equiv [(Q \to 0) \to P],$$

$$\{[(P \equiv Q) \equiv P] \to [(P \to Q) \to P]\} \equiv (Q \to P),$$

$$[S \to (Q \to R)] \to \{(P \to Q) \to [S \to (P \to R)]\}.$$

$$[(P \to Q) \to R] \to [(R \to P) \to (S \to P)]\ ^{2}),$$

$$[(P \to Q) \to (R \to S)] \to \{T \to [(S \to P) \to (R \to P)]\}\ ^{3})$$

quelles que soient les propositions P, Q, R, S, T.

Ajoutons que nous n'attribuons à la relation d'implication aucune propriété outre celles qui se laissent déduire de sa définition adoptée plus haut. Dans le language courant, on emploie le terme „impliquer" dans un sens un peu différent. C'est ainsi qu'en disant p. ex. qu'une proposition A implique une proposition B, nous voulons parfois exprimer que B résulte de A ou encore que B peut être plus ou moins aisément démontrée si l'on admet A. Cependant en vertu de la définition adoptée de l'implication, n'importe quelle proposition (vraie ou fausse) implique toute proposition vraie, et toute proposition fausse implique n'importe quelle proposition (vraie ou fausse). Mais une proposition vraie n'implique aucune proposition fausse. Nous voyons en particulier qu'il ne faut non plus attribuer à l'implication une signification causale.

---

[1]) Ibid. p. 77, thèse 30. Cf. aussi J. Łukasiewicz, *Zur Geschichte der Aussagenlogik*, Erkentniss 5 (1934), p. 118.

[2]) J. Łukasiewicz, *W obronie logistyki*, Studia Gnesnensia **15**, p. 11, Poznań 1937 (en polonais). C'est la plus courte thèse impliquant toutes les thèses implicatives vraies. Cf. aussi la note du même auteur dans Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, **52** (1948), p. 25—33.

[3]) J. Łukasiewicz, Księga pamiątkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, Lwów 1931, p. 17 (en polonais).

Voici encore ce qu'écrit M. A. Mostowski [1]): „Il est convenu de lire la formule $P \to Q$: *si P, alors Q*. Ce n'est pas juste puisque le sens de l'expression *si..., alors...* est dans le language quotidien différent. En énonçant dans le language quotidien la phrase „si P, alors Q", nous voulons habituellement exprimer ce fait: il existe entre les propositions P et Q une dépendance, d'après laquelle la proposition Q peut être déduite de la proposition P (d'après les règles de la pensée généralement admises, définitions etc.)... Il serait mieux de lire $P \to Q$ autrement, par exemple Q, sinon, alors non-P. L'habitude de lire $P \to Q$ comme *si P, alors Q* est cependant si fort enracinée qu'il serait difficile de la combattre systématiquement".

M. A. Tarski appelle conséquence des propositions données toute proposition qu'on peut obtenir en appliquant une ou plusieurs fois certaines opérations envisagées dans les ainsi dites *règles de la déduction* qui permettent de transformes les propositions les unes dans les autres.

§ 3. Produit logique et somme logique. A et B étant deux propositions, on écrit $A \,.\, B$ ou simplement AB, au lieu de „A et B" et $A + B$ au lieu de „A *ou* B" (ce qui n'exclue pas la possibilité d'avoir simultanément A et B).

La proposition AB s'appelle *produit logique* (ou *conjonction*) et la proposition $A + B$ est dite *somme logique* (ou *alternative*) des propositions A et B. L'affirmation du produit logique de deux (ou plusieurs) propositions revient donc à l'affirmation simultanée de ces propositions, et leur somme logique revient à l'affirmation qu'au moins une d'elles est vraie [2]).

Ainsi on a $AB = 1$ dans le cas où $A = 1$ et $B = 1$ et seulement dans ce cas, et on a $A + B = 0$ dans le cas où $A = 0$ et $B = 0$ et seulement dans ce cas.

---

[1]) A. Mostowski, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, t. **18**, Warszawa—Wrocław 1948, p. 11.

[2]) Dans leur livre *Grundzüge der theoretischen Logik*, 2 Auflage, Berlin 1938, D. Hilbert et W. Ackermann appellent „somme logique" ce que nous appelons *produit logique* et inversement; ils écrivent $P \,\&\, Q$ au lieu de PQ et $P \vee Q$ au lieu de $P + Q$. A cause de certaines analogies entre l'algèbre des propositions et celle d'ensembles, nous ne les suivrons pas.

Or, on a $AB \equiv 0$, si l'une au moins des propositions A et B est fausse, et $A+B \equiv 1$ si l'une au moins des propositions A et B est vraie. On a donc $(1.1) \equiv 1$, $(0.1) \equiv (1.0) \equiv (0.0) \equiv 0$, $(1+1) \equiv (1+0) \equiv (0+1) \equiv 1$, $(0+0) \equiv 0$.

Pour toute proposition P, on a la *loi de tautologie*

$$(P+P) \equiv P \quad \text{et} \quad (P.P) \equiv P,$$

de même que les formules

$$(P.1) \equiv P, \quad (P.0) \equiv 0, \quad (P+1) \equiv 1, \quad (P+0) \equiv P.$$

On voit sans peine que la multiplication et l'addition logiques sont commutatives et associatives, c'est-à-dire que l'on a

$$(AB) \equiv (BA), \quad (A+B) \equiv (B+A), \quad [(AB)C] \equiv [A(BC)],$$
$$[(A+B)+C] \equiv [A+(B+C)],$$

quelles que soient les propositions A, B et C.

En outre, *la multiplication logique est distributive par rapport à la sommation logique et la sommation logique est distributive par rapport à la multiplication logique*, c'est-à-dire que l'on a

$$[(A+B)C] \equiv [AC+BC], \quad (AB+C) \equiv [(A+C)(B+C)],$$

quelles que soient les propositions A, B et C. Le lecteur vérifiera aisément ces formules.

Bien entendu, la valeur logique d'une somme logique ou d'un produit logique ne change pas lorsqu'on y remplace un terme (ou plusieurs) par des propositions équivalentes à ce terme.

La notion de somme logique se réduit à celle d'implication par la formule [1])

(4) $$(A+B) \equiv [(A \to B) \to B].$$

Pour l'établir, on n'a qu'à verifier quatre formules:

$$(1+1) \equiv [(1 \to 1) \to 1], \quad (1+0) \equiv [(1 \to 0) \to 0],$$
$$(0+1) \equiv [(0 \to 1) \to 1], \quad (0+0) \equiv [(0 \to 0) \to 0].$$

[1]) Cf. J. Łukasiewicz, *Logika dwuwartościowa*, Przegląd Filozoficzny **23** (1920), p. 15 (en polonais).

Or, vu que $(1+1) \equiv 1$ et $(1 \to 1) \equiv 1$, on constate facilement que la première de ces formules est vraie. D'après $(1+0) \equiv 1$, $(1 \to 0) \equiv 0$ et $(0 \to 0) \equiv 1$, on voit que la deuxième formule est vraie. Comme $(0+1) \equiv 1$ et $(0 \to 1) \equiv 1$, on trouve qu'il en est de même de la troisième formule, et enfin on vérifie sans peine la quatrième.

On a aussi les formules:

$$[A(A \to B)] \to B,$$
$$(A+B) \equiv [(A \equiv B) \to B] \equiv [A \equiv (B \to A)]$$

et

$$(AB) \equiv \{[A \to (B \equiv 0)] \equiv 0\},$$

quelles que soient les propositions A et B.

D'autre part, on a

$$(A \to B) \equiv [(A+B) \equiv B] \equiv [(AB) \equiv A].$$

EXERCICE. Exprimer la somme logique $A+B+C$ en n'employant que le signe d'implication.

Solution:

$$(A+B+C) \equiv ((((A \to B) \to B) \to C) \to C).$$

Quelles que soient les propositions A et B, on a — ce qu'on vérifie sans peine —

$$(A \equiv B) \equiv [(A \to B)(B \to A)] \;^{1})$$

et, quelles que soient les propositions A, B et C, on a la formule dite *principe du syllogisme hypothétique* [2]):

(5) $$[(A \to B)(B \to C)] \to (A \to C).$$

Or, J. Łukasiewicz appelle loi du syllogisme hypothétique la formule [3])

(5-a) $$(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$$

qui s'obtient de la formule (5) en vertu de l'équivalence

$$(PQ \to R) \equiv [P \to (Q \to R)].$$

[1]) Cette formule justifie l'emploi par plusieurs auteurs du symbole $\rightleftarrows$ au lieu de $\equiv$.

[2]) Qui est à distinguer du *principe du syllogisme catégorique:* „Si tout a est b et tout b est c, tout a est c". Cf. L. Couturat, *L'algèbre de la logique*, Paris 1905, p. 8.

[3]) J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, p. 28.

On peut exprimer ainsi le principe du syllogisme hypothétique en se servant seulement du symbole logique $\to$.

La formule (5) montre que *la relation d'implication est transitive*. Or, aussi la relation d'équivalence est transitive, puisqu'on a

$$[(A\equiv B)\,(B\equiv C)]\to(A\equiv C)$$

quelles que soient les propositions A, B et C.

On a encore, quelles que soient les propositions P_1, P_2 et P_3:

$$[(P_1\equiv P_2)\,(P_2\equiv P_3)]\equiv[(P_1\to P_2)\,(P_2\to P_3)\,(P_3\to P_1)],$$

ce que nous pouvons écrire plus court:

$$(P_1\equiv P_2\equiv P_3)\equiv(P_1\to P_2\to P_3\to P_1).$$

En effet, si $P_1\equiv P_2\equiv P_3$, on a $P_3\equiv P_1$, donc aussi $P_1\to P_2\to P_3\to P_1$. D'autre part, si $P_1\to P_2\to P_3\to P_1$, on a $P_1\to P_2$ et $P_2\to P_3\to P_1$, d'où $P_2\to P_1$. On a donc $P_1\rightleftarrows P_2$, c'est-à-dire $P_1\equiv P_2$.

Pareillement, si $P_1\to P_2\to P_3\to P_1$, on a $P_2\to P_3$ et $P_3\to P_1\to P_2$, d'où $P_3\to P_2$, donc $P_2\rightleftarrows P_3$, c'est-à-dire $P_2\equiv P_3$.

De façon générale on montre sans peine que *quelles que soient les n propositions $P_1, P_2, \ldots, P_n$, on a*

$$(P_1\equiv P_2\equiv\ldots\equiv P_n)\equiv(P_1\to P_2\to\ldots\to P_n\to P_1).$$

Ainsi, pour établir l'équivalence de n propositions, il suffit de démontrer n implications.

Notons encore les formules suivantes:

Modus ponens: $[A(A\to B)]\to B$

Principe de simplification: $A\to(A+B)$, $(AB)\to A$

Loi d'importation et d'exportation: $[A\to(B\to C)]\equiv[(AB)\to C]$,

Principe de composition: $[(A\to B)\,(A\to C)]\equiv[A\to(BC)]$, $[(A\to C)\,(B\to C)]\equiv[(A+B)\to C]$.

Loi d'absorption: $[A+(AB)]\equiv A$, $[A(A+B)]\equiv A$; $(A\equiv B)\to[(AC)\equiv(BC)]$, $(A\equiv B)\to[(A+C)\equiv(B+C)]$, $(A\to B)+(B\to A)$ et, plus généralement: $(A\to B)+(C\to A)$.

Il est à remarquer que les propositions $A+(B\to C)$ et $(A+B)\to C$ ne sont pas, en général, équivalentes, puisque, pour $A\equiv 1$ et $B\equiv 0$, la première est vraie et la seconde fausse. Or, on a toujours

$$[A+(A\to B)]\equiv 1 \quad\text{et}\quad [B+(A\to B)]\equiv(A\to B).$$

On a enfin

$$[(A\to B)\,(C\to D)]\to\{[(A+C)\to(B+D)]\,[(AC)\to(BC)]\}$$

$$[(A\equiv B)\,(C\equiv D)]\to\{[(A+C)\equiv(B+D)]\,[(AC)\equiv(BC)]\}.$$

La distributivité de l'addition par rapport à l'équivalence:

$$[A+(B\equiv C)]\equiv[(A+B)\equiv(A+C)],$$

ainsi que *la distributivité de l'équivalence par rapport à l'addition:*

$$[(A\equiv B)+C]\equiv[(A+C)\equiv(B+C)].$$

La distributivité de l'addition par rapport à l'implication:

$$[A+(B\to C)]\equiv[(A+B)\to(A+C)].$$

Or, la multiplication n'est pas distributive par rapport à l'implication ni inversement. L'équivalence n'est pas distributive par rapport à elle-même, puisque $[0\equiv(0\equiv 1)]\equiv 1$ et $[(0\equiv 0)\equiv(0\equiv 1]\equiv 0$.

La distributivité de l'implication par rapport à l'addition:

$$[A\to(B+C)]\equiv[(A\to B)+(A\to C)].$$

EXERCICE. Démontrer que, quelles que soient les propositions P et Q, on a

$$P+Q+(P\equiv Q),\qquad P\to[Q\to(PQ)].$$

§ 4. Négation. Nous désignons par P' la proposition qui est une négation de la proposition P. On a donc par définition:

$$P'\equiv(P\equiv 0).$$

Quelle que soit la proposition P, on a *le principe de contradiction* (ou plutôt de contradiction exclue):

(4) $$(PP')\equiv 0$$

et *le principe du tiers exclu:*

(5) $$(P+P')\equiv 1.$$

Il existe des mathématiciens éminents se disant *intuitionistes*, qui n'admettent pas le principe du tiers exclu et qui cherchent d'établir divers théorèmes mathématiques sans employer ce principe [1]).

Pour ceux qui admettent le principe du tiers exlu, la proposition suivante est p. e. incontestable: „ou bien il existe 100 nombres premiers de la forme 2^n+1 ou bien il n'existe pas 100 nombres premiers de cette forme; *tertium non datur*". Cependant nous ne savons pas démontrer aujourd'hui ni qu'il existe 100 entiers en question ni qu'il n'en n'existe pas 100 et on peut même se figurer que personne dans l'avenir ne saura le faire, bien que le nombre exact de ces entiers, quoique inconnu, existe. Or, les intuitionistes [2]) n'admettent pas la proposition précitée sur l'existence de 100 entiers en question, car pour eux cette proposition (si elle présente quelque valeur pour la science humaine) découle du principe du tiers exclu qu'ils n'admettent pas [3]).

„Généralement — écrit M. Heyting [4]) — on considère le principe du tiers exclu comme évident; seulement, comme l'a remarqué M. Brouwer, cette opinion se base sur une interprétation de nature métaphysique, dont on déduit que chaque proposition possède en soi et indépendamment de notre connaissance le caractère du vrai ou du faux. Or, cette interprétation est très douteuse, surtout quand

---

[1]) Voir p. e. L. E. J. Brouwer, *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, Proceedings Akad. Amsterdam 12, Nr 5 et 7; 13, Nr 2 (1918—1923) et *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie*, Journ. f. r. u. a. Math. 154 (1925), pp. 1—7.

[2]) P. ex Brouwer, Skolem ou Weyl; comme intuitionistes plus anciens sont à considérer Kronecker et Mertens.

[3]) Cf. A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Leipzig et Berlin 1927, pp. 38—43. Aussi l'école de Hilbert partage les doutes quant à l'utilisation du tiers exclu dans la mathématique transfinie (A. Fraenkel, l. c., pp. 52—53). Sur le principe du tiers exclu, voir aussi les publications de R. Wavre, Revue de Métaphysique et de Morale 31 (1924), pp. 435—470 et 33 (1926), pp. 425—430, de P. Lévy, ibidem pp. 253—258 et de W. Ackermann, Math. Annalen 93 (1924), pp. 1—36.

A. Kolmogoroff, *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, Math. Zeitschrift 35 (1932) donne une belle interprétation des notions d'implication, de négation etc. où les lois de la logique intuitioniste se présentent tout naturellement. Le mémoire de A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1930, pp. 42—56, 57—71 et 158—169 est important pour ceux qui connaissent le calcul logique.

[4]) A. Heyting, Enseignement Math. 31 (1932), p. 122.

il s'agit des êtres abstraits, comme les entités mathématiques... M. Brouwer en tire la conclusions... qu'il faut considérer le principe du tiers exclu comme n'étant ni évident ni démontré d'une manière convainquante. Ainsi il ne rejette pas ce principe, mais il refuse de l'admettre, tout comme on refusera d'admettre un théorème quelconque tant qu'on en n'a pas vu la démonstration".

Les intuitionistes ne regardent la proposition P_1+P_2 comme démontrée, que si l'on a démontré ou bien la proposition P_1 ou bien la proposition P_2. En conséquence, ils regardent la proposition $P+P'$ comme démontrée seulement dans le cas, dans lequel on a soit démontré que la proposition P est vraie, soit démontré que la proposition P est fausse. Or, il y a des propositions dont on n'a démontré la vérité, pas plus que la fausseté (telle est p. ex. la proposition P suivante: „Il existe 100 nombres premiers de la forme 2^n+1)".

Ne pas admettre le principe du tiers exclu, cela ne veut point dire qu'on affirme l'existence d'une proposition P qui n'est ni vraie ni fausse. Une telle affirmation serait — comme on voit sans peine — incompatible avec le principe de contradiction (qui est admis aussi par les intuitionistes). En effet, s'il existait une telle proposition P, on aurait à la fois P' (puisque P n'est pas vrai) et $(P')'$ (puisque P n'est pas faux), de sorte que la proposition P' serait en même temps vraie et fausse, contrairement au principe de contradiction [1]). Cependant du fait qu'il n'existe aucune proposition qui ne soit ni vraie ni fausse, on ne peut pas conclure, sans faire appel au principe du tiers exclu, que toute proposition est soit vraie, soit fausse. Mais on peut démontrer d'une manière générale que, si une proposition P est vraie dans la logique ordinaire (à deux valeurs), la proposition P'' est vraie dans la logique intuitioniste [2]).

Donc, en particulier, quelle que soit la proposition P, *la proposition* $(P+P')''$ *est vraie dans la logique intuitioniste*, et l'équivalence $P'\equiv P'''$ y est vraie aussi.

On déduit de (4) et (5) pour toute proposition P les équivalences:

$$(P\equiv 1)\equiv(P'\equiv 0),\quad (P\equiv 0)\equiv(P'\equiv 1),\quad (P\equiv P')\equiv 0),$$
$$(P\equiv 0)'\equiv(P\equiv 1),\quad (P\equiv 1)'\equiv(P\equiv 0),\quad 1'\equiv 0,\quad 0'\equiv 1,$$

---

[1]) Cf. A. Church, *On the law of excluded middle*, Bull. Amer. Math. Soc. 1928, p. 75.

[2]) Voir V. Glivenko, Bull. Acad. Sc. Belg. 1929, p. 183; A. Heyting, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. 1930, p. 56; cf. A. Tarski, Fund. Math. 31, p. 105 (Satz 1. 6).

et la suivante, dite; *loi de double négation:*

$$(P')' \equiv P.$$

Il est à remarquer que ceux qui rejettent le principe du tiers exclu, rejettent aussi la loi de double négation; pour eux la fausseté de la fausseté d'une proposition n'entraîne pas encore sa vérité [1]).

Quelles que soient les propositions A et B, on a l'équivalence:

$$(A \equiv B') \equiv (A' \equiv B).$$

Cette formule permet, dans les calculs, de transporter la négation d'un membre d'une équivalence à l'autre.

On a aussi la formule

$$(A' \equiv B') \equiv (A \equiv B).$$

Quelle que soit la proposition P, on a les des deux formes de la *loi de réduction à l'absurde,* c'est-à-dire d'une sorte de la démonstration apagogique:

$$(P' \to P) \to P, \qquad (P \to P') \to P'.$$

Une autre forme en est la suivante:

$$(P' \to 0) \to P.$$

On a

$$A \to (A' \to B)$$

et la *loi de* Duns Scotus:

$$A' \to (A \to B)$$

quelles que soient les propositions A et B.

Il en résulte que l'existence de deux propositions vraies dont une est la négation de l'autre, implique chaque proposition. Dans aucune science dans laquelle la loi de *Duns Scotus* est en vigueur ne peuvent donc être admises comme vraies deux propositions contradictoires, puisqu'on en pourrait déduire chaque proposition; une telle science ne serait donc pas intéressante et ne pourrait servir à rien [2]).

---

[1]) Voir A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre,* 3me édition, Berlin 1928, p. 232. Déjà Schopenhauer attirait l'attention sur le fait que, lorsqu'on a une démonstration apagogique, on est obligé, en vertu de la loi de double négation, d'admettre qu'il est bien ainsi comme on l'affirme, mais la démonstation ne nous enseigne pas pourquoi il en est ainsi. *(Die Welt als Wille und Vorstellung,* vol. I, I, p. 15, cf. H. Steinhaus, *Czem jest, a czem nie jest matematyka,* Lwów 1923, p. 17).

[2]) Cf. A. Mostowski, op. cit., p. 26.

La formule $(A \equiv B)'$ exprime — comme on le voit sans peine — qu'une et une seule de deux propositions A et B est vraie.

Quelles que soient les propositions A et B, on a la *loi de contraposition:*

$$(A \to B) \equiv (B' \to A')$$

et les équivalences:

$$(A \to B) \equiv (A' + B), \qquad (A + B) \equiv (A' \to B), \qquad (A \equiv B) \equiv [(AB) + (A'B')]$$

qui permettent de réduire les symboles logiques les uns aux autres;

$$(AB)' \equiv (A' + B'), \qquad (A + B)' \equiv (A'B'),$$

à savoir: la négation du produit logique est la somme logique des négations; la négation de la somme logique est le produit logique des négations. Ce sont les formules dites de de Morgan.

On a encore les formules:

$$A' \to (B \to A), \qquad (A \to B) \to [(A \to B') \to A'],$$

$$(A \equiv B) + (A \equiv B'),$$

$$[(A \to B)(A' \to B)] \equiv B$$

$$(A \to B)' \equiv [(B \to A)(B' \to A)(A \to B')(A' \to B')]$$

puisque $(A \to B)' \equiv (AB')$, et aussi

$$(A \equiv B)' \equiv [(AB') + (A'B)] \equiv [(A + B)(AB)'] \equiv (A \equiv B') \equiv (A' \equiv B)$$

$$(A + B) \equiv [A + (A'B)].$$

EXERCICES. 1. Démontrer les équivalences:

$$[(A' + B')' + (A' + B)'] \equiv A$$

$$[(A \to B) \to (B \to A)']' \equiv (A \equiv B)$$

$$[A \equiv (AA')] \equiv A', \qquad (A \to 0)' \equiv (A \equiv 1)$$

$$[A(A'B)'] \equiv A, \qquad [A(AB)'] \equiv AB', \qquad [(A'B')'(A'B)'] \equiv A$$

$(AB'C) \equiv [(AC)(BC)']$ (Boole), $(AB' \equiv BA') \equiv (A \equiv B)$ (Vailati)

$(AB \equiv AC) \equiv (AB' \equiv AC')$ (Whitehead)

$(AB' \to C) \equiv [A \to (B + C)]$ (Peirce),

$$(AX + BX')' \equiv A'X + B'X'$$

$$|X \equiv (AX+BX')| \equiv (B \to X \to A) \quad \text{(Poretzky)}$$

$$\{(AC \equiv BC)\,|(A+C) \equiv (B+C)|\} \equiv (A \equiv B)$$

$$\{|(AC) \to B|\,|A \to (B+C)|\} \equiv (A \to B) \quad \text{(Peirce)}$$

$$\{|(AC) \to (BC)|\,|(A+C) \to (B+C)|\} \equiv (A \to B)$$

$$|(A \equiv B) \equiv C| \equiv (ABC+AB'C'+A'BC'+A'B'C).$$

2. Exprimer (à l'aide des symboles logiques) que de deux propositions données A et B une seulement est vraie.

Réponse: $AB'+BA'$; aussi: $A \equiv B'$, $(A \equiv B)'$.

3. Exprimer que de trois propositions données A, B et C une seulement est vraie.

Réponse: $AB'C'+A'BC'+A'B'C$.

4. Démontrer qu'en posant $(P \not\equiv Q) \equiv (P \equiv Q)'$, on a, quelles que soient les propositions A, B et C:

$$|(A \equiv B) \equiv C| \equiv |(A \not\equiv B) \not\equiv C| \equiv |A \not\equiv (B \not\equiv C)|,$$

et

$$|(A \not\equiv B)\,C| \equiv |(AC) \not\equiv (BC)|.$$

Remarque. D'après J. C. C. Mc Kinsey [1]) toute formule contenant seulement les lettres désignant les propositions et les signes $\equiv$ et $\not\equiv$ (et les paranthèses) est vraie, quelles que soient ces propositions, dans ce cas et seulement dans ce cas, si chaque lettre (désignant une proposition), ainsi que les signes $\not\equiv$ y figurent un nombre pair de fois (c'est une généralisation du théorème de S. Leśniewski dont nous avons parlé dans le § 1, p. 2 renvoi [2]).

D'après Sheffer on pourrait introduire encore le symbole logique $/$ *(signe d'incompatibilité)*, en posant, par définition

$$(A/B) \equiv |(AB) \equiv 0|$$

et lire la formule A/B comme il suit: „les propositions A et B sont contradictoires" ou plutôt: „les propositions A et B sont incompatibles" [2]). On peut, à l'aide du symbole $/$, définir les symboles logiques $'$, $\cdot$, $+$, $\to$: on a en effet, comme on le vérifie sans peine:

[1]) Voir W. V. Quine *Mathematical Logic*, Cambridge 1947, p. 60.

[2]) Certains auteurs appellent *contradictoires* deux propositions dont l'une est la négation de l'autre. Les propositions $(AB) \equiv 0$ et $A \equiv B'$ ne sont pas, en général, équivalentes, puisque pour $A \equiv 0$ et $B \equiv 0$ la première est vraie et la seconde fausse.

$$P' \equiv (P/P), \qquad (A+B) \equiv [(A/A)/(B/B)],$$

$$(AB) \equiv [(A/B)/(A/B)], \qquad [A \to B] \equiv [A/(B/B)].$$

Voici encore la formule

$$\{A \cdot [A/(B/C)]\} \to C,$$

utilisée par Nicod dans son système d'axiomes du calcul des propositions.

A titre d'exercice, nous laissons au lecteur de vérifier l'axiome suivant de Nicod: *Quelles que soient les propositions P, Q, R, S et T, on a:*

$$|P/(Q/R)|/\{|T/(T/T)|/[(S/Q)/((P/S)/(P/S))]\} \text{ [1]}).$$

„L'axiome de Nicod — écrit J. Łukasiewicz [2]) — n'est pas une proposition évidente. Je ne tâcherai pas d'en expliquer la teneur. On peut vérifier qu'il est une proposition vraie, en y substituant aux variables les zéros et les unités dans des combinaisons arbitraires; en tenant compte de ce que $(0/0) \equiv 1$, $(1/0) \equiv 1$, $(0/1) \equiv 1$ et $(1/1) \equiv 0$, on obtient par réduction toujours 1".

P étant une proposition quelconque, on peut en obtenir à l'aide des symboles logiques ($\equiv$, $\to$, $+$, $\cdot$, $'$) exactement 4 propositions non équivalentes deux à deux. Ce sont les propositions:

$$(*) \qquad P, \quad P', \quad P+P' \quad \text{et} \quad PP',$$

ce que le lecteur pourra vérifier sans peine. Or, on démontre aussitôt que toute proposition $\varphi(P)$ qui s'obtient de la proposition P à l'aide des symboles logiques (utilisés une ou plusieurs fois) est équivalente à l'une des quatre propositions (*). En effet, soit respectivement $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$ la proposition qui s'obtient de la proposition $\varphi(P)$ en y remplaçant P par une proposition respectivement vraie et fausse. Si l'on a respectivement $\varphi(1) \equiv 1$ et $\varphi(0) \equiv 0$, il vient — comme on voit sans peine — $\varphi(P) \equiv P$. Si par contre $\varphi(1) \equiv 0$ ou $\varphi(0) \equiv 1$, il vient $\varphi(P) \equiv P'$. Pour $\varphi(1) \equiv \varphi(0) \equiv 1$ on trouve $\varphi(P) \equiv (P+P')$ et pour $\varphi(1) \equiv \varphi(0) \equiv 0$ on a $\varphi(P) \equiv (PP')$. Tous les cas possibles sont ainsi examinés.

[1]) J. G. P. Nicod, Proc. Cambr. Phil. Soc. 19 (1917); D. Hilbert et W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1938.

[2]) J. Łukasiewicz, *Uwagi o aksyomacie Nicoda i o „dedukcji uogólniającej"*. Księga Pamiątkowa Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, Lwów 1931, p. 3 (en polonais).

De deux propositions P et Q on peut, à l'aide des symboles logiques, obtenir exactement 16 propositions non équivalentes deux à deux, à savoir:

$$(⁑) \quad \begin{array}{llllllll} P, & Q, & PQ, & P+Q, & P\to Q, & Q\to P & P\equiv Q & P+P', \\ P', & Q', & P'+Q', & P'Q', & PQ', & QP', & P\not\equiv Q, & PP', \end{array}$$

ce que le lecteur peut vérifier aisément.

Pour démontrer que toute proposition $\varphi(P, Q)$ obtenue des propositions P et Q à l'aide des symboles logiques équivaut à l'une des 16 propositions (⁑), on n'a qu'à examiner 16 fonctions $\varphi(a_1, a_2) = a_3$, où a_1, a_2 et a_3 sont les nombres 0 ou 1.

Pareillement, en partant de trois propositions P, Q, R, on peut obtenir exactement 256 propositions non équivalentes deux à deux. De façon générale, on peut obtenir de n propositions à l'aide des symboles logiques 2^{2^n} propositions non équivalentes deux à deux [1].

Les 16 propositions non équivalentes qui s'obtiennent de deux propositions P et Q peuvent aussi être formées comme suit: on écrit d'abord la proposition (toujours fausse) PP' et ensuite toutes les propositions qui sont des sommes logiques d'un nombre (non nul) quelconque de 4 termes du développement

$$(P+P')(Q+Q') \equiv PQ+PQ'+P'Q+P'Q',$$

c'est-à-dire: chacun de ces termes séparément (ce qui donne 4 propositions), puis les sommes logiques à 2 termes (ce qui donne 6 propositions), puis à 3 termes (ce qui donne 4 propositions) et enfin la somme logique de tous les 4 termes (ce qui donne 1 proposition). De façon générale, lorsqu'on a n propositions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et que l'on veuille en former toutes les 2^{2^n} propositions non équivalentes deux à deux, il suffit d'écrire une proposition toujours fausse (p. ex. P_1P_1') et toutes les propositions qui sont des sommes logiques d'un nombre quelconque (non nul) de termes du développement, d'après la loi distributive du produit logique $(P_1+P_1')(P_2+P_2')\ldots(P_n+P_n')$.

EXERCICE. Démontrer que l'opération logique $\dot{-}$ définie par la formule $(A \dot{-} B) \equiv (AB'+BA')$ ($A \dot{-} B$ exprime donc qu'une et seleument une des propositions A et B est vraie) est commutative et que $[(A \dot{-} X) \equiv B] \equiv [X \equiv A \dot{-} B]$ et $(A+B) \equiv [(A \dot{-} B) \dot{-} AB]$, quelles que soient les propositions A, B et X.

[1]) Voir D. Hilbert et W. Ackermann, loc. cit. p. 15.

M. Łukasiewicz [1]) a fait la remarque importante que voici: en modifiant le système de notation, on peut éviter l'emploi des paranthèses dans les formules de l'Algèbre des propositions (et, pareillement, dans celles de l'Algèbre des ensembles). A ce but, il suffit d'écrire les signes logiques avant les arguments auxquels ils se rapportent, ainsi $\equiv PQ$ au lieu de $P \equiv Q$, $\to PQ$ au lieu de $P \to Q$, $+PQ$ au lieu de $P+Q$, $.PQ$ au lieu de $P.Q$ et NP au lieu de P'. C'est ainsi qu'au lieu de

$$(P\to Q)\to R \quad \text{et} \quad P\to(Q\to R)$$

on écrira respectivement

$$\to\to PQR \quad \text{et} \quad \to P\to QR.$$

La formule

$$[(P+Q)R] \equiv [(PR)+(QR)]$$

prend la forme

$$\equiv . + PQR + . PR . QR.$$

Le principe du syllogisme hypothétique dans la forme (5^a) de Łukasiewicz s'écrit:

$$\to\to P_1 P_2 \to\to P_2 P_3 \to P_1 P_3 \text{ [2])}.$$

Cette notation sans paranthèses présente non seulement un avantage typographique, mais aussi celui d'affranchir l'Algèbre des propositions des signes auxiliaires, comme ceux de ponctuation, employés par plusieurs auteurs.

Ajoutons quelques mots sur l'exposé axiomatique de l'Algèbre des ensembles, conçu par J. Łukasiewicz [3]).

„Traitez d'abord les assemblages des lettres, assignés aux numéros, comme des figures d'un jeu, n'ayant aucun sens par elles--mêmes. Les trois figures suivantes sont reconnues d'avance comme appartenant au jeu:

[1]) J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, p. V et 40; cf. A. Tarski, *La notion de verité dans les langages des sciences déductives*, (en polonais), Travaux de la Soc. Sc. Varsovie, Cl. III Nr 34, Warszawa 1933, p. 19. Le même travail de M. Tarski a paru aussi en allemand: *Der Wahrheitsbegriff in der formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica Societatis Philosophiae Leopoli, I (1935) pp. 261—405.

[2]) Cf. J. Łukasiewicz, loc. cit., p. 28.

[3]) Nauka Polska, (Varsovie 1928), p. 610, renvoi (en polonais). C y désigne l'implication et N la négation.

1. $CCpqCCqrCpr$,
2. $CCNppp$,
3. $CpCNpq$.

Le jeu consiste à en former de nouvelles figures à partir de figures appartenant déjà au jeu, en appliquant deux règles suivante

I. *Règle de substitution.* Il est permis de former d'un figure F du jeu une nouvelle figure par substitution, c'est-à-dire e supprimant dans la figure F une minuscule quelconque et en mêm temps toutes les lettres ayant la même forme et en remplissan toutes les lacunes ainsi obtenues, soit

(a) par une minuscule (mais partout la même) distincte de l supprimée, soit

(b) par deux lettres, dont la première est N et la seconde un minuscule quelconque (partout la même), soit

(c) par trois lettres, dont la premiere est C et les deux suivante sont des minuscules quelconques (partout les mêmes).

II. *Règle de déduction.* Il est permis de former d'une figure du jeu une nouvelle figure par déduction, dans le cas (et unique ment dans le cas) où la figure F commence par la lettre C et qu'un partie de F qui suit immédiatement C est une figure du jeu; l figure nouvelle est alors la partie finale de la figure F qui rest après la suppression de la lettre C du début avec la figure du je qui la suit.

...Les figures 1, 2 et 3 sont les axiomes de la théorie de dé duction... L'axiome 1 [1]) est le principe du syllogisme hypothétique il était connu déjà d'Aristote. L'axiome 2 [2]) est une forme de l réduction à l'absurde employée par Euclide dans ses démonstrations L'axiome 3 [3]) exprime la pensée connue déjà de Duns Scotu quand il affirmait que de deux propositions contadictoires il résult une proposition quelconque.

La règle de substitution correspond au principe du raisonne ment déductif de la syllogistique d'Aristote connu sous le nom d „dictum de omni" dans la logique traditionnelle.

[1]) Il s'écrit dans notre système de notation comme suit: Quelles qu soient les propositions P, Q et R, on a $(P\to Q)\to[(Q\to R)\to(P\to R)]$.

[2]) Il s'écrit dans notre système de notation comme suit: Quelle qu soit la proposition P on a $(P'\to P)\to P$.

[3]) Il s'écrit dans notre système de notation comme suit: Quelles qu soient les propositions P et Q on a $P\to(P'\to Q)$.

...La règle de déduction correspond au principe du raisonnement déductif connu déjà dans la dialectique des Stoïques et portant le nom de „modus ponens" dans la logique traditionnelle.

Moyennant ces règles, on peut démontrer une quantité indéfinie de théorèmes, et parmi eux les lois du raisonnement les plus importantes".

La démonstration de certains théorèmes est facile. Démontrons, à titre d'exemple, la loi d'identité: Cpp. A ce but, substituons à la lettre q dans la formule 3 la lettre p, ce qui donne la figure $CpCNpp$ et dans la formule 1 la figure $CNpp$. Substituons en outre dans la formule 1 la lettre p à la lettre r. Nous obtenons ainsi la figure

$$CCpCNppCCCNpppCpp.$$

La figure $CpCNpp$ étant déjà obtenue, nous pouvons la détacher avec le C initial en vertu de la règle de déduction, ce qui donne la figure $CCCNpppCpp$, d'où l'on obtient, en détachant la figure 2, la figure Cpp, c. q. f. d.

Il est vrai que la démonstration de certaines lois importantes de la logique devient assez compliquée. Par exemple la démonstration de la loi de double négation, c'est-à-dire des figures $CNNpp$ et $CpNNp$, est plus difficile qu'on pourrait le croire, et cela non seulement à cause de la longueur des calculs, mais aussi parce qu'il n'est pas aisé de trouver la voie pour l'obtenir [1]).

Ce fait n'est pas sans intérêt du point de vue mathématique, puisqu'il montre qu'il est parfois difficile de déduire une formule simple des autres formules simples au moyen des règles simples du calcul.

Un autre système d'axiomes de l'Algèbre des propositions à été donné par D. Hilbert et W. Ackermann [2]). Il se compose de 4 axiomes concernant la somme logique et la négation; on les obtient des formules

(a) $(X+X)\to X$,

(b) $X\to(X+Y)$,

(c) $(X+Y)\to(Y+X)$,

(d) $(X\to Y)\to[(Z+X)\to(Z+Y)]$,

en y remplaçant partout $A\to B$ par $A'+B$.

[1]) J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, p. 67—78 (formules 39 et 40).

[2]) loc. cit., p. 23.

Un troisième système d'axiomes de l'Algèbre des propositions a été envisagé dans le livre de Hilbert et Bernays [1]). Il comprend beaucoup plus d'axiomes que le système de Łukasiewicz à savoir 15 axiomes, parce qu'ils concernent non seulement l'implication et la négation, mais aussi la somme logique, la multiplication logique et l'équivalence. Les axiomes sont divisés en 5 groupes composés chacun de 3 axiomes:

I. Les axiomes d'implication:

1) $A \to (B \to A)$,

2) $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$,

3) $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$.

II. Les axiomes du produit:

1) $(A \cdot B) \to A$,

2) $(A \cdot B) \to B$,

3) $(A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to (B \cdot C))]$.

III. Les axiomes de la somme:

1) $A \to (A + B)$,

2) $B \to (A + B)$,

3) $(A \to C) \to [(B \to C) \to ((A + B) \to C)]$.

IV. Les axiomes d'équivalence:

1) $(A \equiv B) \to (A \to B)$,

2) $(A \equiv B) \to (B \to A)$,

3) $(A \to B) \to [(B \to A) \to (A \equiv B)]$.

V. Les axiomes de la négation:

1) $(A \to B) \to (B' \to A')$,

2) $A \to A''$,

3) $A'' \to A$.

Comme on le vérifie sans peine, toutes ces formules sont identiquement vraies (c'est-à-dire qu'elles sont des propositions vraies,

[1]) D. Hilbert et P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik* volume I, Berlin 1934, p. 66.

quelles que soient les propositions A, B et C). Les auteurs de ce système d'axiomes esquissent une démonstration de ce qu'il est *complet* dans ce sens que toute proposition identiquement vraie qui peut être formée à l'aide des variables désignant des propositions et des signes logiques $\to$, $\equiv$, $+$, $\cdot$, $'$, peut en être déduite par les règles de substitution et de déduction; la dernière règle consiste ici dans l'admission d'une formule T, dès qu'on a accepté les formules 1—15, une proposition Z et la proposition $Z \to T$ [1]). Si l'on remplace les groupes IV et V des axiomes en question par le groupe de 3 axiomes:

IV'. 1. $(A \to B') \to (B \to A')$

2. $A' \to (A \to B)$

3. $[(A \to A') \to B] \to [(A \to B) \to B]$,

on obtient un système d'axiomes indépendants pour l'Algèbre de la logique à deux valeurs envisagé par J. Łukasiewicz [2]). En y supprimant le dernier axiome (axiome 3 du groupe IV'), on obtient un système d'axiomes de l'Algèbre des propositions intuitioniste, équivalent à celui qui a été donné par M. Heyting.

En y supprimant les axiomes 2 et 3 du groupe IV, on obtient le Calcul minimal de M. Johannson. Enfin en remplaçant dans le système de 12 axiomes de Łukasiewicz le dernier de ces axiomes (l'axiome 3 du groupe IV) par

$$(A' \to B) \to \{[(B \to A) \to B] \to B\},$$

on obtient une Algèbre de propositions plus faible que celle de la logique à deux valeurs, mais plus forte que celle de la logique intuitioniste [3]).

Une axiomatique de l'Algèbre de la logique à deux valeurs a été donnée aussi par E. V. Huntington; voir Nr 19 et renvoi 2; une autre est due à M. Tarski [4]). Elle comprend les 10 axiomes suivants:

[1]) C'est M. Post qui a démontré le premier qu'un système d'axiomes de l'Algèbre des propositions est *complet*, voir E. Post: *Introduction to a general Theory of Elementary Propositions*, Amer. Jour. of Math. 43 (1921), p. 169. Cf. aussi Łukasiewicz, *Elementy...*, pp. 121—153.

[2]) J. Łukasiewicz, *Die Logik und das Grundlagenproblem*, Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 8—9 Décembre 1938, Zürich 1941, p. 86.

[3]) loc. cit., p. 91.

[4]) A. Tarski: *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, Fund. Math. 31, p. 105.

1. $P \to (Q \to P)$,
2. $[P \to (Q \to R)] \to [(P \to Q) \to (P \to R)]$,
3. $P \to (P+Q)$,
4. $Q \to (P+Q)$.
5. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to [(P+Q) \to R])$,
6. $(P \cdot Q) \to P$,
7. $(P \cdot Q) \to Q$,
8. $(R \to P) \to ((R \to Q) \to [R \to (P \cdot Q)])$,
9. $P' \to (P \to Q)$,
10. $(P' \to P) \to P$.

Si l'on remplace ici l'axiome 10 par l'axiome

11. $(P \to P') \to P'$,

on obtient l'axiomatique de l'Algèbre des propositions intuitioniste [1]).

Nicod [2]) donne une axiomatique de l'Algèbre de la logique à deux valeurs, basée sur un seul axiome (cité par nous plus haut, p. 17) et sur deux règles: celle de substitution et l'autre qui permet de déduire de deux figures acceptées F_1 et $F_1/(F_2/F_3)$ la figure F_3.

§ 5. Fonctions propositionnelles. On considère parfois des propositions $P(x)$ dans lesquells il est question d'un objet x, sans déterminer cet objet de plus près. De telles propositions peuvent être vraies ou fausses, ce qui dépend de l'objet que l'on substitue au lieu de x; nous les appelons *fonctions propositionnelles*.

Par exemple, la proposition $P(x)$ qui suit est une fonction propositionnelle:

„x est un nombre naturel divisible par 5".

On a ici par exemple

$$P(1) \equiv 0, \quad P(5) \equiv 1, \quad P(13) \equiv 0, \quad P(100) \equiv 1, \quad P(\tfrac{1}{2}) \equiv 0, \quad P(\sqrt{2}) \equiv 0.$$

1) A. Tarski, loc. cit., p. 104, Déf. 1, 2. D'après M. Tarski (loc. cit., p. 133, renvoi 4)) la première axiomatique de l'Algèbre des propositions intuitioniste a été donnée par A. Heyting, Sitzber. d. Preuss. Akad. Wiss. 1930, p. 45, ensuite par G. Gentzen, Math. Zeitschr. 38 (1934), p. 419.

2) Nicod: *A reduction of the number of the primitive propositions of logic*, Proceedings Cambridge Philos. Soc. 19 (1917).

Chaque équation est une fonction propositionnelle, par exemple l'équation $Q(x)$ suivante:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On a ici $Q(2) \equiv Q(3) \equiv 1$ et $Q(x) \equiv 0$ pour tout nombre réel ou complexe distinct de 2 et de 3.

L'inégalité $R(x)$

$$2x + 3 < 10$$

est aussi une fonction propositionnelle. On a ici $R(x) \equiv 1$ pour $x < 3\tfrac{1}{2}$ et $R(x) \equiv 0$ pour $x \geqslant 3\tfrac{1}{2}$.

Les mathématiciens appellent *formules* les fonctions propositionnelles et les propositions formées seulement des symboles mathématiques, p. ex. $x^2 + y^2 = 25$ ou $3^{3^3} < (3^3)^3$.

Si P est une propriété donnée, l'expression $P(x)$ suivante:

„x jouit de la propriété P"

est une fonction propositionnelle. On a ici $P(x) \equiv 1$ pour tout objet x qui jouit de la propriété P et $P(x) \equiv 0$ pour tout objet x qui n'en jouit pas.

On peut aussi considérer des fonctions propositionnelles de deux ou plusieurs variables. Par exemple l'inégalité

$$x^2 + y^2 < 1$$

est une fonction propositionnelle de deux variables. La proposition $P(x, y)$

„x est un entier divisible par l'entier y"

est aussi une fonction propositionnelle de deux variables. Les propositions $P(x, y)$ et $P(y, x)$ ne sont pas ici, en général, équivalentes (puisque, p. ex. $P(6,3) \equiv 1$ et $P(3,6) \equiv 0$); il n'est donc pas permis d'intervertir l'ordre des variables d'une fonction propositionnelle de plusieurs variables. Une fonction propositionnelle devient une proposition, lorsqu'on remplace chacune de ses variables par un objet qui est une des „valeurs" que cette variable peut prendre.

Il est à remarquer que les fonctions que l'on envisage dans les mathématiques, comme p. ex. les fonctions $f(x)$ d'une variable numérique, ne sont pas en général des fonctions propositionnelles [1]).

1) A. Fraenkel (loc. cit., p. 255, renvoi [1])) propose de les appeler „Gegenstandsfunktionen", puisqu'elles deviennent des objets (et non pas des propositions, comme les fonctions propositionnelles), lorsqu'on y remplace les variables par des valeurs données.

Ainsi par exemple la fonction x^2+1 n'est pas une fonction propositionnelle: il n'y a pas de sens de demander, pour quelles valeur de x x^2+1 est vrai et pour lesquelles faux.

D'autre part, les fonctions propositionnelles sont un cas particulier des fonctions considérées en mathématique. En effet, une fonction propositionnelle $P(x)$ fait correspondre à tout objet a qui est „valeur de x", un autre objet, à savoir celui qui est une proposition déterminée $P(a)$.

Les fonctions propositionnelles permettent de définir *l'identité* des objets, en termes suivants:

Les objets a et b sont égaux (en symbole: $a=b$) dans le cas et dans ce cas seulement où l'on a $P(a)\equiv P(b)$ pour toute fonction propositionnelle $P(x)$. (Loi de L e i b n i z).

Toute fonction propositionnelle $P(x)$ d'une seule variable détermine une *propriété* P_P *(une condition)* dont les objets particuliers peuvent jouir ou non (laquelle ils peuvent remplir ou non), à savoir la propriété (condition) qui consiste en ce que, pour eux, la fonction propositionnelle considérée devient une proposition vraie. D'autre part, il existe pour chaque propriété p d'objets, une fonction propositionnelle $P(x)$, telle que $\mathrm{P}_P=p$, à savoir la fonction propositionnelle

„x jouit de la propriété p".

La notion de *propriété* (ou de *condition*) pour les objets se réduit ainsi à celle de fonction propositionnelle.

On dit qu'on a défini une *relation* binaire (c'est-à-dire relation à deux termes) entre les objets si, quels que soient les objets x et y (distincts ou non), il est déterminé, si x est en relation R avec y (ce qu'on écrit xRy) ou non (ce qu'on écrit $(xRy)'$, ou $xR'y$).

On dit que deux relations R_1 et R_2 sont *équivalentes* (ce qu'on écrit $R_1\equiv R_2$), si l'on a $(xR_1y)\equiv(xR_2y)$ quels que soient les objets x et y.

Toute fonction propositionnelle $P(x,y)$ de deux variables détermine une relation R_P entre les objets x et y, à savoir la relation qui consiste en ce que la proposition $P(x,y)$ est vraie pour ces objets. Réciproquement, il existe pour toute relation binaire r une fonction propositionnelle de deux variables $P(x,y)$ telle que $R_P=r$, à savoir la fonction propositionnelle

„x est en relation r à y".

De plus, si $P_1(x,y)$ est une fonction propositionnelle quelconque, telle que $R_{P_1}\equiv r$, on a

$$P_1(x,y)\equiv P(x,y), \text{ quels que soient les objets } x \text{ et } y.$$

La notion de relation binaire entre les objets se réduit ainsi à celle d'une fonction propositionnelle de deux variables.

Une relation R est dite ***symétrique*** si l'on a

$$(xRy)\to(yRx),$$

quels que soient x et y (c'est-à-dire les objets substitués à x et y); elle est dite *non-symétrique* dans le cas contraire, et ***asymétrique*** si, quels que soient x et y, on n'a jamais à la fois xRy et yRx.

Une relation R est dite ***transitive*** si l'on a

$$[(xRy)(yRz)]\to(xRz),$$

quels que soient x, y et z.

Ainsi par exemple l'équivalence des propositions ($\equiv$) est une relation symétrique et transitive; l'implication ($\to$) est une relation non symétrique, mais transitive (en vertu du principe de syllogisme), la relation d'incompatibilité ($/$) est symétrique, mais non transitive.

Toute relation R détermine une relation R^*, ***converse*** de R, définie par la formule $(xR^*y)\equiv(yRx)$, ainsi que sa ***négative***, R', définie par la formule $(xR'y)\equiv(xRy)'$. On voit sans peine que

$$R''\equiv R \quad \text{et} \quad (R^*)'\equiv(R')^*,$$

quelle que soit la relation R.

Une relation R_1 est dite ***contenue*** dans une relation R_2, lorsqu'on a

$$(xR_1y)\to(xR_2y),$$

quels que soient x et y; on écrit alors $R_1\subset R_2$: ici $\subset$ est une relation entre les relations.

Dans le cas où il existe exactement un objet x pour lequel la fonction propositionnelle $P(x)$ est vraie, on le désigne (d'après R u s s e l et W h i t e h e a d) par

$$\iota_x P(x),$$

ce qu'on lit „cet objet (unique) x, pour lequel $P(x)$ est vrai" [1]. On dit alors que la fonction propositionnelle $P(x)$ définit effectivement l'objet $\iota_x P(x)$.

[1]) Cf. D. H i l b e r t et P. B e r n a y s, *Grundlagen der Mathematik*, volume I, Berlin 1934, p. 383.

On peut éviter l'emploi de la notion de nombre 1 dans la définition d'objet $\iota_x P(x)$, la proposition $a = \iota_x P(x)$ étant — comme on le voit sans peine — équivalente à la proposition: „on a $Z(a)$ et $[Z(x)\,Z(y)] \to (x=y)$, quels que soient x et y”.

On dit aussi qu'un objet x est *nommé*, si x existe (au sens classique non constructif) et si deux objets qui satisfont à la définition de x sont nécessairement identiques.

Soit $P(x,y)$ une fonction propositionnelle de deux variables. Admettons que x_0 est un objet pour lequel existe exactement un objet y_0 tel que la proposition $P(x_0, y_0)$ est vraie. On dit alors que la fonction propositionnelle $P(x,y)$ *fait correspondre* (d'une façon univoque) l'objet y_0 à l'objet x_0.

Toute fonction propositionnelle de deux variables fait donc correspondre d'une façon univoque certains objets à certains objets (ou bien ne fait correspondre d'une façon univoque aucun objet à aucun objet).

La notion de *correspondance* (univoque) se réduit ainsi à celle d'une fonction propositionnelle de deux variables.

Soit maintenant $P(x,y,z)$ une fonction propositionnelle de trois variables. Admettons que x_0 et y_0 sont des objets, pour lesquels existe exactement un objet z_0 tel que la proposition $P(x_0, y_0, z_0)$ est vraie. On dit alors que z_0 est le résultat d'une *opération* déterminée par la fonction propositionnelle $P(x,y,z)$ effectuée sur x_0 et y_0. Toute fonction propositionnelle de trois variables détermine donc une opération univoque sur certains objets x et y (ou bien sur aucuns x et y).

EXEMPLE: La fonction propositionnelle

$$„x, y \text{ et } z \text{ sont des entiers et } x = y + z”$$

détermine la soustraction des nombres entiers.

La notion d'opération (sur deux objets) se réduit ainsi a celle d'une fonction propositionnelle de deux variables.

Les symboles logiques $\equiv$, $\to$, $/$, $+$ et $\cdot$ déterminent certaines opérations sur les propositions, notamment le symbole s — l'opération qui fait correspondre aux propositions P et Q la proposition PsQ.

Soit s l'un quelconque de ces 5 symboles logiques. Etant données deux propositions P et Q, la vérité ou la fausseté de la proposition PsQ dépend uniquement de la vérité ou de la fausseté des

propositions P et Q et non pas de leur teneur. La valeur logique de toute proposition PsQ sera donc connue dès quel'on connait les valeurs logiques $1s1$, $1s0$, $0s1$, $0s0$ (et naturellement celle des propositions P et Q). Le sens logique du symbole s se trouve ainsi défini par la suite de 4 termes $1s1$, $1s0$, $0s1$, $0s0$, donc par une suite de 4 nombres a_1, a_2, a_3, a_4, dont chacun est égal à 1 ou à 0. La suite a_1, a_2, a_1, a_4, peut donc être regardée comme définition du symbole logique s [1]).

Les définitions des 5 symboles logiques envisagés sont donc les suivantes:

$$\equiv 1,0,0,1, \quad \to 1,0,1,1, \quad /\, 0,1,1,1, \quad + 1,1,1,0, \quad \cdot\, 1,0,0,0.$$

EXERCICES. 1. Démontrer qu'en partant des propositions P et Q et n'utilisant que l'opération logique $\to$ (un nombre fini de fois), on ne peut obtenir que les propositions:

$$(*) \qquad P,\ Q,\ P \to Q,\ Q \to P,\ P+Q \ \text{ et } \ 1.$$

Il suffit de remarquer que:

$$P \equiv [(P \to Q) \to P], \qquad Q \equiv [(Q \to P) \to Q],$$

$$(P+Q) \equiv [(P \to Q) \to Q], \qquad 1 \equiv (P \to P)$$

et que l'ensemble des propositions $(*)$ est clos par rapport à l'opération $\to$, c'est-à-dire que X et Y étant deux quelconque des propositions $(*)$ (égales ou non), $X \to Y$ est toujours une des propositions $(*)$.

2. Démontrer que chacune des 16 fonctions logiques formées de deux propositions P et Q peut être exprimée en n'utilisant, outre les propositions P et Q, que les symboles logiques $\to$ et 0 (un nombre fini de fois).

Il suffit d'appliquer la formule $P' \equiv (P \to 0)$ et le théorème d'après lequel toute fonction logique formée des propositions P et Q peut être exprimée en utilisant seulement les opérations d'implication et de négation.

3. Dans la logique à m valeurs (où $m > 1$ est un entier donné) on a m valeurs logiques différentes: $0, 1, 2, \ldots, m-1$ et on peut définir la négation x' de la valeur x par la furmule $x' = m - 1 - x$

[1]) Cf. E. Garcia, Revista Matem. Hispano-Americana, volume 8 (1933), p. 116.

pour $x=0,1,\dots,m-1$, la somme logique $x\vee y$ par la formule $x\vee y=\max(x,y)$, le produit logique $x\wedge y$ par la formule $x\wedge y=\min(x,y)$ pour $x=0,1,\dots,m-1$ et $y=0,1,\dots,m-1$.

Démontrer que, pour $m=2$, ces définitions sont compatibles avec la logique à deux valeurs et que, dans la logique à $m>1$ valeurs, les lois de commutabilité, d'associativité et de distributivité ainsi que les formules de De Morgan $(x\vee y)'=x'\wedge y'$ et $(x\wedge y)'=x'\vee y'$ sont vraies pour l'addition et la multiplication logique. Montrer que $(x')'=x$ pour $x=0,1,\dots,m-1$, mais que, pour $m>2$ et $0<x<m-1$, on aura $x\wedge x'\neq 0$.

§ 6. Les quantificateurs. Etant donnée une fonction propositionnelle $P(x)$, nous écrirons $\prod_x P(x)$ au lieu de la proposition suivante:

„quel que soit x, on a $P(x)$"

et $\sum_x P(x)$ au lieu de la proposition

„il existe (au moins) un objet x, tel qu'on a $P(x)$" [1]).

Ainsi $\prod_x P(x)$ est la proposition affirmant que la fonction propositionnelle $P(x)$ est une proposition vraie pour tout objet x et $\sum_x P(x)$ est la proposition affirmant qu'il existe au moins un objet x, pour lequel la fonction propositionnelle $P(x)$ est une proposition vraie.

On appelle *quantificateur général* (ou grand) le symbole $\prod_x$, et *quantificateur spécial* (ou petit, ou existentiel) le symbole $\sum_x$. Les propositions $\prod_x P(x)$ et $\sum_x P(x)$ ne sont donc pas des fonctions propositionnelles, mais bien des propositions au sens ordinaire du mot; on dit que la variable x est ici *liée* (et non pas *libre*, comme dans une fonction propositionnelle $P(x)$).

Quelle que soit la fonction propositionnelle $P(x)$, on a:

[1]) Hilbert, Bernays et plusieurs autres auteurs écrivent $(x)\,P(x)$ au lieu de $\prod_x P(x)$, et $(Ex)\,P(x)$ au lieu de $\sum_x (Px)$. Russel et Whitehead emploient le symbole $(\exists x)(Px)$ pour $\sum_x P(x)$.

$$\Big[\prod_x P(x)\Big]\to\Big[\sum_x P(x)\Big],$$

$$\prod_y\Big(\Big[\prod_x P(x)\Big]\to P(y)\Big),\qquad \prod_y\Big[P(y)\to\sum_x P(x)\Big],$$

$$\sum_x\Big(\Big[\sum_y P(y)\Big]\to P(x)\Big),\qquad \prod_x\,[P(x)]'+\sum_x P(x),$$

$$\Big[\prod_x P(x)\Big]'\equiv\sum_x\,[P(x)]',\qquad \Big[\sum_x P(x)\Big]'\equiv\prod_x\,[P(x)]'.$$

Les deux dernières équivalences expriment ceci: *nier que la proposition $P(x)$ est vraie quel que soit x, revient au même qu'affirmer l'existence d'un x pour lequel la proposition $P(x)$ est fausse; nier qu'il existe un x pour lequel $P(x)$ est vraie, revient au même qu'affirmer que $P(x)$ est fausse, quel que soit x.*

La seconde de ces équivalences donne par l'application de la loi de double négation:

$$\Big[\sum_x P(x)\Big]\equiv\Big(\prod_x\,[P(x)]'\Big)',$$

c'est-à-dire: *affirmer qu'il existe un objet x pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie, revient au même que nier que la proposition $P(x)$ est fausse, quel que soit x.*

On peut le regarder comme définition de la *notion d'existence* en mathématiques.

„Par l'existence on comprend en mathématique — écrit Hahn [1]) — une chose tout a fait différente que dans la vie quotidienne ou dans la géographie ou dans les sciences naturelles. S'il est clair pour nous ce qu'entendent par l'existence les sciences qui s'occupent du monde physique, il n'est pas tout à fait clair ce qu'entend par ce mot la mathématique. En vérité, il n'y a pas d'accord sur ce point entre les spécialistes, mathématiciens et philosophes. Il se trouvent parmi eux des représentants des nombreux points de vue; on pourrait dire: *quot capita — tot sententiae*" [2]).

[1]) H. Hahn, *Alte Probleme, neue Lösungen in der exacten Wissenschaften*, Fünf Wiener Vorträge, Zweiter Zyklus, Leipzig u. Wien 1934.

[2]) A. Fraenkel a consacré à la notion d'existence en mathématique une conférence spéciale: voir L'Enseignement Math. 34 (1935), pp. 18—32.

Si, pour deux fonctions propositionnelles $P(x)$ et $Q(x)$, on a

$$\prod_x [P(x) \to Q(x)],$$

on dit que *la fonction propositionnelle* $P(x)$ *implique la fonction propositionnelle* $Q(x)$. Certains auteurs appellent une telle implication entre les fonctions propositionnelles *implication formelle,* en reservant le nom *d'implication materielle* pour l'implication des propositions [1]).

Si A est une proposition et $P(x)$ une fonction propositionnelle, on a:

$$\left[A + \prod_x P(x)\right] \equiv \prod_x [A + P(x)].$$

Quelles que soient les fonctions propositionnelles $P(x)$ et $Q(x)$, on a:

$$\sum_x [P(x) + Q(x)] \equiv \left(\left[\sum_x P(x)\right] + \left[\sum_x Q(x)\right]\right),$$

$$\prod_x [P(x)\, Q(x)] \equiv \left(\left[\prod_x P(x)\right] \cdot \left[\prod_x Q(x)\right]\right)$$

$$\sum_x [P(x)\, Q(x)] \to \left[\sum_x P(x)\right] \cdot \left[\sum_x Q(x)\right],$$

$$\left\{\left[\prod_x P(x)\right] + \left[\prod_x Q(x)\right]\right\} \to \prod_x [P(x) + Q(x)].$$

Si $P(x, y)$ est une fonction propositionnelle (de deux variables), les expressions $\prod_x P(x, y)$ et $\sum_y P(x, y)$ sont des fonctions propositionnelles d'une seule variable (à savoir de y et de x respectivement), tandis que les expressions $\sum_y \prod_x P(x, y)$ et $\prod_x \sum_y P(x, y)$ sont des propositions (ordinaires). Comme on le voit sans peine, il y a pour toute fonction propositionnelle $P(x, y)$ de deux variables:

[1]) Voir par exemple L. Couturat, *Les principes de Mathématiques*, Paris 1905, p. 21.

$$\left[\sum_x \sum_y P(x, y)\right] \equiv \left[\sum_y \sum_x P(x, y)\right], \quad \left[\prod_x \prod_y P(x, y)\right] \equiv \left[\prod_y \prod_x P(x, y)\right]$$

$$\left[\sum_y \prod_x P(x, y)\right] \to \left[\prod_x \sum_y P(x, y)\right].$$

Le côté gauche de la dernière formule exprime qu'il existe un y (soit $y = y_0$) tel qu'on a $P(x, y)$ quel que soit x, et le côté droit exprime qu'il existe pour tout x un y tel qu'on a $P(x, y)$. Donc, si l'on a $P(x, y_0)$ quel que soit x, il existe évidemment pour tout x un y, par exemple, $y = y_0$, tel qu'on a $P(x, y)$.

Il importe de remarquer que l'on ne peut pas remplacer, dans la formule en question, le signe $\to$ par le signe $\equiv$. En effet, soit $P(x, y)$ la proposition suivante:

„Si x est un entier, y est un entier et $y > x$".

La proposition $\prod_x \sum_y P(x, y)$ est ici vraie; puisque, si l'on pose pour tout x, $y_x = x + 1$, si x est un entier, et $y_x = 0$ si x n'est pas un entier, la proposition $P(x, y_x)$ est évidemment vraie, quel que soit l'objet x. Cependant — comme on le sait — il n'existe aucun y pour lequel la proposition $P(x, y)$ soit vraie quel que soit x; par conséquent, la proposition $\sum_y \prod_x P(x, y)$ est fausse.

Les quantificateurs ne sont donc pas, en général, commutables.

On peut démontrer que, quelles que soient les propositions P_1 et P_2, la proposition $P_1 P_2$ équivaut à la proposition:

„Quelle que soit la fonction propositionnelle $P(x)$, on a

$$P_1 \equiv \left[\prod_x (P_1 \equiv P(x)) \equiv \prod_x (P_2 \equiv P(x))\right]".$$

Le produit logique (et pareillement la somme logique, l'implication et la négation) peut être ainsi défini par une équivalence au moyen du quantificateur général [1]).

[1]) Cf. A. Tarski, Fund. Math. 4, p. 199.

EXERCICE. Démontrer la table suivante d'implications donnée par Kuratowski[1]).

$$
\begin{tikzcd}
 & \sum_x \prod_y P(x,y) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_y \sum_x P(x,y) \arrow[dr] & \\
\prod_{x,y} P(x,y) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_x P(x,x) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \sum_x P(x,x) \arrow[r] & \sum_{x,y} P(x,y) \\
 & \sum_y \prod_x P(x,y) \arrow[r] \arrow[ur] & \prod_x \sum_y P(x,y) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

En terminant ce chapitre, ajoutons que la logique mathématique a une bibbliographie très copieuse: Church[2]) par exemple énumère sur presque 100 pages les oeuvres qui ont paru jusqu'à 1935.

Quant à l'histoire de la logique mathématique, déjà Leibniz avait eu l'idée de créer un *calcul philosophique (calculus ratiocinator)* permettant, à l'aide d'un simple calcul, de tirer les conséquences des prémisses données dans toutes les directions purement déductives[3]). Cette idée fut réalisée dans une certaine mesure par G. Boole dans son livre *The mathematical analysis of logic being an essay towards a calculus of deductiv reasoning*, Cambridge 1847 (82 pages) et dans son travail *The calculus of logic,* Cambridge and Dublin 1848, Mathematical Journal 3, pp. 183—198.

Connexes sont les travaux de G. Frege, Ch. Peirce, E. Schröder, L. Couturat, B. Russell and A. N. Whitehead, (Cf. F. Müller, *Führer durch die mathematische Litteratur,* Leipzig und Berlin, 1909, pp. 55—56, et A. Church, *Introduction to mathematical logic,* Part I, Annals of Mathematic Studies No 13, Princeton 1944, p. 32 et pp. 62—65).

---

[1]) C. Kuratowski, *Topologie* I, p. 14, Monografie Matematyczne t. XX, Warszawa—Wrocław 1948.

[2]) Church, *A Bibliography of Symbolic Logic,* The Journal of Symbolic Logic, I, pp. 121—218.

[3]) Cf. G. Peano, *Formulaire de Mathématiques,* Turin 1901, pp. III-IV.

„Créée seulement à la fin du XIX^e siècle, la Théorie des Ensembles s'est rapidement développée dans de nombreuses directions. Ses éléments font désormais partie de la culture générale, au même titre que les éléments de l'Algèbre, de la Géométrie, du Calcul différentiel".

Emile Borel

(C. R. Paris t. 228, p. 1681, Séance du 30 Mai 1949)

CHAPITRE II

ENSEMBLES, ÉLÉMENTS, SOUS-ENSEMBLES

§ 7. Ensembles et leurs éléments. Étant donnés certains objets, nous pouvons en former des ensembles. Nous pouvons, par exemple, former les ensembles de lettres $\{a, b, c\}$, $\{c, d, f, g, h\}$, $\{b, f\}$.

Des nombres *naturels* (c'est-à-dire des entiers positifs), on peut former par exemple l'ensemble de tous les nombres naturels qui sont plus petits que 10, celui de tous les nombres impairs, celui de tous les nombres naturels compris entre 100 et 1000, l'ensemble de tous les nombres carrés etc.

Voici d'autres exemples d'ensembles: l'ensemble de tous les habitants d'une ville considérée; l'ensemble de tous les mots utilisés dans ce livre; l'ensemble de tous les nombres rationnels; l'ensemble de tous les points d'une droite; l'ensemble de toutes les sphères dans l'espace.

Les objets qui forment un ensemble sont dits ses *éléments.* Ainsi, par exemple, les éléments de l'ensemble $\{b, f\}$ sont les lettres b et f (et seulement ces lettres). Le même objet peut être à la fois élément de divers ensembles: le nombre 1 par exemple est l'élément de l'ensemble de tous les nombres naturels, en même temps qu'il