

ROZDZIAŁ II

TEORIA PÓL

§ 1. Pole w fizyce. Mówimy w fizyce o *polu*, by wyrazić w jednym słowie, że każdemu punktowi danego obszaru przestrzennego przyporządkowana jest pewna wartość jakiejś wielkości fizycznej.

Rozróżniamy *pola skalarne, wektorowe i tensorowe*. Mamy np. do czynienia z polem skalarnym, gdy badamy rozkład temperatury lub gęstości masy w danym ciele, albo przebieg potencjału w przestrzeni. Przykładem pola wektorowego jest pole prędkości cieczy i pole siły grawitacyjnej ziemi. Za przykład pola tensorowego służyć może pole napięć w ciele sprężystym. Pojęcie pola ma w fizyce znaczenie podstawowe.

Zajmiemy się przede wszystkim teorią pól wektorowych. Teoria ta została stworzona pierwotnie dla hydrodynamicznych pól prędkości. Dlatego większość pojęć jakie w niej napotykamy, ma nazwy zaczerpnięte z hydrodynamiki. I dziś jeszcze najbardziej pogładowa droga do tych pojęć (którą i my pójdziemy) wiedzie poprzez model hydrodynamiczny. Słowa „model” użyliśmy celowo, by podkreślić, że będziemy musieli przypisywać cieczenom takie własności, jakich nie spotykamy w cieczach rzeczywistych.

§ 2. Gradient pola skalarnego. Weźmy najpierw pod uwagę całkiem specjalne pola wektorowe, mianowicie takie, które — jak powiadamy — mają *potencjał*. Niech

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

będzie polem skalarnym ciągłym i mającym pochodne ciągłe. Możemy przyporządkować mu pole wektorowe $\vec{v}$ tak, żeby to przyporządkowanie było niezależne od układu współrzędnych x, y, z . Wektorem związanym w ten sposób z potencjałem φ jest np. całka powierzchniowa po powierzchni zamkniętej F

$$(2.1) \quad \int_F d\vec{f} \vec{n} \varphi = \int_F d\vec{f} \varphi.$$

Przy tym stale zakładamy (tak jak i dla wszystkich dalej rozpatrywanych całek po powierzchniach zamkniętych), że $\vec{n}$ jest normalną zewnętrzną.

Wektor (2.1) nie jest jednak związany z żadnym poszczególnym punktem przestrzeni. Gdybyśmy chcieli takie powiązanie uzyskać przez przejście do granicy, ściągając powierzchnię F do pewnego punktu O , to otrzymalibyśmy zero, ponieważ obszar całkowania F dążyłby wówczas do zera. By tego uniknąć, moglibyśmy (2.1) podzielić przez odpowiednią wielkość, znikającą razem z F , a gdyby $\vec{n}$ w (2.1) nie występowało — po prostu przez pole powierzchni F . Wynik byłby jednak w tym wypadku trywialny, otrzymalibyśmy bowiem φ w punkcie O . Wektor $\vec{n}$ w całości (2.1) powoduje jednak, że wyrażenie to znika jeszcze prędzej. Przy przejściu granicznym $F \rightarrow O$ wszystkie wartości φ na F (ze względu na ciągłość) dążą do φ w punkcie O ; a dla stałego φ całka (2.1) znika ponieważ $\int_F \vec{n} d\vec{f} = 0$ (p. I, 13.2)¹⁾. Dzielimy przeto (2.1) przez objętość V obszaru ograniczonego powierzchnią F , dochodząc w ten sposób do przejścia granicznego:

$$(2.2) \quad \text{grad } \varphi = \lim_{F \rightarrow O} \frac{1}{V} \int_F d\vec{f} \vec{n} \varphi.$$

Jeżeli ta wartość graniczna istnieje, to otrzymany wektor (2.2) nazywa się *gradientem*.

Zaznaczamy, że przy tym przejściu do granicy wszystkie punkty powierzchni F mają zmierzać do punktu O . Przy tym oczywiście znika objętość V . Gdybyśmy jednak żądali tylko znikania V (jak to się zwykle czyni), to przy takim przejściu do granicy powierzchnia F mogłaby ulec spłaszczeniu w skończony element powierzchniowy lub liniowy. Ale wtedy wartość graniczna (2.2) oczywiście nie byłaby charakterystyczna dla punktu O , lecz dla odpowiedniego elementu powierzchniowego lub liniowego; w ogólności więc różniłaby się od (2.2). Ze względu na te możliwości wartość

graniczna $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F d\vec{f} \vec{n} \varphi$ w ogólności nie istnieje, chyba gdyby zało-

żyć dodatkowo, że V dąży do zera we wszystkich swych wymiarach. W ten sposób jednak dochodzimy właśnie do warunku $F \rightarrow O$.

¹⁾ Wzory z Rozdziału I będziemy odtąd oznaczali umieszczając przed numerem paragrafu rzymską jedynekę.

Najprościej możemy dowieść, że wartość graniczna (2.2) istnieje, jeżeli ją obliczymy. W matematyce często spotykamy tego rodzaju dowody istnienia wartości granicznej. Aby obliczyć (2.2), rozwijamy φ w otoczeniu punktu O na szereg Taylora:

$$(2.3) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \zeta + \dots$$

Pochodne $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots$ są to pochodne pola φ w punkcie O , a ξ, η, ζ są to współrzędne względem punktu O :

$$(2.4) \quad \xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0.$$

Dla całki (2.1) otrzymujemy teraz

$$(2.5) \quad \int_F df \bar{n} \varphi = \varphi_0 \int_F df \bar{n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_F df \bar{n} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \int_F df \bar{n} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \int_F df \bar{n} \zeta + \dots$$

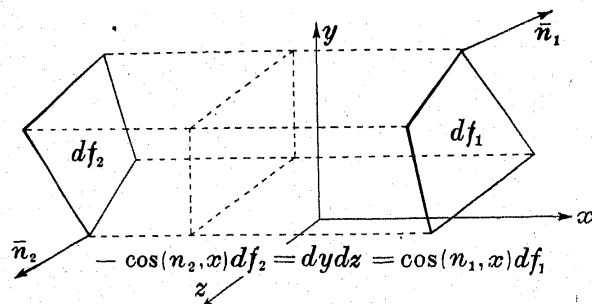
Pierwszy wyraz po prawej stronie znika ze względu na (I, 13.2). Aby obliczyć następne wyrazy, musimy znać wartości całek postaci

$$(2.6) \quad I_{\xi x} = \int_F df \cos(n, x) \xi \quad \text{ i } \quad I_{\eta x} = \int_F df \cos(n, x) \eta,$$

bo np.

$$\begin{aligned} \int_F df \bar{n} \xi &= \bar{i} \int_F df \cos(n, x) \xi + \bar{j} \int_F df \cos(n, y) \xi + \bar{k} \int_F df \cos(n, z) \xi = \\ &= \bar{i} I_{\xi x} + \bar{j} I_{\xi y} + \bar{k} I_{\xi z}. \end{aligned}$$

Aby obliczyć np. całki (2.6), dzielimy powierzchnię F na elementy powierzchniowe df za pomocą graniastoslupów równole-



Rys. 30. Obliczanie całek $I_{\xi x}, I_{\eta x}$ itd.

głych do osi x (rys. 30). Dla dwu elementów df , wykrojonych przez jeden i ten sam graniastoslup, wartości $df \cos(n, x)$ różnią

się tylko znakiem. Różniczka $df \cos(n, x)$ jest bowiem rzutem df na płaszczyznę yz . Rzut ten dla df_1 (rys. 30) ma znak $+$ (kąt między $\bar{n}_1$ a kierunkiem dodatnim osi x jest ostry), a dla df_2 rzut ten ma znak $-$. Stąd wnosimy, że

$$(2.7a) \quad I_{\eta x} = 0,$$

ponieważ pod znakiem całki (por. (2.6)) występują $df_1 \cos(n_1, x)$ i $df_2 \cos(n_2, x)$ pomnożone przez to samo η . Jeżeli jednak $df_1 \cos(n_1, x)$ pomnożymy przez ξ , to otrzymamy objętość tej części graniastoslupa, która zawarta jest między płaszczyzną yz a df_1 . Natomiast $df_2 \cos(n_2, x) \xi$ jest objętością (ze znakiem $+$) części graniastoslupa zawartej między df_2 a płaszczyzną yz . Oba te składniki całki $I_{\xi x}$ są więc równe objętości graniastoslupa między df_2 a df_1 . Zatem

$$(2.7b) \quad I_{\xi x} = V.$$

Ogólnie: całki $I_{\xi x}, \dots$, których oba wskaźniki odnoszą się do jednej i tej samej osi, dają V , a pozostałe dają zero.

Mamy więc

$$(2.8) \quad \int_F df \bar{n} \xi = \bar{i} V, \quad \int_F df \bar{n} \eta = \bar{j} V, \quad \int_F df \bar{n} \zeta = \bar{k} V.$$

Dla (2.5) otrzymujemy zatem

$$(2.9) \quad \int_F df \bar{n} \varphi = V \left(\bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \dots$$

a więc przejście do granicy (2.2) daje wynik

$$(2.10) \quad \text{grad } \varphi = \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Łatwo się przekonać, że wyrazy wyższego rzędu w (2.3) nie mają żadnego wpływu na granicę (2.2). Zamiast całek (2.8) dają one bowiem całki typu $\int_F df \bar{n} \xi^2$ lub $\int_F df \bar{n} \xi \eta$, które w każdym razie

prędzej dążą do zera niż objętość V . Możemy zresztą przeprowadzić te rozważania zupełnie ściśle, posługując się znanym z rachunku całkowego twierdzeniem o wartości średniej.

Składowa x wektora $\text{grad } \varphi$ jest według (2.10) równa $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Ponieważ jednak wartość bezwzględna i kierunek wektora $\text{grad } \varphi$

nie zależą od wyboru układu, w którym $\text{grad } \varphi$ obliczamy, więc możemy oś x skierować dowolnie, np. tak, żeby miała ona kierunek wektora jednostkowego $\bar{s}$. Jeśli długość łuku na $\bar{s}$ oznaczamy przez s , to $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ oznacza składową wektora $\text{grad } \varphi$ w kierunku $\bar{s}$:

$$(2.11) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \bar{s} \text{ grad } \varphi.$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ nazywamy *pochoďną funkcji φ w kierunku $\bar{s}$* lub krócej *pochoďną kierunkową*.

Składowa wektora w jego własnym kierunku równa jest jego wartości bezwzględnej; w innych kierunkach jest jednak mniejsza. Oznaczając przez $\bar{\sigma}$ wektor jednostkowy w kierunku $\text{grad } \varphi$, a przez σ długość łuku, liczoną w jego kierunku, widzimy, że wartość $\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = |\text{grad } \varphi|$ jest zawsze większa od wartości $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|$ odpowiadającej innemu wektorowi jednostkowemu $\bar{s}$ o jakimkolwiek kierunku. Zatem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \geq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|.$$

Wynika stąd, że wektor $\text{grad } \varphi$ — zgodnie zresztą z jego nazwą — ma kierunek największego wzrostu potencjału φ .

Możemy uważać, że wektor $\text{grad } \varphi$ powstaje z φ przez zastosowanie do φ pewnego operatora. Nazywamy go *operatorem Hamiltona* i oznaczamy przez odwróconą dużą literę delta ∇ .

Zależnie od tego, czy opieramy się na równaniu (2.2), czy na równaniu (2.10), ∇ przybiera postać

$$(2.12a) \quad \nabla = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F df \bar{n}$$

lub

$$(2.12b) \quad \nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

W obu wypadkach

$$(2.13) \quad \text{grad } \varphi = \nabla \varphi$$

i w obu wypadkach możemy tak postępować, że φ mnożymy for-

malnie przez operator ∇ , a następnie iloczyn $\int_F df \bar{n} \cdot \varphi$ lub $\frac{\partial}{\partial x} \varphi$ uważamy za całkę $\int_F df \bar{n} \varphi$ lub za pochodną $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Operator ∇ ma więc równocześnie charakter wektorowy i charakter symbolu różniczkowania. Z jednej strony bowiem przekształca on skalar φ w wektor $\text{grad } \varphi$, a z drugiej zachowuje się jak operator różniczkowania, np. w przypadku:

$$(2.14) \quad \nabla \varphi \psi = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$$

czyli

$$(2.14a) \quad \text{grad } \varphi \psi = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi.$$

Możemy łatwo związek ten sprawdzić, obliczając składowe x, y, z dla obu stron (2.14).

Dotychczas nie mieliśmy jeszcze żadnych korzyści z wprowadzenia operatora ∇ , moglibyśmy więc uważać je za zupełnie zbędne. W § 4 i § 7 przekonamy się jednak, jak wielkie znaczenie heurystyczne ma operator Hamiltona.

Zauważmy, że gdy $c = \text{const}$, to $\text{grad } c = 0$, a jeśli $\text{grad } \Phi = 0$,

to z (2.10) wynika, że $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$, czyli $\Phi = \text{const}$.

A więc: *stała jest jedyną funkcją potencjalną, której gradient znika w całej przestrzeni.*

ZADANIA. 1. Dowieść, że

$$(2.15) \quad \text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi.$$

2. Dowieść, że

$$(2.16) \quad \text{grad } f(r) = f'(r) \frac{\bar{r}}{r} = f'(r) \cdot \bar{r}^*,$$

gdzie $\bar{r}$ oznacza wektor wodzący z punktu stałego P .

Przypadki szczególne:

$$(2.16a) \quad \text{grad } r = \frac{\bar{r}}{r} = \bar{r}^*,$$

$$(2.16b) \quad \text{grad } r^2 = 2\bar{r},$$

$$(2.16c) \quad \text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\bar{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \bar{r}^*.$$

3. Sprawdzić że stałe pole wektorowe $\vec{v} = \vec{v}_0$ ma potencjał $\varphi = -\vec{v}_0 \vec{r}$.

4. Obliczyć $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F df \vec{n} \varphi$, gdy przy V zdużającym do zera

F przechodzi w element płaski f .

Rozwiązanie. Jeżeli $\vec{N}$ jest (którakolwiek) normalną elementu f , to

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F df \vec{n} \varphi = \vec{N} \int_f \frac{\partial \varphi}{\partial N} df.$$

§ 3. Pola wektorowe mające potencjał. Geometryczne przedstawienie rozkładu potencjału $\varphi = \varphi(x, y, z)$ w przestrzeni uzyskujemy, wyobrażając sobie w tej przestrzeni powierzchnie równych potencjałów, zwane *powierzchniami ekwipotencjalnymi*:

$$(3.1) \quad \varphi(x, y, z) = C + n \Delta C \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

W tym przedstawieniu stałe odpowiadające dwu sąsiadującym ze sobą powierzchniom różnią się więc zawsze o jedną i tę samą stałą wielkość ΔC . Za pomocą tych powierzchni możemy zorientować się nie tylko co do przebiegu funkcji potencjalnej φ , ale też co do struktury pola wektorowego

$$(3.2) \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi$$

w sposób następujący:

1^o $\vec{v}$ jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. Ponieważ φ nie zmienia się na takiej powierzchni, więc mamy $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ dla każdego leżącego na niej kierunku $\vec{s}$; a jeżeli znika składowa $\vec{v}$ w każdym kierunku na powierzchni potencjalnej, to $\vec{v}$ jest prostopadłe do tej powierzchni;

2^o Jak wynika z § 2, koniec wektora $\vec{v}$ zwrócony jest w kierunku powierzchni ekwipotencjalnej o większej wartości φ ;

3^o Z tegoż przedstawienia geometrycznego możemy ponadto odczytać (przynajmniej w przybliżeniu) wartość bezwzględna wektora $\vec{v}$. Narysujmy w pewnym punkcie jednej z powierzchni ekwipotencjalnych (3.1) normalną i niech $\Delta \sigma$ będzie odmierzoną na niej

odległością od następnej powierzchni ekwipotencjalnej. Wówczas mamy (w przybliżeniu)

$$(3.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \sim \frac{\Delta C}{\Delta \sigma}.$$

Wartość bezwzględna wektora $\vec{v}$ jest więc (w przybliżeniu) odwrotnie proporcjonalna do odległości dwu sąsiadujących powierzchni ekwipotencjalnych. Im większy zatem jest odstęp między tymi powierzchniami, tym mniejszy jest gradient, a im mniejszy odstęp, tym większy gradient.

Zgodnie z utartym zwyczajem niektóre pola wektorowe w fizyce (często np. pole prędkości potencjalnego ruchu cieczy w hydrodynamice) wiążemy z ich potencjałem za pomocą równania (3.2). W innych przypadkach korzystniej jest jednak, ze względu na znaczenie fizyczne pola wektorowego i potencjału, wyrazić pole wektorowe przez ujemny gradient potencjału:

$$(3.2a) \quad \vec{v} = -\text{grad } \varphi.$$

W takich przypadkach $\vec{v}$ ma kierunek największego spadku potencjału φ .

W dalszych rozważaniach będziemy się zawsze posługiwali związkiem (3.2a). Chcąc więc używać wzorów tego podręcznika do rozważań opierających się na założeniu (3.2), trzeba pozmieniać we wzorach znak potencjału.

Gdy dany jest potencjał φ , możemy łatwo otrzymać przynależne do niego pole wektorowe $\vec{v}$ przez różniczkowanie. Niewspółmiernie trudniejsze jest odwrócenie tego zadania: dane jest pole wektorowe $\vec{v}$ szukamy zaś potencjału φ . Rozwiązanie odraczamy do § 10 tego rozdziału, gdzie w twierdzeniu Stokesa znajdziemy odpowiednie narzędzie do pokonania występujących tu trudności.

Pola mające potencjał nazywać będziemy w dalszym ciągu *polami niewirowymi*, czyli *polami bez wirów*. Nazwę tę uzasadnimy jednak też dopiero w § 10.

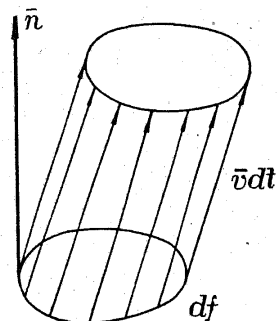
§ 4. Wydajność źródeł. Dywergencja. Wyobraźmy sobie dowolnie dane pole wektorowe $\vec{v}$, które interpretujemy jako pole prędkości cieczy nieściśliwej. Niech F będzie jakąkolwiek powierzchnią zamkniętą lub mającą brzegi. Pytamy, jaka ilość cieczy przepływa przez F , jeżeli mierzymy ją w mierze przestrzennej, a więc w cm^3 , i jeżeli uważamy za dodatni przepływ w kierunku normalnej $\vec{n}$ do F .

Objętość cieczy przepływającej w czasie dt przez element powierzchniowy df równa jest objętości walca o podstawie df , którego pobocznice tworzą wektory $\bar{v}dt$ o punktach zaczepienia na brzegu podstawy df (rys. 31). Jeżeli $\bar{n}$ jest normalną do df , to wysokość tego walca równa jest $\bar{n}\bar{v}dt$, a więc jego objętość $df(\bar{n}\bar{v})dt = \bar{v}dfdt$. W jednostce czasu przepływa więc przez F objętość cieczy

$$(4.1) \quad \int_F df \bar{n}\bar{v} = \int_F df \bar{v} = \int_F v_n df,$$

gdzie v_n jest składową normalną prędkości $\bar{v}$.

Całkę tę nazywamy, niezależnie zresztą od znaczenia fizycznego wektora $\bar{v}$, *strumieniem* lub *przepływem wektora $\bar{v}$ przez powierzchnię F* .



Rys. 31. Strumień wektora $\bar{v}$ przez df .

Jeżeli F ogranicza obszar R o objętości V , a $\bar{n}$ jest normalną zewnętrzną do powierzchni F , to przepływ (4.1) określa nam nadmiar cieczy wypływającej z R nad cieczą wpływającą przez F do R . Dla cieczy nieściśliwej wyrażenie (4.1) musiałoby znikać, ponieważ ilość cieczy zawartej w obszarze R nie mogłaby ulegać zmianom, chyba że w R istniałyby *źródła*, doprowadzające ciecz, jako źródła dodatnie do R lub odprowadzające ją, jako źródła ujemne czyli *ścieki*, z tego obszaru. Wtedy przepływ (4.1) określa nadmiar cieczy wpływającej do R przez wszystkie źródła dodatnie nad cieczą wypływającą z R przez ścieki.

Wyrażenie (4.1) nazywamy *wydajnością źródeł* znajdujących się w obszarze R .

Obojętne jest przy tym, czy źródła w R są punktowe, liniowe, powierzchniowe, czy przestrzenne.

Jeżeli mamy do czynienia ze źródłami przestrzennymi, to wartość graniczna

$$(4.2) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F df \bar{n}\bar{v}$$

określa wydajność źródeł przestrzennych, przypadających na jednostkę przestrzeni, czyli *gęstość przestrzenną wydajności*

Wyrażenie skalarne (4.2) możemy obliczyć formalnie dla dowolnego pola wektorowego. Nazywamy je wówczas *dywergencją* lub *rozbieżnością* pola wektorowego $\bar{v}$.

$\operatorname{div} \bar{v}$ istnieje zawsze, gdy składowe wektora $\bar{v}$ mają pochodne. Aby się o tym przekonać, obliczmy $\operatorname{div} \bar{v}$. Możemy to uczynić tak samo jak dla grad φ w § 2. Ponieważ

$$\bar{n}\bar{v} = \cos(n, x)v_x + \cos(n, y)v_y + \cos(n, z)v_z,$$

więc całka (4.1) rozpada się na trzy całki:

$$\int_F df \bar{n}\bar{v} = \int_F \cos(n, x)v_x df + \int_F \cos(n, y)v_y df + \int_F \cos(n, z)v_z df.$$

Ale ze względu na

$$v_x = v_x|_0 + \frac{\partial v_x}{\partial x}\xi + \frac{\partial v_x}{\partial y}\eta + \frac{\partial v_x}{\partial z}\zeta + \dots$$

(przy oznaczeniach (2.4), str. 68) pierwsza z tych całek równa jest

$$\begin{aligned} \int_F \cos(n, x)v_x df &= v_x|_0 \int_F \cos(n, x) df + \frac{\partial v_x}{\partial x} \int_F \cos(n, x)\xi df + \\ &+ \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_F \cos(n, x)\eta df + \frac{\partial v_x}{\partial z} \int_F \cos(n, x)\zeta df + \dots \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (I, 13.2a) i (2.7a i b), otrzymujemy

$$\int_F \cos(n, x)v_x df = \frac{\partial v_x}{\partial x} V + \dots,$$

tak że

$$\int_F df \bar{n}\bar{v} = V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \dots$$

Definicja (4.2) daje więc ostatecznie:

$$(4.3) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Z formalnego punktu widzenia możemy uważać $\operatorname{div} \bar{v}$ za iloczyn skalarny operatora Hamiltona ∇ (por. (2.12a i b)) przez wektor $\bar{v}$, jak to wynika z (4.2) i (4.3).

Z (2.10) i (4.3) wnosimy, że:

$$(4.4) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi,$$

gdzie

$$(4.4a) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2.$$

Δ nazywamy *operatorem Laplace'a* lub *laplasjanem*.

Z punktu widzenia fizyki $\Delta \varphi$ oznacza wydajność źródeł przestrzennych, przypadających na jednostkę przestrzeni pola wektorowego bez wirów.

Pola wektorowe dla których dywergencja znika, nazywamy *polami bez źródeł*.

Równanie

$$\Delta \varphi = 0$$

znaczy więc, że pole wektorowe potencjału φ jest polem bez źródeł.

Nazywamy je *równaniem potencjału* lub *równaniem Laplace'a*.

Na mocy (2.10) i (4.3) możemy stwierdzić, że

$$(4.5) \quad \operatorname{div} \varphi \bar{v} = \varphi \operatorname{div} \bar{v} + \bar{v} \operatorname{grad} \varphi.$$

Podstawiając tu $\bar{v} = \operatorname{grad} \psi$, otrzymujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) &= \varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi = \\ &= \varphi \Delta \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Niewątpliwie w hydrodynamice cieczy *nieściśliwych* wydajność źródeł możemy mierzyć wytworzoną przez nie objętością cieczy. Ponieważ jednak w zastosowaniach tej definicji wydajności źródeł do teorii elektromagnetyzmu wystąpiłby czynnik 4π właśnie tam, gdzie jest on niepożądany, więc, aby tego uniknąć, określaliśmy w tym przypadku wydajność źródeł nie przez wzór (4.1), lecz przez wzór

$$(4.1a) \quad \frac{1}{4\pi} \int_F d\bar{f} \bar{n} \bar{v} = \frac{1}{4\pi} \int_F d\bar{f} \bar{v} = \frac{1}{4\pi} \int_F v_n d\bar{f}.$$

Definicję (4.1a) możemy interpretować hydrodynamicznie, zakładając, że mamy do czynienia z cieczą nieściśliwą o gęstości $\frac{1}{4\pi}$,

oraz że mierzymy wydajność źródeł leżących wewnątrz F przez masę, wytworzoną przez nie na jednostkę czasu.

Jeżeli miarę wydajności określamy wzorem (4.1a), a nie wzorem (4.1), to dla źródeł przestrzennych określić należy wydajność na jednostkę przestrzeni nie wzorem (4.2), lecz wzorem

$$(4.2a) \quad \varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \bar{v}.$$

W dalszych rozważaniach będziemy więc musieli zawsze dobrać zważać na to, którą definicję wydajności się posługujemy.

§ 5. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego i twierdzenia Greena. Założmy, że w obszarze R , ograniczonym powierzchnią F , znajdują się źródła przestrzenne o wydajności $\operatorname{div} \bar{v}$. Na jednostkę czasu wytwarzają one

$$\int_R \operatorname{div} \bar{v} d\tau$$

($d\tau$ = element przestrzenny) jednostek objętości cieczy. Nadmiar cieczy wypływającej przez powierzchnię F nad cieczą wpływającą przez tę powierzchnię określony jest całką powierzchniową (4.1):

$$\int_F v_n d\bar{f} = \int_F d\bar{f} \bar{n} \bar{v}.$$

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa, obie te wielkości muszą być równe, ponieważ wówczas magazynowanie (dodatnie lub ujemne) cieczy w obszarze R jest niemożliwe. W danym razie jest więc

$$(5.1) \quad \int_F d\tau \operatorname{div} \bar{v} = \int_F v_n d\bar{f} = \int_F d\bar{f} \bar{n} \bar{v}.$$

Wzór (5.1) nazywamy *twierdzeniem Gaussa-Ostrogradzkiego*.

Daje ono przekształcenie pewnej całki przestrzennej w całkę powierzchniową. Otrzymaliśmy je przez rozważania fizyczne dla pola prędkości cieczy nieściśliwych. Jest ono jednak prawdziwe dla wszystkich pól wektorowych ciągłych i różniczkowalnych. Oto dowód matematyczny.

Obszar R rozcinamy na elementy przestrzenne R_i , w kształcie kostek. Ograniczenie kostki R_i oznaczamy przez F_i , a normalną

zewnątrzną do F , — przez $\bar{n}$. Wówczas spełniona jest tożsamościowo równość

$$(5.2) \quad \int_F d\bar{f} \bar{n} \bar{v} = \sum_{\nu} \int_{F_{\nu}} d\bar{f} \bar{n} \bar{v}.$$

Całki wzdłuż wspólnych ścian kostek znoszą się w sumie (5.2), ponieważ normalne $\bar{n}$ po obu stronach tych ścian mają przeciwne zwroty a wskutek tego (bo założyliśmy ciągłość $\bar{v}$) iloczyny skalarne różnią się tylko znakiem. W sumie (5.2) pozostaje więc tylko całkowanie po powierzchni F .

Oznaczmy przez $\Delta\tau$, objętość ν -tej kostki. Według (4.2) mamy w przybliżeniu

$$\int_{F_{\nu}} d\bar{f} \bar{n} \bar{v} = \Delta\tau, \operatorname{div} \bar{v}$$

a tym samym na mocy (5.2) też równość

$$(5.3) \quad \int_F d\bar{f} \bar{n} \bar{v} = \sum_{\nu} \Delta\tau, \operatorname{div} \bar{v},$$

gdzie $\operatorname{div} \bar{v}$ oznacza wartość dywergencji w pewnym punkcie ν -tej kostki. Równość (5.3) spełniona jest tym dokładniej, im mniejsze są kostki. W granicy, dla kostek „nieskończenie małych”, wyrażenie (5.3) przechodzi w twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego (5.1).

Pisząc twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego za pomocą składowych, otrzymujemy

$$(5.1a) \quad \begin{aligned} & \int_R \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\tau = \\ & = \int_F \left(v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z) \right) d\bar{f}. \end{aligned}$$

Gauss i Ostrogradzki udowodnili (5.1a), obliczając całkę przestrzenną przez części.

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego przechodzi w *twierdzenie Greena* przez specjalizację pola wektorowego $\bar{v}$. Podstawmy $\bar{v} = \varphi \operatorname{grad} \psi$; wówczas ze względu na (4.6) i na to, że $\bar{n} \operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n}$, otrzymujemy

$$(5.4) \quad \int_F d\bar{f} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \int_R (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) d\tau.$$

Zastępując w (5.4) φ przez ψ , a ψ przez φ i odejmując od (5.4), otrzymuje się często używany wzór

$$(5.5) \quad \int_F d\bar{f} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = \int_R (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau.$$

Przyrównując w (5.4) ψ do φ i zakładając, że φ spełnia równanie Laplace'a, dochodzimy do wzoru

$$(5.6) \quad \int_F d\bar{f} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \int_R (\operatorname{grad} \varphi)^2 d\tau.$$

Należy podkreślić, że przy stosowaniu jednego z powyższych przekształceń całkowych trzeba uważać, czy w danym razie spełnione są warunki ciągłości, konieczne do dowodu prawdziwości przekształcenia. Np. w twierdzeniu Gaussa-Ostrogradzkiego musieliśmy założyć ciągłość i różniczkowalność $\bar{v}$, wobec czego musimy w twierdzeniach Greena, jako wnioskach z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego, przyjąć założenia odpowiadające tym własnościom.

Jeżeli w pewnych miejscach rozważanego obszaru występują nieciągłości, np. $\bar{v}$ w pewnych punktach dąży do nieskończoności, to musimy wykroić te miejsca *osobliwe* przez powierzchnie F^* , przebiegające całkowicie w obszarze *regularnym*. Dopiero do tak okrojonego obszaru i jego ograniczenia łącznie z F^* , stosować możemy twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego lub Greena. W niektórych przypadkach możemy osiągnąć, np. ściągając F^* do pewnego punktu, że całkowanie da się przeprowadzić po całym obszarze pierwotnym. Ale może się też zdarzyć, że to przejście graniczne da nam pewne wyrażenia dodatkowe (por. §§ 16 17 i 18).

Podobnie musimy postępować, stosując twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego i Greena do obszaru nieograniczonego. Nieskończoność musimy odciąć pewną powierzchnią F_0 tak, by powstał obszar skończony R_0 . Stosujemy wówczas twierdzenie do obszaru R_0 i jego ograniczeń łącznie z F_0 . Ostatecznie usuwamy powierzchnię F_0 , przechodząc z nią do nieskończoności.

ZADANIA. 1. Z pomocą (2.2) dowieść twierdzenia

$$(5.7) \quad \int_F d\bar{f} \bar{n} \varphi = \int_R \operatorname{grad} \varphi d\tau,$$

postępując tak samo, jak przy dowodzie twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego.

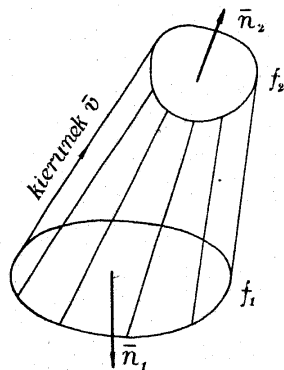
Dla $\varphi = \text{const}$ wynika z (5.7) twierdzenie (I,13.2).

2. W twierdzeniu Gaussa-Ostrogradzkiego przyjąć: 1° $\vec{v} = \vec{i}x$, 2° $\vec{v} = \vec{r}$, gdzie $\vec{r}$ oznacza wektor wodzący; uzasadnić poglądowo oba otrzymane w ten sposób związki, wyrażające objętość przez całki powierzchniowe.

§ 6. Przedstawienie geometryczne pola wektorowego bez źródeł. Niech $\vec{v}$ będzie dowolnym polem wektorowym.

Linia wektorową nazywamy krzywą, której styczna ma kierunek wektora $\vec{v}$ w danym punkcie przestrzeni.

Za pomocą takich linii wektorowych możemy zawsze przedstawić kierunki wektorów $\vec{v}$, tj. pole kierunków, należące do pola wektorowego $\vec{v}$. Linie wektorowe w ogólności nie jednak nie mówią o wartościach bezwzględnych wektorów $\vec{v}$.



Rys. 32. Stałość momentu rurki wektorowej:

przeto $v_n = 0$, tak że całkowanie należy wykonać tylko na obu przekrojach f_1 i f_2

$$\int_{f_1} v_n df + \int_{f_2} v_n df = 0.$$

Jak widzimy na rys. 32, normalna jednego przekroju (tu f_2) tworzy z kierunkiem linii wektorowych kąt ostry, a drugiego przekroju (mianowicie f_1) — kąt rozwarty. Odwróćmy w ostatnim przypadku kierunek normalnej; zmienimy przez to znak całki i otrzymamy dla nowego kierunku na f_1

$$\int_{f_2} v_n df = \int_{f_1} v_n df.$$

Wszystkie linie wektorowe, które przechodzą przez poszczególne punkty pewnej krzywej zamkniętej, tworzą powierzchnię w kształcie rurki, tzw. *rurkę wektorową*. Za jej pomocą możemy przedstawić geometrycznie również wartości bezwzględne pola wektorowego $\vec{v}$, ale tylko w razie pola wektorowego bez źródeł. Wytnijmy mianowicie dwoma cięciami f_1 i f_2 z wąskiej rurki wektorowej ograniczony kawałek cylindryczny (rys. 32) i zastosujmy do niego twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego (5.1). Ponieważ dla pola bez źródeł jest $\text{div } \vec{v} = 0$,

więc otrzymamy $\int_F v_n df = 0$. Na pobocz-

nicy walca $\vec{v}$ jest wektorem stycznym;

Nazwijmy całkę $M = \int v_n df$ *momentem rurki wektorowej*. Na podstawie ostatniej równości możemy powiedzieć, że dla pola wektorowego bez źródeł moment rurki wektorowej jest wielkością stałą, niezależną od przekroju.

W rozważaniach tych nie poczyniliśmy żadnych założeń co do przekroju rurki. Może on być dowolnie nachylony względem linii wektorowych, przeprowadzony w dowolnym miejscu, a nawet nie musi być płaski. Jeżeli jednak dobierzemy w szczególności przekroje prostopadłe do linii wektorowych, to dla bardzo wąskich rurek będzie $v_n = v$ i wówczas otrzymamy

$$(6.1) \quad M = vf = \text{const.}$$

Bezwzględna wartość wektora $\vec{v}$ rośnie więc, gdy rurka się zwęża i odwrotnie.

Aby przedstawić w danym obszarze nie tylko kierunki, ale także wartości bezwzględne wektorów pola wektorowego, należy wypełnić całą przestrzeń takimi bezpośrednio stykającymi się rurkami wektorowymi oraz nadać im wszystkim jeden i ten sam moment M . Osiągamy przez to, że we wszystkich punktach przestrzeni mamy

$$v = M/f.$$

Rurki wektorowe nie mogą ani zaczynać się, ani kończyć w punktach przestrzeni, gdzie pole wektorowe bez źródeł jest skończone. W takim punkcie musiałoby bowiem zniknąć f , a więc $\vec{v}$ rosnąć do nieskończoności, wbrew założeniu. W polu wektorowym bez źródeł, które jest wszędzie skończone, rurki wektorowe muszą być zamknięte w sobie albo zaczynać się i kończyć na powierzchniach ograniczających dany obszar, lub w nieskończoności.

Ponieważ własności pola wektorowego bez źródeł możemy przedstawić za pomocą rurek (po grecku $\sigma\omega\lambda\gamma\nu$) wektorowych, więc niektórzy autorowie nazywają takie pole *polem solenoidalnym*.

Za pomocą rurek wektorowych i równocześnie powierzchni ekwipotencjalnych możemy przedstawić jedynie takie pole wektorowe, które jest bez źródeł i bez wirów, a więc którego potencjał czyni zadość równaniu Laplace'a (§ 4). Oba te rodzaje powierzchni łącznie dzielą całą przestrzeń na poszczególne komórki. Oznaczając przez $\Delta\tau$ objętość takiej komórki i mnożąc (3.3) przez (6.1), otrzymujemy

$$(6.2) \quad v^2 \Delta\tau = M \Delta C = \text{const.}$$

Im mniejsza jest więc objętość komórki, tym większe v^2 i odwrotnie.

§ 7. Rotacja pola wektorowego. Przyporządkujemy obecnie każdemu punktowi dowolnego pola wektorowego $\vec{v}$ pewną wielkość wektorową, która nazywa się *rotacją* danego pola i którą oznacza się przez $\text{rot } \vec{v}$. Niektórzy autorowie (np. Maxwell) używają też oznaczenia $\text{curl } \vec{v}$ (*curl* po angielsku znaczy *łok włosów*).

Pojęcie rotacji wprowadzimy w sposób, który by uwypuklał jej znaczenie kinematyczne. Nawiążemy więc do ruchu ciała sztywnego. Najprostszymi ruchami ciała sztywnego są: ruch postępowy i obrotowy. Przy ruchu postępowym, czyli przy *translacji* wszystkie punkty ciała sztywnego mają jedną i tę samą prędkość $\vec{v}_0$. Pole prędkości dla obrotu określone jest natomiast według (I,12.13) przez $\vec{u} \times \vec{r}$. Przy ruchu dowolnym oba te ruchy składają się tak, że pole prędkości określone jest wówczas wzorem

$$(7.1) \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} \times \vec{r}.$$

Postawmy sobie obecnie bardzo proste zresztą i elementarne zadanie: obliczyć z pola prędkości (7.1) wektor prędkości kątovej $\vec{u}$. By dojść do pojęcia rotacji, zadanie to rozwiążemy jednak w sposób nieco okólny. Obliczymy mianowicie tzw. *krażenie pola* $\vec{v}$ wzdłuż krzywej zamkniętej K . W hydrodynamice krażenie pola określa się przez całkę liniową $\oint_K \vec{v} d\vec{s}$. Dla pola (7.1) otrzymujemy ze względu na (I,13.1) i (I,13.4):

$$(7.2) \quad \oint_K \vec{v} d\vec{s} = \vec{v}_0 \oint_K d\vec{s} + \vec{u} \oint_K \vec{r} \times d\vec{s} = 2\vec{u} \bar{F}_K,$$

gdzie $\bar{F}_K$ jest według (I,13.3) wektorem powierzchniowym, przyporządkowanym krzywej K . Oznaczając wektor jednostkowy w kierunku $\bar{F}_K$ przez $\vec{N}$, a wartość bezwzględną wektora $\bar{F}_K$ przez F_K , otrzymujemy

$$(7.3) \quad 2\vec{u}_N = \frac{1}{F_K} \oint_K \vec{v} d\vec{s}.$$

W ten sposób osiągnęliśmy cel bezpośredni: obliczenie wektora $\vec{u}$. By wyznaczyć $\vec{u}$ wystarczy mianowicie obliczyć (7.3) dla trzech kierunków $\vec{N}$, np. względem siebie prostopadłych.

Wszystkie krzywe K , do których należy jeden i ten sam wektor jednostkowy $\vec{N}$, dają w tym szczególnym przypadku jedno i to

samo $\vec{u}_N$ niezależnie od tego, gdzie w przestrzeni znajduje się krzywa K i jaki jest jej przebieg.

Wzór (7.3) stanowi rozwiązanie całkiem specjalnego zagadnienia, które dotyczy jedynie pola $\vec{v}$ dającego się przedstawić za pomocą (7.1) przy stałym $\vec{u}$.

Dla dowolnego pola wektorowego nie możemy jednak przyporządkować wyrażenia (7.3) pewnemu punktowi w przestrzeni, chyba że zdecydujemy się przejść do granicy, podobnie jak w § 2 i § 4 przy określaniu gradientu i dywergencji. Musimy w tym celu ściągnąć krzywą K do pewnego punktu O i to tak, by kierunki wektorów $\vec{F}_K$, których długości przy przejściu granicznym dążą do zera, zbliżały się do pewnego kierunku granicznego, określonego np. przez wektor jednostkowy $\vec{n}$.

Twierdzenie. Wartość graniczna wyrażenia (7.3) istnieje dla pola wektorowego $\vec{v}$, mającego pierwsze pochodne przestrzenne (a więc ciągłego); określa ona pewien wektor, $\text{rot } \vec{v}$, którego składowa w kierunku $\vec{n}$, mianowicie $\text{rot}_n \vec{v}$, dana jest przez wzór:

$$(7.4) \quad \text{rot}_n \vec{v} = \lim_{\substack{K \rightarrow O \\ N \rightarrow \vec{n}}} \frac{1}{F_K} \oint_K \vec{v} d\vec{s}.$$

Dowód tego twierdzenia otrzymamy najprościej, obliczając wartość graniczną wyrażenia (7.4). W tym celu rozwinieśmy, tak jak w § 4, wszystkie składowe wektora $\vec{v}$ na szeregi potęgowe:

$$(7.5) \quad \begin{aligned} v_x &= v_x|_0 + \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial z} \zeta + \dots \\ v_y &= v_y|_0 + \frac{\partial v_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_y}{\partial z} \zeta + \dots \\ v_z &= v_z|_0 + \frac{\partial v_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta + \dots \end{aligned}$$

Używamy tu tych samych oznaczeń co w § 2 i § 4. Jest jasne, że możemy uważać 9 pierwszych pochodnych, występujących w (7.5), za składowe tensora (p. I, § 11), w ogólności niesymetrycznego. Możemy go według (I,8.6) rozłożyć na dwa tensory: symetryczny i antysymetryczny, których składowe dane są przez (I,8.10). Oznaczmy $\vec{v}$ w punkcie O przez $\vec{v}_0$, części zaś $\vec{v}$, pocho-

dzące z tensorów symetrycznego i antysymetrycznego, odpowiednio przez $\bar{v}_s$ i $\bar{v}_a$. Otrzymamy wówczas:

$$(7.6) \quad \bar{v} = \bar{v}_O + \bar{v}_s + \bar{v}_a.$$

Według (I,9.2) możemy przedstawić $\bar{v}_s$ ze względu na (I,8.10) i (I,9.1a) jako gradient ujemny

$$(7.6a) \quad \bar{v}_s = -\text{grad } \varphi$$

potencjału

$$(7.7) \quad \varphi = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi^2 + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta^2 + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \xi \eta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \eta \zeta + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \zeta \xi \right\}.$$

Obecne wzory różnią się od wyżej wspomnianych tylko znakiem oraz tym, że czynnik 1/2 połączyliśmy obecnie z potencjałem.

Dla $\bar{v}_a$ otrzymujemy natomiast według (I,8.4 i 10) wyrażenie

$$(7.6b) \quad \bar{v}_a = \bar{U} \times \bar{r},$$

gdzie $\bar{U}$ określone jest wzorem

$$(7.8) \quad 2\bar{U} = \bar{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

$\bar{r}$ zaś jest wektorem o składowych ξ, η, ζ .

Dla krążenia, występującego w (7.4), mamy więc według (7.6),

(7.6a) i (7.6b) wyrażenie

$$(7.9) \quad \oint_K \bar{v} d\bar{s} = \bar{v}_O \oint_K d\bar{s} - \oint_K \text{grad } \varphi d\bar{s} + \bar{U} \oint_K \bar{r} \times d\bar{s} + \dots$$

Pierwsza całka po stronie prawej znika na mocy (I,13.1). Tak samo znika i druga. Mamy bowiem

$$\int_{P_1}^{P_2} \text{grad } \varphi d\bar{s} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi_{P_2} - \varphi_{P_1}.$$

Ponieważ jednak całkujemy po krzywej zamkniętej, a φ (według (7.7)) jest funkcją jednoznaczłą współrzędnych przestrzennych, więc otrzymujemy zero. Pozostaje zatem po stronie prawej wzoru (7.9) jedynie całka trzecia, tak że ze względu na (I,13.4) mamy

$$\oint_K \bar{v} d\bar{s} = 2 \bar{U} \bar{F}_K.$$

Ostatecznie dostajemy więc

$$(7.10) \quad \lim_{\substack{K \rightarrow O \\ \bar{N} \rightarrow \bar{n}}} \frac{1}{F_K} \oint_K \bar{v} d\bar{s} = 2 \bar{U} \bar{n},$$

ponieważ przy przejściu do granicy znikają oczywiście wyrażenia pochodzące od wyższych potęg w rozwinięciach (7.5).

Równanie (7.10) wykazuje, że przez przejście graniczne (7.4) określony jest rzeczywiście pewien wektor, c. b. d. o.

Ponieważ wektor ten jest identyczny z $2\bar{U}$ (por. (7.8)), więc stwierdziliśmy, że

$$(7.11) \quad \text{rot } \bar{v} = \bar{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

rot $\bar{v}$ uważać możemy formalnie za iloczyn wektorowy operatora Hamiltona ∇ i wektora $\bar{v}$. Widzimy to bezpośrednio, przyjmując dla ∇ wyrażenie (2.12b) i porównując wyznacznik

$$(7.12) \quad \text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

z wyznacznikiem (I,6.3) (por. też (7.13)).

Rozkład (7.6) wektora $\bar{v}$ możemy wykonać dla dowolnego pola wektorowego i zinterpretować w następujący sposób.

Dowolne pole wektorowe $\bar{v}$ możemy uważać w najbliższym sąsiedztwie jakiegokolwiek punktu O (a więc w obszarze „nieskończenie” małym) za superpozycję pola bez źródeł i pola bez wirów; pola te określone są np. przez $\bar{v}_a$ i $\bar{v}_O + \bar{v}_s$. Na podstawie wzoru (7.14d), podanego w zadaniu 3, i definicji (7.6b) pola wektorowego $\bar{v}_a$ mamy mianowicie $\text{div } \bar{v}_a = \text{div } (\bar{U} \times \bar{r}) = \bar{r} \text{ rot } \bar{U} - \bar{U} \text{ rot } \bar{r}$. Ponieważ jednak $\text{rot } \bar{U} = 0$ ($\bar{U} = \text{const}$) i $\text{rot } \bar{r} = 0$ (co wynika wprost z (7.11)), mamy $\text{div } \bar{v}_a = 0$, a więc pole $\bar{v}_a$ jest polem bez źródeł. To, że $\bar{v}_O + \bar{v}_s$ jest polem bez wirów, znaczy natomiast w dotychczasowej terminologii przez nas używanej tylko to, że oba te wektory mają potencjał (por. § 2, zadanie 3 i (7.7)).

Pole $\bar{v}_O$ jest zresztą zarówno bez źródeł jak i bez wirów, tak że możemy je połączyć nie tylko z $\bar{v}_s$, ale też z $\bar{v}_a$.

Zobaczymy następnie w § 15, że udowodnione twierdzenie o rozkładzie dowolnego pola na pole bez wirów i pole bez źródeł

zachodzi nie tylko w obszarze „nieskończenie” małym, ale też dla całego obszaru, w którym pole wektorowe jest określone.

Kinematyczne znaczenie (7.6) jest następujące: w najbliższym sąsiedztwie każdego punktu O możemy złożyć dane pole prędkości $\bar{v}$:

1° z pola prędkości $\bar{v}_O + \bar{v}_a = \bar{v}_O + \bar{U} \times \bar{r}$, tzn. (według (7.1)) z pola prędkości ciała sztywnego. Przy ruchu tym nie następuje zmiana względnych położenia poszczególnych cząsteczek, a więc środowisko materialne nie doznaje żadnych odkształceń. Przy tym jest według (7.8) i (7.11)

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v}.$$

Prędkość kątowna obrotu poszczególnych cząsteczek jest więc równa połowie rotacji. Uzyskaliśmy w ten sposób kinematyczne znaczenie rotacji pola prędkości.

2° z pola prędkości $\bar{v}_s$.

Możemy nazwać $\bar{v}_s$ *prędkością odkształcenia*. Samo $\bar{v}_s$ określone jest przez tensor symetryczny i możemy je traktować jako wynik nakładania się trzech pól prędkości (por. I, § 9, tekst po równaniu (I.9.5)), mających kierunki osi głównych tego tensora. W każdym z tych pól cząstki, leżące na płaszczyźnie równoległej do pozostałych dwu osi głównych, poruszają się z prędkością proporcjonalną do jej odległości od punktu O . Ruch taki zmienia kształt danego elementu objętościowego, element ten jednak nie wykonuje żadnego ruchu postępowego ani obrotowego.

ZADANIA. 1. Dowieść, że $\text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v}$, gdzie operator Hamiltona ∇ ma postać (2.12a), a więc:

$$(7.13) \quad \text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F d\bar{f} \bar{n} \times \bar{v}.$$

Rozwiązanie otrzymujemy przez obliczenie (por. § 2 i § 4).

2. Dowieść, że rotacja danego pola wektorowego znika w każdym punkcie przestrzeni, jeżeli znika krążenie pola dla każdej krzywej zamkniętej, leżącej w polu; w szczególności znika rotacja pola jednorodnego $\bar{v} = \text{const}$.

3. Za pomocą (2.10), (4.3) i (7.11) potwierdzić rachunkiem następujące związki:

$$(7.14a) \quad \text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0,$$

$$(7.14b) \quad \text{div}(\text{rot } \bar{v}) = 0,$$

$$(7.14c) \quad \text{rot}(\text{rot } \bar{v}) = \text{grad}(\text{div } \bar{v}) - \Delta \bar{v},$$

$$(7.14d) \quad \text{div}(\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{w} \text{rot } \bar{v} - \bar{v} \text{rot } \bar{w},$$

$$(7.14e) \quad \text{rot } \varphi \bar{v} = \varphi \text{rot } \bar{v} + \text{grad } \varphi \times \bar{v},$$

$$(7.14f) \quad \text{grad}(\bar{v} \bar{w}) = (\bar{w} \text{grad}) \bar{v} + (\bar{v} \text{grad}) \bar{w} + \bar{w} \times \text{rot } \bar{v} + \bar{v} \times \text{rot } \bar{w},$$

lub w szczególności dla $\bar{w} = \bar{v}$

$$\frac{1}{2} \text{grad } \bar{v}^2 = (\bar{v} \text{grad}) \bar{v} + \bar{v} \times \text{rot } \bar{v},$$

$$(7.14g) \quad \text{rot}(\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{w} \text{grad}) \bar{v} - (\bar{v} \text{grad}) \bar{w} + \bar{v} \text{div } \bar{w} - \bar{w} \text{div } \bar{v},$$

gdzie operator $\bar{v} \text{grad}$ ma znaczenie

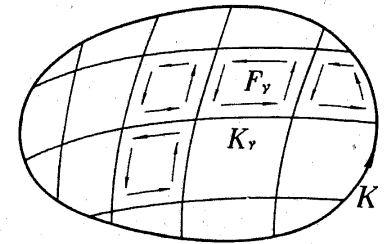
$$\bar{v} \text{grad} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

§ 8. Twierdzenie Stokesa. Niech K będzie krzywą zamkniętą o określonym zwrocie obiegu, a F — jakąkolwiek powierzchnią, której brzegiem jest K . Kierunek normalnej $\bar{n}$ na F niech będzie przyporządkowany obiegowi na krzywej K według reguły śruby prawoskrętnej. Jeżeli pole wektorowe $\bar{v}$ jest ciągle i różniczkowalne, to zachodzi następujący wzór na przekształcenie całek, zwany *twierdzeniem Stokesa*:

$$(8.1) \quad \oint_K \bar{v} d\bar{s} = \int_F \text{rot}_n \bar{v} d\bar{f} = \int_F \text{rot } \bar{v} d\bar{f}.$$

Wzór ten wyraża przez całkę powierzchniową krążenie pola dla krzywej K .

Dowód twierdzenia (8.1) otrzymać możemy na podobnej drodze jak dowód twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego, jeżeli tylko powołamy się na definicję rotacji (7.4). Rozcinamy powierzchnię F dwoma układami krzywych na elementy powierzchniowe F_v kształtu „równoległoboków” o brzegach K_v (rys. 33). Jeżeli na F_v przyjąć zwrot normalnej, obowiązujący na F i dobrać do tej normalnej zwrot obiegu na K_v według reguły śruby prawoskrętnej, to spełniona jest zupełnie ściśle równość



Rys. 33. Do dowodu twierdzenia Stokesa.

$$(8.2) \quad \oint_K \bar{v} d\bar{s} = \sum_v \oint_{K_v} \bar{v} d\bar{s}.$$

Wynika ona stąd, że zwroty obiegu na krzywych K , dobraliśmy tak, iż są przeciwne na powstałej przez cięcie wspólnej granicy każdych dwu sąsiadujących ze sobą elementów F . Ponieważ wraz ze zmianą zwrotu obiegu zmienia się znak całki liniowej, przeto całki liniowe wzdłuż wszystkich brzegów K , powstałych przez cięcia, znoszą się w sumie (8.2) i z całej sumy pozostaje jedynie całka wzdłuż brzegu K . W przypadku granicznym „nieskończenie” drobnego podziału możemy zastąpić całkę $\oint_{K_v} \bar{v} d\bar{s}$ przez $\text{rot}_n \bar{v} df$ (por. (7.4)), a znak sumowania przez znak całki; otrzymamy wtedy (8.1), c.b.d.o.

Na twierdzeniu Stokesa widać dobitnie, ile zyskujemy na czasie i przejrzystości, posługując się znakowaniem rachunku wektorowego. Piszac bowiem to twierdzenie w składowych, otrzymujemy skomplikowany wzór:

$$(8.1a) \quad \oint_K \left[v_x \cos(ds, x) + v_y \cos(ds, y) + v_z \cos(ds, z) \right] ds = \\ = \int_F \left\{ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} df.$$

Ileć o mówimy o powierzchni z brzegiem, mamy na myśli — szczególnie w przypadku twierdzenia Stokesa — tzw. *powierzchnię dwustronną*. Możemy dokładnie rozróżnić obie jej strony, ponieważ chcąc dostać się z jednej strony na drugą przechodzimy przez krawędź powierzchni. Istnieją jednak też *powierzchnie jednostronne*, gdzie takie rozróżnienie jest niemożliwe. By przekonać się o tym, wystarczy z podłużnego skrawka papieru, zabarwionego po jednej stronie np. na czerwono, skleić pierścień tak, żeby tam, gdzie zlepimy końce, istniało przejście między stroną białą a czerwoną. Jest to tzw. *wstęga Möbiusa*. Powierzchnia taka jest jednostronna, ponieważ możemy przedostać się z każdego punktu znajdującego się np. po stronie białej bez przekroczenia krawędzi do punktu znajdującego się pod nim po stronie czerwonej.

Jeżeli obłożymy całą taką jednostronną powierzchnię, tak jak na rys. 33, ściśle przylegającymi do siebie elementami powierzchniowymi F , to znikną w sumie wszystkie całki powierzchniowe i liniowe. Twierdzenie Stokesa przechodzi więc tu w trywialną relację $0 = 0$. Aby to stwierdzić, należy tylko dobrać „górne” i „dolne” elementy tak, by były one równe, i zauważyć, że każda para takich

elementów ma przeciwne zwroty normalnych i obiegu. Łatwo też spostrzec, że dla takiej powierzchni jednostronnej znika wektor powierzchniowy (I,13.3).

Zauważmy jeszcze, że w dowodzie twierdzenia Stokesa musimy założyć, że pole wektorowe $\bar{v}$ na powierzchni F jest ciągle i różniczkowalne. W przeciwnym razie trzeba powycinać miejsca powierzchni F , na których leżą nieciągłości i uwzględnić brzegi powstałe wskutek tych wycięć.

ZADANIA. 1. Dowieść za pomocą (7.13) twierdzenia:

$$(8.3) \quad \int_F d\bar{f} \bar{n} \times \bar{v} = \int_R \text{rot} \bar{v} d\tau,$$

gdzie R jest obszarem ograniczonym powierzchnią F .

2. Udowodnić związek (7.14b): $\text{div} \text{rot} \bar{v} = 0$ za pomocą twierdzeń Gaussa-Ostrogradzkiego i Stokesa.

Rozwiązanie. Rozcinamy powierzchnię zamkniętą F , ograniczającą dowolny obszar R , na dwie części F_1 i F_2 (rys. 34), odgraniczone od siebie krzywą K . Na F_1 i F_2 dobieramy zwroty normalnej zgodne ze zwrotem normalnej zewnętrznej na F . Krzywą K o zwrocie obiegu odpowiadającym zwrotom normalnej na F_1 i F_2 oznaczamy odpowiednio przez K_1 i K_2 . Przy tych założeniach otrzymujemy z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{F_1} \text{rot}_n \bar{v} df = \oint_{K_1} \bar{v} d\bar{s},$$

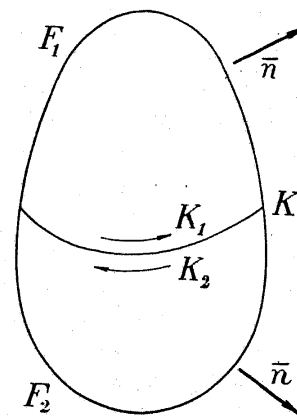
$$\int_{F_2} \text{rot}_n \bar{v} df = \oint_{K_2} \bar{v} d\bar{s}.$$

Dodając te równości, otrzymujemy

$$\int_F \text{rot}_n \bar{v} df = 0.$$

Całki liniowe wzdłuż K_1 i K_2 różnią się bowiem tylko znakiem, gdyż zwroty obiegu na K_1 i K_2 są przeciwne. Ponieważ jednak według twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\int_F \text{rot}_n \bar{v} df = \int_R \text{div} \text{rot} \bar{v} d\tau,$$



Rys. 34. Dowód związku $\text{div} \text{rot} \bar{v} = 0$ za pomocą twierdzeń Gaussa-Ostrogradzkiego i Stokesa.

więc ostatnia całka znika w obszarze R . Wobec tego, że R było dowolne, musi też znikać funkcja podcałkowa, c.b.d.o.

§ 9. Układy krzywoliniowych współrzędnych ortogonalnych.
Za pomocą związków:

$$(9.1) \quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

wprowadźmy na miejsce zmiennych x, y, z nowe zmienne u, v, w ; wówczas położenie punktu P o współrzędnych kartezjańskich x, y, z określone jest przez wielkości u, v, w , wyznaczone równaniami (9.1). Możemy zatem uważać również u, v, w za współrzędne punktu P . Ponieważ np. równanie $u(x, y, z) = \text{const}$ przedstawia powierzchnię, więc współrzędne u, v, w wyznaczają położenie punktu P jako punktu przecięcia trzech powierzchni współrzędnych.

Zakładamy tu, że w pewnym obszarze R przestrzeni trzy powierzchnie, należące do trzech różnych rodzin (9.1), przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie.

Linia przecięcia dwu powierzchni, należących do różnych rodzin, jest w ogólności linią krzywą. Dlatego też współrzędne (9.1) nazywamy *współrzędnymi krzywoliniowymi*.

Współrzędne te mogą być ukośnokątne lub ortogonalne, zależnie od tego, czy te trzy krzywe przecięcia tworzą między sobą kąty dowolne, czy proste. Możemy ograniczyć się do układów ortogonalnych, ponieważ ich właśnie najczęściej używamy w fizyce teoretycznej. Za przykład takich układów może służyć dobrze znany układ współrzędnych biegunowych r, ϑ, φ w przestrzeni. Rolę powierzchni (9.1) spełniają wtedy rodziny kul, stożków i płaszczyzn. Łatwo można stwierdzić, że współrzędne te są ortogonalne.

W dowolnie danym punkcie O możemy umieścić trzy wektory jednostkowe $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, styczne do trzech przecięć powierzchni (9.1), i uważać je za wektory podstawowe lokalnego układu współrzędnych ortogonalnych. W szczególności umieszczamy $\bar{u}$ stycznie do krzywej przecięcia powierzchni $v = \text{const}$ i $w = \text{const}$. Wektor $\bar{u}$ jest wówczas prostopadły do powierzchni $u = \text{const}$, ponieważ w niej leżą pozostałe dwie krzywe przecięcia, mianowicie krzywe przecięcia powierzchni u z powierzchniami v i w . Zwrot wektora $\bar{u}$ dobieramy zgodny z u rosnącym. Wektor ten ma wówczas ten sam kierunek i zwrot co $\text{grad } u$. Podobnie postępujemy z $\bar{v}$ i $\bar{w}$, dobierając oznaczenia tak, by $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ tworzyły układ prawoskrętny

(rys. 35). Równocześnie ze zmianą punktu O zmieniają oczywiście i osie $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ układu lokalnego swoje kierunki w przestrzeni. Każdy wektor $\bar{a}$ możemy rozłożyć na składowe a_u, a_v, a_w wzdłuż osi układu współrzędnych związanego z punktem zaczepienia wektora, np. $a_u = \bar{u}\bar{a}$ itd.

Dobór współrzędnych gra decydującą rolę w rozwiązywaniu poszczególnych zadań matematycznych, występujących w fizyce. Prędko i elegancko można dobrać do celu tylko za pomocą układu współrzędnych, dobranego odpowiednio do zadania. Aby dobór ten ułatwić, wyrazimy obecnie $\text{grad } \psi$, $\text{div } \bar{a}$, $\Delta \psi$ i $\text{rot } \bar{a}$ we współrzędnych ortogonalnych krzywoliniowych.

• Możemy to wykonać w prosty sposób, jeżeli wiemy, jak wyraża się w lokalnym układzie współrzędnych element liniowy ds . Gdy poruszamy się w kierunku $\bar{u}$, to zmienia się tylko współrzędna u .

Odpowiedni element liniowy ds_u będzie przy tym w pierwszym przybliżeniu proporcjonalny do du , tak że

$$(9.2a) \quad ds_u = U(u, v, w) du.$$

Podobnie, dla elementów liniowych ds_v i ds_w o kierunkach $\bar{v}$ i $\bar{w}$ otrzymujemy:

$$(9.2b) \quad ds_v = V(u, v, w) dv, \quad ds_w = W(u, v, w) dw.$$

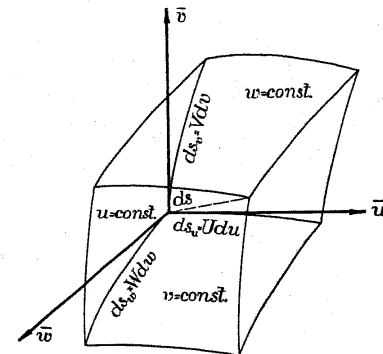
Długość łuku ds elementu liniowego, mającego dowolny kierunek, możemy obliczyć z jego składowych ds_u, ds_v, ds_w za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$(9.3) \quad ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2.$$

Jeżeli więc posiadamy dla danego układu współrzędnych wyrażenia na ds_u, ds_v, ds_w lub na ds^2 , to możemy z nich bezpośrednio odczytać U, V, W .

Wzory (9.2a i b) określają też wektorowy element łuku:

$$(9.3a) \quad d\bar{s} = \bar{u} U du + \bar{v} V dv + \bar{w} W dw.$$



Rys. 35. ds^2 dla krzywoliniowych współrzędnych ortogonalnych:
 $ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2$.

By wyrazić w tych współrzędnych grad ψ , zauważmy, że jego składowa o kierunku $\bar{u}$ dana jest według § 2 przez $\frac{\partial \psi}{\partial s_u} = \frac{1}{U} \frac{\partial \psi}{\partial u}$. Otrzymamy więc

$$(9.4) \quad \text{grad } \psi = \bar{u} \frac{1}{U} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \bar{v} \frac{1}{V} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \bar{w} \frac{1}{W} \frac{\partial \psi}{\partial w}.$$

Przy określaniu $\text{div } \bar{a}$ posługujemy się definicją (4.2). Sprawdziliśmy, że ta wartość graniczna istnieje i że nie trzeba podawać ciągu powierzchni F żadnym zastrzeżeniami poza $F \rightarrow O$. By tę wartość graniczną obliczyć, wystarczy więc wybrać dowolny ciąg częściowy powierzchni F . Dla ułatwienia rachunków, można za F użyć równoległościannów prostokątnych o ścianach danych przez powierzchnie (9.1), których jedno naroże leży w punkcie O (rys. 35), a trzy krawędzie przechodzące przez O mają długości Udu , Vdv i Wdw . Normalna zewnętrzna ściany przechodzącej przez $\bar{v}$ i $\bar{w}$ ma zwrot $-\bar{u}$, a pole ściany równe jest $VW dv dw$. Jej udział w całce $\int_F a_n df$ jest więc:

$$-a_u VW dv dw.$$

Udział ściany przeciwległej równy jest natomiast

$$\left(a_u VW + \frac{\partial}{\partial u} (a_u VW) du \right) dv dw,$$

ponieważ zwrot normalnej zewnętrznej dany jest obecnie przez $\bar{u}$, a wartość $a_u VW$ musimy wziąć w punkcie $u + du, v, w$. Łączny udział obu ścian przeciwległych jest więc

$$\frac{\partial}{\partial u} (a_u VW) du dv dw.$$

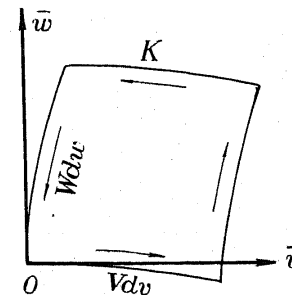
Ażeby otrzymać $\text{div } \bar{a}$, należy jeszcze dodać odpowiednie wyrażenia dla obu pozostałych par ścian równoległościannu i podzielić sumę wszystkich trzech wyrazów przez objętość równoległościannu $UVW du dv dw$:

$$(9.5) \quad \text{div } \bar{a} = \frac{1}{UVW} \left(\frac{\partial (a_u VW)}{\partial u} + \frac{\partial (a_v WU)}{\partial v} + \frac{\partial (a_w UV)}{\partial w} \right).$$

Podstawiając tu $\bar{a} = \text{grad } \psi$, dostajemy ze względu na (9.4)

$$(9.6) \quad \Delta \psi = \text{div grad } \psi = \frac{1}{UVW} \left[\frac{\partial \left(\frac{VW}{U} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)}{\partial u} + \frac{\partial \left(\frac{WU}{V} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)}{\partial v} + \frac{\partial \left(\frac{UV}{W} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right)}{\partial w} \right].$$

By obliczyć $\text{rot}_u \bar{a}$, czyli składową u wektora $\text{rot } \bar{a}$, posługujemy się definicją (7.4). Obieramy dla krzywej K na powierzchni $u = \text{const}$ prostokąt, którego boki dane są przez przecięcia powierzchni v i w z powierzchnią u (rys. 36). Zakładamy, że przez punkt O powierzchni $u = \text{const}$ przechodzą boki o długościach Vdv i Wdw . Jeżeli wzdłuż tych boków postępujemy w kierunku strzałek, to obiegamy równoległobok w kierunku przyporządkowanym normalnej $\bar{u}$. Bok przechodzący przez O , po którym poruszamy się w kierunku $-\bar{w}$, wnosi $-a_w W dv$ do całki $\oint \bar{a} d\bar{s}$. Bok przeciwnieległy obiegamy oczywiście w kierunku



Rys. 36. Obliczanie $\text{rot}_u \bar{a}$.

przeciwnym i dlatego jego udział jest równy $\left[a_w W + \frac{\partial}{\partial v} (a_w W) dv \right] dw$.

Oba boki razem dają więc $\frac{\partial}{\partial v} (a_w W) dv dw$.

Tak samo możemy wykazać, że $-\frac{\partial}{\partial w} (a_v V) dv dw$ jest udziałem pozostałej pary boków. Ponieważ pole prostokąta jest równe $VW dv dw$, więc z (7.4) otrzymujemy

$$\text{rot}_u \bar{a} = \frac{1}{VW} \left(\frac{\partial (a_w W)}{\partial v} - \frac{\partial (a_v V)}{\partial w} \right).$$

Przestawienia kołowe dają nam dalsze składowe, tak że

$$(9.7) \quad \text{rot } \bar{a} = \bar{u} \frac{1}{VW} \left(\frac{\partial (a_w W)}{\partial v} - \frac{\partial (a_v V)}{\partial w} \right) + \bar{v} \frac{1}{WU} \left(\frac{\partial (a_u U)}{\partial w} - \frac{\partial (a_w W)}{\partial u} \right) + \bar{w} \frac{1}{UV} \left(\frac{\partial (a_v V)}{\partial u} - \frac{\partial (a_u U)}{\partial v} \right).$$

Wzór (9.7) jest słuszny tylko dla prawoskrętnego układu współrzędnych $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

ZADANIA. 1. Element liniowy we współrzędnych biegunowych przestrzennych r, ϑ, φ (należy zwrócić uwagę na kolejność, by otrzymać układ prawoskrętny) dany jest przez wzór:

$$(9.8a) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2.$$

Oznaczając przez $\bar{u}_r, \bar{u}_\vartheta, \bar{u}_\varphi$ wektory jednostkowe, mające kierunki gradientu r, ϑ, φ otrzymujemy:

$$(9.8b) \quad \text{grad } \psi = \bar{u}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \bar{u}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \bar{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$(9.8c) \quad \text{div } \bar{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(9.8d) \quad \Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2},$$

$$(9.8e) \quad \begin{aligned} \text{rot } \bar{a} = & \bar{u}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\varphi) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \\ & + \bar{u}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] + \bar{u}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\vartheta) - \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Jako przykład dla następnych zadań podajemy obliczenie U, V, W dla współrzędnych biegunowych przestrzennych. Z rys. 37 odczytujemy

$$ds_r = dr, \quad ds_\vartheta = r d\vartheta, \quad ds_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi.$$

Stąd wnosimy, że

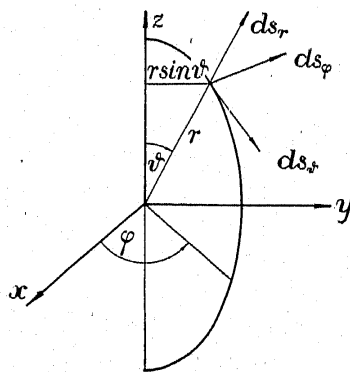
$$U = 1, \quad V = r, \quad W = r \sin \vartheta.$$

2. W przypadku współrzędnych cylindrycznych ϱ, φ, z jest

$$(9.9a) \quad ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Oznaczając przez $\bar{u}_\varrho, \bar{u}_\varphi, \bar{u}_z$ wektory jednostkowe o kierunkach gradientu ϱ, φ, z , mamy:

$$(9.9b) \quad \text{grad } \psi = \bar{u}_\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \bar{u}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \bar{u}_z \frac{\partial \psi}{\partial z},$$



Rys. 37. ds^2 dla współrzędnych biegunowych przestrzennych.

$$(9.9c) \quad \text{div } \bar{a} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho a_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$(9.9d) \quad \Delta \psi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

$$(9.9e) \quad \begin{aligned} \text{rot } \bar{a} = & \bar{u}_\varrho \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right] + \bar{u}_\varphi \left[\frac{\partial a_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \varrho} \right] + \\ & + \bar{u}_z \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho a_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_\varrho}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

3. Jedynym rozwiązaniem równania Laplace'a $\Delta \psi = 0$, zależnym tylko od r jest $\psi = \frac{C}{r} + C_0$. Dyskusja!

Rozwiązanie. Jeżeli $\psi = f(r)$, to z (9.8d) wynika $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 0$,

a stąd $\frac{d\psi}{dr} = -\frac{C}{r^2}$ czyli $\psi = \frac{C}{r} + C_0$. Pole dane jest przez $\bar{v} = -\text{grad } \psi$,

a więc — według (9.8b) oraz (2.16c) — przez $\bar{v} = \frac{C}{r^2} \bar{r}^*$. Powierzchnie

ekwipotencjalne są więc kulami współśrodkowymi, a wektory pola są skierowane radialnie, przy dodatnim C w kierunku od środka kuli. Potencjał i pole mają symetrię kulistą.

4. Jedynym rozwiązaniem równania $\Delta \psi = 0$, zależnym tylko od odległości ϱ od danej prostej g jest $\psi = -C \ln \varrho + C_0$. Dyskusja!

Rozwiązanie dla ψ wynika z (9.9d). Według (9.9b) pole wektorowe jest $\bar{v} = \bar{u}_\varrho \frac{C}{\varrho}$, jeżeli $\bar{u}_\varrho$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do g i skierowanym od g . Powierzchniami równego potencjału są walce współosiowe o osi g . Wektory pola są prostopadłe do g i przy dodatnim C odwrócone od g . Potencjał i pole mają symetrię cylindryczną.

5. Jedynym rozwiązaniem równania $\Delta \psi = 0$, mającym powierzchnie ekwipotencjalne dane przez półpłaszczyzny przechodzące przez pewną prostą g , jest $\psi = a\varphi + b$, gdzie φ jest kątem, który te półpłaszczyzny tworzą z jedną z nich. Jak wygląda pole wektorowe?

Rozwiązanie. Należy użyć współrzędnych cylindrycznych, których oś z leży na prostej g . Wówczas jest $\psi = \psi(\varphi)$, tak że z (9.9d) wynika $\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = 0$. A więc $\psi = a\varphi + b$.

Potencjał ψ nie jest jednoznacznie wyznaczony. Mamy bowiem $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi) + 2\pi a$. Przy pełnym obiegu dokoła g rośnie więc potencjał ψ o $2\pi a$. Mimo to przynależne pole wektorowe, które według (9.9b) dane jest przez $\bar{v} = \bar{u}_\varphi \frac{a}{\rho}$, jest wyznaczone jednoznacznie. Wektor $\bar{v}$ zależy tylko od ρ , tj. od odległości od prostej g . Kierunek $\bar{v}$ jest styczny do kół

$$\rho = \text{const}, \quad z = \text{const}.$$

$\bar{v}$ dąży do nieskończoności w miarę zbliżania się do g ; potencjał ψ jest jednak na g skończony, choć nieciągły.

§ 10. Potencjał pola wektorowego. Rozwiążemy obecnie zagadnienie, sformułowane w § 3:

Dane jest pole wektorowe $\bar{v}$; wyznaczyć jego potencjał φ .

Najpierw stwierdzamy, że zagadnienie nie zawsze ma rozwiązanie. Wnoskujemy ze wzoru

$$(10.1) \quad \bar{v} = -\text{grad } \varphi,$$

że według (7.14a)

$$(10.2) \quad \text{rot } \bar{v} = 0.$$

Warunkiem koniecznym na to, żeby pole wektorowe dało się przedstawić za pomocą potencjału, jest więc znikanie jego rotacji.

Ten warunek konieczny jest zarazem wystarczający. Uodowodnić można mianowicie, że *potencjał φ pola wektorowego $\bar{v}$ istnieje w każdym obszarze R , w którym rotacja pola $\bar{v}$ znika, a całka liniowa $\oint \bar{v} d\bar{s}$ istnieje.*

By jednak nie komplikować niepotrzebnie dowodu tego twierdzenia dla naszych celów, zakładamy, że obszar R jest jednospójny i pozostanie takim, nawet jeśli wytniemy z niego za pomocą odpowiednich powierzchni miejsca osobliwe funkcji określonej przez całkę $\oint \bar{v} d\bar{s}$.

Przekonamy się, że przy tym założeniu dodatkowym potencjał φ jest w obszarze R funkcją jednoznaczną.

Przed przystąpieniem do dowodu musimy jednak zapoznać się z pojęciem obszarów jednospójnych. Obszar R nazywa się *jednospójny*, jeżeli na każdej krzywej K zamkniętej i całkowicie leżącej w obszarze R , możemy rozpiąć powierzchnię F , która by nie przecinała jego ograniczenia. Jednospójny jest więc obszar wewnątrz lub zewnątrz kuli lub kostki. Nie jest natomiast jednospójnym obszar wewnątrz ani zewnątrz pierścienia. Jeżeli pierścień jest rotacyjno-symetryczny, to na żadnej krzywej, np. wewnątrz pierścienia, otaczającej jego oś symetrii, nie możemy rozpiąć żadnej powierzchni, która by nie przecinała ograniczenia pierścienia. Przechodzimy do dowodu twierdzenia, który przeprowadzamy w dwu krokach.

Pierwszym krokiem będzie dowód, że w obszarze jednospójnym R całka liniowa

$$-\int \bar{v} d\bar{s}$$

określa jednoznacznie pewną funkcję φ . Możemy bowiem przez każdą krzywą zamkniętą K przeprowadzić powierzchnię F , która nie przecina¹⁾ ograniczenia obszaru R i na której wszędzie według (10.2) znika rotacja pola $\bar{v}$. Stosując twierdzenie Stokesa (8.1), otrzymujemy więc dla dowolnej krzywej zamkniętej K

$$(10.3) \quad \oint_K \bar{v} d\bar{s} = 0.$$

Stąd wynika jednak, że dla dowolnych punktów P_0 i P , leżących w obszarze R , wartość całki

$$(10.4) \quad -\int_{P_0}^P \bar{v} d\bar{s}$$

nie zależy od drogi łączącej P_0 i P , jeżeli tylko przebiega ona w obrębie R . Niech K_1 i K_2 będą dwiema różnymi drogami, pro-

¹⁾ Jeżeli powierzchnia F przecina ograniczenie obszaru R , to musimy przy stosowaniu twierdzenia Stokesa uważać za jej ograniczenie, oprócz krzywej K też krzywą przecięcia K' powierzchni F z ograniczeniem obszaru R . Z twierdzenia Stokesa wynika wówczas, że znika suma całek krzywoliniowych na K i K' , podczas gdy nasze rozważania oparte są na (10.3), tzn. na znikaniu całki liniowej na K .

Zauważyć jeszcze musimy, że osobliwości pola $\bar{v}$ (jak np. prosta g w zadaniu 5, § 9) odgrywają przy stosowaniu twierdzenia Stokesa (por. § 8) rolę ograniczenia obszaru R . Te osobliwości powodują, że potencjał ψ w tym zadaniu nie jest jednoznaczny, mimo że obszar jest jednospójny.

wadzącymi od P_0 do P . Idąc od P_0 do P drogą K_1 i wracając drogą K_2 , otrzymujemy obieg zamknięty. Równanie (10.3) daje więc

$$\int_{K_1} \bar{v} d\bar{s} + \int_{K_2} \bar{v} d\bar{s} = 0 \quad \text{czyli} \quad - \int_{K_1} \bar{v} d\bar{s} = - \int_{K_2} \bar{v} d\bar{s}.$$

Dla stałego P_0 całka (10.4) określa zatem pewną funkcję punktu P znikającą w P_0 i niezależną od drogi całkowania, a więc jednoznaczna.

Możemy więc potencjał danego pola wektorowego $\bar{v}$ określić przez funkcję:

$$(10.5) \quad \varphi(P) = \varphi(P_0) - \int_{P_0}^P \bar{v} d\bar{s},$$

gdzie $\varphi(P_0)$ jest dowolną stałą, oznaczającą wartość potencjału φ w punkcie P_0 .

Musimy zrobić jeszcze drugi i ostatni krok i pokazać, że między tak wyznaczonym potencjałem φ a polem wektorowym $\bar{v}$ zachodzi związek (10.1). W tym celu musimy w myśl § 2 dowieść, że ujemna pochodna funkcji (10.5) w dowolnym kierunku $\bar{s}^*$ równa jest rzutowi wektora $\bar{v}$ na ten kierunek:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \bar{v} \bar{s}^*.$$

Ponieważ w (10.5) możemy drogę całkowania dobrać dowolnie, więc do obliczenia różnicy potencjałów dwu punktów leżących w odległości Δs możemy użyć drogi prostej, łączącej oba te punkty. Wówczas związek $\Delta \varphi = -\bar{v} \bar{s}^* \Delta s$ spełniony jest tym dokładniej, im mniejsze jest Δs . Tym samym dowód dostateczności warunku (10.2) został przeprowadzony.

Sprecyzujemy na zakończenie sens wyrażenia *pole bez wirów* (por. koniec § 3).

Pole wektorowe $\bar{v}$ w obszarze jednospójnym R nazywa się *polem bez wirów*, jeżeli dla każdej krzywej zamkniętej, przebiegającej całkowicie w obszarze R , znika krążenie tego pola.

Przez to wyłączamy na mocy twierdzenia Stokesa wszystkie wiry przestrzenne, określone przez $\text{rot } \bar{v}$. Ale wyłączamy zarazem wiry liniowe i powierzchniowe, jak to zobaczymy w § 14. Rzecz jasna, że według obecnej definicji pole pochodzące od potencjału jednoznacznego nie posiada wirów.

ZADANIA. 1. Obliczyć potencjał jednorodnego pola wektorowego $\bar{v} = \text{const}$.

Rozwiązanie. Potencjał istnieje, ponieważ $\text{rot } \bar{v} = 0$. Oznaczmy współrzędne punktów P i P_0 przez x, y, z i x_0, y_0, z_0 . Ponieważ

$$d\bar{s} = \bar{i} dx + \bar{j} dy + \bar{k} dz,$$

więc otrzymujemy z (10.5)

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi(P_0) - \int_{P_0}^P (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \\ &= \varphi(P_0) - v_x(x - x_0) - v_y(y - y_0) - v_z(z - z_0). \end{aligned}$$

Potencjał jednorodnego pola wektorowego dany jest zatem przez wyrażenie liniowe we współrzędnych x, y, z (por. § 2, zadanie 3).

2. Dowieść, że pole wektorowe $\bar{v}$, które w skończoności jest wszędzie regularne i nie posiada żadnych źródeł ani wirów oraz zależy tylko od jednej współrzędnej, np. x , jest polem jednorodnym.

Rozwiązanie. Z tego, że pole nie posiada wirów i zależy tylko od x , otrzymujemy $\bar{v} = \bar{v}(x) = -\text{grad } \varphi$, czyli

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -v_x(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v_y(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -v_z(x).$$

Ze względu na pierwszą z tych równości mamy $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$ i $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0$.

Używając drugiej i trzeciej, otrzymujemy więc $\frac{\partial v_y(x)}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial v_z(x)}{\partial x} = 0$;

czyli $v_y = \text{const}$ i $v_z = \text{const}$. Ponieważ $\bar{v}$ jest bez źródeł, musi być $\text{div } \bar{v} = 0$, a więc $\frac{\partial v_x(x)}{\partial x} = 0$, czyli $v_x = \text{const}$.

Do tego samego wyniku dojść można też bez używania potencjału, wychodząc wprost z równania $\text{rot } \bar{v} = 0$ (por. str. 151).

§ 11. Źródła osobliwe pojedyncze. Mówimy o *źródłach osobliwych* w pewnych punktach (liniach, powierzchniach), jeżeli pole wektorowe (lub potencjał) dąży do nieskończoności przy zbliżaniu się do nich lub jest w tych miejscach wprawdzie skończone, lecz nieciągłe.

Oczywiście, nie każda osobliwość spowodowana jest źródłami. Weźmiemy więc pod uwagę kilka specjalnych osobliwości i zbadamy, czy odpowiadają im źródła, a jeżeli tak, to jakie.

Rozróżniamy *źródła pojedyncze* i *wielokrotne*. Wydajność pierwszych jest zawsze różna od zera, a drugich znika.

Konsekwentnie używać będziemy odtąd definicji wydajności, opartej na określeniu masy (4.1a), a więc będziemy wyrażać wydajność źródeł przestrzennych wzorem (4.2a). Wyniki dalszych rozważań mają mianowicie zastosowanie przede wszystkim w nauce o elektryczności i magnetyzmie.

W każdym wypadku możemy wyznaczyć wydajność źródeł osobliwych przez przejście graniczne za pomocą (4.1a). Wyrażenie to przedstawia bowiem sumę wydajności wszystkich źródeł, tak przestrzennych jak i osobliwych, znajdujących się wewnątrz pewnej powierzchni zamkniętej F . Udział źródeł przestrzennych jednak znika, jeżeli zbliżymy się z powierzchnią F dostatecznie blisko do źródła osobliwego.

Źródła osobliwe znajdować się mogą w punktach, liniach i powierzchniach. Możemy je scharakteryzować matematycznie wskazując, w jaki sposób pole wektorowe lub potencjał dąży do nieskończoności lub jaką posiada nieciągłość, gdy zbliżamy się do punktów przestrzeni, w których te źródła są umieszczone. Znaczący to, że otrzymamy regularne pole wektorowe lub regularny potencjał w tych punktach przestrzeni, w których znajdują się źródła, jeżeli odejmiemy od danego pola wektorowego lub potencjału takie pole wektorowe lub taki potencjał, który opisuje matematycznie odpowiednią osobliwość. Możemy przy tym założyć, że pole wektorowe rozważanych źródeł jest polem bez wirów, a więc posiada potencjał.

Zajmiemy się teraz źródłami pojedynczymi.

1. Mówimy, że w punkcie Z jest pojedyncze źródło punktowe, gdy pole wektorowe zachowuje się w sąsiedztwie tego punktu jak

$$(11.1) \quad \vec{v} = \frac{e}{r^2} \vec{r}^*,$$

a potencjał jak

$$(11.1a) \quad \varphi = \frac{e}{r},$$

gdzie r oznacza odległość od źródła Z , a $\vec{r}^*$ — wektor jednostkowy o kierunku $\vec{r}$, odwrócony od źródła. Z polem wektorowym (11.1) spotkaliśmy się już w § 9 (str. 95, zadanie 3). Pole to jest kulistosymetryczne i nie posiada źródeł przestrzennych.

Wydajność pojedynczego źródła punktowego Z otrzymujemy za pomocą (4.1a), otaczając punkt Z jakąkolwiek powierzchnią F

i obliczając całkę powierzchniową (4.1a) przy założeniu, że $\vec{v}$ dane jest przez (11.1). Najprościej jest użyć do tego celu kuli ze środkiem w źródle Z . Wówczas element powierzchniowy dany jest przez $df = r^2 d\Omega$, gdzie r oznacza promień kuli, a $d\Omega$ — element kąta bryłowego. Składowa normalna pola równa się po prostu $v_n = v = \frac{e}{r^2}$,

ponieważ normalna zewnętrzna kuli ma kierunek wektora jednostkowego $\vec{r}^*$. Dla całki powierzchniowej (4.1a) otrzymujemy więc wyrażenie

$$\frac{1}{4\pi} \int_F v_n df = \frac{1}{4\pi} \int_{K_j} \frac{e}{r^2} r^2 d\Omega = \frac{e}{4\pi} \int_{K_j} d\Omega = e.$$

Całka $\int_{K_j} d\Omega$ równa jest mianowicie powierzchni kuli jednostkowej K_j , czyli 4π . Zatem liczba e jest wydajnością pojedynczego źródła punktowego.

2. Pojedyncze źródło liniowe znajduje się na krzywej K , jeżeli pole wektorowe $\vec{v}$ zachowuje się w jej otoczeniu jak

$$(11.2) \quad \vec{v} = \frac{2\varepsilon}{\rho} \vec{u},$$

a potencjał jak

$$(11.2a) \quad \varphi = -2\varepsilon \ln \rho.$$

Tu ρ oznacza odległość od krzywej K , a $\vec{u}$ jest wektorem jednostkowym na prostej, na której leży ρ , o zwrocie odwróconym od K . Wzór (11.2) określa zachowanie się pola wektorowego przy zbliżaniu się do krzywej K tylko w wypadku granicznym, tzn. w takim otoczeniu krzywej K , w którym element liniowy ds możemy uważać za odcinek prostej tak krótki, by na nim praktycznie ε nie zmieniało się. Należy zauważyć, że dla pola (11.2) dywergencja, ściśle biorąc, nie znika. Zachodzi to tylko wtedy, gdy ε jest stałe, a K jest prostą. Z wyrażeniami (11.2) i (11.2a) spotkaliśmy się już w § 9 (zadanie 4). Przedstawiają one pole wektorowe rotacyjnie symetryczne i potencjał tego samego typu, przy czym osią symetrii jest element liniowy na K .

By obliczyć wydajność pojedynczego źródła liniowego (11.2), otaczamy element liniowy ds krzywej K wąskim walcem o długości ds i promieniu ρ . Ponieważ dla tego walca jest $df = \rho d\varphi ds$,

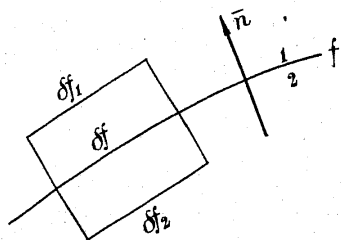
gdzie φ jest kątem liczonym dokoła ds , a $v_n = v = \frac{2\varepsilon}{\rho}$, więc dla wydajności (4.1a) otrzymujemy

$$\frac{1}{4\pi} \int_F v_n df = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\varepsilon} \frac{1}{\rho} d\rho ds = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi ds = \varepsilon ds.$$

A zatem wydajność pojedynczego źródła liniowego (11.2a) równa jest ε (na jednostkę długości krzywej K).

3. Pojedyncze źródła powierzchniowe znajdujemy na powierzchni f , jeżeli składowe normalne pola wektorowego $\bar{v}$ mają skok na tej powierzchni.

By objaśnić to pojęcie, odróżniamy obie strony f zapomocą wskaźników 1 i 2. Zakładamy następnie, że normalna $\bar{n}$ na f ma



taki zwrot, że idąc wzdłuż niej, przechodzimy ze strony 2 na stronę 1 (rys. 38). Poza tym przyjmujemy, że pole wektorowe $\bar{v}$ jest wprawdzie skończone w otoczeniu f , ale może tu być nieciągłe; ta nieciągłość musi jednak być tego rodzaju, by istniały wartości graniczne $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ pola $\bar{v}$ przy zbliżaniu się do powierzchni f od strony 1 i 2.

Rys. 38. Skok składowych normalnych $v_{1n} - v_{2n} = 4\pi\omega$

Skok składowych normalnych

określony jest wówczas przez wzór

$$(11.3) \quad (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \bar{n} = v_{1n} - v_{2n} = 4\pi\omega,$$

gdzie ω jest wydajnością źródeł, przypadającą na jednostkę powierzchni f . Możemy przekonać się o tym, jeżeli zamknijemy element δf powierzchni f w walec W , którego pobocznice tworzą normalne do powierzchni f , przechodzące przez brzeg elementu δf . Oprócz tego powierzchnia W składa się z dwu elementów powierzchniowych δf_1 i δf_2 , równoległych do δf i znajdujących się po stronach 1 i 2 (rys. 38). W wypadku granicznym „nieskończenie” płaskiego walca W otrzymujemy za pomocą (4.1a) dla wydajności źródeł, znajdujących się na δf , wyrażenie

$$(11.4) \quad \frac{1}{4\pi} \int_W v_n df = \frac{1}{4\pi} (v_{1n} - v_{2n}) \delta f.$$

Całka po poboczniczy walca znika mianowicie, gdy go nieograniczenie spłaszczamy, ponieważ v_n jest tu skończone, a obszar całkowania dąży do 0. Pozostają więc tylko całki po δf_1 i δf_2 . Normalna zewnętrzna walca W ma na δf_1 zwrot ten sam, a na δf_2 zwrot przeciwny niż $\bar{n}$. Dlatego

$$\int_{\delta f_1} v_n df = v_{1n} \delta f, \quad \int_{\delta f_2} v_n df = -v_{2n} \delta f,$$

tak że sprawdza się (11.4). Jeżeli ponadto wyrazimy w (11.4) skok składowych normalnych $v_{1n} - v_{2n}$ na mocy (11.3) przez ω , to otrzymamy

$$\frac{1}{4\pi} \int_W v_n df = \omega \delta f,$$

a więc ω jest rzeczywiście wydajnością źródeł powierzchniowych, przypadających na jednostkę powierzchni.

Jeżeli istnieje potencjał, to możemy zastąpić (11.3) przez

$$(11.3a) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_1 - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_2 = -4\pi\omega,$$

gdzie np. $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_1$ jest wartością graniczną $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, gdy zbliżamy się do powierzchni f od strony 1.

Zastanówmy się jeszcze nad pytaniem, jak wygląda pole wektorowe, wytworzone przez źródła leżące na δf , w bezpośrednim sąsiedztwie tego elementu powierzchniowego. Jeżeli cała płaszczyzna (np. płaszczyzna yz prostokątnego układu współrzędnych) obłożona jest źródłami powierzchniowymi o stałej wydajności ω , to jest ona wówczas płaszczyzną symetrii pola wektorowego, o ile poza tym nie występują żadne inne źródła. Znaczący to jednak, że wektory $\bar{v}$ mają w dwu punktach przestrzeni, leżących symetrycznie do tej płaszczyzny, wartości bezwzględne równe, kierunki prostopadłe do płaszczyzny symetrii, zwroty zaś przeciwne. Jeżeli np. w jednym punkcie jest $\bar{v} = \bar{v}_0$, to w drugim musi być $\bar{v} = -\bar{v}_0$. Ponieważ poza płaszczyzną yz nie istnieją żadne źródła, więc oba pola wektorowe muszą być jednorodne, jak to wynika z § 10 (zadanie 2). Wobec tego jest też $v_{1n} = -v_{2n} = v_0$. Jeżeli jednak wstawimy powyższe wartości do wzoru (11.3), to otrzymamy

$$(11.5) \quad v_{1n} = -v_{2n} = v_0 = 2\pi\omega.$$

Jak już powiedzieliśmy, wynik ten słuszny jest tylko w przypadku, gdy poza rozważanymi źródłami powierzchniowymi nie istnieją żadne inne źródła. W przeciwnym bowiem razie pole wektorowe, wytworzone przez te inne źródła, nakłada się na pole wektorowe źródeł powierzchniowych, tak że równość (11.5) nie może być spełniona. Wydaje się jednak oczywiste, że związek (11.5) zachodzi też dla powierzchni nie płaskiej i dla zmiennego ω , jeżeli tylko weźmiemy pod uwagę pole wektorowe, wytworzone przez dostatecznie mały element powierzchniowy δf w jego bezpośrednim sąsiedztwie (por. § 16, zadanie 1).

Możemy założyć istnienie na danej powierzchni f skoku potencjału φ niezależnie od skoku pochodnej tej funkcji w kierunku normalnej do f (ale oczywiście nie niezależnie od skoku pochodnych w kierunkach stycznych do f). Nie ma więc powodu, by przy pojedynczych źródłach powierzchniowych na f zakładać istnienie jakiegokolwiek skoku samego potencjału φ . Wobec tego przyjmiemy, że na powierzchni f potencjał φ jest ciągły, jeżeli na f znajdują się tylko źródła pojedyncze. Znaczeniem fizycznym skoku potencjału zajmiemy się w § 12.

§ 12. Źródła podwójne. Po zaznajomieniu się ze źródłami osobliwymi pojedynczymi zapoznamy się ze źródłami osobliwymi wielokrotnymi. Obecnie zajmiemy się tylko najprostszymi z nich, a mianowicie źródłami osobliwymi podwójnymi. Omówimy jednak tylko te spośród nich, których potrzebujemy dla dalszych rozważań, tj. tylko źródła podwójne punktowe i powierzchniowe.

1. Źródła podwójne punktowe. Aby skonstruować pole prędkości $\vec{v}$, istniejące w całej przestrzeni, gdy znajduje się w niej tylko jedno źródło podwójne punktowe, założmy, że w całej nieskończonej przestrzeni działają tylko dwa pojedyncze źródła punktowe Z_1 i Z_2 , o wydajnościach e i $-e$ (różniących się więc jedynie znakiem). Potencjał pola wektorowego wytworzonego przez oba te pojedyncze źródła punktowe jest w punkcie P odległym o r_1 od Z_1 i o r_2 od Z_2 równy

$$(12.1) \quad \varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}.$$

Przy nieograniczonym zbliżaniu się źródła Z_1 do źródła Z_2 , odległości r_1 i r_2 dążą do wspólnej granicy, tak że φ musi

znikać. Możemy jednak otrzymać nieznikającą wartość graniczną, jeżeli w miarę zbliżania się źródeł do siebie będziemy równocześnie zwiększać ich wydajność. By takie przejście graniczne bliżej zbadać, oznaczmy przez $\vec{s}^* \Delta s$ wektor, określający położenie źródła dodatniego Z_1 względem ujemnego Z_2 ; $\vec{s}^*$ oznacza przy tym pewien wektor jednostkowy, a Δs — odległość między źródłami (rys. 39). Jeżeli Z_1 zbliża się wzdłuż $\vec{s}^*$ do źródła Z_2 , to $1/r_1$ jest funkcją Δs . Możemy więc $1/r_1$ rozwinąć na szereg Taylora według potęg Δs , tak że otrzymamy w pierwszym przybliżeniu:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \Delta s \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} + \Delta s^2(\dots) = \frac{1}{r_2} + \Delta s \vec{s}^* \text{grad}_Z \frac{1}{r} + \Delta s^2(\dots).$$

Przy tym pochodną względem s i gradient należy obliczyć w punkcie Z_2 . Wskaźnik Z przy gradiencie oznacza, że operator ten działa (tak samo jak różniczkowanie względem s) na współrzędne źródła. Wyrażenie w nawiasie, które jest pomnożone przez Δs^2 , ma dla $\Delta s \rightarrow 0$ w każdym razie skończoną wartość graniczną. Wobec tego

$$\varphi = e \Delta s \vec{s}^* \text{grad}_Z \frac{1}{r} + \Delta s \cdot e \Delta s(\dots).$$

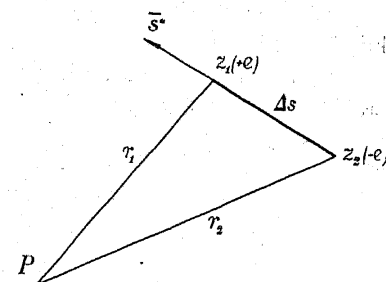
Jeżeli przy wzajemnym zbliżaniu się obu źródeł (a więc przy $\Delta s \rightarrow 0$) wartość e rośnie w ten sposób, że iloczyn wydajności e przez odległość Δs dąży do skończonej wartości granicznej $\bar{m}$, to przy tym przejściu otrzymujemy dla φ nieznikającą wartość graniczną

$$(12.2) \quad \varphi = \bar{m} \vec{s}^* \text{grad}_Z \frac{1}{r} = \bar{m} \text{grad}_Z \frac{1}{r} = \bar{m} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r},$$

gdzie

$$(12.3) \quad \bar{m} = m \vec{s}^*.$$

Dla $\Delta s \rightarrow 0$ znika mianowicie w rozwinięciu φ wyrażenie zawierające nawias, ponieważ zawartość nawiasu i iloczyn $e \Delta s$ pozostają skończone, a znika Δs występujące w tym wyrażeniu.



Rys. 39. Powstawanie podwójnego źródła punktowego.

Źródło, powstające przy takim przejściu granicznym, nazywamy *źródłem podwójnym punktowym*, a wektor $\bar{m}$ — jego *momentem*.

Wektor $\bar{m}$ skierowany jest od ujemnego źródła pojedynczego ku dodatniemu.

Zamiast różniczkować jak w (12.2) względem współrzędnych źródła Z , możemy uczynić to również względem współrzędnych punktu P , dla którego obliczamy φ . Musimy jednak wówczas zmienić znak wyrażenia (12.2). Oznaczmy mianowicie współrzędne punktów P i Z odpowiednio przez x_P, y_P, z_P i x_Z, y_Z, z_Z ; wówczas

$$r = \sqrt{(x_P - x_Z)^2 + (y_P - y_Z)^2 + (z_P - z_Z)^2}$$

jest funkcją różnic współrzędnych $x_P - x_Z, y_P - y_Z, z_P - z_Z$. Możemy jednak łatwo przekonać się, że dla każdej funkcji Φ różnic współrzędnych zachodzą związki:

$$(12.4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_Z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_P}, \dots$$

Obok (12.2) otrzymujemy więc dla φ również wyrażenie

$$(12.2a) \quad \varphi = -\bar{m} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r},$$

gdzie grad_P działa na współrzędne punktu P .

Wzór (12.2) możemy też przekształcić za pomocą (2.16c) na

$$(12.2b) \quad \varphi = -\frac{\bar{m}\bar{r}}{r^3} = -\frac{m \cos(\bar{m}, \bar{r})}{r^2},$$

gdzie $\bar{r}$ jest wektorem skierowanym od punktu P ku źródłu Z . Wartość φ w punkcie P określona jest więc przez kąt bryłowy, pod jakim widzimy z punktu P element powierzchniowy, określony przez wektor dopełniający $-\bar{m}$. Wyrażenie $-m \cos(\bar{m}, \bar{r})$ jest mianowicie rzutem tego elementu powierzchniowego na płaszczyznę prostopadłą do wektora $\bar{r}$, a zatem (12.2b) jest kątem bryłowym, pod jakim widzimy z punktu P ten rzut, a więc i pierwotny element powierzchniowy $-\bar{m}$.

Zauważmy ponadto, że przy zbliżaniu się do źródła punkowego podwójnego potencjał, a więc i odpowiednie pole wektorowe, szybciej dąży do nieskończoności niż w przypadku źródła punkowego pojedynczego.

2. Warstwa podwójna na powierzchni f znajduje się wtedy, gdy potencjał doznaje na niej skoku

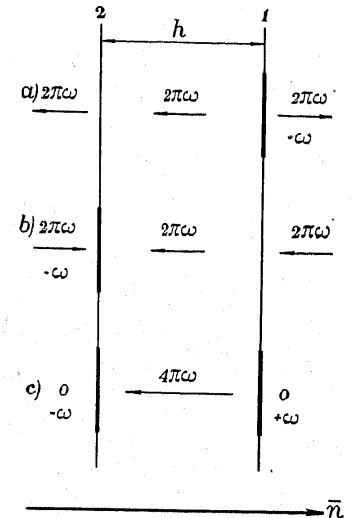
$$(12.5) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\tau,$$

gdzie φ_1 i φ_2 są wartościami granicznymi, do których dąży φ przy zbliżaniu się do f odpowiednio od strony 1 i 2; τ nazywamy *momentem warstwy podwójnej*.

By zrozumieć powstawanie takiego skoku potencjału, weźmy najpierw pod uwagę przypadek szczególny, gdy pojedynczymi źródłami powierzchniowymi obłożone są płaszczyzny równoległe 1 i 2 — i to tak, że obie mają wydajności stałe, różniące się tylko znakiem: ω i $-\omega$. Gdyby istniały tylko dodatnie źródła płaszczyzny 1, to według (11.5) wytwarzałyby one po obu stronach tej płaszczyzny dwa jednorodne, lecz przeciwnie skierowane pola wektorowe o wartościach bezwzględnych $2\pi\omega$ (rys. 40a). Pole wektorowe wytwarzane przez ujemne źródła płaszczyzny 2 otrzymamy, odwracając zwroty wektorów pola wektorowego płaszczyzny 1 (rys. 40b). Jeżeli źródła obu płaszczyzn są czynne równocześnie, to pola ich nakładają się i otrzymujemy — jak widać z rys. 40c — pole wektorowe, które w obszarze między obu płaszczyznami ma wielkość $4\pi\omega$, ale poza nim znika. Oznaczmy przez h odległość między płaszczyznami 1 i 2. Różnica ich potencjałów równa jest wówczas

$$(12.6) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = - \int_1^2 v_s ds = -4\pi\omega h.$$

Znak „—” jest następstwem zwrotu pola wektorowego (por. rys. 40c). Ponieważ pole wektorowe znika w obydwu półprzestrzeniach poza rozpatrywaną warstwą podwójną, przeto potencjał musi mieć tu wartość stałą. Ze względu na to, że potencjał w warstwie pojedynczej jest ciągle, tymi stałymi wartościami potencjału mogą



Rys. 40. Powstawanie warstwy podwójnej źródeł.

być tylko φ_1 i φ_2 . Są to więc zarazem wartości graniczne potencjału przy zbliżaniu się do płaszczyzn 1 i 2 z zewnątrz. Równanie (12.6) zgodne jest zatem z równaniem (12.5), jeżeli $\tau = \omega h$. W ten sposób ustaliliśmy strukturę warstwy podwójnej i znaczenie jej momentu, przynajmniej w jednym przypadku specjalnym (por. § 16, zadanie 2).

Wynik ten możemy jednak natychmiast uogólnić. W przypadku dostatecznie małego elementu δf powierzchni f możemy uważać ω za stałe, a δf za element płaski. Warstwa podwójna, istniejąca na δf , wytwarza więc w swoim bezpośrednim sąsiedztwie ten sam potencjał co w rozpatrywanym przypadku specjalnym, ponieważ warstwa ta działa wówczas tak samo jak płaszczyzna nieskończona ze źródłami podwójnymi o stałym momencie. Do tej części potencjału stosuje się więc równanie (12.5). Potencjały pozostałych elementów powierzchniowych na powierzchni f są jednak na δf ciągle, tak że równanie (12.5) spełnione jest dla całego potencjału.

Jeżeli warstwa podwójna znajduje się na powierzchni posiadającej krawędź, to jej pole wektorowe $\vec{v}$ musi dążyć do nieskończoności, gdy zbliżamy się do krawędzi. Połączmy ze sobą mianowicie dwa punkty P_1 i P_2 leżące na powierzchni f naprzeciwko siebie w pobliżu jej krawędzi, krzywą K o kształcie koła, która nie przechodząc przez warstwę podwójną otacza ściśle jej krawędź; ze względu na $\omega h = \tau$, (12.6), mamy wówczas

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_K v_s ds = -4\pi\tau.$$

Niezależnie więc od tego, jak mały jest obszar całkowania po K , całka ta musi mieć zawsze jedną i tę samą wartość. Funkcja podcałkowa v_s musi więc dążyć do nieskończoności, gdy się zbliżamy do krawędzi powierzchni f .

Możemy się o tym przekonać na przykładzie z § 9 (zadanie 5). Funkcję $\psi = a\varphi + b$ możemy bowiem uważać za potencjał warstwy podwójnej o stałym momencie (por. obliczenie krążenia w § 14, zadanie), której krawędź tworzy prosta g , a która zresztą w dowolny sposób przebiega w nieskończoność.

W końcu zauważymy jeszcze, że każde źródło osobliwe można otrzymać zagęszczając źródła przestrzenne w odpowiedni sposób w punktach, krzywych lub powierzchniach. Uwaga ta ma bardzo ważne znaczenie heurystyczne. Powiada nam bowiem, że możemy przez odpowiednie przejście graniczne dojść do wzorów dla źródeł

osobliwych, gdy posiadamy odpowiednie wzory dla źródeł przestrzennych.

§ 13. Źródła punktowe wielokrotne i funkcje kuliste. Potencjał źródła punktowego podwójnego $\varphi_1 = \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{r}$ możemy otrzymać

z potencjału $\varphi_0 = \frac{1}{r}$ źródła pojedynczego, różniczkując go względem

współrzędnych źródła w kierunku określonym przez wektor jednostkowy $\vec{s}_1$. Jeżeli następnie zróżniczkujemy φ_1 w tym samym lub w jakimś innym kierunku $\vec{s}_2$, to otrzymamy potencjał $\varphi_2 = \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} \frac{1}{r}$ układu czterech źródeł. Dochodzimy mianowicie do φ_2 , przeciwstawiając dwa równoległe źródła podwójne D_1 i D_2 o równych, ale przeciwnie skierowanych momentach $\vec{m}$ i $-\vec{m}$, i to tak, by położenie D_1 względem D_2 określone było przez $\vec{s}_2 \Delta s_2$ (rys. 41). Jeżeli odległość Δs_2 obu źródeł dąży do zera, a równocześnie tak zwiększamy m , że $m\Delta s_2$ dąży do 1, to otrzymujemy pole wektorowe, którego potencjałem jest oczywiście φ_2 .

Rys. 41. Powstawanie źródła poczwórnego ze źródeł podwójnych D_1 i D_2 .

Możemy tak samo postępować dalej: $\varphi_3 = \frac{\partial^3}{\partial s_3 \partial s_2 \partial s_1} \frac{1}{r}$ przedstawia źródło ośmiokrotne, a

$$(13.1) \quad \varphi_n = \frac{\partial^n}{\partial s_n \partial s_{n-1} \dots \partial s_1} \frac{1}{r}$$

źródło punktowe 2^n -krotne. Wydajność źródeł wielokrotnych utworzonych w ten sposób oczywiście znika. Albowiem, by otrzymać źródło 2^n -krotne, przeciwstawiamy jedno drugiemu dwa źródła 2^{n-1} -krotne (złożone więc właściwie z 2^{n-1} źródeł pojedynczych), różniące się znakiem wydajności.

Udowodnimy, że φ_n można przedstawić w postaci

$$(13.2) \quad \varphi_n = (-1)^n n! \frac{Y_n}{r^{n+1}},$$

gdzie Y_n zależy tylko od kierunku, a więc jest funkcją punktu na kuli jednostkowej, czyli funkcją zmiennych ϑ i φ (jeżeli używamy współrzędnych biegunowych przestrzennych). Wprowadziliśmy tu stałą $(-1)^n n!$, aby otrzymać Y_n w pewnych szczególnych przypadkach, ze zwykle używanym współczynnikiem liczbowym. Dla dowodu wzoru (13.2) posługujemy się definicją funkcji jednorodnej $f(x, y, z)$ stopnia ν -tego:

$$(13.3) \quad f(ax, ay, az) = a^\nu f(x, y, z).$$

Jej pochodna np. względem x spełnia zatem związek

$$\frac{\partial f}{\partial x}(ax, ay, az) = a^{\nu-1} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x},$$

jest więc funkcją jednorodną $(\nu-1)$ -ego stopnia. Ponieważ pochodna kierunkowa jest funkcją liniowo-jednorodną pochodnych względem x, y, z (por. § 2), więc pochodna-kierunkowa funkcji jednorodnej ν -tego stopnia jest funkcją jednorodną $(\nu-1)$ -ego stopnia. Ze względu na

$$(13.4) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

funkcja $\varphi_0 = 1/r$ jest funkcją jednorodną (-1) -ego stopnia, a więc φ_n jest także funkcją $-(n+1)$ -ego stopnia. Wynika stąd, że

$$(13.5) \quad Y_n = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \varphi_n$$

jest funkcją jednorodną zerowego stopnia zmiennych x, y, z ; możemy ją przeto uważać (podstawiając $a=1/r$ do wzoru (13.3)) za funkcję cosinusów kierunkowych $x/r, y/r, z/r$, a zatem, po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych przestrzennych, też za funkcję zmiennych ϑ i φ .

Wyprowadzimy obecnie równanie różniczkowe dla funkcji $Y_n(\vartheta, \varphi)$. Według § 9 (zadanie 3) jest $\Delta \frac{1}{r} = 0$. Dlatego też

$$\frac{\partial^n}{\partial s_n \dots \partial s_1} \Delta \frac{1}{r} = 0, \text{ a więc}$$

$$(13.6) \quad \Delta \varphi_n = 0.$$

Zatem φ_n jest rozwiązaniem równania Laplace'a. Ponieważ jednak

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{Y_n}{r^{n+1}} = -(n+1) \frac{Y_n}{r^{n+2}},$$

więc

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = -(n+1) \frac{\partial}{\partial r} \frac{Y_n}{r^n} = n(n+1) \frac{Y_n}{r^{n+1}},$$

przeto z (13.6) ze względu na (9.8d) wynika następujące równanie dla $Y_n(\vartheta, \varphi)$:

$$(13.7) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\vartheta \sin \vartheta \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0.$$

Jeżeli zastąpimy ϑ przez zmienną $\gamma = \cos \vartheta$, to ze względu na to, że $d\gamma = -\sin \vartheta d\vartheta$ równanie (13.7) przybierze postać

$$(13.7a) \quad \frac{\partial}{\partial \gamma} (1-\gamma^2) \frac{\partial Y_n}{\partial \gamma} + \frac{1}{1-\gamma^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0.$$

Każde rozwiązanie tego równania różniczkowego nazywamy funkcją kulistą ogólną n -tego rzędu.

Funkcje kuliste określone przez (13.5) wyróżniają się tym, że są skończone na całej kuli jednostkowej. Nazywamy je funkcjami kulistymi pierwszego rodzaju, by odróżnić je od funkcji kulistych drugiego rodzaju, które w pewnych punktach kuli jednostkowej dążą do nieskończoności. Funkcje kuliste ogólne nazywamy też funkcjami Laplace'a. Funkcję kulistą niezależną od kąta φ zwiemy funkcją kulistą prostą, strefową lub funkcją Legendre'a. Dla naszych celów wystarczą funkcje kuliste pierwszego rodzaju.

Weźmy najpierw pod uwagę funkcje kuliste strefowe; możemy bowiem otrzymać z nich w bardzo prosty sposób funkcje Laplace'a. Ponieważ funkcje strefowe zależne są tylko od ϑ (a nie od φ), więc dla odpowiadających im funkcji φ_n kierunek, od którego liczymy kąt ϑ (oś z), jest osią symetrii. Osiowo symetryczne funkcje otrzymujemy przez różniczkowanie wzoru (13.1) wyłącznie w kierunku osi symetrii

$$(13.1a) \quad \varphi_n = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r}.$$

Funkcje kuliste strefowe oznaczamy — jak to jest w zwyczaju — przez „ $P_n(\cos \vartheta)$ ”. Określone są one według (13.5) i (13.1a) wzorem

$$(13.8) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r},$$

gdzie $\cos \vartheta = z/r$. Ich równanie różniczkowe powstaje z (13.7) lub (13.7a) przez opuszczenie członu zawierającego $\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2}$.

Dla zbadania wielu własności lub obliczania funkcji strefowych bardzo dogodna jest tzw. *funkcja tworząca*.

Określamy ją przez szereg potęgowy, w którym jako współczynniki występują funkcje P_n , mianowicie przez sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{\varrho^n}{r^{n+1}},$$

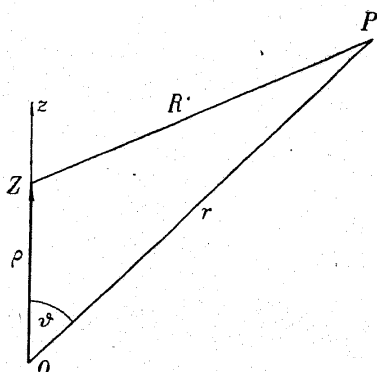
która w myśl (13.8) równa jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varrho^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r}.$$

Suma ta przedstawia jednak — jak to bezpośrednio możemy sprawdzić — szereg Taylora dla funkcji $1/R$, gdzie $R^2 = x^2 + y^2 + (z - \varrho)^2$.

Ze względu na (13.4) i $\cos \vartheta = \frac{z}{r}$ jest $R^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \vartheta$, skąd

$$(13.9) \quad \begin{aligned} P_0 \frac{1}{r} + P_1 \frac{\varrho}{r^2} + P_2 \frac{\varrho^2}{r^3} + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\gamma) \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} = \frac{1}{R} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \vartheta}}, \end{aligned}$$



Rys. 42. Interpretacja fizyczna funkcji tworzącej strefowych funkcji kulistych.

gdzie R jest odległością punktu P od źródła Z , znajdującego się po stronie dodatniej osi z w odległości ϱ od początku układu współrzędnych (rys. 42); r jest odległością P od O , a ϑ kątem między ϱ i r . Funkcja tworząca (13.9) przedstawia zatem rozwinięcie potencjału źródła Z w sąsiedztwie punktu P przy użyciu współrzędnych biegunowych przestrzennych o początku układu w punkcie O .

Z (13.9) otrzymujemy funkcje strefowe P_n , rozwijając R według

potęg ϱ . W ten sposób (por. zadanie 18) lub wprost z (13.8) dostajemy dla pierwszych sześciu funkcji strefowych wyrażenia:

$$(13.10) \quad \begin{aligned} P_0(\gamma) &= 1, & P_3(\gamma) &= \frac{1}{2}(5\gamma^3 - 3\gamma), \\ P_1(\gamma) &= \gamma, & P_4(\gamma) &= \frac{1}{8}(35\gamma^4 - 30\gamma^2 + 3), \\ P_2(\gamma) &= \frac{1}{2}(3\gamma^2 - 1), & P_5(\gamma) &= \frac{1}{8}(63\gamma^5 - 70\gamma^3 + 15\gamma). \end{aligned}$$

$P_n(\gamma)$ jest więc wielomianem n -tego stopnia zmiennej γ . Dla tego też nazywamy funkcje strefowe *wielomianami Legendre'a*.

By otrzymać funkcje kuliste Laplace'a, musimy rozwiązać równanie różniczkowe (13.7a) w przypadku, gdy funkcje Y_n zależą też od φ . W tym celu stosujemy metodę rozdzielania zmiennych, tzn. szukamy takich rozwiązań $Y_n(\vartheta, \varphi)$, które byłyby iloczynami dwu funkcji: jednej, zależnej tylko od φ , drugiej — tylko od $\gamma = \cos \vartheta$

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \Phi(\varphi) \Theta(\gamma).$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do (13.7a), możemy napisać to równanie różniczkowe w ten sposób, aby po jednej jego stronie znalazły się wielkości zależne tylko od γ , a po drugiej — zależne tylko od φ

$$(13.11) \quad \frac{1 - \gamma^2}{\Theta} \frac{d}{d\gamma} (1 - \gamma^2) \frac{d\Theta}{d\gamma} + n(n+1)(1 - \gamma^2) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = c^2.$$

Jak wykazuje pierwsze wyrażenie zależne tylko od γ , c^2 nie zależy od φ ; ale nie może też zależeć od γ , jak tego dowodzi drugie wyrażenie zależne tylko od φ . Zatem c^2 musi być stałą. Równanie (13.11) rozpada się więc na dwa równania różniczkowe: jedno dla Φ , a drugie dla Θ .

Pierwsze ma postać

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -c^2 \Phi,$$

a jego rozwiązaniem jest

$$\Phi = \cos c\varphi \quad \text{lub} \quad \Phi = \sin c\varphi.$$

Ze względu na związek Eulera

$$(13.12) \quad e^{\pm i a} = \cos a \pm i \sin a$$

możemy wyrażeniu Φ nadać też kształt $\Phi = e^{\pm ic\varphi}$; liczba c musi tu być całkowita, ponieważ $Y_n(\vartheta, \varphi)$, a więc też i $\Phi(\varphi)$, muszą być funkcjami jednoznaczными na kuli jednostkowej. Wówczas jest $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, to znaczy

$$e^{\pm ic(\varphi + 2\pi)} = e^{\pm ic\varphi}, \quad \text{czyli} \quad e^{\pm ic2\pi} = 1.$$

To równanie jest jednak tylko wtedy spełnione, gdy $c = m$, gdzie $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Ostatecznie jest więc

$$(13.13) \quad \Phi(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Jeżeli w (13.11) zamiast $+c^2$ wstawimy $-c^2$, to dla Φ otrzymamy funkcję wykładniczą $\Phi = e^{c\varphi}$, dla której równość $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ nie może zachodzić.

Przyrównując c do m , otrzymujemy z (13.11) następujące równanie różniczkowe dla Θ :

$$(13.14) \quad \frac{d}{d\gamma} (1 - \gamma^2) \frac{d\Theta}{d\gamma} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \gamma^2} \right] \Theta = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe tzw. *funkcji kulistych przyporządkowanych*. Oznaczamy je przez

$$P_n^m(\gamma) = P_n^m(\cos \vartheta).$$

Aby rozwiązać równanie (13.14), podstawiamy:

$$\Theta = P_n^m(\gamma) = (1 - \gamma^2)^{m/2} U_n^m(\gamma)$$

i bez trudu otrzymujemy dla U_n^m równanie różniczkowe

$$(13.15) \quad (1 - \gamma^2) \frac{d^2 U_n^m}{d\gamma^2} - 2(m+1)\gamma \frac{dU_n^m}{d\gamma} - \left[n(n+1) - m(m+1) \right] U_n^m = 0,$$

którego rozwiązanie jest łatwe. Różniczkując je mianowicie względem γ dostajemy dla $\frac{dU_n^m}{d\gamma}$ równanie różniczkowe postaci (13.15),

ale na U_n^{m+1} . Możemy więc podstawić $U_n^{m+1} = \frac{dU_n^m}{d\gamma}$. Jeżeli zastąpimy tu kolejno m przez $0, 1, 2, \dots, m-1$, to dostaniemy $U_n^m = \frac{d^m U_n^0}{d\gamma^m}$. Równanie (13.15) jest jednak dla $m=0$ identyczne z równaniem różniczkowym dla P_n , tak że $U_n^0 = P_n$ i dlatego też

$$U_n^m = \frac{d^m P_n(\gamma)}{d\gamma^m}.$$

Ostatecznie mamy więc równanie

$$(13.16) \quad P_n^m(\gamma) = (1 - \gamma^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\gamma)}{d\gamma^m}.$$

Jeżeli przyjąć je za definicję funkcji P_n^m , to można by ją stosować tylko dla dodatnich m , ponieważ dla ujemnych m różniczkowanie nie mogło być wykonane. Dlatego dla ujemnych m wielu autorów określa P_n^m wzorem

$$(13.17) \quad P_n^{-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m$$

ważnym tak dla dodatnich, jak i ujemnych wartości m .

Ponieważ m występuje w (13.14) w kwadracie, więc funkcje kuliste określone przez (13.17) spełniają również dla ujemnych m równanie różniczkowe (13.14).

Funkcje kuliste możemy więc dla wszystkich m całkowitych określić wzorem

$$(13.18) \quad Y_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta).$$

Zawsze musimy jednak zakładać, że $n \geq |m|$, albowiem P_n jest wielomianem n -tego stopnia i znika, jeżeli go różniczkujemy więcej niż n razy.

W nowszej teorii kwantów, gdzie funkcje kuliste o dodatnim i ujemnym wskaźniku m występują równie często, używa się obecnie coraz powszechniej przyporządkowanych funkcji kulistych $P_n^m(\gamma)$ w unormowaniu C. G. Darwina. Są one określone równaniem

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(\gamma) = (n-m)! P_n^m(\gamma)$$

niezależnie od znaku wskaźnika m . Dla tych darwinowskich funkcji kulistych wzór (13.17) przyjmuje bardzo prostą i symetryczną postać

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(\gamma) = (-1)^m \mathfrak{P}_n^m(\gamma).$$

ZADANIA. 1. Przy pomocy funkcji tworzącej (ob. (13.9)) pokazać, że:

$$(\alpha) \quad P_n(-\gamma) = (-1)^n P_n(\gamma),$$

$$(\beta) \quad P_n(1) = 1,$$

$$(\gamma) \quad P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n},$$

$$(\delta) \quad P_n(\gamma) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left(\gamma^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \gamma^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \gamma^{n-4} - \dots \right) = \sum_{s=0}^{\sigma} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s! (n-s)! (n-2s)!} \gamma^{n-2s},$$

gdzie $\sigma = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tzn. $\sigma = \frac{n}{2}$ lub $\sigma = \frac{n-1}{2}$ zależnie do tego, która

z tych liczb jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie. (α) Jeżeli w (13.9) zastąpimy $\cos \vartheta = \gamma$ przez $-\gamma$, to otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\gamma) \frac{\varrho^n}{r^{n+1}}.$$

Przy tym R przechodzi w $\sqrt{r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho \cos \vartheta}$. Przyjmując, że zmiana znaku wyrażenia $2r\varrho \cos \vartheta$ spowodowana została zmianą znaku ϱ , dostajemy zamiast (13.9) rozwinięcie

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\gamma) (-1)^n \frac{\varrho^n}{r^{n+1}}.$$

(β) Dla $\gamma = 1$ jest $R = r - \varrho$, tak że

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}}.$$

(γ) Dla $\gamma = 0$ jest $R = \sqrt{r^2 + \varrho^2}$, tak że

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{r^2}}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\nu} \frac{\varrho^{2\nu}}{r^{2\nu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \frac{\varrho}{r^{n+1}}.$$

(δ) W celu obliczenia $P_n(\gamma)$ posługujemy się dwukrotnie wzorem Newtona dla dwumianu w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\gamma}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 - 2\gamma \frac{\varrho}{r} \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\nu} \left[\left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 - 2\gamma \frac{\varrho}{r} \right]^{\nu} = \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\nu} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{\nu} \left(\frac{\varrho}{r} - 2\gamma \right)^{\nu} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\nu} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{\nu} \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^s (-2\gamma)^{\nu-s} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\nu} \sum_{s=0}^{\nu} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{\nu+s} \binom{\nu}{s} (-2\gamma)^{\nu-s}. \end{aligned}$$

By uporządkować tę sumę podwójną według potęg $\frac{\varrho}{r}$, wprowadzamy zamiast ν nowy wskaźnik sumowania $n = \nu + s$, tzn. podstawiamy $\nu = n - s$:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} \sum_{s=0}^{\sigma} \binom{-1/2}{n-s} \binom{n-s}{s} (-2\gamma)^{n-2s}.$$

Granice sumowania względem n są 0 i $+\infty$, ponieważ $n = \nu + s$, a sumujemy s od 0 do ν i ν od 0 do $+\infty$. Dalej jasne jest, że dolną granicą sumowania względem s jest $s = 0$. Górną granicę σ wyznaczmy dopiero na ostatku. Ponieważ

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n-s} &= \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-(n-s-1))}{1 \cdot 2 \dots (n-s)} = \\ &= \frac{(-1)^{n-s}}{2^{n-s}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots [2(n-s)-1]}{(n-s)!} = \\ &= \frac{(-1)^{n-s}}{2^{n-s}} \cdot \frac{[2(n-s)]!}{(n-s)! 2^{n-s} (n-s)!} = \frac{(-1)^{n-s}}{2^{2n-2s}} \cdot \frac{[2(n-s)]!}{[(n-s)!]^2} \end{aligned}$$

i

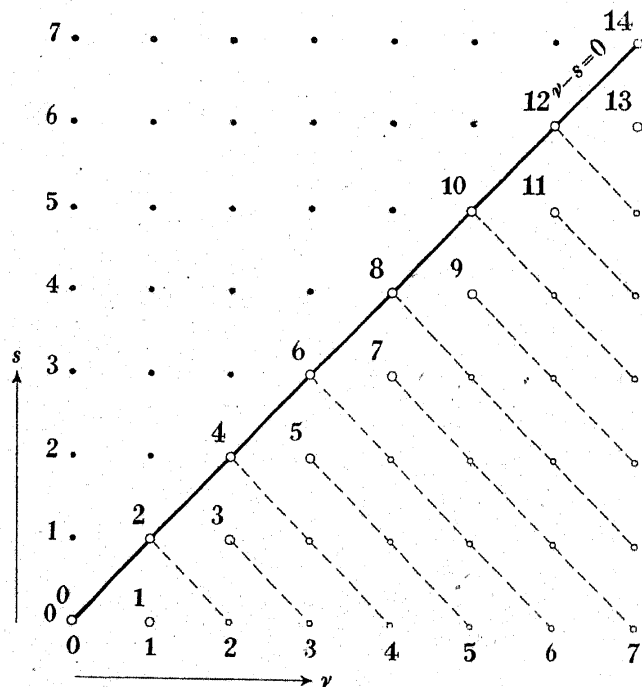
$$\binom{n-s}{s} = \frac{(n-s)!}{s!(n-2s)!},$$

więc otrzymujemy:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{r^{n+1}} \sum_{s=0}^{\sigma} (-1)^s \frac{[2(n-s)]!}{2^n s! (n-s)! (n-2s)!} \gamma^{n-2s}.$$

Pozostaje do wyznaczenia σ . Stosując do dwumianu $\left(\frac{e}{r} - 2\gamma\right)$ wzór Newtona, otrzymujemy γ w potęgze nieujemnej. Wobec tego mamy $n-2s \geq 0$, czyli $\frac{n}{2} \geq s$, a więc i $\frac{n}{2} \geq \frac{\sigma}{2}$. Zatem σ nie może być większe od $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Nie może być jednak też i mniejsze, jak to widać z rys. 43. Na osi odciętych umieszczamy ν , a na rzędnych s . Sumujemy przy



Rys. 43. Przejście od sumowania po ν i s do sumowania po $n = \nu + s$ i s w zadaniu 18, § 13.

stałym ν względem wskaźnika s od 0 do ν . Pary (ν, s) , które występują w sumie, oznaczone są na rys. 43 małymi kółkami. Jeśli zastąpimy sumowanie względem ν sumowaniem względem $n = \nu + s$, to przy stałym n będzie $\nu + s = n = \text{const}$, a więc sumowanie musimy przeprowadzić po prostych pochyłych, uwidocznionych na rys. 43 jako proste kreskowane. Należy wykonać to sumowanie względem s od $s=0$ aż do punktu P , leżącego na prostej $\nu - s = 0$ lub tuż przed nią (przy punktach tych podano na rysunku wartości liczb n , do których należą odpowiednie proste kreskowane). Ponieważ $\nu = n - s$, więc dla punktu położonego na prostej $\nu - s = 0$ dane jest s przez $n - s - s = 0$, czyli $s = \frac{n}{2}$. Zatem $\sigma = \left[\frac{n}{2}\right]$, c.b.d.o.

2. Dowieść, że $\Delta r^n Y_n(\vartheta, \varphi) = 0$.

Rozwiązanie wynika z (9.8d) i (13.7).

3. Ortogonalność funkcji kulistych. Dowieść, że

$$\int_K Y_k Y_l d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_k Y_l \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad \text{dla } k \neq l.$$

K jest tu kulą jednostkową, a $d\omega$ jej elementem powierzchniowym.

Rozwiązanie. Stosujemy twierdzenie Greena (5.5) do wnętrza kuli jednostkowej oraz do funkcji $\varphi = r^k Y_k$ i $\psi = r^l Y_l$. Ponieważ według zadania 2 jest $\Delta \varphi = 0$ i $\Delta \psi = 0$, a następnie $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=1} = -k Y_k$ i $\frac{\partial \psi}{\partial n} = -l Y_l$, przy czym $d\omega$ dane jest wzorem $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, więc z (5.5) wynika, że

$$(l-k) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_k Y_l \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Ze względu na założenie, że $k \neq l$, całka musi znikać.

4. Dowieść, że $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{Y}_n^m Y_n^{m'} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0$ dla $m \neq m'$.

$\tilde{Y}_n^m$ oznacza tu funkcję sprzężoną z Y_n^m .

Rozwiązanie. Możemy całkować osobno po φ i po ϑ . Dla $m \neq m'$ całkowanie po φ daje jednak

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\varphi} d\varphi = \frac{e^{i(m'-m)\varphi}}{i(m'-m)} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

5. Sprawdzić za pomocą wzoru na $P_n(\gamma)$ (zadanie 18), że funkcję tę możemy też przedstawić w postaci

$$P_n(\gamma) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\gamma^n} (\gamma^2 - 1)^n.$$

Jest to tzw. wzór Rodrigues'a.

Rozwiązanie. Rozwijając $(\gamma^2 - 1)^n$ według wzoru Newtona, otrzymujemy

$$(\gamma^2 - 1)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^s \gamma^{2n-2s}.$$

Ponieważ jednak

$$\frac{d^n \gamma^m}{d\gamma^n} = m(m-1) \dots [m - (n-1)] \gamma^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!} \gamma^{m-n},$$

więc mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\gamma^n} (\gamma^2 - 1)^n &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!} \gamma^{n-2s} = \\ &= \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(2n-2s)! \gamma^{n-2s}}{2^n s! (n-s)! (n-2s)!}. \end{aligned}$$

§ 14. Wiry osobliwe. Przy wirach pola wektorowego $\bar{v}$, tak samo jak przy wydajności, wprowadzamy współczynnik 4π i określamy natężenie wirów przestrzennych przez

$$(14.1) \quad \bar{c} = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \bar{v}.$$

Czynimy tak, by otrzymać wzory w postaci dostosowanej do układu miar Gaussa w nauce o elektromagnetyzmie.

Ponieważ według (7.14b) pole wektorowe $\bar{c}$ nie posiada źródeł, czyli

$$(14.2) \quad \text{div } \bar{c} = 0,$$

więc według § 6 możemy przedstawić $\bar{c}$ przez rurki wektorowe, które nazywamy *rurkami wirowymi*.

Jeżeli pole wirów nie posiada osobliwości, to rurki wirowe muszą być albo zamknięte w sobie, albo zaczynać i kończyć się na ograniczeniach obszarów lub w nieskończoności. Moment rurki wirowej jest stały dla każdego z jej przekrojów f i określony wzorem

$$(14.3) \quad \chi = \int_f c_n df = \frac{1}{4\pi} \int_f \text{rot}_n \bar{v} df.$$

Na mocy twierdzenia Stokesa możemy ten moment wyrazić przez krążenie

$$(14.3a) \quad \chi = \frac{1}{4\pi} \oint_K \bar{v} d\bar{s},$$

gdzie K oznacza krawędź powierzchni f , leżącą na pobocznicy rurki wirowej. Żeby χ nie było ujemne, należy kierunek obiegu na krzywej K przyporządkować zwrotowi wektora $\bar{c}$ według reguły śruby prawoskrętnej.

Rurkę wirową nazywamy *odosobnioną*, jeżeli poza nią nie istnieją żadne wiry przestrzenne, a więc jeżeli poza nią $\bar{c}$ znika.

Moment rurki wirowej odosobnionej określony jest przez (14.3a) nawet w tych przypadkach, gdy K jest jakąkolwiek zamkniętą krzywą obiegającą jeden raz rurkę wirową, nie zaś krzywą znajdującą się koniecznie na pobocznicy tej rurki. Jeżeli bowiem przekształcimy przy pomocy twierdzenia Stokesa krążenie $\oint_K \bar{v} d\bar{s}$ w całkę powierzchniową, to otrzymamy dokładnie wzór (14.3), ponieważ $\bar{c}$ znika poza rurką wirową.

Wiry osobliwe otrzymujemy przez odpowiednie zagęszczanie wirów przestrzennych. Z tego punktu widzenia rozpatrzmy obecnie tzw. włókna i warstwy wirowe.

1. Włókno wirowe. Jeżeli wiry, znajdujące się w rurce wirowej odosobnionej stłoczyć do jednej krzywej L w ten sposób, by moment wirowy $\chi = \int_f c_n df$ zachował przy tym swoją wartość, to otrzymuje się twór, który nazywamy *włóknem wirowym*.

Widzimy wprost, że przy takim przejściu granicznym włókna wirowe dziedziczą po rurkach wirowych następujące własności:

1° Moment χ jest wzdłuż każdego włókna wirowego stały.

2° Przy braku wirów przestrzennych moment χ dany jest wzorem (14.3a), gdzie K jest dowolną krzywą zamkniętą, okrążającą jeden raz włókno wirowe.

3° Włókno wirowe jest albo zamknięte, albo zaczyna się i kończy na ograniczeniach obszarów lub w nieskończoności.

Za zwrot obiegu włókna wirowego przyjmujemy zwrot wektora $\bar{c}$ w rurce wirowej, z której włókno powstaje. Wówczas suma wektorowa natężeń wirów, wtłoczonych przy wspomnianym przejściu granicznym do elementu liniowego $d\bar{s}$, określona jest przez $\chi d\bar{s}$. Wytnijmy mianowicie z rurki wirowej dwoma prostopadłymi do niej przekrojami f walec o długości ds , a więc o objętości $f ds$. Zawiera on wówczas wiry o natężeniu bezwzględnym $|\bar{c}| f ds = \chi ds$, ponieważ wektor $\bar{c}$ jest prostopadły do f , a więc $|\bar{c}| f = \chi$.

Przy przejściu granicznym jednak χ , a więc i χds , jest stałe. Dlatego też $\chi d\bar{s}$ przedstawia wektor natężeń wirów zgęszczonych w ds , a χds — jego wartość bezwzględną.

W bezpośrednim sąsiedztwie włókna wirowego L pole wektorowe, przez nie wytwarzane, dąży do nieskończoności. Przyjmijmy mianowicie w (14.3a) za K koło o promieniu ϱ , leżące w płaszczyźnie prostopadłej do elementu liniowego ds włókna wirowego L , i to tak, by jego środek leżał na ds ; niech następnie v_φ będzie (współrzędne cylindryczne!) rzutem wektora $\bar{v}$ na element liniowy koła K ;

dla dostatecznie małych ϱ otrzymamy wówczas z (14.3a) $\chi = \frac{1}{4\pi} 2\pi\varrho v_\varphi$, czyli

$$(14.4) \quad v_\varphi = \frac{2\chi}{\varrho}.$$

Należy zauważyć, że to samo pole wektorowe występowało w § 9 (zadanie 5), a w § 12 interpretowaliśmy je jako pole wektorowe warstwy podwójnej o stałym momencie. Zgodność ta nie jest przypadkowa. Jak się następnie przekonamy w § 20, należy ją raczej uważać za zapowiedź pewnego twierdzenia ogólnego.

2. Wiry powierzchniowe (warstwę pojedynczą wirów) posiada pole wektorowe $\bar{v}$ na powierzchni f , jeżeli jego składowe styczne mają na f skok. Skok ten możemy podać równaniem

$$(14.5) \quad \bar{n} \times (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = 4\pi \bar{g},$$

gdzie wektor $\bar{g}$ (ze względu na to, że w iloczynie wektorowym występuje $\bar{n}$) musi być prostopadły do $\bar{n}$, a więc leżeć w płaszczyźnie

stycznej do f . Wektor $\bar{n}$ jest normalną do powierzchni f , określoną w § 11 (por. rys. 38). Chcąc najpierw pokazać, że (14.5) określa skok składowych stycznych, rozkładamy wektory $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ na składowe normalne i styczne do f , tak że

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{1n} + \bar{v}_{1t} \quad \text{ i } \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_{2n} + \bar{v}_{2t}.$$

Z (14.5) otrzymujemy wówczas

$$\bar{n} \times (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = \bar{n} \times (\bar{v}_{1t} - \bar{v}_{2t}) = 4\pi \bar{g}.$$

Ponieważ $\bar{n}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do $\bar{v}_{1t} - \bar{v}_{2t}$, więc $\bar{n} \times (\bar{v}_{1t} - \bar{v}_{2t})$ jest wektorem, powstającym ze skoku $\bar{v}_{1t} - \bar{v}_{2t}$ składowych stycznych przez obrót o kąt prosty dokoła $\bar{n}$ jako osi, mający zwrot określony przez regułę śruby prawoskrętnej.

Aby podać znaczenie fizyczne wektora $\bar{g}$, pomyślimy sobie, że wiry powierzchniowe powstają przez całkowite stłoczenie wirów przestrzennych w powierzchnię f . Element powierzchniowy $d\bar{f}$ na f otaczamy następnie walcem W tak, jak to uczyniliśmy w § 11 (rys. 38), i stosujemy do powierzchni walca oraz do ograniczonego przez nią obszaru R twierdzenie całkowe (8.3). Ze względu na (14.1) otrzymujemy

$$\int_W d\bar{f} \bar{n} \times \bar{v} = \int_R \text{rot } \bar{v} d\tau = 4\pi \int_R \bar{c} d\tau.$$

Niech δl będzie wysokością walca W . Objętość tego walca jest wtedy równa $\delta f \delta l$; dla dostatecznie małych δf i δl związek ten przechodzi w

$$(14.5a) \quad \bar{n} \times (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \delta f = 4\pi \bar{c} \delta f \delta l.$$

Jeżeli więc przy przejściu granicznym $\delta l \rightarrow 0$ natężenie wirów przestrzennych $\bar{c}$ tak wzrośnie, że $\bar{c} \delta l = \bar{g}$ pozostanie skończone, to związek (14.5a) stanie się identycznym z (14.5). Iloczyn $\bar{g} \delta f = \bar{c} \delta f \delta l$ jest zatem natężeniem wirów znajdujących się na elemencie powierzchniowym δf , a przeto $\bar{g}$ jest natężeniem wirów przypadających na jednostkę powierzchni f .

Z zupełnego stłoczenia wirów przestrzennych w powierzchnię f wynika, że każda rurka wirowa przestrzenna stłoczona została w pewne pasmo wirowe leżące na powierzchni f . Wnosimy stąd, że w przypadku granicznym kierunki wirów, a więc i natężenie $\bar{g}$, są styczne do powierzchni f .

Ale do tego znanego nam już wyniku dołączyć możemy jeszcze nowy. Jest rzeczą jasną, że pasmo wirowe na f nie może przeci-

nać krawędzi powierzchni f , a więc musi być do niej równoległe:

$$(14.6) \quad \vec{g} \parallel d\vec{s} \quad \text{na krawędzi powierzchni } f.$$

Zauważmy, że ze względu na (14.2) nie możemy podać natężenia $\vec{c}$ dowolnie, lecz tylko w postaci natężenia pola wektorowego bez źródeł. Zupełnie tak samo musi też $\vec{g}$ podlegać na powierzchni f pewnym ograniczeniom, wynikającym stąd przy przejściu do granicy. Niestety nie możemy się tu zajmować bliżej tymi sprawami.

ZADANIE. Obliczyć krążenie pola wektorowego podanego w § 9 (zadanie 5) o potencjale $\varphi = a\varphi + b$ dla przypadku, gdy krzywa K okrąża prostą g , oraz dla przypadku, gdy tego nie czyni. Dowieść, że to pole wektorowe jest wytworzone przez włókno wirowe o momencie $\chi = \frac{a}{2}$ na prostej g .

Rozwiązanie. W myśl (9.9a) element wektorowy liniowy $d\vec{s}$ określony jest (we współrzędnych cylindrycznych) przez równanie

$$d\vec{s} = \vec{u}_\rho d\rho + \vec{u}_\varphi \rho d\varphi + \vec{u}_z dz.$$

Ponieważ $\vec{v} = \vec{u}_\varphi \frac{a}{\rho}$, więc $\oint_K \vec{v} d\vec{s} = a \oint_K d\varphi$. Przy dodatnim obieguokoła g (jako osi z) otrzymujemy więc $4\pi\chi = \oint_K \vec{v} d\vec{s} = 2\pi a$, czyli $\chi = \frac{a}{2}$. Jeśli jednak nie okrążamy g , to $\oint_K d\varphi = 0$, a więc i $\oint_K \vec{v} d\vec{s} = 0$.

§ 15. Twierdzenie o jednoznaczności pola wektorowego. Jeżeli dane jest pole wektorowe $\vec{v}$, to wydajności jego źródeł i natężenia jego wirów są jednoznacznie określone i dają się łatwo obliczyć (§§ 4, 7 i 11–14). Bez porównania trudniej jest rozwiązać odwrócenie tego zagadnienia: dane są wydajności źródeł i natężenia wirów, wyznaczyć pole wektorowe.

Prawie wszystkie następne paragrafy, poświęcamy temu najważniejszemu chyba zagadnieniu teorii pól wektorowych. Zaczniemy od okazania, że przy pewnych założeniach dodatkowych zagadnienie to ma tylko jedno rozwiązanie. Dla prostoty dowodu ograniczymy się do przypadku, gdy mamy do czynienia jedynie ze źródłami i wirami przestrzennymi. Mimo to będziemy stosowali otrzymane wyniki także do przypadku źródeł osobliwych.

Sformułujemy najpierw twierdzenie o jednoznaczności dla obszaru skończonego. Obszar R , w którym pole wektorowe $\vec{v}$ mamy wyznaczyć, jest ograniczony powierzchnią zamkniętą F_0 , leżącą całkowicie w skończoności, oraz przez inne powierzchnie zamknięte leżące wewnątrz F_0 , a które wszystkie razem oznaczamy przez F .

Twierdzenie. Istnieje co najwyżej jedno pole wektorowe $\vec{v}$, spełniające następujące trzy warunki:

(A) W obszarze R pole wektorowe $\vec{v}$ jest skończone, ciągłe i różniczkowalne.

(B) Źródła i wiry przestrzenne określone są wzorami

$$(15.1) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 4\pi \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{v} = 4\pi \vec{c},$$

gdzie ρ i $\vec{c}$ są danymi funkcjami punktów przestrzeni.

(C) Na powierzchniach F i F_0 , ograniczających obszar R , składowe normalne v_n wektora $\vec{v}$ mają określone z góry wartości.¹⁾

Dowód. Przypuśćmy, że przeciwnie, istnieją dwa pola wektorowe $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, spełniające warunki (A), (B) i (C). Ich różnica $\vec{v}^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ spełnia wówczas następujące warunki:

(A*) W obszarze R pole $\vec{v}^*$ jest skończone, ciągłe i różniczkowalne.

(B*) $\vec{v}^*$ jest polem bez źródeł i bez wirów:

$$(15.2a) \quad \operatorname{div} \vec{v}^* = 0,$$

$$(15.2b) \quad \operatorname{rot} \vec{v}^* = 0.$$

(C*) v_n^* znika na powierzchniach F i F_0 .

Aby dowieść, że $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, tzn. że $\vec{v}^*$ znika wszędzie w R , zauważmy, że na mocy (15.2b) pole $\vec{v}^*$ posiada potencjał φ^* :

$$\vec{v}^* = -\operatorname{grad} \varphi^*,$$

który ze względu na (15.2a) jest rozwiązaniem równania Laplace'a $\Delta \varphi^* = 0$. Wobec tego możemy ze względu na warunek (A*) zastosować do potencjału φ^* twierdzenie Greena (5.6)

$$(15.3) \quad \int_R (\operatorname{grad} \varphi^*)^2 d\tau = \int_{F+F_0} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} df.$$

¹⁾ Twierdzenie zachodzi jednak również w przypadku, gdy dla v_n określone są jedynie wartości graniczne przy zbliżaniu się do powierzchni F i F_0 .

Całki powierzchniowe znikają, bo $v_n^* = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}$ znika na F i F_0 według warunku (C*). Otrzymujemy zatem

$$(15.4) \quad \int_R (\text{grad } \varphi^*)^2 d\tau = 0.$$

Funkcja podcałkowa w (15.4) jest kwadratem wartości bezwzględnej wektora, jest więc wszędzie dodatnia jeżeli nie znika. Aby całka (15.4) znikała, musi być więc $(\text{grad } \varphi^*)^2 = (v^*)^2 = 0$ we wszystkich punktach obszaru R , czyli $\bar{v}^* = 0$, c.b.d.o.

Stąd wynika $\varphi^* = \text{const}$, a więc $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi^*$. Potencjał jest więc określony tylko do dowolnej stałej addytywnej.

Jeżeli powierzchnię F_0 odsuniemy w nieskończoność, to obszar R stanie się nieskończony. By przeprowadzić dowód dla tego przypadku granicznego, zakładamy, że $\bar{v}$ czyni zadość warunkowi

(D) $\bar{v}$ znika w nieskończoności przynajmniej tak szybko, jak $\frac{\text{const}}{r^2}$.

Dla $\bar{v}^*$ wynika stąd warunek

(D*) $\bar{v}^*$ znika w nieskończoności przynajmniej tak szybko, jak $\frac{\text{const}}{r^2}$.

Warunek (D) nie podaje wartości stałej const , a więc dla obu pól $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ mogłyby występować różne stałe. Ze względu na to, że $\bar{v}^* = -\text{grad } \varphi^*$, wnosimy z (D*), że φ^* znika w nieskończoności jak $\frac{\text{const}}{r}$.

To, że dla pól nieskończonych wprowadzić musimy nowy warunek, wynika już stąd, że nie mając warunku (D), nie moglibyśmy twierdzić, iż całka (15.4) jest zbieżna w obszarze nieskończonym. Równanie (15.4) nie miałyby wówczas sensu i nie moglibyśmy na nim oprzeć dalszych wniosków. Jeżeli jednak założymy warunek (D),

¹⁾ Założenie to wymaga, jak wynika z (15.1), by w nieskończoności φ i $\bar{\varphi}$ odpowiednio znikaly. Chcąc uniknąć wszystkich związanych z tym komplikacji, w dalszym ciągu zawsze zakładamy, że źródła i wiry istnieją tylko w skończoności, tak że φ i $\bar{\varphi}$ nie znikają tylko w pewnym obszarze skończonym.

to $(\text{grad } \varphi^*)^2$ zachowuje się w nieskończoności jak $\frac{\text{const}}{r^4}$, tak że całka (15.4) jest zbieżna. Prócz tego dopiero przy pomocy (D) możemy pokazać, że (15.3) przechodzi w (15.4), gdy F_0 dąży do nieskończoności. W tym wypadku mianowicie funkcja podcałkowa w całce powierzchniowej (15.3) znika jak $\frac{\text{const}}{r^3}$, a df rośnie jak $r^2 d\Omega$, tak że całka po powierzchni F_0 znika w wypadku granicznym. Ponieważ przy założeniu (D) zachodzi wzór (15.4), więc mamy $\bar{v}^* = 0$ również w obszarze nieskończonym. Dowód twierdzenia jest tym samym zakończony.

Zwróćmy uwagę, że przy rozwiązywaniu zagadnienia szukaliśmy właściwie trzech funkcji v_x, v_y, v_z współrzędnych przestrzennych x, y, z , które spełniałyby układ równań różniczkowych cząstkowych (15.2a i b), warunki brzegowe (C), a w wypadku obszaru nieskończonego też warunek (D). Mamy tu więc do czynienia z zagadnieniem brzegowym dla układu równań różniczkowych cząstkowych.

Zauważmy jeszcze, że dowód twierdzenia o jednoznaczności polegał na sprowadzeniu do niedorzeczności przypuszczenia, że istnieją dwa różne rozwiązania rozważanego zagadnienia brzegowego. Z tego jednak, że może istnieć co najwyżej jedno rozwiązanie, nie wynika jeszcze, że choćby jedno naprawdę istnieje, tj. że istnieją pola wektorowe spełniające warunki (A), (B) i (C), a w przypadku obszaru nieskończonego warunek (D). Ogólny dowód istnienia takiego pola trzeba więc uzyskać na innej drodze. Ponieważ wymaga on bardzo skomplikowanych rozważań, nie możemy się nim tu zajmować. W każdym jednak przypadku szczególnym, w którym potrafimy obliczyć odpowiednie pole wektorowe i udowodnić, że spełnia ono warunki (A) — (D), istnienie tego pola jest tym samym dowiedzione.

Bardzo duże znaczenie ma przypadek szczególny, w którym R jest po prostu całą przestrzenią nieograniczoną R_∞ . Wówczas mamy do czynienia z nadzwyczaj prostym zagadnieniem, ponieważ nie występują żadne warunki brzegowe. Spotykamy się z nim bardzo często w zastosowaniach.

Twierdzenie o jednoznaczności pól wektorowych umożliwia rozdzielanie powyższego zagadnienia na dwa prostsze, z których każde rozwiązać możemy niezależnie od drugiego. Załóżmy, iż udało nam się znaleźć dwa pola wektorowe $\bar{v}'$ i $\bar{v}''$, które oba spełniają

warunki (A) i (D), warunek (B) zaś w ten sposób, że $\bar{v}'$ jest polem bez wirów i posiada źródła przepisane dla $\bar{v}$, natomiast $\bar{v}''$ jest polem bez źródeł z wirami pola $\bar{v}$. Warunek (C) jest wtedy zbędny, ponieważ w zagadnieniu nie występują powierzchnie F i F_0 . Łatwo możemy stwierdzić na mocy warunków (A), (B) i (D), że suma obu pól $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}''$ spełnia wszystkie te warunki. Możemy więc otrzymać rozwiązanie zagadnienia przez to, że nakładamy odpowiednie dwa pola na siebie.

Również przez nakładanie pól możemy otrzymać rozwiązanie zagadnienia w przypadkach, w których występują źródła i wiry osobliwe. Możemy nałożyć na rozwiązujące zagadnienie pole z ciągłymi źródłami i wirami rozwiązania, odpowiadające poszczególnym źródłom i wirom osobliwym. Tą metodą nakładania rozwiązań będziemy posługiwali się bardzo często. Korzystaliśmy zresztą z tej możliwości już kilkakrotnie w rozważaniach poprzednich, np. przy wytwarzaniu źródeł podwójnych w §12.

§ 16. Pola wektorowe bez wirów, wytwarzane przez źródła przestrzenne. Zbadamy obecnie pole wektorowe $\bar{v}$, spełniające warunki (A), (B) i (D) z §15, nie posiadające jednak wirów (tzn. dla którego $\bar{v} = 0$) i określone w całej przestrzeni R_∞ . Ze względu na to, że pole takie posiada potencjał, a zatem $\bar{v} = -\text{grad } \varphi$, warunek (B) $\text{div } \bar{v} = 4\pi\rho$ przechodzi w *równanie Poissona*

$$(16.1) \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Jeśli założymy, że istnieje rozwiązanie zagadnienia, a więc i odpowiedni potencjał φ , to łatwo możemy stwierdzić, jaką ma on postać. W tym celu posługujemy się twierdzeniem Greena (5.5), przy czym jako funkcji φ używamy właśnie potencjału φ , który mamy podać, a jako funkcji ψ — potencjału źródła punktowego $\psi = \frac{1}{r}$, gdzie r oznacza odległość od pewnego punktu stałego O .

Według §9 (zadanie 3) jest

$$(16.2) \quad \Delta\psi = 0.$$

Ponieważ ψ dąży do nieskończoności przy zbliżaniu się do O , wycinamy ten punkt z przestrzeni R_∞ za pomocą powierzchni kulistej F' o środku O i o promieniu r' . Tak samo usuwamy (por. §5) punkty w nieskończoności z pomocą powierzchni F_0 . Stosując twier-

dzenie Greena (5.5) do obszaru R_0 , ograniczonego powierzchniami F_0 i F' , otrzymujemy na mocy (16.1) i (16.2)

$$(16.3) \quad \int_{F'+F_0} df \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 4\pi \int_{R_0} \frac{\rho}{r} d\tau.$$

Całki powierzchniowe tego równania możemy łatwo obliczyć, ściągając F' do punktu O i usuwając F_0 do nieskończoności. Całka po F_0 dąży przy tym do zera, ponieważ według warunku (D) z §15 funkcja podcałkowa znika jak $\frac{\text{const}}{r^3}$, a elementy powierzchniowe F_0 rosną tylko jak r^2 .

By obliczyć w przypadku granicznym, gdy $r' \rightarrow 0$, całkę po powierzchni kuli F' , podstawiamy $df = dr'^2 d\Omega$ ($d\Omega$ — element kuli jednostkowej K_j). Wyrażenie

$$- \int_{F'} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = - \int_{K_j} \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=r'} r'^2 d\Omega = - r' \int_{K_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=r'} d\Omega$$

znika, ponieważ ostatnia całka po całej kuli jednostkowej ma wartość graniczną skończoną, według bowiem warunku (A) z §15 pole $\bar{v}$ jest skończone, a więc i $v_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

Natomiast z pierwszego wyrazu całki po F' w równaniu (16.3) otrzymujemy

$$\int_{F'} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} df = \int_{K_j} \varphi \Big|_{r=r'} \frac{1}{r'^2} r'^2 d\Omega = \int_{K_j} \varphi \Big|_{r=r'} d\Omega;$$

$\bar{n}$ jest tu normalną zewnętrzną obszaru R_0 i dlatego też skierowane jest do wnętrza kuli F' , tak że $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}$.

Ze względu na $\int_{K_j} d\Omega = 4\pi$ całka $\int_{K_j} \varphi \Big|_{r=r'} d\Omega$ dąży w granicy do $4\pi\varphi_0$, gdzie φ_0 jest wartością potencjału φ w punkcie O . Ostatecznie otrzymamy więc z (16.3) związek

$$(16.4) \quad \varphi_0 = \int_{R_\infty} \frac{\rho}{r} d\tau.$$

Ten związek właśnie mieliśmy znaleźć.

Stwierdziliśmy tym samym, że jeżeli istnieje potencjał φ spełniający warunki zagadnienia, to jest on określony wzorem (16.4).

Nie znaczy to jednak, że rozwiązanie zagadnienia (czyli taki potencjał φ) istnieje. By to okazać, należałoby jeszcze stwierdzić, że φ określone przez (16.4) spełnia wszystkie warunki zagadnienia, w szczególności równanie (16.1).

Rozwiązanie (16.4) możemy tak interpretować, że pole wektorowe wypadkowe powstaje przez superpozycję pól elementarnych, wytwarzanych przez źródła o wydajności $\varrho d\tau$, znajdujące się w poszczególnych elementach przestrzeni $d\tau$. Potencjał takiego źródła dany jest, jak to wynika z (16.4), przez „prawo elementarne” $\frac{\varrho d\tau}{r}$, w zupełnej zresztą zgodności z potencjałem (11.1a) źródła punktowego. Możemy więc stwierdzić, że w rozpatrywanym przypadku pole wektorowe powstaje przez działanie prawa elementarnego.

Jeżeli dany obszar jest ograniczony również przez pewne powierzchnie F , to musimy po lewej stronie (16.3) całkować też po F , tak że otrzymujemy dla φ_0 zamiast (16.4) wyrażenie

$$(16.5) \quad \varphi_0 = \int_R \frac{\varrho}{r} d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_F df \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right).$$

Wzór ten może być użyty do obliczenia φ jedynie w tym przypadku, gdy na powierzchni F znamy równocześnie φ i $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. W ogólności jednak nie znamy równocześnie obydwu tych danych. W przypadku zadania brzegowego wystarczy np. podać na F wartości $v_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (por. §15, warunek (C)), by jednoznacznie określić pole wektorowe $\vec{v}$, a przez to i potencjał φ , aż do pewnej stałej addytywnej. Wzoru (16.5) możemy więc użyć do obliczenia φ dopiero po rozwiązaniu zagadnienia brzegowego. Równanie (16.5) odgrywa jednak bardzo ważną rolę jako punkt wyjściowy do dalszych rozważań.

ZADANIA. 1. Model makroskopowy warstwy pojedynczej płaskiej. Nieograniczona płyta płasko-równoległa o grubości h wypełniona jest źródłami przestrzennymi o stałej wydajności ϱ . Podać pole wektorowe $\vec{v}$ bez wirów, wytworzone przez te źródła.

Rozwiązanie. Niech oś x będzie prostopadła do płyty. Próbuje znaleźć pole wektorowe $\vec{v} = \vec{v}(x)$, zależne tylko od x

i spełniające wszystkie warunki zadania. Z $\text{rot } \vec{v} = 0$ (por. (7.11)) wynika $\frac{dv_y}{dx} = \frac{dv_z}{dx} = 0$, tzn. $v_y = v_y^0$ i $v_z = v_z^0$, gdzie v_y^0 i v_z^0 są stałe. We-

wnątrz płyty jest $\text{div } \vec{v} = 4\pi\varrho$, tzn. $\frac{dv_x}{dx} = 4\pi\varrho$, a więc $v_x = 4\pi\varrho x + v_x^0$.

W przestrzeni poza płytą jest $\text{div } \vec{v} = 0$, tzn. $v_x = \text{const}$. Na płaszczyznach ograniczających płytę v_x musi być ciągłe, ponieważ nie istnieją tu żadne źródła powierzchniowe. Jeżeli umiejscowimy płaszczyznę yz w płaszczyźnie symetrii płyty, to na płaszczyznach ograniczających płytę będzie $v_x = \pm 2\pi\omega + v_x^0$, gdzie $\omega = h\varrho$. Liczbę ω można by nazwać „gęstością powierzchniową” wydajności płyty. W trzech obszarach

$$(I) \quad -\infty < x < -\frac{h}{2}, \quad (II) \quad -\frac{h}{2} \leq x \leq +\frac{h}{2}, \quad (III) \quad +\frac{h}{2} \leq x < +\infty$$

dane jest więc v_x (poza stałą addytywną v_x^0 , mającą we wszystkich obszarach jedną i tę samą wartość), odpowiednio wzorami

$$(I') \quad v_x = -2\pi\omega, \quad (II') \quad v_x = +4\pi\omega \frac{x}{h}, \quad (III') \quad v_x = +2\pi\omega.$$

Na zewnątrz, po obu stronach płyty, pole v_x jest więc jednorodne, przy dodatnim ω skierowane od płyty, i ma wartość bezwzględną $2\pi\omega$, tak jak (por. § 11) dla pojedynczych źródeł powierzchniowych. Wewnątrz płyty v_x zmienia się liniowo.

Również składowe v_y^0 i v_z^0 muszą mieć jedną i tę samą wartość we wszystkich trzech obszarach (I), (II) i (III), ponieważ w przeciwnym przypadku istniałyby skoki składowych stycznych pola wektorowego $\vec{v}$, a więc wiry powierzchniowe (por. § 14), których obecności nie zakładamy. Pole v_x^0, v_y^0, v_z^0 jest zatem jednorodne i możemy je obrać zupełnie dowolnie, a więc nie może być wytworzone przez źródła wewnątrz płyty.

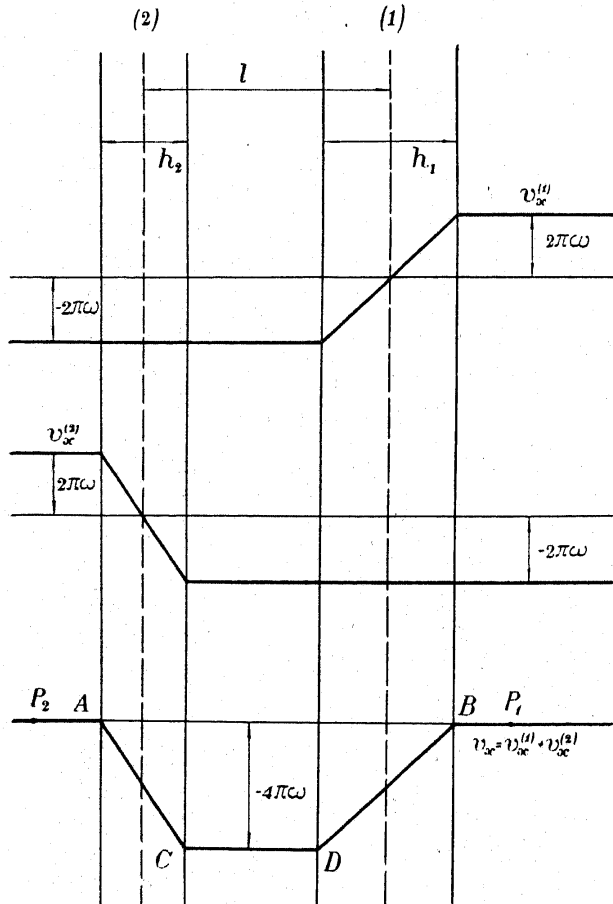
Pole źródeł płyty określone jest więc przez wyżej podane v_x oraz przez $v_y = v_z = 0$.

Czytelnik obliczy potencjał $\varphi = -\int_0^x v_x dx$, zakładając, że φ jest

ciągłe na powierzchniach ograniczających płytę, ponieważ nie mamy tu żadnych warstw podwójnych. Graficzne przedstawienie pola v_x podajemy w zadaniu 2.

2. Model makroskopowy warstwy podwójnej płaskiej. Dwie nieograniczone płasko-równoległe płyty o grubościach h_1 i h_2 , których płaszczyzny symetrii oddalone są o l , zawierają źródła przestrzenne o stałych wydajnościach $\rho_1 = \frac{\omega}{h_1}$ i $\rho_2 = -\frac{\omega}{h_2}$, tak że ich wydajności „powierzchniowe” $\pm\omega$ różnią się tylko znakiem. Podać wytworzone przez te źródła pole wektorowe bez wirów i wykazać, że potencjał zmienia się o $4\pi l\omega$ przy przejściu przez obie płyty.

Rozwiązanie. Rys. 44 przedstawia pola wektorowe $v_x^{(1)}$ i $v_x^{(2)}$, wytworzone przez źródła w płytach (1) i (2) (por. zadanie 1), oraz



Rys. 44. Model makroskopowy płaskiej warstwy podwójnej.

pole $v_x = v_x^{(1)} + v_x^{(2)}$ powstające przez superpozycję obu pól. Pole v_x jest rozwiązaniem zadania. Spostzegamy, że pole znika na zewnątrz makroskopowej warstwy podwójnej, występuje zaś tylko pole wewnętrzne, jednorodne między płytami, a liniowo zmienne wewnątrz każdej z nich. Różnica potencjałów między punktami P_1 i P_2 , leżącymi po różnych stronach całego układu źródeł, określona jest przez

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{P_2}^{P_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = - \int_{P_2}^{P_1} v_x dx = \int_A^B (-v_x) dx,$$

a więc przez pole $4\pi l\omega$ trapezu $ABCD$. Moment warstwy podwójnej jest zatem na mocy (12.5) równy $\tau = \omega l$.

Czytelnik sam poda przebieg potencjału.

Pola wektorowe w zadaniach 1 i 2 nie czynią zadość warunkowi (D) z § 15, ponieważ występują w nich źródła w nieskończoności, które (D) wyłącza. Jeżeli mimo to użylibyśmy formalnie do obliczenia potencjału równania (16.4), to napotkalibyśmy na te same trudności, które występują w zadaniu 2 z § 17 (stała całkowania nieskończona).

3. Kula wypełniona źródłami. Kula K o promieniu a wypełniona jest źródłami o stałej wydajności ρ . Podać potencjał φ odpowiedniego pola wektorowego bez wirów oraz samo pole.

Rozwiązanie. Niech r będzie odległością od środka kuli K . Staramy się znaleźć rozwiązanie kulisto-symetryczne, dla którego φ zależy tylko od r . Wewnątrz kuli φ spełnia równanie $\Delta\varphi = -4\pi\rho$,

czyli wobec (9.8d) równanie $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi\rho r^2$. Stąd wynika, że

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\rho r + \frac{c}{r^2}, \text{ a więc ostatecznie}$$

$$\varphi = -\frac{2\pi}{3}\rho r^2 - \frac{c}{r} + c'.$$

W przestrzeni poza kulą φ jest rozwiązaniem kulisto-symetrycznym równania $\Delta\varphi = 0$, a więc według zadania 3 z § 9

$$\varphi = \frac{e}{r} + e';$$

φ posiada więc tu postać potencjału punktowego źródła pojedynczego.

Stałe c, c', e, e' wyznaczamy w sposób następujący:

$c=0$, ponieważ wyraz $-\frac{c}{r}$ odpowiadałby nieistniejącemu

źródłu punktowemu w środku kuli;

$e'=0$, ponieważ jest to dowolna stała addytywna potencjału φ .

Na ograniczeniu kuli, tzn. dla $r=a$, muszą być φ i $\frac{d\varphi}{dr}$ ciągłe,

ponieważ nie istnieje tu ani warstwa podwójna, ani pojedyncza. Stąd wynika, że

$$-\frac{2\pi}{3}\varrho a^3 + c' = \frac{c}{a}, \quad -\frac{4\pi}{3}\varrho a = -\frac{c}{a^2},$$

a więc

$$c = \frac{4\pi}{3}a^3\varrho, \quad c' = 2\pi a^2\varrho.$$

Rozwiązanie zagadnienia ma zatem postać następującą:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}a^3\varrho \frac{1}{r} & \text{dla } r \geq a, \\ \frac{2\pi}{3}\varrho(3a^2 - r^2) & \text{dla } a \geq r. \end{cases}$$

Odpowiednimi polami wektorowymi są więc

$$v_r = -\frac{d\varphi}{dr} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}a^3\frac{\varrho}{r^2} & \text{dla } r \geq a, \\ \frac{4\pi}{3}\varrho r & \text{dla } a \geq r. \end{cases}$$

Widzimy, że źródła o stałej wydajności ϱ , znajdujące się wewnątrz kuli K , działają poza nią tak, jak źródło punktowe o wydajności równej całkowitej wydajności źródeł przestrzennych w kuli K .

Wyrażenie dla v_r wewnątrz K interpretować można w ten sposób, że w punkcie o odległości r od środka O kuli K nie działają źródła znajdujące się na zewnątrz kuli K , o promieniu r .

Natomiast źródła wewnątrz K , o łącznej wydajności $\frac{4\pi}{3}r^3\varrho$, działają

lają tak, jak gdyby były skupione w środku O kuli K , tzn. $v_r = \frac{4\pi}{3}r^3\varrho \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi}{3}r\varrho$. Pole wzrasta wewnątrz K liniowo. Rozwiązanie powyższe spełnia wszystkie warunki z § 15; w szczególności warunek (D).

4. Obszar ograniczony dwiema współśrodkowymi kulami K_a i K_b o promieniach odpowiednio a i b ($a > b$), zawiera źródła przestrzenne o stałej wydajności ϱ . Podać odpowiednie pole wektorowe v_r^0 .

Rozwiązanie. Na pole wektorowe z zadania 3 nakładamy pole wektorowe v_r' , odpowiadające kuli K_b i źródłom o wydajności $-\varrho$. Nałożone na siebie wydajności pól v_r i v_r' dają odpowiadający warunkom zadania rozkład wydajności. Ponieważ

$$v_r' = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3}b^3\varrho \frac{1}{r^2} & \text{dla } r \geq b, \\ -\frac{4\pi}{3}\varrho r & \text{dla } b \geq r, \end{cases}$$

otrzymamy więc dla $v_r^0 = v_r + v_r'$ następujące pole wektorowe:

$$v_r^0 = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}(a^3 - b^3)\varrho \frac{1}{r^2} & \text{dla } r \geq a, \\ \frac{4\pi}{3}\left(r - \frac{b^3}{r^2}\right)\varrho & \text{dla } a \geq r \geq b, \\ 0 & \text{dla } b \geq r. \end{cases}$$

Czytelnik sprawdzi, że to pole wektorowe spełnia wszystkie warunki naszego zadania (w nieskończoności, na powierzchniach kul K_a i K_b oraz w punkcie O).

Dyskusja. Dla $r \geq a$ pole wygląda tak, jak gdyby wszystkie wydajności skoncentrowane były w punkcie O . W obszarze $a \geq r \geq b$, w którym znajdują się źródła, działa jedynie wydajność $\frac{4\pi}{3}(r^3 - b^3)\varrho$

kuli o promieniu r . Wyobraźmy sobie, że skupiliśmy ją w punkcie O ; otrzymamy wtedy podane wyżej v_r^0 . Wewnątrz kuli K_b pole znika.

Moglibyśmy rozwiązać zadanie to jak i poprzednie za pomocą równania (16.4) przez obliczenie odpowiedniej całki. Droga ta byłaby jednak bez porównania bardziej uciążliwa.

5. Walec wypełniony źródłami. Nieskończenie długi walec W o promieniu a wypełniony jest źródłami przestrzennymi o stałej wydajności η . Podać potencjał ψ i pole wektorowe $\vec{v}$, wytworzone przez te źródła.

Rozwiązanie. Posługujemy się współrzędnymi cylindrycznymi ρ, φ, z , których oś z leży na osi g walca. Ze względu na symetrię zagadnienia, próbujemy znaleźć potencjał ψ zależny tylko od ρ . Ponieważ wewnątrz W jest $\Delta\psi = -4\pi\eta$, więc otrzymujemy na mocy (9.9d)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\psi}{d\rho} \right) = -4\pi\eta,$$

a stąd $\rho \frac{d\psi}{d\rho} = -2\pi\eta\rho^2 + c$, tak że

$$\psi = -\pi\eta\rho^2 + c \ln \rho + c'.$$

Na zewnątrz walca W , gdzie $\eta = 0$, mamy według zadania 4 z § 9

$$\psi = e \ln \rho + e'.$$

Ponieważ na osi g nie ma źródeł liniowych, więc $c = 0$. Następnie możemy przyrównać e' do 0, ponieważ określamy przez to tylko wielkość dowolnej stałej addytywnej potencjału. Na ograniczeniu walca dla $\rho = a$ są ψ i $\frac{d\psi}{d\rho}$ ciągle, ponieważ nie ma tu żadnych powierzchniowych źródeł podwójnych ani pojedynczych. Jest więc

$$-\pi\eta a^2 + c' = e \ln a, \quad -2\pi\eta a = \frac{e}{a}.$$

Stąd wynika

$$e = -2\pi a^2 \eta, \quad c' = \pi a^2 \eta (1 - 2 \ln a),$$

tak że

$$\psi = \begin{cases} -\pi\eta\rho^2 + \pi a^2 \eta (1 - 2 \ln a) & \text{wewnątrz } W, \\ -2\pi a^2 \eta \ln \rho & \text{zewnątrz } W. \end{cases}$$

Jedynie składowa $v_e = -\frac{d\psi}{d\rho}$ pola $\vec{v}$ (por. (9.9b)) nie zanika. Pole wektorowe określone jest więc wzorem

$$v_e = \begin{cases} 2\pi\eta\rho & \text{wewnątrz } W, \\ 2\pi a^2 \eta / \rho & \text{zewnątrz } W. \end{cases}$$

Podobnie jak w przypadku kuli, możemy interpretować pole wektorowe v_e zewnątrz i wewnątrz W w ten sposób, że w punkcie odległym o ρ od osi walca W działają jedynie źródła znajdujące się wewnątrz walca W_e (o promieniu ρ) i to tak, jak gdyby umieszczone były na osi g (por. § 9, zadanie 4).

§ 17. Obliczenie pola wektorowego bez wirów, mającego źródła osobliwe. Stwierdziliśmy w § 16, że potencjał źródeł przestrzennych otrzymujemy przez superpozycję potencjałów, odpowiadających — według prawa elementarnego (11.1a) — źródłom poszczególnych elementów przestrzennych. Z punktu widzenia fizyki wydaje się rzeczą jasną, że tak samo możemy też postępować przy „zgęszczonych” źródłach przestrzennych, tzn. przy źródłach osobliwych. Jeśli mamy do czynienia np. z warstwą powierzchniową źródeł pojedynczych, to źródła leżące na elemencie powierzchniowym df mają wydajność ωdf , a więc ich potencjał jest określony według prawa elementarnego (11.1a) przez $\frac{\omega df}{r}$. Należy przeto oczekiwać, że

$$(17.1) \quad \int \frac{\omega}{r} df$$

jest potencjałem wszystkich źródeł pojedynczych na f .

Jeżeli oprócz tego znajduje się na f warstwa podwójna o momencie τ , to ze względu na (12.2 i 2a) oczywiste jest, że wytwarza ona potencjał

$$(17.2) \quad - \int \tau \bar{n} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} df = \int \tau \bar{n} \operatorname{grad}_Z \frac{1}{r} df = \int \tau \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} df.$$

Znak momentu τ jest przy tym dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy w danym punkcie powierzchni f moment warstwy podwójnej ma ten sam zwrot co normalna $\bar{n}$, czy przeciwny.

Jeżeli obszar R zawiera jednocześnie źródła przestrzenne oraz źródła powierzchniowe pojedyncze i podwójne, to potencjał pola wszystkich tych źródeł równy jest według (16.4) oraz (17.1 i 2)

$$(17.3) \quad \varphi = \int_{R_{\infty}} \frac{\rho}{r} d\tau + \int \frac{\omega}{r} df + \int \tau \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} df.$$

Przez f należy tu rozumieć wszystkie powierzchnie obłożone źródłami. Powierzchnie f mogą posiadać krawędzie lub być zamknięte.

Wyrażenie (17.3) możemy otrzymać też na drodze użytej w § 16. Jeżeli mianowicie na f dane są warstwy podwójne i pojedyncze, to według (12.5) lub (11.3a) występują na f skoki potencjału lub jego pochodnej normalnej (zagadnienie skokowe). Jeżeli jednak wytniemy powierzchnie „skoków” f za pomocą odpowiednich powierzchni F , to możemy zastosować (16.5) do obszaru R , ograniczonego przez F . Oznaczając przez $\bar{N}$ normalną do powierzchni F (rys. 45), stwierdzamy, że całka powierzchniowa występująca w (16.5) przybierze postać

$$(17.4) \quad -\frac{1}{4\pi} \int_F df \left(\varphi \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right).$$

Jeżeli powierzchnię F ściagniemy do f , to (17.4) przechodzi w

$$(17.4a) \quad -\frac{1}{4\pi} \int df \left[\varphi_1 \frac{\partial}{\partial N_1} \frac{1}{r} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial N_2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \right) \right],$$

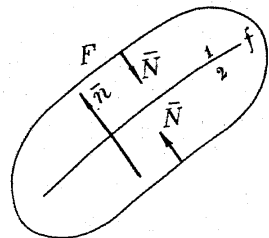
ponieważ F zbliża się od strony 1 i 2 ku powierzchni f . Używając zamiast $\bar{N}_1$ i $\bar{N}_2$ na f normalnej $\bar{n}$, mającej ten sam zwrot co $\bar{N}_2$, a więc przeciwny do $\bar{N}_1$, otrzymamy

$$-\frac{\partial}{\partial N_1} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial N_2} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial n_2},$$

tak że (17.4a) daje ze względu na (12.5) i (11.3a)

$$-\frac{1}{4\pi} \int df \left[(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \right) \right] = \int df \left(\tau \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{\omega}{r} \right).$$

W ten sposób sprawdziliśmy rozważania fizyczne na drodze matematycznej. Należałoby jednak jeszcze uzupełnić je dla powierzchni f mających brzeg. Nie uwzględniliśmy mianowicie faktu, że w przypadku warstwy podwójnej wektor $\bar{v} = -\text{grad} \varphi$ dąży do nieskończoności, gdy zbliżamy się do brzegu powierzchni f .



Rys. 45. Obliczanie potencjału powierzchni f obłożonej wirami.

Jeżeli wykonamy w ostatniej całce, występującej w (17.2), różniczkowanie względem n , to otrzymamy potencjał warstwy podwójnej w postaci

$$(17.2a) \quad -\int_f \tau \frac{\cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2} df,$$

opartej na prawie elementarnym (12.2b). Tu $\bar{r}$ oznacza promień wodzący z punktu P , w którym potencjał obliczamy, do punktu na warstwie podwójnej. Szczególnie prostą postać przybiera (17.2a), jeżeli uwzględnimy (por. § 12), że $\frac{\cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2} df$ jest kątem bryłowym $d\Omega$, pod którym widać df z punktu P . Element kątowy $d\Omega$ ma ten sam znak co $\cos(\bar{n}, \bar{r})$; jest więc dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy $\bar{n}$ i $\bar{r}$ tworzą kąt ostry, czy rozwarty. Możemy więc przedstawić potencjał warstwy podwójnej w postaci

$$(17.2b) \quad -\int_f \tau d\Omega.$$

Jeżeli moment τ na powierzchni f jest stały, to mówimy o warstwie podwójnej jednorodnej. W tym przypadku potencjał ma postać

$$(17.2c) \quad -\tau \Omega,$$

gdzie Ω jest kątem bryłowym (zaopatrzoną w odpowiedni znak), pod którym widać całą warstwę podwójną z punktu P .

ZADANIA. 1. Podać potencjał warstwy podwójnej jednorodnej o momencie τ , znajdującej się na powierzchni zamkniętej f . Zwrot normalnej $\bar{n}$ na f przyjmujemy zgodnie ze zwrotem normalnej zewnętrznej powierzchni f .

Rozwiązanie. Ponieważ nie ma źródeł przestrzennych, więc φ jest rozwiązaniem równania Laplace'a $\Delta \varphi = 0$ wewnątrz i zewnątrz f . Łatwo przekonać się, że już przy pomocy najprostszego rozwiązania tego równania, mianowicie $\varphi = \text{const}$, możemy dojść do celu. W przestrzeni zewnątrz f musimy ze względu na warunek (D) z § 15 przyjąć, że $\varphi = 0$. Ponieważ w myśl przyjętego określenia (por. rys. 38) stronie f , w którą skierowana jest normalna $\bar{n}$, odpowiada wskaźnik 1, więc $\varphi_1 = 0$. Na mocy (12.5) jest jednak $\varphi_1 - \varphi_2 =$

$=4\pi\tau$, tak że $\varphi_2 = -4\pi\tau$. Potencjał φ wewnątrz powierzchni f jest więc $\varphi = -4\pi\tau$.

Czytelnik sprawdzi, że to samo rozwiązanie otrzymuje się przy pomocy (17.2c).

2. Potencjał źródła liniowego. Prosta nieskończona obłożona jest jednorodnie źródłami o wydajności ε na jednostkę długości. Podać potencjał, obliczając odpowiednią całkę.

Rozwiązanie. Załóżmy, że źródło liniowe leży na osi z i oznaczmy przez ϱ odległość punktu P , znajdującego się w płaszczyźnie xy , od źródła. Wówczas φ dane jest podobnie jak w (16.4), przez wzór:

$$\varphi = \varepsilon \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{r} = \varepsilon \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}.$$

Ze względu na trudności, na jakie się niebawem natkniemy, całkujemy w granicach skończonych od $-a$ do $+a$ ($a > 0$)¹⁾. Obliczamy więc właściwie potencjał źródła liniowego o długości $2a$, i to tylko w punktach płaszczyzny, połówającej prostopadłe źródło liniowe. Jak łatwo stwierdzić

$$\begin{aligned} \varphi &= \varepsilon \ln \left(\sqrt{z^2 + \varrho^2} + z \right) \Big|_{-a}^{+a} = \varepsilon \ln \frac{\sqrt{a^2 + \varrho^2} + a}{\sqrt{a^2 + \varrho^2} - a} = \varepsilon \ln \frac{(\sqrt{a^2 + \varrho^2} + a)^2}{\varrho^2} = \\ &= -2\varepsilon \ln \varrho + 2\varepsilon \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{a^2}} \right) + 2\varepsilon \ln a. \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz w tym wyrażeniu nie zależy od a i jest identyczny z potencjałem (11.2a), opisującym pole wektorowe, które otrzymujemy przy przejściu do granicy, gdy $a \rightarrow +\infty$. Drugi wyraz zależy wprowadzić od ϱ , ale dąży do wartości stałej $2\varepsilon \ln 2$, gdy $a \rightarrow +\infty$. Trzeci wyraz dąży jednak do nieskończoności, tak że $\lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi$ nie istnieje. Wyrażając się wprowadzić niepoprawnie, ale za to dobitnie możemy stwierdzić, że otrzymujemy oczekiwany potencjał, ale z nieskończoną stałą addytywną. Z trudności tej można jednak wyrwać korzystając fakt, że φ określone jest w omawianym przypadku tylko do dowolnej stałej addytywnej. Dodając do φ przed przejściem granicznym stałą $-2\varepsilon \ln 2 - 2\varepsilon \ln a = -2\varepsilon \ln 2a$ otrzymu-

¹⁾ Rozwiązanie możemy też uzyskać, używając granic $-a$ i b .

jemy jako wynik $\lim_{a \rightarrow +\infty} (\varphi - 2\varepsilon \ln 2a) = -2\varepsilon \ln \varrho$, a więc potencjał oczekiwany (11.2a).

W przypadku, gdy w nieskończoności występują źródła o skończonej gęstości, a φ obliczamy za pomocą (16.4) lub (17.1), zawsze możemy spodziewać się podobnych trudności. Całki, jak (16.4) lub (17.1), są bowiem tylko wówczas zbieżne, gdy wydajności znikają dostatecznie szybko w nieskończoności. Mimo to — jak w podanym przykładzie — odpowiednie pole wektorowe $\vec{v}$ może istnieć, tak że rozbieżność całki dla φ możemy kłaść na karb nieskończonej stałej addytywnej. Nie napotykamy natomiast żadnych trudności, jeżeli używamy odpowiednich wyrażeń dla pola wektorowego $\vec{v}$, jak to się okaże w następnym zadaniu.

3. Pole wektorowe źródła liniowego. Obliczyć pole wektorowe z zadania 2 za pomocą prawa elementarnego.

Rozwiązanie. Ponieważ pole wektorowe źródła punktowego o wydajności e określone jest w myśl (11.1) przez $\frac{e}{r^3} \vec{r}$, więc ze względu na $\vec{r} = \vec{u}_\varrho \varrho + \vec{u}_z z$ jest

$$\vec{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon dz}{r^3} \vec{r} = \varepsilon \left[\vec{u}_\varrho \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^3} + \vec{u}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{r^3} \right].$$

Podstawmy $z = \varrho \operatorname{tg} u$; wtedy $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2} = \frac{\varrho}{\cos u}$, a $dz = \frac{\varrho}{\cos^2 u} du$.

Otrzymujemy więc dla pierwszej całki wyrażenie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^3} = \frac{1}{\varrho^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos u du = \frac{\sin u}{\varrho^2} \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2}{\varrho^2}.$$

Druga całka znika, ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta. Jako wynik ostateczny otrzymujemy więc $\vec{v} = \vec{u}_\varrho \frac{2\varepsilon}{\varrho}$. To samo wyrażenie daje nam oczywiście także i potencjał φ z zadania 2.

§ 18. Funkcja Greena a zagadnienie brzegowe dla pól wektorowych bez wirów w obszarach ograniczonych. W przestrzeni nieograniczonej przy założeniu, że innych źródeł nie ma, potencjał źródła punktowego o wydajności 1, zwanego

źródłem jednostkowym, równy jest $1/r$. Natomiast w obszarze ograniczonym R funkcja $1/r$ nie może być potencjałem źródła jednostkowego, ponieważ funkcja ta nie spełnia warunków brzegowych na ograniczeniach obszaru R (por. § 15, warunek (C)). Potencjał źródła jednostkowego — tzw. *funkcja Greena* — musi więc być bardziej skomplikowany. Funkcja ta musi oczywiście zależeć od współrzędnych źródła Z i punktu P , dla którego ją obliczamy. Możemy ją więc oznaczyć przez $G(Z, P)$; jej znaczenie fizyczne zmusza do poddania jej, jako funkcji punktu P , następującym warunkom (por. § 15):

(A) Funkcja $G(Z, P)$ jest w obszarze R wszędzie skończona i ciągła łącznie z jej pierwszymi pochodnymi, wyjąwszy przypadek, gdy P dąży do Z . Jej drugie pochodne istnieją.

(B) Ponieważ w R nie ma źródeł przestrzennych, więc G jest, jako funkcja punktu P , rozwiązaniem równania Laplace'a¹⁾

$$\Delta_P G(Z, P) = 0.$$

Ze względu na to, że w punkcie Z leży źródło jednostkowe możemy przedstawić G według § 11 w postaci

$$(18.1) \quad G(Z, P) = \frac{1}{r} + g(Z, P),$$

gdzie r jest odległością P od Z , a g — funkcją regularną punktu P .

(C) Na powierzchniach F , ograniczających obszar R funkcja G spełnia warunek brzegowy

$$(18.2) \quad (\alpha) \quad G(Z, P) = 0 \quad \text{lub} \quad (\beta) \quad \frac{\partial G(Z, P)}{\partial n} = 0.$$

(D) W nieskończoności G znika przynajmniej jak $\frac{\text{const}}{r}$.

Przyjmując warunek (D) zakładamy tym samym, że R jest obszarem nieskończonym, a więc leżącym na zewnątrz wszystkich powierzchni F .

Bliższych wyjaśnień wymaga tylko warunek (C). Warunek, jaki musi spełniać funkcja Greena na powierzchniach F , zależy od własności fizycznych tych powierzchni. Warunki (α) i (β) są tylko dwoma szczególnymi wypadkami, bardzo ważnymi dla dalszych rozważań. W obrazie hydrodynamicznym warunek (β) wyraża

¹⁾ Wskaźnik P przy Δ_P oznacza, że operator ten działa na współrzędne punktu P .

znikanie na F składowej normalnej prędkości. Zachodzi to w przypadku ściany nieprzenikliwej dla cieczy i pozostającej w spoczynku. Wówczas cząsteczki cieczy, stykające się ze ścianą, mogą mieć jedynie prędkości o kierunkach stycznych do ściany. Warunek (β) , czyli $v_n = 0$, znaczy też, że na powierzchniach F nie znajdują się żadne źródła powierzchniowe. Podobnie warunek (α) wyłącza istnienie warstw podwójnych na F . Przy tej ostatniej interpretacji warunków (α) i (β) zakładamy, że również wewnątrz F znajduje się ciecz nieściśliwa, i to w stanie spoczynku.

Funkcja Greena stanowi rozwiązanie pewnego zagadnienia fizycznego. To jednak nie wyczerpuje jej znaczenia. Jest ona równocześnie potężnym narzędziem matematycznym do rozwiązywania zagadnień brzegowych dla potencjałów pól wektorowych bez wirów.

Postawmy sobie zagadnienie: znaleźć potencjał φ w obszarze ograniczonym R , w którym znajdują się źródła przestrzenne o wydajności q . Na ograniczeniach F obszaru R niech φ spełnia jeden z warunków brzegowych

$$(18.3) \quad (\alpha) \quad \varphi = -4\pi\tau, \quad \text{lub} \quad (\beta) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\omega,$$

gdzie τ i ω są z góry danymi funkcjami na F . Oznaczamy je przez τ i ω , ponieważ — tak jak w przypadku funkcji Greena $G(Z, P)$ — możemy τ interpretować jako moment warstwy podwójnej, a ω jako wydajność warstwy pojedynczej. Znaki „+” i „-” w (18.3) pochodzą stąd, że jako normalnej $\bar{n}$ na F używamy normalnej zewnętrznej obszaru R , a więc skierowanej ku wnętrzu obszaru ograniczonego przez F . Ta strona powierzchni F , którą oznaczamy wskaźnikiem 1, znajduje się zatem wewnątrz F , tak że

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Z (12.5) i (11.3a) wynika wówczas (18.3).

Jak obliczyć potencjał takiego pola, łatwo się domysleć posługując się interpretacją fizyczną. Rolę prawa elementarnego $\frac{1}{r}$ w przestrzeni nieograniczonej R_∞ obejmuje dla obszaru ograniczonego funkcja Greena G . Prawem elementarnym dla źródeł podwójnych jest przy tym $\frac{\partial}{\partial n_z} G(Z, P)$. Według (17.3) i (18.3) należy się

spodziewać, że w przypadkach (α) i (β) otrzymamy odpowiednio następujące potencjały:

$$(18.4\alpha) \quad \varphi(P) = \int_R \varrho(Z)G(Z,P)d\tau_Z - \frac{1}{4\pi} \int_F \varphi(Z) \frac{\partial G(Z,P)}{\partial n_Z} df_Z,$$

$$(18.4\beta) \quad \varphi(P) = \int_R \varrho(Z)G(Z,P)d\tau_Z + \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{\partial \varphi(Z)}{\partial n_Z} G(Z,P)df_Z.$$

Całkowanie należy tu przeprowadzić po punktach, w których leżą źródła — jak to zresztą zaznacza wskaźnik Z . Należy podkreślić, że w obu przypadkach (α) i (β) mamy do czynienia z różnymi funkcjami Greena.

Aby otrzymać (18.4α) i (18.4β) na drodze poprawnej pod względem matematycznym, stosujemy twierdzenie Greena (5.5) do funkcji $\varphi = \varphi(P)$ i $\psi = g(Z,P)$, gdzie $\varphi(P)$ jest potencjałem, którego szukamy, a g — funkcją określoną przez (18.1). Całkujemy przy tym po punktach P . Ponieważ $\Delta_P \varphi(P) = -4\pi \varrho(P)$, a z $\Delta_P G = 0$ i $\Delta_P \frac{1}{r} = 0$ wynika $\Delta_P g = 0$, przeto otrzymujemy

$$\int_R \varrho(P)g(Z,P)d\tau_P - \frac{1}{4\pi} \int_F df_P \left\{ \varphi(P) \frac{\partial g(Z,P)}{\partial n_P} - g(Z,P) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n_P} \right\} = 0.$$

Gdy dodamy to równanie do równania (16.5), oznaczając przez P punkty, po których całkujemy a przez Z — punkt, dla którego obliczamy φ , to dochodzimy, ze względu na (18.1), do związku

$$(18.5) \quad \varphi(Z) =$$

$$= \int_R \varrho(P)G(Z,P)d\tau_P - \frac{1}{4\pi} \int_F df_P \left\{ \varphi(P) \frac{\partial G(Z,P)}{\partial n_P} - G(Z,P) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n_P} \right\}.$$

W (18.5) zawarte są obie relacje (18.4α) i (18.4β), ponieważ G spełnia na F jeden z warunków brzegowych (18.2). Nie widać jednak tego na pierwszy rzut oka. Jeżeli mianowicie zamienimy w (18.5) oznaczenia obu punktów P i Z , by w ten sposób zbliżyć się do oznaczeń w równaniach (18.4α) i (18.4β), to otrzymamy wprawdzie te wzory, ale w funkcji Greena punkty Z i P zmieniają swoje miejsca.

Okazuje się jednak, że różnica ta jest nieistotna. Dla funkcji Greena bowiem zachodzi tzw. *twierdzenie o wzajemności*. W myśl

tego twierdzenia funkcja Greena nie zmienia swojej wartości, jeżeli zmienić w niej współrzędne punktów P i Z jedne na drugie

$$(18.6) \quad G(Z,P) = G(P,Z).$$

Źródło jednostkowe w punkcie Z wytwarza więc w punkcie P taki sam potencjał, jaki wytworzyłoby w punkcie Z źródło jednostkowe znajdujące się w P . Dowód twierdzenia o wzajemności otrzymujemy bezpośrednio z twierdzenia Greena (5.5), przez podstawienie $\varphi = G(Z_1,P)$ i $\psi = G(Z_2,P)$ oraz scałkowanie po punktach P . Źródła Z_1 i Z_2 musimy jednak wyciąć przy tym z obszaru R odpowiednio kulami F_1^* i F_2^* . Oznaczając przez R^* obszar ograniczony przez F , F_1^* i F_2^* , otrzymujemy związek

$$(18.7) \quad \int_{R^*} df_P \left[G(Z_1,P) \frac{\partial G(Z_2,P)}{\partial n_P} - G(Z_2,P) \frac{\partial G(Z_1,P)}{\partial n_P} \right] = \\ = \int_{R^*} [G(Z_1,P) \Delta_P G(Z_2,P) - G(Z_2,P) \Delta_P G(Z_1,P)] d\tau_P.$$

Całka przestrzenna znika, ponieważ obie funkcje Greena spełniają równanie Laplace'a. Tak samo znika całka powierzchniowa po F , ponieważ w przypadku (α) znikają na F obie funkcje Greena, a w przypadku (β) — ich pochodne normalne. W (18.7) pozostają więc tylko całki powierzchniowe po F_1^* i F_2^* . Jeżeli ściągniemy powierzchnie F_1^* i F_2^* odpowiednio do punktów Z_1 i Z_2 , to w granicy równanie (18.7) przechodzi w twierdzenie o wzajemności

$$4\pi [G(Z_2,Z_1) - G(Z_1,Z_2)] = 0.$$

Aby obliczyć wartość graniczną np. całki po F_1^* , zauważmy, że $G(Z_2,P)$ jest, jako funkcja punktu P , regularna w punkcie Z_1 . Natomiast $G(Z_1,P)$ możemy, ze względu na (18.1), zastąpić przy tym przejściu do granicy przez $1/r$, ponieważ funkcja $g(Z_1,P)$ jest w punkcie Z_1 regularna, i dlatego znika jej wkład do całki po F_1^* przy ściąganiu F_1^* do punktu Z_1 . Udział funkcji $1/r$ obliczamy dokładnie tak samo, jak to uczyniliśmy w § 16.

ZADANIA. 1. Podać obie funkcje Greena dla półprzestrzeni $x \geq 0$ ograniczonej płaszczyzną $x = 0$.

Rozwiązanie otrzymujemy metodą odbicia zwierciadlanego. Pierwotnie danemu źródłu przeciwstawiamy drugie źródło-obraz w tej części przestrzeni, w której potencjał nie jest określony. Wy-

dajność i położenie źródła-obrazu dobieramy tak, by potencjał obu źródeł spełniał żądane warunki brzegowe. W obecnym przypadku umieszczamy naprzeciwko źródła jednostkowego w punkcie $Z(a, b, c)$ źródło-obraz w punkcie $Z_1(-a, b, c)$, tj. w miejscu optycznego obrazu źródła Z . Oznaczmy odległość punktu $P(x, y, z)$ od Z przez r , a od Z_1 przez r_1 . Łatwo sprawdzamy, że funkcje $G_{(\alpha)} = 1/r - 1/r_1$ i $G_{(\beta)} = 1/r + 1/r_1$ mają wszelkie własności funkcji Greena odpowiednio w przypadkach warunków granicznych (α) i (β) .

2. Obliczyć dla potencjału $\varphi = eG_{(\alpha)} = e(1/r - 1/r_1)$ (por. zadanie 1) wydajność źródeł powierzchniowych na płaszczyźnie $x=0$, zakładając, że $\varphi=0$ dla $x \leq 0$. Podać poglądowo-geometryczną interpretację dla ω i wyznaczyć całkowitą wydajność źródeł powierzchniowych na płaszczyźnie $x=0$.

Rozwiązanie. Niech normalna do płaszczyzny $x=0$ ma kierunek i zwrot ujemnej osi x . W myśl (11.3a) jest (niezależnie od zwrotu normalnej) $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -4\pi\omega$.

Ponieważ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e \left(-\frac{1}{r^2} \frac{x-a}{r} + \frac{1}{r_1^2} \frac{x+a}{r_1} \right), \quad \text{więc} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = e \frac{2a}{r^3},$$

tak że $\omega = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{r^3}$. Oznaczmy przez $\vec{r}$ wektor wodzący punktu P ze źródła $Z(a, b, c)$. Wówczas $a/r = \cos(\vec{n}, \vec{r})$, a więc wydajność źródeł, znajdujących się na elemencie df płaszczyzny $x=0$ równa jest $\omega df = -\frac{e}{2\pi} \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} df$. Kąt bryłowy $d\Omega$ zaś, pod którym z punktu Z

widać element powierzchniowy df , równy jest $d\Omega = \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} df$ (por. (12.2b)). Ostatecznie więc otrzymujemy

$$\omega df = -\frac{e}{2\pi} d\Omega.$$

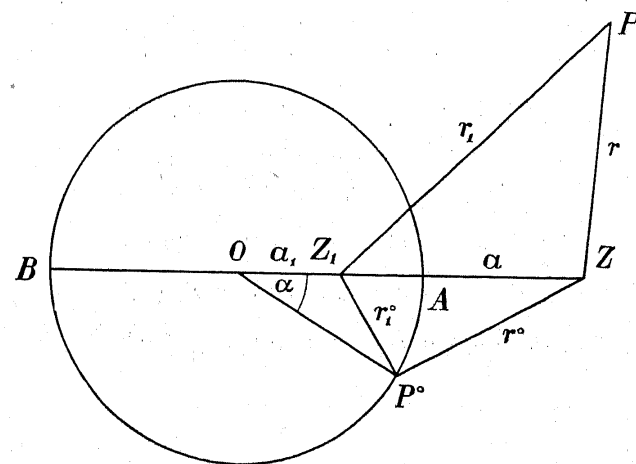
Tym sposobem udowodniliśmy, że elementy powierzchniowe na płaszczyźnie $x=0$, które widać z Z pod jednym i tym samym kątem bryłowym, mają równe wydajności powierzchniowe.

Aby obliczyć wydajność powierzchniową całej płaszczyzny $x=0$, musimy $\int d\Omega$ obliczyć na połowie kuli jednostkowej. Ponieważ daje to nam 2π , więc $\int \omega df = -e$, czyli wydajność powierz-

chniowa całej płaszczyzny $x=0$ różni się tylko znakiem od wydajności źródła Z .

3. Podać funkcję Greena dla kuli o promieniu R w przypadku warunku granicznego (α) dla źródła Z , znajdującego się zewnątrz lub wewnątrz kuli.

Rozwiązanie. Niech źródło jednostkowe Z znajduje się zewnątrz kuli w odległości a od jej środka O (rys. 46). Na prostej łączącej O z Z obieramy wewnątrz kuli punkt Z_1 w odległości a_1 od środka kuli O . Oznaczamy przez r i r_1 odpowiednio odległości



Rys. 46. Funkcja Greena dla kuli.

punktu P od Z i od Z_1 . Badamy, czy można, uogólniając $G_{(\alpha)}$ (por. zadanie 1), przedstawić funkcję Greena G dla zewnętrznej przestrzeni kuli w postaci

$$G = \frac{1}{r} - \frac{e}{r_1},$$

dobierając dla Z_1 odpowiednio odległość a_1 i wydajność $-e$. Wartości liczbowe obu stałych a_1 i e otrzymujemy łatwo, żądając, by funkcja G zniknęła w obu punktach A i B kuli:

$$\frac{1}{a-R} = \frac{e}{R-a_1} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a+R} = \frac{e}{R+a_1}.$$

Dzieląc jedno równanie przez drugie, pozbywamy się w ten sposób e i otrzymujemy

$$a_1 = \frac{R^2}{a}$$

(Z_1 jest więc biegunem harmonicznym punktu Z , a nie jego obrazem optycznym). Następnie z którejkolwiek z dwu równań znajdujemy $e = R/a$.

W ten sposób określiliśmy $G = \frac{1}{r} - \frac{R}{a} \frac{1}{r_1}$.

Musimy jeszcze okazać, że G znika w każdym punkcie P powierzchni kuli. Niech r^0 i r_1^0 oznaczają odpowiednio odległości punktu P^0 od Z i od Z_1 . Trójkąty OZ_1P^0 i OP^0Z są podobne, ponieważ mają wspólny kąt α ; ze względu zaś na $a_1 = \frac{R^2}{a}$ dla odpowiednich ich boków zachodzi proporcja $OZ_1 : OP^0 = OP^0 : OZ$. Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że $OP^0 : P^0Z_1 = OZ : P^0Z$, czyli $\frac{1}{r^0} = \frac{R}{a} \frac{1}{r_1^0}$. Istotnie więc funkcja Greena G znika na powierzchni kuli.

Funkcję Greena G^* dla wnętrza kuli (źródło jednostkowe w punkcie Z_1) otrzymujemy, mnożąc (dlaczego?) G przez stałą $-\frac{a}{R}$

$$G^* = \frac{1}{r_1} - \frac{a}{R} \frac{1}{r}.$$

Przejście graniczne $R \rightarrow \infty$ przeprowadza G w $G_{(\infty)}$ z zadania 1.

§ 19. Pole wektorowe wirów przestrzennych. Zagadnienie obliczenia pola wektorowego z jego źródeł i wirów w przestrzeni nieograniczonej R_∞ , możemy rozłożyć w myśl §15 na dwa zagadnienia częściowe: obliczenie pola wektorowego bez wirów z jego źródeł i pola wektorowego bez źródeł z jego wirów. Pierwsze zagadnienie rozwiązyaliśmy w §§ 16, 17 i 18; drugim zajmujemy się w paragrafie niniejszym i następnym.

Zacniemy od przypadku, w którym wiry rozłożone są w R_∞ w sposób ciągły; ich natężenie oznaczamy symbolem $\vec{v}$. Jest to więc zagadnienie sformułowane w §15, ale wyspecjalizowane dla przestrzeni nieograniczonej R_∞ i pola wektorowego bez źródeł ($\varrho = 0$). Otrzymujemy tym sposobem warunek

$$(19.1) \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

który będzie spełniony, jeżeli $\vec{v}$ jest rotacją pewnego wektora $\vec{a}$

$$(19.2) \quad \vec{v} = \text{rot } \vec{a},$$

ponieważ według (7.14b) dla każdego $\vec{a}$ jest $\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = 0$.

Wektor $\vec{a}$ nazywamy *potencjałem wektorowym*.

Dla danego pola $\vec{v}$ pole wektorowe $\vec{a}$ nie jest określone jednoznacznie. Jak wynika z (19.2) i (7.14a), możemy do określonego $\vec{a}$ dodać grad ψ dowolnej funkcji skalarnej ψ , podobnie zresztą jak do potencjału φ dodać możemy dowolną stałą. Ale możemy też twierdzić, że jeżeli pewne pole wektorowe $\vec{v}$ da się przedstawić za pomocą dwu potencjałów wektorowych $\vec{a}_0$ i $\vec{a}$, to oba mogą się różnić tylko o gradient funkcji skalarnej. Wówczas jest bowiem $\text{rot}(\vec{a}_0 - \vec{a}) = 0$, a to znaczy, że pole wektorowe $\vec{a}_0 - \vec{a}$ ma potencjał, a więc że $\vec{a}_0 - \vec{a} = -\text{grad } \psi$, czyli

$$(19.3) \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \text{grad } \psi.$$

Możemy skorzystać z tej swobody w określaniu $\vec{a}$, by narzucić wektorowi $\vec{a}$ warunek dodatkowy

$$(19.4) \quad \text{div } \vec{a} = 0.$$

Niech $\vec{a}_0$ będzie jakimkolwiek potencjałem wektorowym pola $\vec{v}$. Chcąc wyznaczyć ψ tak, aby wektor $\vec{a}$, określony równaniem (19.3), spełniał warunek (19.4), wstawiamy $\vec{a}$ do (19.4) i otrzymujemy dla ψ równanie Poissona

$$\Delta \psi = -\text{div } \vec{a}_0,$$

które rozwiązyaliśmy już dla przestrzeni nieograniczonej R_∞ (por. (16.4)). Warunek dodatkowy (19.4) bardzo ułatwia — jak to zaraz zobaczymy — obliczenie $\vec{a}$, sprowadzając je do zagadnienia rozwiązane już w §16.

By podać potencjał wektorowy $\vec{a}$, wstawiamy (19.2) do równania (15.1): $\text{rot } \vec{v} = 4\pi \vec{c}$ i otrzymujemy $\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = 4\pi \vec{c}$. Ze względu jednak na (7.14c), równanie to możemy napisać w postaci $\text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a} = 4\pi \vec{c}$, tak że z warunku (19.4) dostajemy

$$(19.5) \quad \Delta \vec{a} = -4\pi \vec{c}.$$

Każda składowa a_x, a_y, a_z potencjału wektorowego $\vec{a}$ spełnia więc równanie Poissona $\Delta a_x = -4\pi c_x$ itd., którego rozwiązaniem

jest, według (16.4), $a_x = \int_{R_\infty} \frac{c_x}{r} d\tau$; możemy więc przedstawić $\bar{a}$ w postaci

$$(19.6) \quad \bar{a} = \int_{R_\infty} \frac{\bar{c}}{r} d\tau.$$

Sprawdzamy, że $\bar{a}$ spełnia rzeczywiście warunek (19.4), wstawiając (19.6) do (19.4). Oznaczając przez P punkt, dla którego obliczamy $\bar{a}$, przez Z zaś punkty źródłowe, po których całkujemy w całce (19.6), otrzymujemy ze względu na (4.5), (12.4) i na to, że według (14.2) jest $\text{div}_Z \bar{c}(Z) = 0$

$$\begin{aligned} \text{div}_P \bar{a} &= \int_{R_\infty} \text{div}_P \frac{\bar{c}(Z)}{r} d\tau_Z = \int_{R_\infty} \left(\frac{1}{r} \text{div}_P \bar{c}(Z) + \bar{c}(Z) \text{grad}_P \frac{1}{r} \right) d\tau_Z = \\ &= \int_{R_\infty} \bar{c}(Z) \text{grad}_P \frac{1}{r} d\tau_Z = - \int_{R_\infty} \bar{c}(Z) \text{grad}_Z \frac{1}{r} d\tau_Z = - \int_{R_\infty} \text{div}_Z \frac{\bar{c}(Z)}{r} d\tau_Z. \end{aligned}$$

Aby obliczyć ostatnią całkę przestrzenną dla przestrzeni R_0 , ograniczonej przez powierzchnię F_0 , możemy ją przekształcić według twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego w $\int_{F_0} \frac{c_n}{r} df$. Ale całka ta znika, jeżeli założymy, że wiry znajdują się tylko w skończoności (por. § 15, str. 126, uwaga). W ten sposób wykazaliśmy, że potencjał wektorowy (19.6) spełnia warunek (19.4).

Chcąc wyrazić pole wektorowe $\bar{v}$ wprost przez natężenie wirów $\bar{c}$, wstawiamy (19.6) do (19.2) i otrzymujemy na mocy (7.14e)

$$\begin{aligned} \bar{v} = \text{rot}_P \bar{a} &= \int_{R_\infty} \text{rot}_P \frac{\bar{c}(Z)}{r} d\tau_Z = \int_{R_\infty} \left[\frac{1}{r} \text{rot}_P \bar{c}(Z) + \text{grad}_P \frac{1}{r} \times \bar{c}(Z) \right] d\tau_Z = \\ &= \int_{R_\infty} \text{grad}_P \frac{1}{r} \times \bar{c}(Z) d\tau_Z, \end{aligned}$$

tak że ze względu na (2.16c)

$$(19.7) \quad \bar{v} = \int_{R_\infty} \frac{\bar{c}(Z) \times \bar{r}}{r^3} d\tau_Z;$$

$\bar{r}$ jest tu wektorem wodzącym punktu P z Z . Elementarne prawo działania dla wirów, znajdujących się w elemencie przestrzennym $d\tau_Z$, wyraża się więc przez

$$\frac{\bar{c}(Z) d\tau_Z \times \bar{r}}{r^3}.$$

Jego znaczenie geometryczne jest, według (I,12.13), następujące: na powierzchni kuli $r = \text{const}$ pole wektorowe jest polem prędkości ciała sztywnego, obracającego się z prędkością kątową $\frac{\bar{c}(Z) d\tau_Z}{r^3}$ (niech Czytelnik uprzytomni sobie jej zależność od r).

Zresztą podane prawo elementarne jest formalnie identyczne z elektrodynamicznym prawem Biota i Savarta.

ZADANIA. 1. Model makroskopowy płaskiej warstwy wirów (płyta wirowa). Płasko-równoległa, nieograniczona płyta o grubości h wypełniona jest wirami przestrzennymi o natężeniu stałym $\bar{c}$, równoległym do powierzchni płyty. Podać wypadkowe pole wektorowe bez źródeł.

Rozwiązanie. Umieszczamy oś x prostopadle do płyty, a początek układu współrzędnych x, y, z w jej płaszczyźnie symetrii. Zgodnie z założeniami przyjmujemy, że $\bar{c} = \bar{c}_y$. Ze względu na symetrię zagadnienia można spodziewać się, że pole wektorowe $\bar{v}$ jest funkcją jedynie zmiennej x : $\bar{v} = \bar{v}(x)$. Ponieważ $\bar{v}$ jest polem bez źródeł, więc $\text{div} \bar{v} = 0$, a zatem

$$\frac{dv_x}{dx} = 0.$$

Wewnątrz warstwy wirów jest $\text{rot} \bar{v} = 4\pi \bar{c}$, a więc ze względu na $\bar{v} = \bar{v}(x)$ (por. (17.11))

$$-\bar{j} \frac{dv_z}{dx} + \bar{k} \frac{dv_y}{dx} = 4\pi \bar{j} c_y,$$

tak że

$$\frac{dv_y}{dx} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dv_z}{dx} = -4\pi c_y.$$

Z tych trzech równań otrzymujemy:

$$v_x = v_x^0 = \text{const}, \quad v_y = v_y^0 = \text{const}, \quad v_z = -4\pi c_y x + v_z^0, \quad (v_z^0 = \text{const}).$$

Poza płytą musi być (według §10, zadania 2) $\bar{v} = \text{const}$. W płaszczyznach ograniczających $x = \pm \frac{h}{2}$ wszystkie składowe wektora $\bar{v}$ muszą być ciągłe.

Stąd wynika, że

$$v_z = \begin{cases} +2\pi c_y h & \text{dla } x \leq -\frac{h}{2}, \\ -4\pi c_y x & \text{dla } -\frac{h}{2} \leq x \leq +\frac{h}{2}, \\ -2\pi c_y h & \text{dla } \frac{h}{2} \leq x. \end{cases}$$

W tych wyrażeniach opuściliśmy jednak stałą v_z^0 .

Z warunków granicznych wynika, że pole wektorowe $\vec{v}^0$ ze składowymi v_x^0, v_y^0, v_z^0 musi mieć w całej przestrzeni jedną i tę samą wartość. Ponieważ w danym zagadnieniu możemy $\vec{v}^0$ dobrać zupełnie dowolnie, wnosimy, że pole wektorowe $\vec{v}^0$ nie jest wytworzone przez wiry płyty. Należy więc założyć, że $\vec{v}^0 = 0$. Wówczas całkowite pole wektorowe, wytworzone warstwą wirów, wyraża się wzorem podanym dla v_z oraz $v_x = v_y = 0$.

Zbliżając się do płyty od strony dodatnich, a następnie od strony ujemnych wartości x , stwierdzamy skok funkcji v_z

$$v_z \Big|_{x=\frac{h}{2}} - v_z \Big|_{x=-\frac{h}{2}} = -4\pi c_y h.$$

Możemy równanie to napisać wektorowo w postaci wzoru (14.5) odnoszącego się do wirów powierzchniowych

$$\vec{n} \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 4\pi \vec{j} c_y h = 4\pi \vec{c} h.$$

Normalna $\vec{n}$ ma tu kierunek i zwrot osi x , a wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ przedstawiają wartości graniczne wektora $\vec{v}$ przy zbliżaniu się do płyty od strony dodatnich i ujemnych wartości x . Wektor $\vec{c}h$ jest natężeniem wirów, przypadającym na jednostkę powierzchni płyty. Pole wektorowe $\vec{v}$ poza płytą przyporządkowane jest kierunkowi natężenia wirów $\vec{c}$ według reguły śruby prawoskrętnej.

2. Walec wypełniony wirami. Walec W o nieskończonej długości i o promieniu a wypełniony jest wirami przestrzennymi o stałym natężeniu $\vec{c}$, równoległym do osi g tego walca. Podać potencjał wektorowy $\vec{a}$ pola wektorowego $\vec{v}$, wywołanego przez wiry, oraz samo pole $\vec{v}$.

Rozwiązanie. Osią z cylindrycznego układu współrzędnych ϱ, φ, z , niech będzie oś g walca. Wówczas jest $\vec{c} = \vec{k}\eta$. Równanie (19.5) będzie spełnione, gdy

$$a_x = a_y = 0, \quad \Delta a_z = -4\pi\eta.$$

Ze względu na symetrię zagadnienia można spodziewać się, że a_z zależy tylko od ϱ . Według (9.9d) mamy wówczas

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{da_z}{d\varrho} \right) = -4\pi\eta,$$

a według (9.9e) równanie $\vec{v} = \text{rot} \vec{a}$, ze względu na $a_\varphi = a_\varphi = 0$, przechodzi w równanie $\vec{v} = -\vec{u}_\varphi \frac{da_z}{d\varrho}$, czyli

$$v_\varphi = -\frac{da_z}{d\varrho}.$$

Ponieważ na W nie ma żadnych wirów powierzchniowych, musimy przyjąć tu ciągłość v_φ , a więc także $\frac{da_z}{d\varrho}$. Ale również a_z musi być ciągłe na walcu W . W przeciwnym bowiem razie istniałby skok składowych stycznych wektora $\vec{a}$ na W , a według §20 (zadanie 2) znaczyłoby to, że na powierzchni W istnieje podwójna warstwa wirów. W danym zagadnieniu należy to jednak wykluczyć.

Jeżeli natomiast a_z i $\frac{da_z}{d\varrho}$ są na W ciągłe, to mamy obecnie — z formalno-matematycznego punktu widzenia — do czynienia z tym samym zagadnieniem, które rozwiązaliśmy w §16 (zadanie 5) dla potencjału ψ walca wypełnionego źródłami o stałej wydajności. Rozwiązaniem jest więc

$$a_z = \begin{cases} -\pi\eta\varrho^2 + \pi a^2\eta(1 - 2 \ln a) & \text{wewnątrz } W, \\ -2\pi a^2\eta \ln \varrho & \text{zewnątrz } W. \end{cases}$$

Zatem v_φ wyraża się w tym zagadnieniu tym samym wzorem, którym w poprzednim wyrażało się v_φ , ponieważ obecnemu związkowi $v_\varphi = -\frac{da_z}{d\varrho}$ odpowiada poprzedni $v_\varphi = -\frac{d\psi}{d\varrho}$. Jest więc

$$v_\varphi = \begin{cases} 2\pi\eta\varrho & \text{wewnątrz } W, \\ 2\pi a^2\eta/\varrho & \text{zewnątrz } W. \end{cases}$$

Wektory pola obecnego $\bar{v}$ otrzymujemy więc z wektorów pola poprzedniego, obracając je o kąt prosty dokoła dodatniej osi z w zwrocie obrotu śruby prawoskrętnej. We wnętrzu walca wypełnionego wirami v_φ rośnie liniowo wraz z ϱ , a poza walcem maleje odwrotnie proporcjonalnie do ϱ . Wektor $\bar{v} = \bar{u}_\varphi v_\varphi$ przyporządkowany jest $\bar{v}$ za pomocą reguły śruby prawoskrętnej. Poza W jest v_φ polem wektorowym włókna wirowego (por. (14.4)), którego moment $\chi = \pi a^2 \eta$ równy jest całkowitemu natężeniu wirów wewnątrz W .

Zagadnienie to ma ważne zastosowania nie tylko w hydromechanice, ale i w elektrodynamice (magnetyczne pole prądu płynącego w przewodniku o postaci walca).

§ 20. Pole wektorowe wirów osoblwych. Wyobraźmy sobie, że wiry powierzchniowe o natężeniu $\bar{g}$ powstały przez odpowiednie stłoczenie wirów przestrzennych. Wówczas należy oczekiwać, że ich potencjał wektorowy określony jest przez

$$(20.1) \quad \bar{a} = \int_f \frac{\bar{g}}{r} df$$

i pole wektorowe $\bar{v}$ możemy obliczyć zupełnie tak samo jak w §19:

$$(20.2) \quad \bar{v} = \int_f \frac{\bar{g} \times \bar{r}}{r^3} df.$$

Oczywiście $\bar{g}$ ma tu to samo znaczenie fizyczne co w § 14.

Element liniowy $d\bar{s}$ włókna wirowego o momencie χ zawiera (por. §14) wiry o całkowitym natężeniu $\chi d\bar{s}$. Dlatego też potencjał wektorowy włókna wirowego L wyraża się wzorem

$$(20.3) \quad \bar{a} = \chi \oint_L \frac{d\bar{s}}{r},$$

a pole przez niego wytworzone — wzorem

$$(20.4) \quad \bar{v} = \chi \oint_L \frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}.$$

Dla pewnych rozważań fizycznych ważne znaczenie ma ta okoliczność, że pole wektorowe włókna wirowego identyczne jest z polem wektorowym odpowiedniej warstwy podwójnej o stałym momencie. By to stwierdzić, rozpinamy na włóknie wirowym L powierzchnię f o normalnej, przyporządkowanej przez regułę śruby prawoskrętnej zwrotowi obiegu na L . Obie strony f odróżniamy za

pomocą wskaźników 1 i 2 (por. rys. 38). Ponieważ założyliśmy, że poza włóknom wirowym nie istnieją żadne wiry przestrzenne, jego pole wektorowe $\bar{v}$ musi mieć pewien potencjał φ , tak że $\bar{v} = -\text{grad } \varphi$. Oznaczmy przez K krzywą, która łączy pewien punkt P_1 po stronie 1 powierzchni f z punktem P_2 położonym na f naprzeciwko P_1 po stronie 2, okrążając raz włókno wirowe L w kierunku wymaganym przez regułę śruby prawoskrętnej. Ponieważ krą-

żenie $\int_{P_1}^{P_2} \bar{v} d\bar{s}$ wyraża 4π -krotny moment włókna wirowego L , więc

$$4\pi\chi = \int_{P_1}^{P_2} \bar{v} d\bar{s} = - \int_{P_1}^{P_2} \text{grad } \varphi d\bar{s} = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi_1 - \varphi_2.$$

W myśl (12.5) znaczy to, że na powierzchni f , mającej określony jedynie brzeg, a przebieg zresztą dowolny, istnieje podwójna warstwa źródeł o stałym momencie χ . Ponieważ pole $\bar{v}$ jest na f ciągle, więc nie mamy tu żadnych źródeł pojedynczych.

Z tego nie wynika bynajmniej, że pole wektorowe włókna wirowego jest identyczne z polem wektorowym odpowiedniej warstwy podwójnej. Oba pola mogłyby bowiem mieć na L różne osobliwości. By tę możliwość usunąć, okażemy rachunkiem, że oba pola wektorowe są identyczne.

Potencjał skalarny warstwy podwójnej określony jest według (17.2c) przez $\varphi = -\chi\Omega$, a więc jej pole wektorowe — przez $\bar{v} = \chi \text{grad}_P \Omega$, gdzie Ω jest zaopatrzonym w odpowiedni znak kątem bryłowym,

pod którym widzimy f z punktu P . W szczególności jest $v_x = \chi \frac{\partial \Omega}{\partial x_P}$.

Zmiana Ω przy przesunięciu punktu P o dx_P równa jest jednak zmianie przy przesuwaniu wszystkich punktów Z warstwy podwójnej o ten sam odcinek, ale w przeciwnym kierunku, a więc o $dx_Z = -dx_P$. Dlatego

$$(20.5) \quad v_x = -\chi \frac{\partial \Omega}{\partial x_Z}.$$

Przyrost Ω przy przesunięciu warstwy podwójnej o dx_Z , jest jednak po prostu rzutem (por. §17) na kulę jednostkową o środku P paska powierzchniowego, określonego przez kolejne położenia brzegu L powierzchni f podczas przesuwania L o dx_Z . Znak tego rzutu należy przy tym określić według zwrotu normalnej do paska,

który otrzymujemy, uważając go wraz z powierzchnią f za jedną całość. Przy tym zwrocie normalnej wektor odpowiadający elementowi powierzchni, powstającemu przy przesunięciu elementu $d\vec{s}$ krzywej L o $i dx_z$, równy jest iloczynowi $-(d\vec{s} \times i dx_z)$, co nie trudno sprawdzić. Rzut tego elementu powierzchniowego na kulę jednostkową dokoła P otrzymamy w myśl (12.2b) mnożąc skalarnie wektor elementu powierzchni przez $-\vec{r}/r^3$. Rzut ten jest więc równy

$$-\frac{\vec{r}}{r^3} (i dx_z \times d\vec{s}) = -\frac{i}{r^3} (d\vec{s} \times \vec{r}) dx_z.$$

Tutaj $\vec{r}$ jest — w przeciwieństwie do założenia przyjętego w §12 — wektorem skierowanym od $d\vec{s}$ ku punktowi P . Całkując otrzymane wyrażenie po L i mnożąc przez $-\chi$, otrzymujemy — jak należało się spodziewać — wzór (20.4), pomnożony skalarnie przez wektor jednostkowy i .

ZADANIA. 1. Płaska warstwa powierzchniowa wirów. Obliczyć pole wektorowe takiej warstwy jako granicę pola płyty zawierającej wiry (por. §19, zadanie 1).

Rozwiązanie. Jeśli h dąży do zera, a $\bar{c}$ równocześnie tak wzrasta, że $h\bar{c} = \bar{g} = \text{const}$, to otrzymujemy zgodnie z (14.5)

$$v_z = \begin{cases} 2\pi g_y & \text{dla } x < 0, \\ -2\pi g_y & \text{dla } 0 < x. \end{cases}$$

2. Płaska warstwa podwójna wirów. W płaszczyźnie $x=x_0$ znajduje się powierzchniowa warstwa wirów o momencie g_y , a w płaszczyźnie $x=0$ taka sama warstwa wirów o momencie $-g_y$. Podać wynikające stąd pole wektorowe $\vec{v}$ i jego potencjał wektorowy $\vec{a}$. Jak zachowuje się $\vec{a}$ w wypadku granicznym, gdy x_0 znika, a równocześnie g_y tak rośnie, że $x_0 g_y = \sigma$ pozostaje skończone?

Rozwiązanie. Przyjmijmy układ współrzędnych tak skierowany, by oś y (a więc i g_y) była prostopadła do płaszczyzny rysunku i skierowana od niej wstecz (rys. 47a). Wówczas rys. 47b przedstawia pole warstwy wirów o momencie g_y w płaszczyźnie $x=x_0$, a rys. 47c pole takiej warstwy o momencie $-g_y$ w płaszczyźnie $x=0$. Nakładając oba pola, otrzymujemy pole wektorowe $\vec{v}$ dla przypadku, gdy obie warstwy są czynne (rys. 47d). Pole to znika poza warstwą podwójną wirów, a wewnątrz niej równe jest

$2v_z = \text{const}$. Ponieważ $v_z = \frac{da_y}{dx}$ (jak wynika z $\vec{v} = \text{rot} \vec{a}$), więc przy założeniu, że $a_y = 0$ dla $x=0$ (por. rys. 47e), otrzymamy

$$a_y = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ 2v_z x & \text{dla } 0 \leq x \leq x_0, \\ 2v_z x_0 & \text{dla } x_0 \leq x. \end{cases}$$

W warstwie podwójnej wirów a_y ma skok $a_{y1} - a_{y2} = 2v_z x_0$; ponieważ według zadania 1 jest $v_z = 2\pi g_y$, więc

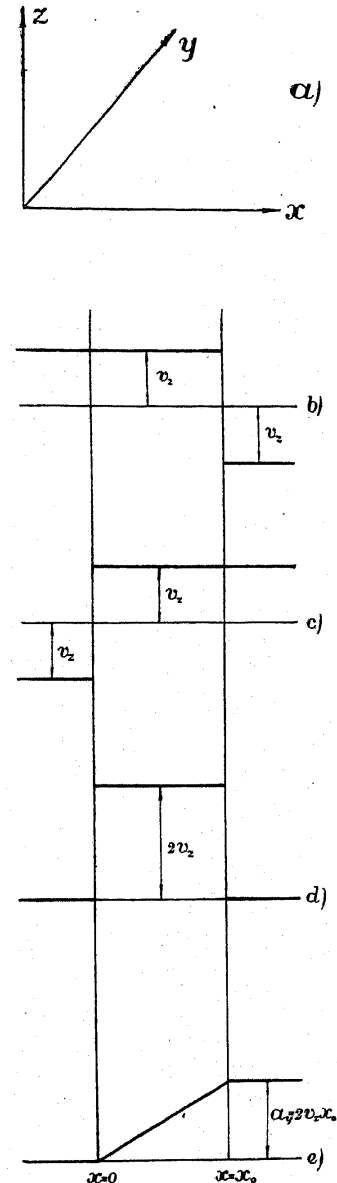
$$(20.6) \quad a_{y1} - a_{y2} = 4\pi g_y x_0 = 4\pi \sigma, \quad \text{gdzie } \sigma = x_0 g_y.$$

Wskaźnik 1 odpowiada tu dodatnim, a 2 — ujemnym wartościom x . Skok będzie zachowany, gdy obie warstwy wirów zbliżają się nieskończenie do siebie (tworzą „mikroskopową warstwę podwójną“), jeżeli tylko wraz z malejącym x_0 moment wirowy g_y tak wzrasta, że $x_0 g_y = \sigma$ pozostaje skończone. Skok składowych stycznych potencjału wektorowego $\vec{a}$ oznacza zatem istnienie warstwy podwójnej wirów.

§ 21. Pola wektorowe płaskie bez źródeł i wirów przestrzennych. Pole wektorowe $\vec{v}$ nazywamy *płaskim*, jeśli możemy je przedstawić w postaci

$$\vec{v} = i v_x(x, y) + j v_y(x, y).$$

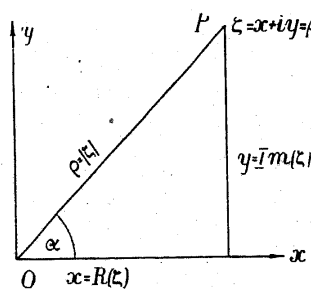
Pole $\vec{v}$ jest więc zawsze prostopadłe do osi z i nie zależy od z , tj. wszystkie wektory $\vec{v}$ w poszczególnych punktach prostych $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, równoległych do osi z , są równe. Wśród płaskich pól wektorowych odgrywają wybitną rolę pola nie mające źródeł i wi-



Rys. 47. Podwójna warstwa wirów.

rów przestrzennych. Teoria ich pozostaje mianowicie w ścisłym związku z teorią funkcji analitycznych, tak że do rozwiązywania zagadnień dotyczących pól wektorowych płaskich możemy używać potężnych metod tej pięknej i szeroko rozwiniętej teorii matematycznej.

Aby zapoznać się ze związkiem między obiema teoriami, potrzebne są pewne wiadomości z teorii funkcji analitycznych.



Rys. 48. Płaszczyzna zespolona.

Niech $\zeta = x + iy$ będzie liczbą zespoloną; jak wiadomo, możemy ją interpretować geometrycznie jako punkt P o współrzędnych x i y „płaszczyzny zespolonej”, jaką przebiega zmienna ζ . W tej płaszczyźnie oś x nazywamy osią rzeczywistą, a oś y — urojoną. Wartość bezwzględna $|\zeta| = |x + iy|$ liczby zespolonej ζ jest wówczas odległością punktu P od początku układu O (rys. 48), a więc $|\zeta| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Oznaczając $|\zeta|$ przez ρ , kąt zaś między osią x a wektorem od O do P przez α , mamy $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$ i dlatego też

$$\zeta = x + iy = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Przy pomocy związku Eulera (13.12), otrzymujemy ostatecznie

$$\zeta = x + iy = \rho e^{i\alpha}.$$

Kąt α nazywamy *amplitudą* liczby zespolonej ζ .

Jeżeli każdej wartości ζ należącej do pewnego obszaru G płaszczyzny zespolonej przyporządkujemy drugą liczbę zespoloną $Z = f(\zeta)$, to Z jest funkcją zespoloną zmiennej ζ . Funkcja zespolona $Z = f(\zeta)$ jest ciągła w punkcie ζ , jeżeli $\lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} f(\zeta + \Delta\zeta) = f(\zeta)$ niezależnie od

drogi, po której $\Delta\zeta$ dąży do zera; droga ta więc może być dowolną prostą, spiralą itd. Jednak wartość graniczna

$$(21.1) \quad \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + \Delta\zeta) - f(\zeta)}{\Delta\zeta}$$

zależać może w ogólności od drogi, po której $\Delta\zeta$ dąży do zera.

Funkcją *analityczną* nazywamy funkcję, dla której (21.1) ma wartość graniczną, niezależną od drogi $\Delta\zeta$. Granicę (21.1) nazywamy

wówczas pochodną funkcji analitycznej $Z = f(\zeta)$ i oznaczamy przez $\frac{dZ}{d\zeta}$ lub $f'(\zeta)$.

Ponieważ dla każdego ζ z obszaru G wartość $Z = f(\zeta)$ jest liczbą zespoloną, więc ma ona część rzeczywistą φ i urojoną ψ , obie zależne od x i y :

$$(21.2) \quad Z = f(\zeta) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Z tego, że wartość graniczna (21.1) nie zależy od sposobu znikania $\Delta\zeta$, wnosimy, że funkcje φ i ψ są rozwiązaniami układu dwu. równań różniczkowych cząstkowych. Nazywamy je *równaniami Cauchy-Riemanna*.

Weźmy mianowicie dla $\Delta\zeta$ raz Δx a drugi raz $i\Delta y$; wówczas otrzymujemy

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial y}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Związek ten może jednak zachodzić tylko wtedy, gdy po obu stronach równania równe są zarazem części rzeczywiste i urojone:

$$(21.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Są to właśnie *równania Cauchy-Riemanna*.

Rugując z (21.3) ψ lub φ , otrzymujemy dla części rzeczywistej lub urojonej funkcji analitycznej $f(\zeta)$ równania teorii potencjału na płaszczyźnie

$$(21.4) \quad \Delta \varphi = 0 \quad \text{lub} \quad \Delta \psi = 0.$$

Rodziny krzywych $\varphi(x, y) = \text{const}$ i $\psi(x, y) = \text{const}$ są prostopadłe. Mnożąc bowiem stronami oba równania (21.3), otrzymujemy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \text{czyli} \quad \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi = 0,$$

a $\text{grad } \varphi$ i $\text{grad } \psi$ mają kierunki prostopadłe do krzywych $\varphi = \text{const}$ i $\psi = \text{const}$.

Gdy badamy zmianę wartości funkcji analitycznej $f(\zeta)$ wzdłuż krzywej zamkniętej K na płaszczyźnie ζ , może się zdarzyć, że znajdziemy przy powrocie do punktu ζ , z którego wyszliśmy, tę samą wartość funkcji lub inną. W pierwszym przypadku nazywamy funkcję $f(\zeta)$ *jednoznaczną* przy danym obiegu K , w drugim przypadku — *wieloznaczną*.

Funkcja analityczna nazywa się w pewnym obszarze *jednoznaczna*, jeżeli jest jednoznaczna przy każdym obiegu w tym obszarze. Przykładem funkcji jednoznacznej jest

$$Z = \zeta^n = (\rho e^{ia})^n = \rho^n e^{ina} = \rho^n (\cos na + i \sin na)$$

dla n całkowitych. W szczególności ζ^n jest funkcją jednoznaczna dla każdego obiegu dokoła punktu $\zeta = 0$. Natomiast funkcja

$$Z = \zeta^{1/m} = \rho^{1/m} \left(\cos \frac{\alpha}{m} + i \sin \frac{\alpha}{m} \right) \quad (m \text{ liczba całkowita})$$

powraca do swej wartości wyjściowej dopiero po m -krotnym okrążeniu punktu $\zeta = 0$, jest więc funkcją m -zyczną. Innym przykładem funkcji niejednoznacznej jest

$$\ln \zeta = \ln \rho e^{ia} = \ln \rho + ia.$$

Przy każdym dodatnim (tzn. przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) obiegu zupełnym dokoła $\zeta = 0$ funkcja ta wzrasta o $2\pi i$.

Punktami rozgałęzienia funkcji nazywamy punkty takie, jak punkt $\zeta = 0$ w obu ostatnich przykładach. Przy okrążaniu tych punktów funkcja $f(\zeta)$ nie jest jednoznaczna.

Przejdźmy obecnie do zastosowań w teorii pól wektorowych. Ze względu na (21.4) możemy φ lub ψ traktować jako potencjał pola wektorowego płaskiego, nie mającego żadnych źródeł ani wirów przestrzennych. Takie pole wektorowe możemy przedstawić za pomocą powierzchni ekwipotencjalnych (§3) i rurek wektorowych (§6). Jeżeli przypiszemy funkcji φ rolę potencjału, to w płaszczyźnie xy krzywe $\varphi = \text{const}$ będą krzywymi równego potencjału, krzywe zaś $\psi = \text{const}$ — liniami wektorowymi. Równie dobrze mogłaby spełniać rolę potencjału funkcja ψ .

W jaki sposób możemy jednak przedstawić składowe wektora $\bar{v}$? Według (21.3) jest

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

tak że

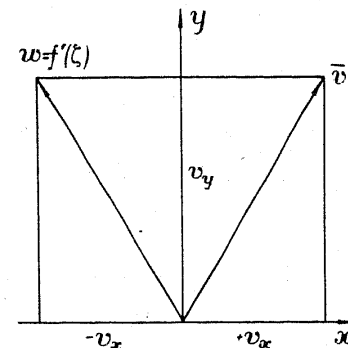
$$f'(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_x + i v_y.$$

Biorąc więc w płaszczyźnie $w = f'(\zeta)$ punkt

$$(21.5) \quad w = f'(\zeta) = -v_x + i v_y,$$

otrzymujemy wektor $\bar{v}$ przez odbicie zwierciadlane punktu w na osi urojonej (rys. 49).

Mimo, że nie występują tu źródła i wiry przestrzenne, pole wektorowe $\bar{v}$ może posiadać źródła i wiry osobliwe. Aby podać dogodnie kryterium ich istnienia, badamy, jaki przyrost ma funkcja analityczna $f(\zeta)$ przy zupełnym obiegu krzywej zamkniętej K . Ponieważ $d\zeta = dx + i dy$, więc ze względu na (21.5) przyrost ten jest równy



Rys. 49. Związek między $w = f'(\zeta)$ a wektorem $\bar{v} = -\text{grad } \varphi$.

$$\oint_K f'(\zeta) d\zeta = \oint_K (-v_x + i v_y) (dx + i dy) = -\oint_K (v_x dx + v_y dy) -$$

$$-i \oint_K (v_x dy - v_y dx) = -\oint_K \bar{v} d\bar{s} - i \oint_K \bar{v} \times d\bar{s}.$$

Całka $\oint_K \bar{v} d\bar{s} = \oint_K v_s ds$ jest tu krążeniem wzdłuż krzywej K . Całkę $\oint_K \bar{v} \times d\bar{s}$ natomiast możemy przekształcić w następujący sposób. Ponieważ $\oint_K \bar{v} \times d\bar{s} = \oint_K \bar{v} (d\bar{s} \times \bar{k})$, gdzie $d\bar{s} \times \bar{k}$ jest wektorem o kierunku normalnej zewnętrznej do krzywej K i o wartości bezwzględnej ds , całka ta oznacza $\oint_K v_n ds$. Mamy więc związek

$$(21.6) \quad -\oint_K f'(\zeta) d\zeta = \oint_K v_s ds + i \oint_K v_n ds.$$

Ujemna część rzeczywista przyrostu funkcji analitycznej $f(\zeta)$ przy obiegu dodatnim po krzywej zamkniętej K , daje nam więc krążenie pola wektorowego $\bar{v}$, tzn. 4π -krotne całkowite natężenie wirów, znajdujących się wewnątrz K . Ujemna część urojona określa natomiast w mierze objętościowej wydajność źródeł wewnątrz K . Źródła i wiry mogą więc występować tylko w wypadku niejednoznacznych funkcji $f(\zeta)$.

W teorii tej rolę potencjału mogłaby spełniać — jak już to zauważyliśmy — równie dobrze funkcja ψ ; rolę funkcji φ i ψ byłyby

wówczas zamienione; zamianę tę można wykonać, zastępując funkcję $f(\zeta)$ przez $-if(\zeta)$.

PRZYKŁAD. $f(\zeta) = A \ln \zeta = A \ln \varrho + iA\alpha$, gdzie A jest stałą.

Przyrost tej funkcji przy obiegu dodatnim dookoła początku układu $x=y=0$ wynosi $2\pi iA$. Przy wszystkich innych obiegach funkcja $f(\zeta)$ jest jednoznaczna. Źródła i wiry osobliwe mogą się więc znajdować tylko w punkcie $\zeta=0$. Pole wektorowe określone jest równaniem

$$(21.7) \quad w = f'(\zeta) = \frac{A}{\zeta} = A \frac{e^{-i\alpha}}{\varrho}.$$

Jeżeli A jest liczbą rzeczywistą, to pisząc $A = -2\varepsilon$, mamy

$$\varphi = -2\varepsilon \ln \varrho, \quad \psi = -2\varepsilon \alpha,$$

a na mocy (21.5) i (21.7) otrzymujemy

$$v_x = \frac{2\varepsilon}{\varrho} \cos \alpha, \quad v_y = \frac{2\varepsilon}{\varrho} \sin \alpha.$$

Mamy tu więc do czynienia z polem radialnym, odpowiadającym źródłu znajdującemu się w początku układu. Ponieważ przyrost $f(\zeta)$ przy pełnym obiegu dookoła $\zeta=0$ wynosi $2\pi iA = -4\pi i\varepsilon$, więc $4\pi\varepsilon$ jest wydajnością źródła, jeżeli mierzymy ją w mierze objętościowej (por. § 9, zadanie 4).

Jeśli jednak A jest liczbą urojoną, to mamy do czynienia z włóknem wirowym, znajdującym się w początku układu (por. § 9, zadanie 5 oraz § 14, przede wszystkim zadanie).

§ 22. Dywergencja tensorowa. Jeżeli w każdym punkcie pewnego obszaru dane są wszystkie składowe tensora T , to mamy do czynienia z polem tensorowym.

Składowe $T_{xx}, T_{xy}, \dots$ są wówczas funkcjami zmiennych x, y, z . W takim przypadku możemy działać tensorem T tak na wektor $\bar{v}$, jak też na operator Hamiltona $\nabla: T\nabla$. Nie spotykamy przy tym żadnych trudności, używając ∇ w postaci (2.12a).

Tak jak przy każdym innym mnożeniu tensora przez wektor, otrzymujemy i tu pewien wektor, który nazywamy *dywergencją tensora* T i oznaczamy przez $\text{Div } T$. Piszemy duże D w celu odróżnienia od dywergencji wektora $\text{div } \bar{v}$, która jest skalarem.

Mamy więc

$$(22.1) \quad \text{Div } T = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F d\mathbf{f} T \bar{n}.$$

By podać $\text{Div } T$ we współrzędnych prostokątnych x, y, z , obliczamy z równania (22.1) składową w kierunku osi x . Według (I.7.7a) otrzymujemy

$$(22.2) \quad \begin{aligned} \text{Div}_x T &= \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F d\mathbf{f} (T \bar{n})_x = \\ &= \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F d\mathbf{f} [T_{xx} \cos(n, x) + T_{xy} \cos(n, y) + T_{xz} \cos(n, z)]. \end{aligned}$$

Dla porównania napiszmy równanie (4.2) w składowych:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_F d\mathbf{f} [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z)].$$

Możemy tu wstawić $v_x = T_{xx}$, $v_y = T_{xy}$, $v_z = T_{xz}$, ponieważ równanie to jest prawdziwe dla każdego pola wektorowego. Otrzymujemy w ten sposób z (22.2) wzór dla $\text{Div}_x T$, który uzupełniamy natychmiast wyrażeniami dla pozostałych dwu składowych $\text{Div } T$:

$$(22.3) \quad \begin{aligned} \text{Div}_x T &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \\ \text{Div}_y T &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \\ \text{Div}_z T &= \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Równania te dają odpowiedź na pytanie, czy możemy w równaniu $T\nabla = \text{Div } T$ dla ∇ używać operatora różniczkowego (2.12b). Formalne postępowanie dałoby nam wynik zupełnie bezsensowny

$$(22.4) \quad (T\nabla)_x = T_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial}{\partial y} + T_{xz} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Możemy go jednak poprawić, dopuszczając przedstawienie składowych ∇ i T po prawej stronie równania (22.4).

Podobnie jak z określenia dywergencji skalarnej (4.2) otrzymujemy twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego (5.1), tak z (22.1) otrzymujemy twierdzenie

$$(22.5) \quad \int_R d\tau \text{Div } T = \int_F d\mathbf{f} T \bar{n}.$$

Mianowicie, dzieląc obszar R odpowiednimi cięciami na elementy objętościowe kształtu kostek o powierzchniach F_v , stwierdzamy, zupełnie podobnie jak dla (5.2), że

$$\int_{\bar{F}} df T \bar{n} = \sum_v \int_{F_v} df T \bar{n}.$$

Po obu stronach każdej powierzchni cięcia, normalne n do powierzchni F_v mają zwroty przeciwne, a ponieważ według (I, 7.2a) lub (I, 7.7a) jest $T(-\bar{n}) = -T\bar{n}$, to na każdej powierzchni cięcia znoszą się całki powierzchniowe po wszystkich F_v .

Definicja $\text{Div} T$ przez wzór (22.1) dotyczy pól tensorowych dowolnej symetrii. Ten sam zasięg ma twierdzenie (22.5), ponieważ wynika ono bezpośrednio z definicji (22.1). Natomiast twierdzenie

$$(22.6) \quad \int_R d\tau \bar{r} \times \text{Div} T = \int_{\bar{F}} df \bar{r} \times T \bar{n}$$

zachodzi jedynie dla pól tensorów symetrycznych. Aby podać dowód tego twierdzenia, bierzemy pod uwagę z równania (22.6) składową względem x :

$$(22.7) \quad \int_R d\tau (y \text{Div}_z T - z \text{Div}_y T) = \int_{\bar{F}} df [y (T \bar{n})_z - z (T \bar{n})_y].$$

Ponieważ według (22.3) jest

$$\text{Div}_x y T = y \text{Div}_x T + T_{xy},$$

a z (22.5) wynika przez podstawienie yT zamiast T

$$\int_R d\tau \text{Div}_x y T = \int_{\bar{F}} df y (T \bar{n})_x,$$

więc otrzymujemy

$$(22.8a) \quad \int_R d\tau y \text{Div}_x T = \int_R d\tau (\text{Div}_x y T - T_{xy}) = \int_{\bar{F}} df y (T \bar{n})_x - \int_R d\tau T_{xy}.$$

Podobnie możemy dowieść, że

$$(22.8b) \quad \int_R d\tau z \text{Div}_y T = \int_{\bar{F}} df z (T \bar{n})_y - \int_R d\tau T_{yz}.$$

Z (22.8a i b) wynika więc (22.7) tylko wtedy, gdy T jest tensorem symetrycznym.

ZADANIA. 1. Okazać, że dla tensora antysymetrycznego T , któremu odpowiada wektor $\bar{T}$ (por. I, §8), prawdziwe jest równanie $\text{Div} T = -\text{rot} \bar{T}$. Dla takiego tensora przechodzi (22.5) w twierdzenie (8.3).

2. Dla tensora (I, 11.5), pozostającego w ścisłym związku z napięciami maxwellowskimi udowodnić, że

$$(22.9) \quad \text{Div} T = 2\bar{v} \text{div} \psi \bar{v} - \bar{v}^2 \text{grad} \psi - 2(\psi \bar{v} \times \text{rot} \bar{v}).$$

Równanie to przekształca siły elektromagnetyczne przestrzenne w napięcia Maxwellowskie.

Rozwiązanie. Ponieważ $\psi(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = 2v_x \psi v_x - \psi v^2$, więc składowa $\text{Div} T$ względem osi x równa jest

$$(22.10) \quad \begin{aligned} \text{Div}_x T &= \frac{\partial}{\partial x} (2v_x \psi v_x - \psi v^2) + \frac{\partial}{\partial y} 2\psi v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z} 2\psi v_x v_z = \\ &= 2v_x \left(\frac{\partial \psi v_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi v_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi v_z}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \bar{v}^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ &\quad + 2\psi v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + 2\psi v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + 2\psi v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \\ &\quad - 2\psi v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2\psi v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - 2\psi v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &= 2v_x \text{div} \psi \bar{v}, \\ &= -\bar{v}^2 \text{grad}_x \psi, \\ &= -2(\psi \bar{v} \times \text{rot} \bar{v})_x. \end{aligned} \right.$$

Wyrażenia w pierwszym i drugim wierszu odpowiadają składowej względem osi x wyrażeń $2\bar{v} \text{div} \psi \bar{v}$ i $-\bar{v}^2 \text{grad} \psi$. W obu ostatnich wierszach znoszą się pierwsze wyrazy, a pozostałe możemy ugrupować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &-2\psi v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + 2\psi v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \\ &= -2\psi v_y \text{rot}_x \bar{v} + 2\psi v_z \text{rot}_y \bar{v} = \\ &= -2(\psi \bar{v} \times \text{rot} \bar{v})_x. \end{aligned}$$

A więc dwa ostatnie wiersze (22.10) dają składową wektora $-2(\psi \bar{v} \times \text{rot} \bar{v})$ względem osi x .