

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXII

DR WOJCIECH RUBINOWICZ
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

WEKTORY
I
TENSORY

PODRECZNIK DLA STUDENTÓW FIZYKI

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

W A R S Z A W A — W R O C Ł A W 1 9 5 0

02338

MOJEJ ŻONIE

COPYRIGHT 1950, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
WARSZAWA (POLAND) WROCLAW
ŚNIADECKICH 8 ŚWIERCZEWSKIEGO 19

ALL RIGHTS RESERVED

NO PART OF THIS BOOK MAY BE TRANSLATED OR
REPRODUCED IN ANY FORM, BY MIMEOGRAPH
OR ANY OTHER MEANS, WITHOUT PERMISSION IN
WRITING FROM THE PUBLISHERS.



PRINTED IN POLAND

Nakład 3.000 egz. Stronic IV+170. Papier druk. satyn. 80 g 70×100 cm. Styczeń 1951.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę.

Amplituda liczby zespolonej 158.
Analityczna funkcja 158.
Antysymetryczny tensor 34.

Bezwzględna wartość wektora 2.

Całka obiegowa 64.
Cauchy-Riemanna równania 159.
Ciągła funkcja wektorowa 59.
Cosinusy kierunkowe 46.
Curl p. *Rotacja*.
Cyrkulacja p. *Krażenie*.

Darwinowska funkcja kulista 115.
Dodawanie geometryczne 8.
Dopełnienie skierowanego elementu płaskiego 19.
Dwuliniowy wzór 27.
Dwustronna powierzchnia 88.
Dywergencja pola wektorowego 74, 75, 92, — tensora 162, 163.

Ekwipotencjalna powierzchnia 72.
Element płaski skierowany, zorientowany 18, — wektorowy łuku 61, 91, — u dopełnienie 19.
Eulera kąty 51.

Freneta wzór 62.
Funkcja analityczna 158, — analityczna jednoznaczna 159, 160, — analityczna wieloznaczna 159, — Greena 142, — kulista darwinowska 115, — kulista drugiego rodzaju 111, — kulista ogólna n -tego rzędu 111, — kulista pierwszego rodzaju 111, — kulista prosta, strefowa 111, — kulista przyporządkowana 114, — Laplace'a 111, — Legendre'a 111, — liniowa 31, — tworząca 112, — wektorowa 58, — wektorowa ciągła 59.

Gaussa-Ostrogradzkiego twierdzenie 77.
Geometryczne dodawanie 8.
Gęstość liniowa wydajności 102, — powierzchniowa wydajności 102, 103, — przestrzenna wydajności 74.
Główne osie tensora 38.
Gradient 67, 69, 92, 94.
Greena funkcja 142, — twierdzenia 78, 79.

Hamiltona operator 70.

Iloczyn macierzy 41, — potrójny 24, 27, — skalarny 13, 27, 31, — tensorów 42, — wektora przez skalar 11, — wektorowy 21, 22, 27, — wewnętrzny 13, — zewnętrzny 21.
Inwariant przekształcenia 41, 48.

Jednorodna warstwa podwójna 139.
Jednospójny obszar 97.
Jednostkowe źródło 142, — y wektor 11.
Jednostronna powierzchnia 88.

Kąty Eulera 51.
Kierunek wektora 2, — *owe* cosinusy 46.
Koniec wektora 2.
Krażenie pola 82.
Kroneckera symbol 47.
Krzywoliniowe współrzędne 90.
Kulista funkcja p. *Funkcja*.
Kwadryka tensorowa 36.

Laplace'a funkcja 111, — operator 76, — równanie 76.
Laplasjan 76.
Legendre'a funkcja 111, — wielomiany 113.
Lewoskrętny układ trzech wektorów 18.
Linia działania wektora 3, — wektorowa 80.

Liniowa funkcja 31, — *e* źródło pojedyncze 101, — y operator 33.

Minor 49.

Miejsca osobliwe 79.
Moment rurki wektorowej 81, — warstwy podwójnej 107, — źródła podwójnego punktowego 106.
Möbiusa wstęga 88.

Należenie wirów przestrzennych 120.
Niezmiennik przekształcenia 41, 48.

Obiegowa całka 64.
Obszar jednospójny 97.
Odształcenia prędkości 86.
Operator Hamiltona 70, — Laplace'a 76, — liniowy 33.
Ortogonalne przekształcenie 48, — *osie* warunki 48, — y układ 26.
Osie główne tensora 38.
Osobliwe miejsca 79, — wiry 121, — źródła 99.

Parametr własny 41.
Płaski element skierowany, zorientowany 18, — *e* pole wektorowe 157.
Pochodna funkcji wektorowej 59, — kierunkowa 70.
Początek wektora 2.
Podstawowe wektory 26.
Podwójna warstwa 107, — warstwa jednorodna 139, — *e* źródło punktowe 106.
Podwyznacznik 49.
Poissona równanie 128.
Pojedyncza warstwa wirów 122, — *e* źródła 100, — *e* źródło liniowe 101, — *e* źródło powierzchniowe 102, — *e* źródło punktowe 100.
Pole 66, — bez wirów 73, 98, — bez źródeł 76, 148, — niewirowe 73, — potencjalne 66, — skalarnie 66, — solenoidalne 81, — tensorowe 66, 162, — wektorowe 66, — wektorowe płaskie 157.
Potencjał skalarny 66, 67, 96, — wektorowy 149, — *u* równanie 76.
Powierzchnia dwustronna 88, — ekwipotencjalna 72, — jednostronna 88, — *owa* gęstość wydajności 102, 103, — *owe* wiry 122, — *owe* źródło pojedyncze 102.
Prawoskrętna śruba 17, — y układ trzech wektorów 17.
Prędkość odształcenia 86.
Prostokątny układ 26.

Przeciwzmiennicze współrzędne wektora 26.
Przedstawiciele tensora 33.
Przekształcenie ortogonalne 48.
Przepływ wektora 74.
Przeźrzenna gęstość wydajności 74.
Punkt rozgałęzienia funkcji analitycznej 160, — *zaczepienia* wektora 2, — *owe* źródła podwójne 106, — *owe* źródła pojedyncze 100, — *owe* źródła wielokrotne 109.

Reguła śruby prawoskrętnej 17.
Rodrigues'a wzór 120.
Rotacja pola wektorowego 83, 85, 93.
Rozbieżność p. *Dywergencja*.
Równania Cauchy-Riemanna 159, — *e* Laplace'a 76, — *e* Poissona 128, — *e* potencjału 76, — *e* sekularne (wielkwe) 40.
Różnica wektorów 8, 27.
Rurka wektorowa 80, — wirowa 121, — wirowa odosobniona 121.

Sekularne równanie 40.
Skalar 1, — *ne* pole 66, — *ny* iloczyn 13, 27, 31, — *ny* potencjał 66, 67, 96.
Skierowany element płaski 18.
Składowe tensora 33, — wektora skalarnie 26, — wektora wektorowe 6, 9, 26.
Skok 102, 107, 122, — *owe* zagadnienie 138.
Skośny tensor 34.
Solenoidalne pole 81.
Stokesa twierdzenie 87.
Strumień wektora 74.
Suma tensorów 35, — wektorów 5, 27.
Swobodny wektor 3.
Symbol Kroneckera 47.
Symetryczny tensor 34.

Śereki 74.
Ślizgający się wektor 3.
Śruby prawoskrętnej reguła 17.

Tensor 33, — antysymetryczny czyli skośny 34, — symetryczny 34, — *a* osie główne 38, — *a* przedstawiciele (składowe) 33, — *owa* kwadryka 36, — *owe* pole 66, 162, — *ów* iloczyn 42, — *ów* suma 35.
Transpozycja przekształcenia 47.
Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego 77, — Greena 78, 79, — o jednoznaczności pola wektorowego

wego 125, — o wzajemności 144, — Stokesa 87.
Tworząca funkcja 112.

Układ lewoskrętny trzech wektorów 18, — obrócony 51, — ortogonalny 26, — pierwotny 51, — prawoskrętny trzech wektorów 17, — prostokątny 26.

Umiejscowiony wektor 3.
Unormowania warunki 48, -ny wektor 48.

Warstwa podwójna wirów 156, — podwójna źródeł 107, — podwójna jednorodna 139, — pojedyncza wirów 122, — pojedyncza źródeł 102.
Wartość bezwzględna wektora 2, -i własne 41.

Warunki ortogonalności 48, — unormowania 48.

Wektor 2, — jednostkowy 11, — swobodny 3, — ślizgający się 3, — umiejscowiony 3, — unormowany 48, — wodzący 55, 60, — zerowy 7, — związany 3, -a kierunek 2, -a koniec 2, -a linia działania 3, -a początek 2, -a przepływ, strumień 74, -a punkt zaczepienia 2, -a składowe skalarne 26, -a składowe wektorowe 6, 9, 26, -a współrzędne przeciwniennicze 26, -a współrzędne współniennicze 26, -a wartość bezwzględna 2, -a zwrot 2, -owa funkcja 58, -owa linia 80, -owa rurka 80, -owe pole 66, -owe pole płaskie 157, -owe składowe wektora 6, 9, 26, -owy iloczyn 21, 22, 27, -owy potencjał 149, -ów wypadkowa 5, 6, -ów różnica 8, 27, -ów suma 5, 27, -y podstawowe 26.
Wewnętrzny iloczyn 13.

Wiekowe równanie 40.
Wielokrotne źródła 100, — źródło punktowe 109.

Wielomiany Legendre'a 113.
Wieloznaczna funkcja analityczna 159.

Wirowa rurka 121, — rurka odosobniona 121, -e włókno 121.

Wiry liniowe 121, — osobliwe 121, — powierzchniowe 122, -ów przestrzennych nateżenie 120.

Własne wartości 41, — zagadnienie 41, -y parametr 41.

Włókno wirowe 121.
Wodzący wektor 55, 60.

Współrzędne krzywoliniowe 90, — wektora przeciwniennicze 26, — współniennicze 26.

Wstęga Möbiusa 88.
Wydajność źródeł 74, -ci gęstość liniowa 102, -ci gęstość powierzchniowa 102, 103, -ci gęstość przestrzenna 74.

Wypadkowa dwóch wektorów 5, 6.
Wzór dwuliniowy 27, — Freneta 62, — Rodrigues'a 120.

Zagadnienie własne 41, — skokowe 138.

Zerowy wektor 7.
Zewnętrzny iloczyn 21.

Zorientowany element płaski 18.
Związany wektor 3.

Zwrot wektora 1.

Źródła 74, — osobliwe 99, — pojedyncze 100, — wielokrotne 100.

Źródło jednostkowe 142, — podwójne punktowe 106, — pojedyncze liniowe 101, — pojedyncze powierzchniowe 102, — pojedyncze punktowe 100, — wielokrotne punktowe 109.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ I. RACHUNEK WEKTOROWY I TENSOROWY.

A. ALGEBRA WEKTORÓW I TENSORÓW.

	Str.
§ 1. Skalary i wektory	1
§ 2. Dodawanie i odejmowanie wektorów	5
§ 3. Mnożenie wektora przez skalar	11
§ 4. Iloczyn skalarny wektorów	13
§ 5. Iloczyn wektorowy	16
§ 6. Przedstawienie wektorów za pomocą współrzędnych	25
§ 7. Definicja tensora	31
§ 8. Tensory symetryczne i antysymetryczne	33
§ 9. Własności tensora symetrycznego	36
§ 10. Zmiana układu współrzędnych	45
§ 11. Pojęcia wektora i tensora z punktu widzenia przekształceń układów współrzędnych	53

B. ANALIZA WEKTORÓW.

§ 12. Różniczkowanie wektorów	58
§ 13. Całkowanie wektorów	63

ROZDZIAŁ II. TEORIA PÓL.

§ 1. Pole w fizyce	66
§ 2. Gradient pola skalarnego	66
§ 3. Pola wektorowe mające potencjał	72
§ 4. Wydajność źródeł. Dywergencja	73
§ 5. Twierdzenie Gaussa i twierdzenie Greena	77
§ 6. Przedstawienie geometryczne pola wektorowego bez źródeł	80
§ 7. Rotacja pola wektorowego	82
§ 8. Twierdzenie Stokesa	87
§ 9. Układy krzywoliniowych współrzędnych ortogonalnych	90
§ 10. Potencjał pola wektorowego	96
§ 11. Źródła osobliwe pojedyncze	99
§ 12. Źródła podwójne	104
§ 13. Źródła punktowe wielokrotne i funkcje kuliste	109
§ 14. Wiry osobliwe	120

§ 15. Twierdzenie o jednoznaczności pola wektorowego	124
§ 16. Pola wektorowe bez wirów, wytwarzane przez źródła przestrzenne	128
§ 17. Obliczenie pola wektorowego bez wirów, mającego źródła osobliwe	137
§ 18. Funkcja Greena a zagadnienie brzegowe dla pól wektorowych bez wirów w obszarach ograniczonych	141
§ 19. Pole wektorowe wirów przestrzennych	148
§ 20. Pole wektorowe wirów osobliwych	154
§ 21. Pola wektorowe płaskie bez źródeł i wirów przestrzennych	157
§ 22. Dywergencja tensorowa	162
SKOROWIDZ NAZW	166

ERRATA

Stronica, wiersz:	jest:	ma być:
25 ^{10, 11}	180	180°
55 ¹⁰ ₈	Maxwellowskich	maxwellowskich
56 ³ ₆	Maxwellowskich	maxwellowskich
56 ₄	stronach tego	stronach
56, rys. 25	Maxwellowskich	maxwellowskich
57 ^{4, 19}	Maxwellowskich	maxwellowskich
57, rys. 26	Maxwellowskich	maxwellowskich
80 ⁷	<i>Linia wektorową</i>	<i>Linia wektorową lub linią pola (wektorowego)</i>
84 ₁	2UF _K .	2UF _K +...
107 ¹	Warstwa podwójna	Źródła powierzchniowe podwójne, czyli warstwa podwójna
165 ⁹	Maxwellowskie	maxwellowskie

