

ROZDZIAŁ I

RACHUNEK WEKTOROWY I TENSOROWY

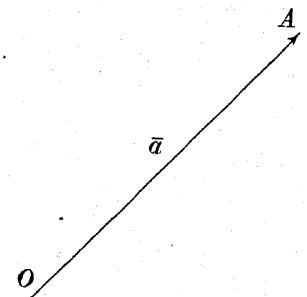
A. ALGEBRA WEKTORÓW I TENSORÓW

§ 1. Skalary i wektory. W fizyce spotykamy trzy rodzaje wielkości fizycznych: skalary, wektory i tensory.

Skalar jest to wielkość fizyczna określona jednoznacznie już przez jedną liczbę. Jako przykłady służyć mogą: temperatura, masa, objętość, ładunek elektryczny, gęstość (np. masy lub ładunku elektrycznego), potencjał itd. Nazwa „skalar” pochodzi stąd, że jego wartość liczbową możemy odczytać na skali przyrządu pomiarowego, jak np. temperaturę na skali termometru.

Wektor natomiast jest wielkością fizyczną „skierowaną”: aby go określić, musimy oprócz wartości liczbowej tej wielkości podać kierunek w przestrzeni oraz zwrot. Aby np. określić prędkość poruszającego się punktu, nie wystarczy powiedzieć, jaka jest jego droga przypadająca na jednostkę czasu, lecz trzeba ponadto oznaczyć kierunek i zwrot jego ruchu. Innymi przykładami wektorów są: przesunięcie punktu, przyspieszenie, siła, natężenie pola elektrycznego lub magnetycznego, pęd, moment pędu itd.

Słowo „kierunek” służy do scharakteryzowania nie tylko pewnej prostej, ale zbioru prostych do niej równoległych, a słowa „zwrot” używamy dla odróżnienia dwu przeciwstawnych sobie możliwości uporządkowania punktów przy poruszaniu się po prostej lub krzywej¹⁾. Fizycy jednak,



Rys. 1. Wektor $\vec{a}$.

¹⁾ Np. po osi x możemy poruszać się tak, że x rośnie lub maleje.

mówiąc o wektorze o danym kierunku, mają zwykle na myśli wektor o danym kierunku i zwrocie.

Każdy wektor możemy więc geometrycznie przedstawić za pomocą strzałki (rys. 1), której początek (punkt O na rys. 1) nazywamy *początkiem* lub *punktem zaczepienia* wektora, a której koniec (punkt A na rys. 1) — *końcem* wektora. Ażeby określić wektor, należy podać:

1° jego punkt zaczepienia,

2° długość, zwaną *wartością bezwzględną* wektora i przedstawiającą wartość liczbową danej wielkości fizycznej,

3° kierunek prostej, na której wektor leży, zwany *kierunkiem* wektora,

4° *zwrot* wektora.

Z tego jednak, że pewna wielkość fizyczna da się geometrycznie przedstawić za pomocą strzałki, nie możemy jeszcze wnioskować, że jest ona wektorem. Do tego nieodzowne jest, by wielkość ta podlegała wszystkim prawom (aksjomatom) rachunku wektorowego.

Prawem takim jest np. znana *reguła równoległoboku*, tj. dodawania wektorów. Możemy jej użyć, mimo różnic w interpretacji fizycznej, np. do wyznaczenia wypadkowej dwu sił, jak i do wyznaczenia przesunięcia prostoliniowego, jakie przeprowadza punkt w to samo położenie końcowe, co dwa przesunięcia następujące po sobie. Siłę i przesunięcie prostoliniowe możemy więc uważać z punktu widzenia dodawania wektorów za wektory.

Natomiast nie możemy w ogólności stosować reguły równoległoboku do wyznaczenia wyniku dwu obrotów ciała sztywnego o kąty skończone (por. § 10, zadanie 3), mimo że możemy taki obrót przedstawić jednoznacznie przez strzałkę. Strzałki, przedstawiającej obrót skończony, nie należy więc uważać za wektor. Jedyne obroty o kąty dowolnie małe („nieskończenie“ małe) przyjmuje się za wektory.

Pytanie, czy należy uznać daną wielkość fizyczną za wektor, łatwo jest rozstrzygnąć, jeżeli posiadamy wykład rachunku wektorowego oparty na aksjomatach. Należy po prostu stwierdzić, czy odpowiada ona tym aksjomatom. Praktycznie jednak sprawa jest zwykle o wiele prostsza. Możemy bowiem uporządkować wektory występujące w fizyce w ten sposób, że wektor następny powstaje z poprzedniego przez taką operację rachunku wektorowego, która wektor przeprowadza znowu w wektor. Jak wynika

z dalszych rozważań, wektory mechaniki punktu materialnego mogą być uporządkowane np. w następujący sposób:

przesunięcie $\rightarrow$ przyspieszenie
 $\rightarrow$ prędkość $\rightarrow$ prędkość polowa
 $\searrow$ pęd $\rightarrow$ moment pędu
 $\searrow$ siła $\rightarrow$ moment siły.

W tym uporządkowaniu wektorów mechaniki punktu materialnego wektor liniowego przesunięcia występuje więc jako wektor, z którego wywodzą się wszystkie pozostałe.

Wektory, których punkt zaczepienia jest umiejscowiony, nazywamy *wektorami umiejscowionymi* lub *związanymi*. W fizyce występują jednak również tzw. *wektory swobodne*, których punkty zaczepienia są dowolnie przesuwalne w przestrzeni, a także *wektory ślizgające się*, tj. przesuwalne wzdłuż prostej, na której dany wektor leży i która nazywa się *linią działania* wektora.

Prawie wszystkie wektory występujące w fizyce są wektorami umiejscowionymi. Nie wyłącza to jednak, że w pewnych przypadkach, przy obliczaniu niektórych wielkości fizycznych (a więc przy wykonywaniu pewnych działań matematyczno-wektorowych), zachowują się one tak, jak gdyby były wektorami ślizgającymi się lub swobodnymi. Gdy dany jest np. układ sił zewnętrznych, działających na ciało elastyczne, i obliczamy napięcia wytworzone przez te siły, to musimy je uważać za wektory umiejscowione. Przesunięcie punktu zaczepienia jakiejkolwiek siły zmienia bowiem napięcia. Gdy natomiast obliczamy moment wypadkowy tego układu sił (dla danego punktu przestrzeni), to jego wartość nie zmieni się, jeżeli będziemy przesuwali poszczególne siły po ich liniach działania. W tym przypadku siły zachowują się więc tak, jak gdyby były wektorami ślizgającymi się. Gdy wreszcie obliczamy wypadkową wszystkich sił, to położenia ich punktów zaczepienia są obojętne. W tym przypadku siły zachowują się więc jak wektory swobodne. Widzimy zatem, że wektor siły jest w ogólności wektorem umiejscowionym, ale w statyce i dynamice ciała sztywnego, tam gdzie układ sił zewnętrznych zastąpić możemy ich momentem wypadkowym i ich wypadkową, wektor siły zachowuje się ostatecznie tak, jak gdyby był wektorem ślizgającym się.

Wektory ślizgające się występują zazwyczaj w fizyce tylko w bardzo specjalnych przypadkach. Znanymi przykładami wek-

torów swobodnych są natomiast: wypadkowa układu sił, prędkość ruchu postępowego lub prędkość kątowa ciała sztywnego.

Podobnie możemy rozróżniać umiejscowione i swobodne wielkości skalarnie, jak np. masa punktu materialnego i masa całkowita układu punktów materialnych.

Mówiliśmy dotychczas o punkcie zaczepienia, kierunku i zwrocie wektora. Pojęcia te mają jednak liczbowo uchwytne znaczenie tylko wówczas, gdy dany jest *układ odniesienia* czyli *układ współrzędnych*, względem którego możemy oznaczyć położenie punktu zaczepienia i kierunek wektora. Zakładamy więc zawsze w rachunku wektorowym istnienie układu odniesienia, nawet jeżeli o tym osobno nie wspominamy.

Wektory oznaczamy małymi literami z kreską poziomą u góry, np. przez $\vec{a}$. Wartość bezwzględna wektora $\vec{a}$ oznaczamy przez $|\vec{a}|$ lub przez tę samą literę bez kreski poziomej, a więc przez a . Sposobem tym możemy się też posługiwać w piśmie odręcznym. W druku często oznacza się wektory grubszymi czcionkami.

Pojęcie tensora jest tak ściśle związane z pojęciem wektora, że definicję jego możemy podać dopiero w § 7 po zaznajomieniu się z algebrą wektorów.

Jak wspomnieliśmy, istnienie rachunku wektorowego uzasadnione jest tym, że wszystkie wektory podlegają tym samym prawom rachunkowym. Jest zatem praktyczniej wyprowadzić i zebrać te prawa raz na zawsze, a potem tylko powoływać się na nie w poszczególnych przypadkach, niż wyprowadzać je na nowo dla każdej z osobna wielkości fizycznej. Tak też uczyniono. Dzięki temu rachunek wektorowy stał się dyscypliną matematyczną. Również fizyk ma z tego korzyść nieocenioną: jasne odgraniczenie rozważań fizycznych od matematycznych. Mając ponadto do dyspozycji potrzebne twierdzenia matematyczne, nie jest on zmuszony przerywać sobie toku rozważań fizycznych wywodami matematycznymi. Przez to rozważania fizyczne stają się zwęższe i przejrzystsze. O wiele łatwiej odnaleźć w nich ewentualną pomyłkę.

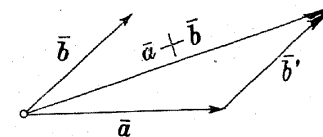
Ale i same rozumowania matematyczne rachunek wektorowy ogromnie ułatwia dzięki swej symbolice. Umożliwia ona zapisanie na małej kartce papieru rozważań, które w zwykłej symbolice matematycznej zajęłyby wiele stron. Pochodzi to stąd, że dla każdego wektora używamy tylko jednego znaku zamiast oznaczania osobnym znakiem każdej z jego trzech składowych. Jeszcze bar-

dzie przyczynia się do tej zwężkości z ręczne oznaczanie poszczególnych operacji wektorowych. Symbolika wektorowa bywa więc słusznie porównywana do stenografii.

Oczywiście, nie należy ukrywać, że opanowanie rachunku wektorowego nie jest rzeczą łatwą, wymaga bowiem pewnej wyobraźni geometrycznej, sztuki myślenia przestrzennego. Niemniej jednak zalety rachunku wektorowego są tak wielkie, że trud nauczania się go opłaca się sownie.

§ 2. Dodawanie i odejmowanie wektorów. Jak wspomnieliśmy, korzystniej jest przedstawić rachunek wektorowy jako naukę czysto matematyczną, w której zwyczajem matematyków wprowadza się poszczególne operacje za pomocą definicji. Radzę jednak czytelnikowi interpretować operacje i twierdzenia rachunku wektorowego posługując się wektorami o znaczeniu fizycznym, aby w ten sposób ilustrować je też od strony fizyki.

Suma czyli wypadkowa dwu wektorów. Zakładamy, że $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są wektorami o wspólnym punkcie zaczepienia. Sumą $\vec{a} + \vec{b}$ tych wektorów nazywamy wektor, jaki otrzymujemy w sposób następujący: przesuwamy wektor $\vec{b}$ równolegle do siebie tak, by początek jego padł na koniec wektora $\vec{a}$. Sumą $\vec{a} + \vec{b}$ jest wówczas wektor, którego początek leży w punkcie zaczepienia wektora $\vec{a}$, koniec zaś w końcu przesuniętego wektora $\vec{b}$, oznaczonego na rys. 2 przez $\vec{b}'$.

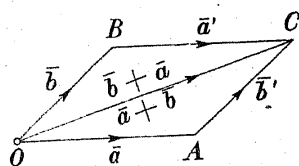

Rys. 2: $\vec{a} + \vec{b}$.

Prawo przemienności dodawania wektorów. W powyższej definicji sumy oba wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ grają rolę niesymetryczne. Szczególnie wyraźnie widzimy to, jeżeli spróbujemy utworzyć sumę $\vec{b} + \vec{a}$. Wówczas należy pozostawić na swoim pierwotnym miejscu wektor $\vec{b}$, a przesunąć wektor $\vec{a}$. Mimo to otrzymujemy w obu wypadkach ten sam wynik:

$$2.1) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Przy dodawaniu dwu wektorów możemy więc, tak jak w zwykłej algebrze, przemienić oba dodawniki i, podobnie jak w algebrze, nazywamy (2.1) *prawem przemienności dodawania* wektorów. Dla dowodu tego prawa budujemy równoległobok rozpięty

na obu wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$, kreśląc przez koniec wektora $\vec{a}$ (lub $\vec{b}$) równoległą do wektora $\vec{b}$ (lub $\vec{a}$) (rys. 3). BC (lub AC) przedstawiają przesunięty wektor $\vec{a}$ (lub $\vec{b}$). Dlatego przekątnia OC jest równocześnie równa $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{b} + \vec{a}$.

Rys. 3. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Dla większej przejrzystości umieściliśmy na rys. 3, jak i na kilku następnych, strzałki nie na końcu, lecz w środku wektorów.

Z rys. 3 widać ponadto, że znana w fizyce elementarnej *reguła równoległoboku* dla składania dwu sił lub prędkości jest identyczna z wyżej podaną

regułą dodawania wektorowego.

Jeżeli trzy wektory są związane równaniem $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, to $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy *składowymi* wektora $\vec{c}$, a $\vec{c}$ *wypadkową* wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Prawo łączności dodawania wektorów. Mając trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (które na ogół nie leżą w jednej płaszczyźnie), możemy:

1^o do sumy pierwszych dwu wektorów $\vec{a} + \vec{b}$ dodać wektor $\vec{c}$:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

2^o do pierwszego wektora $\vec{a}$ dodać sumę $\vec{b} + \vec{c}$ dwu pozostałych wektorów:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

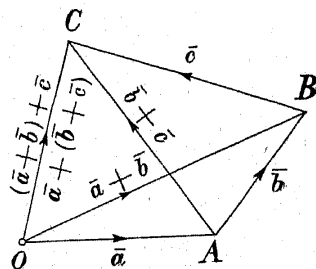
Za pomocą czworościanu (rys. 4) przekonujemy się, że w obu przypadkach otrzymujemy jeden i ten sam wektor wypadkowy OC . Wystarczy zauważyć, że wektor $\vec{a} + \vec{b}$ dany jest przez OB , a wektor $\vec{b} + \vec{c}$ przez AC , tak że $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = OB + BC$ i $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = OA + AC$. Stwierdziliśmy więc równość

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

którą w rachunku wektorowym nazywamy, tak samo jak w algebrze, *prawem łączności dodawania*.

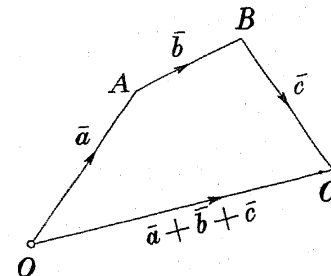
Sumę $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \dots$ wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, ... należy rozumieć w sposób następujący:

$$[(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}] + \vec{d} + \dots,$$

Rys. 4. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

tzn. że do wektora $\vec{a}$ dodajemy wektor $\vec{b}$, do sumy obu — wektor $\vec{c}$, do sumy pierwszych trzech wektorów — wektor $\vec{d}$ itd.

Jeżeli wszystkie wektory leżą w jednej płaszczyźnie, a dodawanie przeprowadzamy graficznie, to zbędne jest rysowanie wektorów, przedstawiających sumy częściowe $\vec{a} + \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ itd. Wystarczy wykreślić z końca wektora $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$, z jego końca wektor $\vec{c}$ itd., a więc w wypadku trzech wektorów linię łamaną $OABC$ (rys. 5).

Rys. 5. Konstrukcja $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Zamykająca tego ciągu wektorów, czyli w danym przykładzie odcinek OC , jest wówczas wypadkową.

Gdy dane wektory nie są współpłaszczyznowe, to dodawanie graficzne możemy wykonać posługując się metodami geometrii wykreślnej.

Jeżeli taki płaski lub przestrzenny wielobok wektorowy jest zamknięty, to znika wypadkowa sumy wektorów. Możemy powiedzieć, że jest ona *wektorem zerowym*, tzn. wektorem o wartości bezwzględnej równej zero. Nie możemy oczywiście przypisać wektorowi zerowemu żadnego kierunku. Daje się on też określić przez tę swoją własność, że dodany do jakiegokolwiek wektora nie zmienia go. Wektor zerowy oznaczamy znakiem zwykłego zera. Wprowadzenie go potrzebne jest chociażby w tym celu, żeby np. w równaniu

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0,$$

w którym po jednej stronie występuje wektor, po drugiej stronie też występował wektor, tj. by suma wektorów zawsze była wektorem.

Wyrażeń *wielobok wektorowy* i *wielobok wektorowy zamknięty* używamy także w przypadkach, gdy wektory dodawane są *współliniowe*, tzn. leżą na jednej prostej.

Z prawa łączności i przemienności wnioskujemy, że *dodawanie trzech wektorów daje zawsze jeden i ten sam wynik, niezależnie od kolejności dodawania*. Mamy np.:

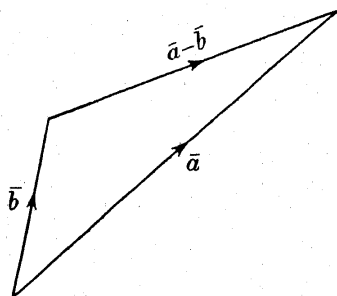
$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} + \vec{a} + \vec{b} = (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{b} = \\ &= (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b}. \end{aligned}$$

Łatwo dowieść przez indukcję, że twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnej liczby wektorów.

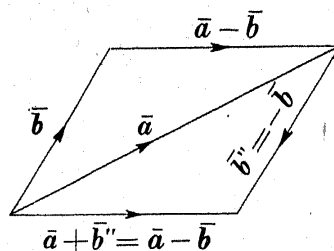
By odróżnić dodawanie wektorów od algebraicznego dodawania liczb, nazywamy je też *dodawaniem geometrycznym*.

Odejmowanie wektorów. Tak samo jak w zwykłej algebrze określamy też w algebrze wektorów odejmowanie jako operację odwrotną do dodawania. Mianowicie różnicą $\vec{a} - \vec{b}$ wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy taki wektor, który dodany do wektora $\vec{b}$ daje wektor $\vec{a}$:

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}.$$



Rys. 6. $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$.



Rys. 7. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Stąd wynika, że wektor $\vec{a} - \vec{b}$ jest wektorem łączącym końce obu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz skierowanym od końca wektora $\vec{b}$ ku końcowi wektora $\vec{a}$ (rys. 6). Łatwo przekonać się za pomocą równoległoboku, którego jednym bokiem jest $\vec{b}$, przylegającą zaś do niego przekątną jest $\vec{a}$ (rys. 7), że możemy otrzymać wektor $\vec{a} - \vec{b}$, dodając do wektora $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ z przeciwnym zwrotem (wektor $\vec{b}'$ na rys. 7).

Oznaczmy ten wektor przez $-\vec{b}$. Wówczas zachodzić będzie, tak samo jak w zwykłej algebrze, równość

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Podobnie jak w zwykłej algebrze możemy też nie tylko odejmowanie wektorów uważać za odwrócenie dodawania wektorów, lecz i na odwrót dodawanie możemy uważać za odwrócenie odejmowania. Jeżeli bowiem wykonamy te dwie operacje jedną po drugiej, to dojdziemy do wektora od którego wyszliśmy. Mamy przecież

$$(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \vec{a} \quad \text{ i } \quad (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}.$$

Rozkład wektora na składowe. Rozkład wektora $\vec{a}$ na składowe polega na wyznaczeniu wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$ w ten sposób, aby ich suma równała się wektorowi $\vec{a}$ i aby miały one dane z góry kierunki lub leżały na danych płaszczyznach. Wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$ nazywają się *składowymi* wektora $\vec{a}$.

Jeżeli dane są tylko dwa kierunki 1 i 2, leżące z wektorem $\vec{a}$ w jednej i tej samej płaszczyźnie, to prowadzimy przez początek i koniec wektora $\vec{a}$ równoległe do tych kierunków. Obojętne jest przy tym, czy np. równoległą do kierunku 1 rysujemy przez koniec wektora $\vec{a}$ (rys. 8a), czy przez jego początek (rys. 8b).

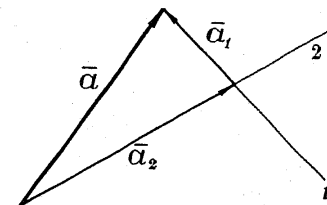
Powyższe zadanie ma tylko jedno rozwiązanie. Chcąc bowiem zmienić wielkość np. wektora $\vec{a}_1$, nie zmieniając oczywiście jego kierunku, otrzymalibyśmy ze względu na równość $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ wektor $\vec{a}_2$, nie mający kierunku 2.

Gdy chcemy rozłożyć wektor $\vec{a}$ na dwie składowe, z których jedna, np. $\vec{a}_1$, ma dany kierunek 1, a druga, $\vec{a}_2$, leży w danej płaszczyźnie p , to prowadzimy płaszczyznę p' przez wektor $\vec{a}$ i kierunek 1, a następnie rozkładamy $\vec{a}$ w płaszczyźnie p' na dwie składowe: jedną o kierunku 1 i drugą o kierunku prostej, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny p i p' .

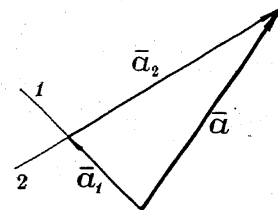
Gdy płaszczyzna p jest prostopadła do kierunku 1, otrzymujemy rozkład wektora $\vec{a}$ na dwie składowe, z których jedna, $\vec{a}_{||}$, jest równoległa do danego kierunku, a druga, $\vec{a}_{\perp}$, jest do niego prostopadła: $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$.

Jeżeli mamy trzy kierunki 1, 2 i 3, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, to możemy wektor $\vec{a}$ rozłożyć na składowe o tych kierunkach, rozkładając go najpierw np. na składową $\vec{a}_1$ o kierunku 1 i składową $\vec{a}_{23}$, leżącą w płaszczyźnie przechodzącej przez kierunki 2 i 3:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_{23}.$$



a.



b.

Rys. 8. Rozkład wektora $\vec{a}$ na składowe o kierunku 1 i 2.

Rozkładając następnie $\vec{a}_{23}$ na składowe o kierunkach 2 i 3 (leżących razem z $\vec{a}_{23}$ w jednej płaszczyźnie) otrzymujemy:

$$\vec{a}_{23} = \vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

tak że ostatecznie wektor

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

rozłożony jest na trzy składowe o kierunkach 1, 2 i 3.

Możemy się łatwo przekonać, że:

1^o ostatnie dwa zadania mają tylko jedno rozwiązanie,

2^o nie jest natomiast jednoznacznie określony wynik rozkładu wektora $\vec{a}$ na więcej jak dwie składowe, gdy kierunki dane leżą w tej samej płaszczyźnie co $\vec{a}$, oraz na więcej niż trzy składowe w wypadku przestrzennym.

ZADANIA. 1. Dowieść, że możemy zbudować trójkąt z dośrodkowych dowolnego trójkąta przesuując je równolegle.

Rozwiązanie. Zaopatrując boki dowolnego trójkąta w odpowiednie zwroty otrzymujemy trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, których suma znika i na odwrót: z trzech wektorów $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ spełniających warunek $\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}' = 0$ zawsze możemy zbudować trójkąt.

Ponieważ dośrodkowe w trójkącie o bokach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ uważać możemy za wektory $\vec{a}' = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$, $\vec{b}' = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$, $\vec{c}' = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$, więc powyższy warunek spełniony jest ze względu na $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

2. Samolot leci po drodze o postaci trójkąta ABC . Znaleźć odległości AB , BC , CA i czasy przelotu po tych drogach. Zakładamy, że podczas całego lotu wieje wiatr o prędkości $\vec{w}$, stałej co do kierunku i wartości bezwzględnej, a samolot porusza się wobec wiatru ze stałą co do wartości bezwzględnej prędkością v . Podać prędkość i kierunek wiatru $\vec{w}$ oraz prędkość samolotu v .

Rozwiązanie. Powyższe dane określają wektory prędkości lotu po bokach AB , BC , CA : $\vec{v}_{AB}$, $\vec{v}_{BC}$, $\vec{v}_{CA}$. Ponieważ prędkość wiatru $\vec{w}$ i prędkość $\vec{v}$ samolotu wobec wiatru dodają się geometrycznie, więc mamy

$$\vec{v}_{AB} = \vec{w} + \vec{v}_1, \quad \vec{v}_{BC} = \vec{w} + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_{CA} = \vec{w} + \vec{v}_3,$$

gdzie $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ są względnymi prędkościami samolotu względem wiatru przy locie po bokach AB , BC , CA , tak że $v_1 = v_2 = v_3 = v$.

Stąd wynika, że końce wektorów $\vec{v}_{AB}$, $\vec{v}_{BC}$, $\vec{v}_{CA}$ naniesionych ze wspólnego punktu początkowego O leżą na kole o promieniu v , podczas gdy wektor łączący punkt O ze środkiem koła określa $\vec{w}$.

§ 3. Mnożenie wektora przez skalar. Wektor możemy pomnożyć przez skalar lub przez wektor. Zajmiemy się najpierw mnożeniem wektora przez skalar, wychodząc z określenia:

Iloczyn

$$s\vec{a} = \vec{a}s$$

wektora $\vec{a}$ i skalar s jest wektorem o wartości bezwzględnej $|s||\vec{a}|$, o kierunku zgodnym z kierunkiem wektora $\vec{a}$ i o zwrocie zgodnym ze zwrotem wektora $\vec{a}$, gdy s jest dodatnie, przeciwnym zaś, gdy s jest ujemne.

Prawo przemienności mnożenia wektora przez skalar narzucone jest omawianemu iloczynowi już przez definicję.

Łatwo możemy się przekonać, że spełnione jest też prawo łączności tego mnożenia w postaci

$$(s_1 s_2) \vec{a} = s_1 (s_2 \vec{a}) = s_2 (s_1 \vec{a}),$$

jeżeli tylko uprzytomnimy sobie znaczenie poszczególnych wektorów występujących w tym wzorze. Musimy przy tym oczywiście uważać na znaki skalarów s_1 i s_2 .

Prawo łączności pozwala wykonać w dwu krokach mnożenie wektora przez iloczyn dwu skalarów. Mnożymy wektor przez jeden skalar, a otrzymany w ten sposób wektor — przez drugi skalar.

Prawo rozdzielności jest prawdziwe dla mnożenia skalar s przez wektor $\vec{a}$ i to w następujących dwu postaciach:

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}, \quad (s_1 + s_2)\vec{a} = s_1\vec{a} + s_2\vec{a}.$$

Pierwszą równość udowadniamy, powiększając $|s|$ -krotnie w przypadku $s > 0$ równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a w przypadku $s < 0$ równoległobok rozpięty na wektorach $-\vec{a}$ i $-\vec{b}$. Druga równość wynika wprost z definicji iloczynu $s\vec{a}$.

Wektor o wartości bezwzględnej równej jedności nazywamy *wektorem jednostkowym*. Wektor jednostkowy o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{a}$ oznaczamy zwykle przez $\vec{a}^*$. Za pomocą $\vec{a}^*$ możemy każdy wektor $\vec{a}$ wyrazić w postaci

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^* = a\vec{a}^*.$$

ZADANIA. 1. Zakładając, że $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są wektorami stałymi a μ, ν parametrami dowolnymi, sprawdzić poglądowo, że

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}\mu \text{ i } \vec{r} = \vec{a} + \vec{b}\mu + \vec{c}\nu$$

są równaniami parametrycznymi prostej i płaszczyzny.

2. Dowieść, że wszystkie trzy dwusieczne kątów α, β, γ trójkąta ABC o bokach a, b, c przecinają się w jednym i tym samym punkcie I , który uważać możemy za środek trzech mas, umieszczonych we wierzchołkach A, B, C a równych liczbowo długościom boków a, b, c .

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ wektory poprowadzone z dowolnego punktu P do wierzchołków A, B, C . Jak wiadomo z mechaniki, wektor o początku w punkcie P a końcu w powyżej określonym środku masy I dany jest wówczas przez

$$\vec{r}_I = \frac{1}{a+b+c} (a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C).$$

Punkty dwusiecznej kąta α określone są natomiast przez

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \mu \left(\frac{\vec{r}_C - \vec{r}_A}{b} + \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{c} \right) = \vec{r}_A \left(1 - \frac{\mu}{b} - \frac{\mu}{c} \right) + \vec{r}_B \frac{\mu}{c} + \vec{r}_C \frac{\mu}{b},$$

gdzie μ jest parametrem o dowolnej wartości. $\vec{r}_C - \vec{r}_A$ i $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ są mianowicie wektorami o wspólnym punkcie zaczepienia A i punktach końcowych C i B , a więc są określone przez boki b i c ze zwrotem skierowanym od wierzchołka A . $(\vec{r}_C - \vec{r}_A)/b$ i $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)/c$ są zatem odpowiednimi wektorami jednostkowymi. Suma ich przeto jest wektorem o punkcie zaczepienia A i kierunku dwusiecznej kąta α . Mnożąc wektor ten przez dowolny parametr μ możemy więc otrzymać wektor o punkcie zaczepienia we wierzchołku A a końcu w dowolnym punkcie dwusiecznej kąta α .

Jeżeli dwusieczna ta przechodzi rzeczywiście przez punkt I , to musi być rzeczą możliwą tak dobrać parametr μ , by $\vec{r} = \vec{r}_I$. Porównując współczynniki wektorów $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ w wyrażeniach dla obu wektorów $\vec{r}$ i $\vec{r}_I$ otrzymujemy wprawdzie aż trzy równania dla μ :

$$1 - \mu \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{\mu}{c} = \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{\mu}{b} = \frac{c}{a+b+c},$$

które mają jednak tylko jedno wspólne rozwiązanie $\mu = bc/(a+b+c)$.

§ 4. Iloczyn skalarny wektorów. Zajmiemy się z kolei mnożeniem wektora przez wektor. Mnożąc wektor przez wektor, możemy jednak otrzymać bądź wielkość skalarną bądź wielkość wektorową. Rozróżniamy więc w rachunku wektorowym iloczyn skalarny i wektorowy dwu wektorów. Najpierw zajmiemy się iloczynem skalarnym.

Iloczyn skalarny lub *wewnętrzny* wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ określa się jako iloczyn ich wartości bezwzględnych przez cosinus kąta między nimi, a więc jako liczbę

$$ab \cos \vartheta,$$

gdzie ϑ jest najmniejszym kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tak że zawsze $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oznaczamy przez $\vec{a}\vec{b}$ lub $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Mamy więc na mocy definicji równość

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \vartheta.$$

Zależnie od tego, czy ϑ jest kątem ostrym, prostym, czy rozwartym, iloczyn $\vec{a}\vec{b}$ jest liczbą dodatnią, zerem lub liczbą ujemną.

$a_{||} = a \cos \vartheta$ oznacza (opatrzonej znakiem) rzut wektora $\vec{a}$ na kierunek wektora $\vec{b}$. Przy tym $a_{||}$ jest dodatnie, gdy kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest ostry, ujemne zaś, gdy kąt ten jest rozwarty. Analogiczne znaczenie ma rzut $b_{||} = b \cos \vartheta$. Używając tych rzutów możemy napisać

$$(4.1) \quad \vec{a}\vec{b} = ab_{||} = a_{||}b.$$

Iloczyn skalarny dwu wektorów może więc być określony jako *iloczyn wartości bezwzględnej jednego wektora przez rzut drugiego wektora na kierunek pierwszego*.

Zwróćmy uwagę na następujące przypadki szczególne.

(1) Gdy oba wektory są równoległe, ich iloczyn skalarny równy jest iloczynowi ich wartości bezwzględnych ze znakiem $+$ lub $-$, zależnie od tego, czy zwroty wektorów są zgodne, czy przeciwne. W szczególności

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2.$$

(2) Gdy oba wektory są prostopadłe, znika ich iloczyn skalarny. Ważne jest odwrócenie tego twierdzenia:

Jeżeli iloczyn skalarny dwu wektorów jest zerem, a ich wartości bezwzględne nie znikają, to oba wektory są prostopadłe.

Wówczas bowiem musi być $\cos \vartheta = 0$.

(3) Iloczyn skalarny wektora $\vec{a}$ i wektora jednostkowego $\vec{n}$ daje rzut wektora $\vec{a}$ na kierunek wektora $\vec{n}$.

Dla iloczynu skalara s przez iloczyn skalarny $\vec{a}\vec{b}$ zachodzi prawo łączności:

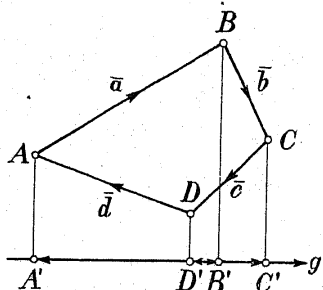
$$(4.2) \quad s(\vec{a}\vec{b}) = s\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot s\vec{b}.$$

Mnożenie iloczynu skalarnego dwu wektorów przez skalar możemy przeto wykonać w ten sposób, że mnożymy przez skalar którykolwiek z wektorów występujących w iloczynie skalarnym. Łatwo można się przekonać, że twierdzenie (4.2) jest prawdziwe (w obu przypadkach $s \leq 0$) na mocy definicji iloczynu skalarnego.

Zwracamy uwagę na przypadek szczególny $s = -1$ prawa (4.2):

$$-(\vec{a}\vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (-\vec{b}).$$

Prawo przemienności mnożenia skalarnego $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ wynika wprost z definicji tego działania. Przy mnożeniu skalarnym dwu wektorów nie potrzebujemy więc zwracać uwagi na kolejność czynników.



Rys. 9. Rzut wieloboku $ABCD$ na prostą g .

Dowód prawa rozdzielności możemy oprzeć na następującym twierdzeniu pomocniczym.

Założmy, że dany jest zamknięty wielobok przestrzenny z określonym zwrotem obiegu, np. wielobok $ABCD$ (rys. 9); twierdzimy, że znika rzut tego wieloboku na każdą prostą g , na której obrano określony zwrot.

Dowód. Boki $AB, BC, CD, \dots$ wieloboku $ABCD \dots$ z określonym zwrotem obiegu możemy uważać za wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Ponieważ $ABCD \dots$ jest wielobokiem zamkniętym, więc

$$(4.3) \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots = 0.$$

Składowe $\vec{a}_{||}, \vec{b}_{||}, \vec{c}_{||}, \dots$ tych wektorów równoległe do kierunku prostej g , (oznaczone na rys. 9 przez $A'B', B'C', C'D', D'A'$) naniśnione na prostą g też tworzą wielobok zamknięty, tak że

$$(4.4) \quad \vec{a}_{||} + \vec{b}_{||} + \vec{c}_{||} + \dots = 0.$$

Niech $\vec{g}^*$ będzie wektorem jednostkowym na prostej g o zwrocie zgodnym ze zwrotem tej prostej. Wektory $\vec{a}_{||}, \vec{b}_{||}, \vec{c}_{||}, \dots$ możemy wówczas przedstawić w postaci:

$$(4.5) \quad \vec{a}_{||} = \vec{g}^* a_{||}, \quad \vec{b}_{||} = \vec{g}^* b_{||}, \quad \vec{c}_{||} = \vec{g}^* c_{||}, \quad \dots,$$

gdzie $a_{||}, b_{||}, c_{||}, \dots$ są rzutami wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$, tj. boków $AB, BC, CD, \dots$, na prostą g ze znakiem $+$, gdy kąt między danym wektorem, a wektorem $\vec{g}^*$ jest ostry, a ze znakiem $-$, gdy kąt ten jest rozwarty. Z (4.4) i (4.5) wynika jednak, że $\vec{g}^*(a_{||} + b_{||} + c_{||} + \dots) = 0$, a stąd twierdzenie pomocnicze

$$(4.6) \quad a_{||} + b_{||} + c_{||} + \dots = 0.$$

Gdy przez $\vec{g}$ oznaczymy jakikolwiek wektor, któremu odpowiada wektor jednostkowy $\vec{g}^*$, to mnożąc (4.6) przez $g = |\vec{g}|$, otrzymujemy

$$ga_{||} + gb_{||} + gc_{||} + \dots = 0.$$

Z twierdzenia pomocniczego wynika zatem, że jeśli spełniona jest równość (4.3), to dla każdego wektora $\vec{g}$ zachodzi równość

$$\vec{g}\vec{a} + \vec{g}\vec{b} + \vec{g}\vec{c} + \dots = 0.$$

Udowodnione twierdzenie pomocnicze zawiera w sobie jako szczególny przypadek prawo rozdzielności mnożenia skalarnego:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c},$$

ponieważ wektory $\vec{b}, \vec{c}, -(\vec{b} + \vec{c})$ tworzą wielobok zamknięty (trójkąt).

Z prawa rozdzielności wynika bezpośrednio, że iloczyn skalarny dwu sum wektorowych możemy otrzymać jak w zwykłej algebrze sumując iloczyny skalarne poszczególnych wektorów. Np.

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} + (\vec{a} + \vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}.$$

ZADANIA. 1. Odwrócenie mnożenia skalarnego. W równaniu $\vec{a}\vec{b} = s$ dany jest wektor $\vec{a}$ i skalar s . Jak dalece określony jest wektor $\vec{b}$?

Rozwiązanie. Jeżeli do $\vec{a}\vec{b} = s$ podstawimy $\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}$, gdzie $\vec{b}_{||}$ jest składową $\vec{b}$ równoległą do wektora $\vec{a}$, $\vec{b}_{\perp}$ zaś jego składową

prostopadłą (por. § 2), to otrzymujemy $\vec{a}\vec{b} = ab_{\parallel} = s$. Znaczący to, że $b_{\parallel} = \frac{s}{a}$, a $\vec{b}_{\perp}$ jest dowolne. Stąd wynika ze względu na $\vec{b}_{\parallel} = b_{\parallel} \frac{\vec{a}}{a}$ (gdzie $\frac{\vec{a}}{a} = \vec{a}^*$), że $\vec{b} = \vec{a} \frac{s}{a^2} + \vec{b}_{\perp}$. Ponieważ $\vec{b}_{\perp}$ jest dowolne, więc końce wektorów $\vec{b}$ leżą na płaszczyźnie przechodzącej przez koniec $\vec{b}_{\parallel}$ i prostopadłej do wektora $\vec{a}$.

2. Jakie znaczenie geometryczne mają tożsamości:

$$(a) \quad (\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b},$$

$$(b) \quad (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(a^2 + b^2)?$$

Rozwiązanie. (a) Twierdzenie Carnota (uogólnione twierdzenie Pitagorasa); (b) W równoległoboku suma kwadratów zbudowanych na obydwu jego przekątniach ($\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$) równa jest sumie kwadratów zbudowanych na jego czterech bokach.

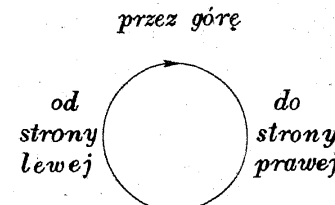
3. Dowieść, że trzy wysokości dowolnego trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie O , zwanym ortocentrum.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $\vec{l} = \overrightarrow{KA}$, $\vec{m} = \overrightarrow{KB}$ i $\vec{n} = \overrightarrow{KC}$ trzy wektory o wspólnym punkcie zaczepienia w środku K koła opisanego na trójkącie ABC , a końcach we wierzchołkach A, B, C . Wartość bezwzględna każdego z tych wektorów równa jest oczywiście promieniowi koła opisanego, tak że $|\vec{l}| = |\vec{m}| = |\vec{n}|$.

Twierdzimy, że wektor $\vec{o} = \vec{l} + \vec{m} + \vec{n}$ z punktem zaczepienia w K ma koniec w ortocentrum O . By dowieść, że przez koniec wektora $\vec{o}$, który oznaczamy na razie przez O' , przechodzą wszystkie wysokości, należy pokazać, że np. wektor od wierzchołka A do punktu O' , a mianowicie $\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KO'} = -\vec{l} + \vec{o} = \vec{m} + \vec{n}$ jest prostopadły do przeciwległego boku $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB} = \vec{n} - \vec{m}$. Ze względu na $|\vec{m}| = |\vec{n}|$ znika rzeczywiście iloczyn skalarny $\overrightarrow{AO'} \cdot \overrightarrow{BC} = n^2 - m^2$. Ponieważ ten sam fakt zachodzi również dla pozostałych dwu wysokości, przeto ortocentrum znajduje się rzeczywiście w punkcie O' .

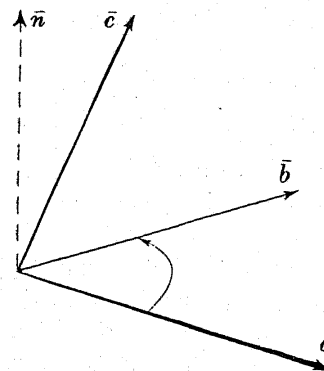
§ 5. Iloczyn wektorowy. Zajmiemy się teraz iloczynem wektorowym dwu wektorów. By jednak nie przerywać toku dalszych rozważań, wprowadzimy na wstępie dwa pojęcia: śruby prawoskrętnej i prawoskrętnego układu trzech wektorów.

Śruba prawoskrętna przyporządkowuje obrotowi od strony lewej poprzez górę do strony prawej (stąd pochodzi nazwa), a więc obrotowi zgodnemu z ruchem wskazówek zegara, ruch postępowy prostopadły do płaszczyzny, w której odbywa się obrót, i skierowany poza tę płaszczyznę (rys. 10). Śruby, których używa się dziś w technice, są zwykle prawoskrętne. Śrub lewoskrętnych używa się tylko w zupełnie specjalnych przypadkach, np. gdy koło osadzone na śrubie obraca się w takim kierunku, że odkręcałoby śrubę, gdyby była prawoskrętna, np. lewy pedał roweru.

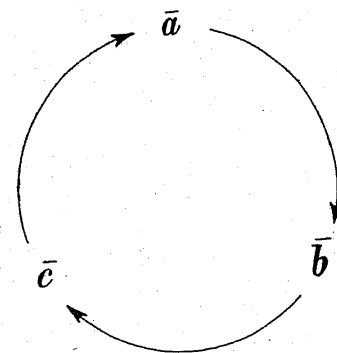


Rys. 10. Reguła śruby prawoskrętnej.

By wprowadzić pojęcie układu prawoskrętnego trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, zakładamy, że wektory te dane są w kolejności, w której je napisaliśmy. Mówimy, że $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tworzą układ prawoskrętny, jeżeli kierunek $\vec{n}$ ruchu postępowego, przyporządkowany za pomocą reguły śruby prawoskrętnej najmniejszemu obrotowi, jaki przeprowadza wektor $\vec{a}$ w wektor $\vec{b}$, tworzy z wektorem $\vec{c}$ kąt ostry.



Rys. 11. Układ prawoskrętny wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



Rys. 12. Przystawienia kołowe wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Z rys. 11 widzimy, że ten związek geometryczny zachodzi też dla wektorów napisanych w kolejności $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$. Powstaje ona z pierwotnej kolejności $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ przez tzw. *przestawienie cykliczne* czyli *kołowe*, które na miejsce wektora $\vec{a}$ wprowadza wektor $\vec{b}$, na

miejsce wektora $\bar{b}$ wektor $\bar{c}$ i na miejsce wektora $\bar{c}$ wektor $\bar{a}$ (rys. 12). Tak samo układ prawoskrętny tworzą te wektory w kolejności $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$, powstającej z $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ przez przestawienie kołowe. Dal-
sze przestawienie kołowe przeprowadza $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$ w kolejność pierwotną $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Z danej kolejności trzech wektorów powstają więc przez przestawienia kołowe jeszcze tylko dwie różne kolejności, tak że ogółem mamy trzy kolejności trzech wektorów, związane ze sobą przestawieniami kołowymi. We wszystkich tych trzech kolejnościach wektory tworzą układy prawoskrętne. Trzy elementy mają jednak $3! = 6$ przestawień. Pozostałe trzy przestawienia wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ też powstają jedno z drugiego przez przestawienia kołowe, ale tworzą tzw. *układ lewoskrętny*.

By od razu wprowadzić pojęcie iloczynu wektorowego tak, żeby można je było uogólnić dla potrzeb teorii względności, weźmiemy za punkt wyjścia nieco ogólniejsze rozważania. Możemy sobie mianowicie zadać pytanie, czy nie można by stworzyć rachunku, który by się opierał na ograniczonych elementach płaszczyzn, podobnie jak rachunek wektorowy opiera się na odcinkach prostych. Na to pytanie możemy odpowiedzieć twierdząco pod warunkiem, że

1° elementy płaszczyzn zaopatrzymy na brzegu w zwroty obiegu,

2° nie będziemy zwracali uwagi na kształt brzegu elementu, lecz tylko na wielkość jego pola, tzn. że nie będziemy czynili żadnych różnic między elementami o tym samym polu i tym samym zwrocie obiegu, o ile położone są na płaszczyznach równoległych.

Takie elementy płaszczyzn nazywają się *elementami płaskimi skierowanymi* albo *zorientowanymi*. Dla krótkości jednak będziemy je zwykle nazywali po prostu *elementami*.

By stworzyć rachunek elementów płaskich skierowanych, trzeba przede wszystkim określić dla tych elementów operacje rachunkowe. Zanalizujemy bliżej tylko dodawanie dwu elementów. Ponieważ uważamy kształt elementów za nieistotny, możemy przyjąć je w postaci równoległoboków $ABED$ i $ADFC$ (rys. 13) ze zwrotem obiegu określonym przez kolejność liter. Przy tym możemy jeszcze założyć, że wzdłuż wspólnego boku AD zwroty obiegu obu elementów są przeciwne. Element $BEFC$ ze zwrotem obiegu oznaczonym na rys. 13 nazywamy sumą obu elementów.

Skoro to jednak uczynimy, zaraz nasuwają się wątpliwości. Czy przyjęta definicja określa sumę jednoznacznie? Czy suma

ta nie zależy od kształtu równoległoboków $ABED$ i $ADFC$? Jest przecież oczywiste, że przynajmniej kształt równoległoboku $BEFC$ zależy od kształtu równoległoboków $ABED$ i $ADFC$. Jego pole i kierunek płaszczyzny, w której się znajduje, mogłyby więc także się zmienić.

Wątpliwości te możemy jednak usunąć. Przyporządkujmy każdemu elementowi prostopadły do jego płaszczyzny wektor o długości równej polu tego elementu i o zwrocie związanym z obiegiem dookoła elementu według reguły śruby prawoskrętnej. Taki wektor nazywamy *dopełnieniem skierowanego elementu płaskiego*. Oczywiście, określa on jednoznacznie wszystkie istotne własności elementu płaskiego, mianowicie jego pole, zwrot jego obiegu i jego kierunek w przestrzeni. Stworzymy więc rachunek elementów płaskich skierowanych, jeżeli pokażemy, że każdemu działaniu, jakie możemy wykonać na wektorach, odpowiada działanie na elementach płaskich, mające znaczenie geometryczne.

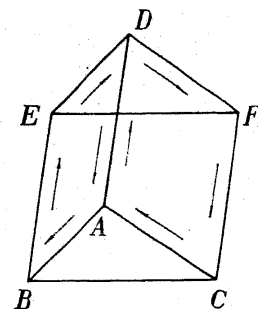
Okazemy to najpierw dla iloczynu skalarnego dopełnienia $\bar{n}$ elementu płaskiego przez wektor jednostkowy $\bar{n}$:

$$\bar{n}\bar{a} = a \cos \vartheta,$$

gdzie a oznacza pole elementu, a ϑ — kąt między $\bar{n}$ i $\bar{a}$. Zwracając uwagę na znak liczby $\cos \vartheta$, łatwo stwierdzić, że $\bar{n}\bar{a}$ jest rzutem elementu płaskiego na płaszczyznę p , prostopadłą do $\bar{n}$ (i mającą zwrot obiegu zgodny z $\bar{n}$), ze znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy zwrot obiegu rzutu zgodny jest ze zwrotem obiegu płaszczyzny p , czy nie.

Aby udowodnić, że tak określone dodawanie elementów płaskich daje wynik jednoznaczny, posłużymy się następującym twierdzeniem pomocniczym, które zresztą będzie nam potrzebne również do innych celów.

Założmy, że poszczególnym ścianom wielościanu zamkniętego przyporządkowane są zwroty obiegu, odpowiadające jego normalnym zewnętrznym. Wówczas poszczególne ściany są elementami płaskimi; oznaczmy ich dopełnienia przez $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ (łatwo widzieć,



Rys. 13. Dodawanie skierowanych elementów płaskich.

że sąsiadujące ze sobą elementy mają wówczas na wspólnej krawędzi zwroty odwrotne); twierdzimy, że dla wielościanu zamkniętego znika suma wektorów:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots = 0.$$

Dowód opieramy na tym, że prosta g przechodząca przez powierzchnię zamkniętą, a więc w szczególności przez wielościan zamknięty W , przecina ją zawsze parzystą ilość razy. Postępując bowiem wzdłuż g , musimy opuścić obszar R , ograniczony przez powierzchnię W , po każdym wejściu do niego. Możemy nadto stwierdzić, że przy każdym wejściu do obszaru R kierunek normalnej zewnętrznej i zwrot postępowania wzdłuż g tworzą kąt rozwarty, a przy każdym wyjściu z obszaru R — kąt ostry.

Przypuśćmy teraz, że twierdzenie nie jest prawdziwe czyli że wektor

$$\vec{j} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$$

nie znika. Niech $\vec{j}^*$ będzie wektorem jednostkowym o kierunku i zwrocie wektora $\vec{j}$, a p płaszczyzną prostopadłą do $\vec{j}^*$ ze zwrotem obiegu odpowiadającym wektorowi $\vec{j}^*$. Poszczególne wyrazy sumy

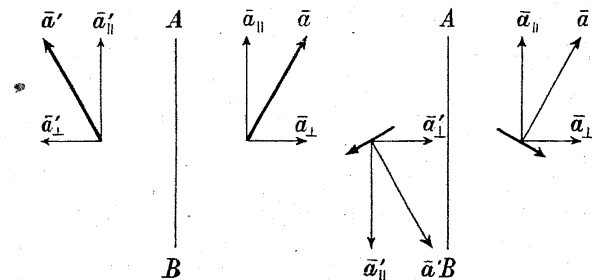
$$|\vec{j}| = \vec{j}^* \vec{j} = \vec{j}^* \vec{a} + \vec{j}^* \vec{b} + \vec{j}^* \vec{c} + \dots$$

są wówczas rzutami poszczególnych ścian na płaszczyznę p . Rzut ma znak $+$, jeżeli postępując wzdłuż prostej g o kierunku $\vec{j}^*$ wychodzimy z obszaru R , a $-$, jeżeli wchodzimy do R . O ile więc jakiś element płaszczyzny p pokryty jest rzutami ścian, to znajdujemy na nim zawsze tę samą liczbę rzutów dodatnich i ujemnych. Stąd wynika, że $|\vec{j}|$, a więc i sam wektor $\vec{j}$, znika wbrew przypuszczeniu. Udowodniliśmy więc twierdzenie pomocnicze.

Na podstawie tego twierdzenia możemy pokazać, że wątpliwości co do określenia sumy dwu elementów płaskich były bezpodstawne. Równoległoboki $ABED$ i $ADFC$, które zamierzamy dodać, uzupełniamy do graniastopuła $ABCDEF$ (rys. 13). Oba wektory, które odpowiadają trójkątom ACB i DEF (o zwrocie obiegu określonym kolejnością liter), są niezgodnie równoległe, ale równe co do wartości bezwzględnej, tak że ich suma znika. Według twierdzenia pomocniczego znika więc suma wektorów, które odpowiadają trzem ścianom pobocznic graniastopuła. Suma geometryczna dwu ścian jego pobocznic równa się więc trzeciej ścianie, jeżeli zmienimy na niej zwrot obiegu tak, aby odpowiadał on normalnej wewnętrznej.

Ponieważ dopełnienie oddaje jednoznacznie obie istotne dla nas własności elementu płaskiego, dogodniej jest posługiwać się zamiast elementami ich dopełnieniami, tak jak gdyby były one prawdziwymi wektorami, a nie tylko wielkościami zastępczymi.

W jednym tylko wypadku nie możemy tego uczynić, mianowicie przy odbiciu zwierciadlanym od płaszczyzny. Odbicie $\vec{a}'$ wektora $\vec{a}$ (rys. 14 a)¹⁾ w płaszczyźnie AB ma mianowicie odwróconą składową o kierunku normalnej do płaszczyzny odbijającej ($\vec{a}'_{\perp} = -\vec{a}_{\perp}$), a niezmienną składową równoległą do tej płaszczyzny ($\vec{a}'_{\parallel} = \vec{a}_{\parallel}$). Jeżeli natomiast poddamy odbiciu zwierciadlanemu element płaski



Rys. 14a. Odbicie zwierciadlane wektora.

Rys. 14b. Odbicie zwierciadlane elementu płaskiego.

(rys. 14 b) i uważamy, że jego odbicie ma zwrot widzialny w zwierciadle, to dopełnieniu tego elementu $\vec{a}$ odpowiada dopełnienie odbitego elementu $\vec{a}'$ o tej samej składowej normalnej do płaszczyzny odzwierciadlającej ($\vec{a}_{\perp} = \vec{a}'_{\perp}$), a odwrotnie skierowanej składowej równoległej do tej płaszczyzny ($\vec{a}_{\parallel} = -\vec{a}'_{\parallel}$). Przy odzwierciadlaniu dopełnienie elementu skierowanego nie zachowuje się więc tak samo jak wektor.

Po tych przygotowaniach możemy przejść do definicji *iloczynu wektorowego* czyli *zewnątrznego* dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (danych w tej kolejności), który oznaczamy przez $\vec{a} \times \vec{b}$ ²⁾.

Przyjmujemy mianowicie, że iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$ jest płaskim elementem skierowanym, którego pole równa się polu

¹⁾ Rysunki 14a. i 14b. wykonano w płaszczyźnie przechodzącej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{a}'$, prostopadłej do płaszczyzny odbijającej.

²⁾ Inne oznaczenia, których jednak nie będziemy używali, są następujące:

$$[\vec{a}\vec{b}], \quad \vec{a} \wedge \vec{b}, \quad \vec{a} \overline{\wedge} \vec{b}, \quad \nabla \vec{a}\vec{b}.$$

równoległoboku $ABCD$ rozpiętego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 15), a którego zwrot obiegu określony jest przez wektor $\vec{a}$, tzn. przez kolejność liter $ABCD$.

Dla niektórych czytelników wygodniej może będzie wyznaczać zwrot obiegu iloczynu wektorowego w sposób następujący. Niech ϑ będzie najmniejszym kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tak jak przy określeniu iloczynu skalarnego w § 4. Obecnie jednak zaopatrzymy kąt ϑ w zwrot obiegu, który przeprowadza na najkrótszej drodze kierunek i zwrot wektora $\vec{a}$ w kierunek i zwrot wektora $\vec{b}$. Jak widzimy z rys. 15, kąt ϑ

Rys. 15. Iloczyn wektorowy jako element płaski.

posiada ten sam zwrot obiegu co element $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dopełnieniem elementu $\vec{a} \times \vec{b}$ jest wektor prostopadły do płaszczyzny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego wartość bezwzględna równa się polu równoległoboku rozpiętego na tych wektorach, a którego kierunek związany jest regułą śruby prawoskrętnej ze zwrotem obiegu tego równoległoboku.

Identyfikując element $\vec{a} \times \vec{b}$ z jego dopełnieniem, możemy powiedzieć:

$\vec{a} \times \vec{b}$ jest to wektor o wartości bezwzględnej równej polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$, o kierunku prostopadłym do $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz o zwrocie związanym regułą śruby prawoskrętnej z najmniejszym obrotem, przeprowadzającym kierunek wektora $\vec{a}$ w kierunek wektora $\vec{b}$ (rys. 16).

Rys. 16. Iloczyn wektorowy jako wektor.

Zwrot wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ możemy też określić tym, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ tworzą układ prawoskrętny (por. rys. 16).

Łatwo stwierdzić, że

$$(5.1) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \vartheta = a_{\perp} b = ab_{\perp},$$

gdzie (w płaszczyźnie wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$) $a_{\perp} = a \sin \vartheta$ i $b_{\perp} = b \sin \vartheta$ są odpowiednio rzutami wektora $\vec{a}$ na kierunek prostopadły do

wektora $\vec{b}$ i wektora $\vec{b}$ na kierunek prostopadły do wektora $\vec{a}$. Stąd wynika, że:

(1) Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe, to wartość bezwzględna ich iloczynu wektorowego równa się iloczynowi ich wartości bezwzględnych:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab.$$

(2) Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe, a więc mają zwroty zgodne lub przeciwnie, to ich iloczyn wektorowy znika. W szczególności

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

Prawdziwe jest też odwrócenie tego twierdzenia:

Jeżeli znika iloczyn wektorowy dwu nie znikających wektorów, to mają one ten sam kierunek.

Wtedy bowiem musi być $\sin \vartheta = 0$, a więc $\vartheta = 0$ lub $\vartheta = \pi$.

Czytelnik zechce okazać samodzielnie, że dla mnożenia iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ przez skalar s zachodzi w obu wypadkach $s \geq 0$ prawo łączności:

$$(5.2) \quad s(\vec{a} \times \vec{b}) = s\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times s\vec{b}.$$

Zwracamy uwagę na przypadek szczególny $s = -1$:

$$(5.3) \quad -(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times -\vec{b}.$$

Iloczyn wektorowy nie spełnia prawa przemienności. Z jego definicji bowiem wynika, że

$$(5.4) \quad \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}),$$

gdyż zmieniając kolejność wektorów w iloczynie wektorowym, zmieniamy zwrot obiegu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dlatego też przy iloczynie wektorowym musimy zwracać baczną uwagę na kolejność czynników.

Wektorowo możemy więc mnożyć jeden wektor przez drugi bądź lewostronnie, bądź prawostronnie.

By pokazać, że spełnione jest prawo rozdzielności

$$(5.5) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

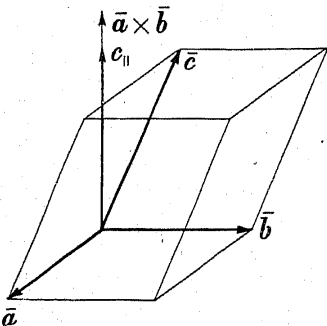
interpretujemy iloczyny wektorowe wchodzące w skład tej równości, jako ściany pobocznic graniastostupa, którego podstawą jest trójkąt zbudowany z wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $-(\vec{a} + \vec{b})$, a krawędzią poboczną — wektor $\vec{c}$. Niech np. na rys. 13 będzie:

$$OA = \vec{a}, \quad AB = \vec{b}, \quad BC = -(\vec{a} + \vec{b}), \quad AD = BE = CF = \vec{c}.$$

Wówczas ściany poboczniczy graniastoslupa określone są ze względu na (5.3) przez następujące wektory:

$$(5.6) \quad \begin{array}{ll} CADF \text{ przez } \vec{a} \times \vec{c}, & ABED \text{ przez } \vec{b} \times \vec{c}, \\ BCFE \text{ przez } -(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}. \end{array}$$

Ponieważ na mocy twierdzenia pomocniczego znika suma wektorów, odpowiadających wszystkim pięciu ścianom tego graniastoslupa a wektory odpowiadające podstawie ACB i równoległej do niej ścianie DEF znoszą się, musi więc znikać suma wektorów (5.6), odpowiadających trzem ścianom poboczniczy.



Rys. 17. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Iloczyn skalarny iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ przez wektor $\vec{c}$ jest równy objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ze znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy te wektory tworzą układ prawo- czy lewoskrętny (rys. 17). Iloczyn $\vec{a} \times \vec{b}$ jest to bowiem wektor o wartości bezwzględnej równej polu podstawy równoległościanu, o kierunku prostopadłym do niej i wreszcie o zwrocie przy porządkowanym wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$ za pomocą reguły śruby prawoskrętnej. Stąd wynika, że

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot c_{||},$$

gdzie $c_{||}$ jest rzutem wektora $\vec{c}$ na kierunek wektora $\vec{a} \times \vec{b}$, a więc wysokością równoległościanu opatrzoną znakiem.

Wprost z tej interpretacji geometrycznej wnioskujemy, że

$$(5.7) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Powyższe trzy wyrażenia objętości przechodzą w siebie za pomocą przestawień kołowych.

Z (5.7) wynika, że $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Znaczący to, że dla trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ otrzymujemy ten sam wynik, niezależnie od tego, czy znak mnożenia wektorowego umieścimy między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a skalarnego między $\vec{b}$ i $\vec{c}$, czy też skalarnego między $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a wektorowego między $\vec{b}$ i $\vec{c}$. By uwydatnić tę swobodę również w pisowni powyższego „iloczynu potrójnego”, oznaczają go niektórzy autorzy przez

$$(5.8) \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Jeżeli $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$, a żaden z wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nie znika, to wektory te są współpłaszczyznowe, bo tylko w tym przypadku znika objętość rozpiętego na nich równoległościanu.

ZADANIE. Podać dowód twierdzenia sinusowego trygonometrii płaskiej.

Rozwiązanie. Możemy przyjąć, że dowolny trójkąt zbudowany jest z trzech wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, których suma znika. Wówczas z $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ wynika $\vec{a} \times \vec{c} = -\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} \times \vec{b}$, tak że $|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Oznaczając kąty przeciwległe bokom $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ przez α, β, γ możemy związek ten napisać w postaci $ac \sin(180 - \beta) = ab \sin(180 - \gamma)$ czyli $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$.

§ 6. Przedstawianie wektorów za pomocą współrzędnych.

Szczególnie wiele korzyści osiągamy z rachunku wektorowego w tych działach fizyki klasycznej, gdzie bardzo często występują wielkości wektorowe, jak np. w mechanice lub w elektromagnetyzmie. Fizyk jednak ceni rachunek wektorowy, tak samo zresztą jak każdy inny dział matematyki, tylko jako narzędzie do opracowywania i przedstawiania swoich pomysłów teoretycznych, nie widzi jednak w używaniu jego żadnego celu nadrzędnego. Gotów jest zeń zrezygnować, gdy spostrzeże, że dojdzie łatwiej i prędzej do celu przy pomocy innych narzędzi matematycznych. By przejść od rachunku wektorowego do innych działów matematyki, używa metod geometrii analitycznej, w szczególności przedstawia wektory za pomocą współrzędnych.

Ukośnokątne i prostokątne układy współrzędnych. Gdy ustalimy w przestrzeni za pomocą trzech niewspółpłaszczyznowych prostych trzy kierunki 1, 2, 3, to możemy rozłożyć w sposób jednoznaczny każdy wektor $\vec{a}$ na trzy składowe $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ o kierunkach 1, 2, 3:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3.$$

Określmy następnie na każdej z tych trzech prostych pewien zwrot przy pomocy wektorów jednostkowych $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; wówczas możemy składowe wektora $\vec{a}$ przedstawić w postaci:

$$\vec{a}_1 = \vec{i}a_1, \quad \vec{a}_2 = \vec{j}a_2, \quad \vec{a}_3 = \vec{k}a_3,$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są to liczby dodatnie lub ujemne zależnie od tego, czy składowe $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mają zwroty zgodne z wektorami jednostkowymi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, czy nie. Wektor $\vec{a}$ daje się więc wyrazić wzorem:

$$\vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3.$$

Kierunki i zwroty określone przez $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ możemy uważać za kierunki i zwroty trzech osi przestrzennego, w ogólności ukośnokątnego, układu współrzędnych. Liczby a_1, a_2, a_3 nazywamy wówczas *składowymi skalarnymi* wektora $\vec{a}$ względem osi danego układu współrzędnych. Słowa „składowa” wektora używamy więc w dwu znaczeniach: w poprzednim dla oznaczenia wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ i w obecnym dla oznaczenia wielkości skalarnych a_1, a_2, a_3 . W jakim znaczeniu słowo „składowa” należy rozumieć w każdym rozważanym przypadku, wynika już z faktu, czy litera oznaczająca tę wielkość zaopatrzona jest w kreskę poziomą, czy też nie. W przypadkach jednak, w których by mogły powstać wątpliwości, będziemy mówili o *składowych wektorowych* i *składowych skalarnych*. Składowe skalarnie nazywa się też *współzrędnymi wektora*. By odróżnić je od współrzędnych, które określimy za chwilę, nazywamy je *współzrędnymi przeciwniennymi*.

W układzie ukośnokątnym możemy wektor $\vec{a}$ wyznaczyć również przez jego rzuty na osie: $\vec{i}\vec{a}, \vec{j}\vec{a}, \vec{k}\vec{a}$. Koniec wektora $\vec{a}$ otrzymujemy mianowicie w tym przypadku jako punkt przecięcia trzech płaszczyzn prostopadłych do osi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i przecinających je w odległościach $\vec{i}\vec{a}, \vec{j}\vec{a}, \vec{k}\vec{a}$ od początku układu. Odległości te nazywają się *współzrędnymi współmiennymi*.

Wektory jednostkowe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nazywamy *wektorami podstawowymi*. Zakładamy zawsze, że tworzą one układ prawoskrętny. Jest to wskazane już choćby ze względu na użycie reguły śruby prawoskrętnej w definicji iloczynu wektorowego.

W układzie prostokątnym czyli *ortogonalnym* wszystkie trzy osie są względem siebie prostopadłe. Między wektorami podstawowymi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ zachodzą wówczas związki:

$$(6.1) \quad \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0, \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,$$

$$(6.2) \quad \vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j},$$

jak to wynika bezpośrednio z definicji iloczynów skalarnego i wektorowego. Z pierwszego spośród związków (6.2) otrzymujemy pozostałe za pomocą przestawień kołowych.

Osie układu prostokątnego oznaczamy będziemy przez x, y, z . W takim układzie składowe przeciwniennicze a_x, a_y, a_z wektora $\vec{a}$ równe są jego składowym współmienniczym $\vec{i}\vec{a}, \vec{j}\vec{a}, \vec{k}\vec{a}$, ponieważ np.

$$\vec{i}\vec{a} = \vec{i}(\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z) = a_x.$$

W dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy wyłącznie układami prostokątnymi, jeżeli wyraźnie nie zaznaczymy, że używamy układu ukośnokątnego.

Łatwo możemy sprawdzić następujące prawa rachunkowe, opierając się po części na wzorach (6.1) i (6.2):

Dodawanie i odejmowanie:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{i}(a_x \pm b_x) + \vec{j}(a_y \pm b_y) + \vec{k}(a_z \pm b_z).$$

Składowe skalarnie sumy lub różnicy dwu wektorów są więc dane przez sumy lub różnice składowych tych wektorów.

Iloczyn skalarny:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Związek ten jest liniowy nie tylko względem a_x, a_y, a_z , ale też względem b_x, b_y, b_z . Nazywamy go przeto *wzorem dwuliniowym*.

W wypadku $\vec{a} = \vec{b}$ mamy:

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Iloczyn wektorowy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Wystarczy zapamiętać z tego wzoru wyrażenie pierwsze dla składowej wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ w kierunku osi x . Wyrażenia dla dalszych składowych otrzymujemy przez przestawienia kołowe wektorów podstawowych $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oraz wskaźników x, y, z .

Wzór dla $\vec{a} \times \vec{b}$ możemy też napisać w postaci wyznacznika

$$(6.3) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

w którego pierwszym wierszu występują wektory podstawowe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a w drugim i ostatnim składowe wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Wzór ten bardzo łatwo można zachować w pamięci.

Z (6.3) i ze wzoru dwuliniowego wnosimy bezpośrednio, że

$$(6.4) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Jeżeli wyznacznik ten znika (por. koniec § 5), to wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są współpłaszczyznowe.

Bardzo łatwo można niekiedy sprawdzić relację wektorową, obliczając obie jej strony w składowych skalarnych. Przykład podajemy w zadaniu 1.

Należy jednak zauważyć, że używanie współrzędnych przy przeprowadzaniu dowodów nie jest w stylu rozważań pogładowo-geometrycznych, którymi posługiwaliśmy się dotychczas bez wyjątku, a niedotrzymanie stylu jest w naukach matematycznych wielkim grzechem. Czar, jaki na nas wywierają poszczególne działy matematyki, zawdzięczamy w dużej mierze jednolitemu stylowi wytworzonemu przez wyłączenie używania pewnego sposobu podchodzenia do zagadnień. Jest rzeczą w ogólności niedopuszczalną, by np. w geometrii rzutowej używano metod geometrii analitycznej.

ZADANIA. 1. Sprawdzić relację

$$(6.5) \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}),$$

obliczając obie jej strony we współrzędnych.

Rozwiązanie. Oznaczając przez $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_x$ składową wektora $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, a przez $(\vec{b} \times \vec{c})_x$ składową wektora $\vec{b} \times \vec{c}$ w kierunku osi x , otrzymujemy za pomocą wzoru (6.3):

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_x &= a_y(\vec{b} \times \vec{c})_z - a_z(\vec{b} \times \vec{c})_y = \\ &= a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) = \\ &= b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z) = \\ &= b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \\ &= b_x(\vec{a}\vec{c}) - c_x(\vec{a}\vec{b}). \end{aligned}$$

Składowe w kierunku osi x obu stron równania (6.5) są więc równe. Podobnie możemy stwierdzić równość obu stron równania (6.5) dla składowych y i z . Mnożąc te trzy relacje przez $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ i dodając je, otrzymujemy (6.5).

2. Podać znaczenie geometryczne wyrażenia:

$$\vec{v} = \vec{i}(\vec{a}\vec{i}) + \vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i}),$$

gdzie $\vec{i}$ jest wektorem jednostkowym.

Rozwiązanie. Przy pomocy (6.5) otrzymujemy $\vec{v} = \vec{i}(\vec{a}\vec{i}) + \vec{a}\vec{i}^2 - \vec{i}(\vec{a}\vec{i}) = \vec{a}$. Ponieważ $\vec{i}(\vec{a}\vec{i})$ ma kierunek wektora $\vec{i}$, a wektor $\vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i})$ jest prostopadły do $\vec{i}$ więc dane wyrażenie przedstawia rozkład wektora $\vec{a}$ na składową w kierunku wektora $\vec{i}$, $\vec{a}_{||} = \vec{i}(\vec{a}\vec{i})$, i składową prostopadłą do $\vec{i}$, $\vec{a}_{\perp} = \vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i})$, (por. § 2).

3. Odwrócenie mnożenia wektorowego. Zakładamy, że w równaniu $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ znamy wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$; pytamy, jak dalece określony jest wektor $\vec{b}$?

Rozwiązanie. Rozkładając $\vec{b}$ na składowe równoległą i prostopadłą do wektora $\vec{a}$:

$$\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp},$$

otrzymujemy

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a} \times \vec{b}_{||} + \vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp},$$

ponieważ $\vec{a} \times \vec{b}_{||}$ znika, ze względu na to, że $\vec{a}$ i $\vec{b}_{||}$ mają ten sam kierunek. Rozpatrywane równanie przechodzi zatem w $\vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{c}$. Możemy więc $\vec{b}_{||}$ dobrać dowolnie, a dla $\vec{b}_{\perp}$ otrzymujemy z zadania 2 wyrażenie:

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{a^2}$$

($\frac{\vec{a}}{a}$ = wektor jednostkowy w kierunku wektora $\vec{a}$), tak że ostatecznie

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{a^2}.$$

Jeżeli wszystkie wektory $\vec{b}$ wykreślimy z jednego punktu O , to końce ich będą leżeć na płaszczyźnie przechodzącej przez koniec $\vec{b}_{\perp}$ i prostopadłej do kierunku tego wektora.

4. Podać przy pomocy rachunku wektorowego dowody wzorów trygonometrycznych:

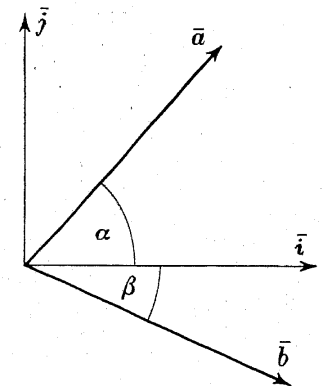
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Rozwiązanie. Wektory jednostkowe $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 18) przedstawiamy w postaci

$$\vec{a} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha,$$

$$\vec{b} = \vec{i} \cos \beta - \vec{j} \sin \beta$$



Rys. 18. Wzory dla $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$.

i tworzymy iloczyn $\vec{a}\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$.

5. Podać przy pomocy rachunku wektorowego dowód twierdzenia o cosinusach z trygonometrii sferycznej.

Rozwiązanie. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{i}$ są na rys. 19 trzema niewspółpłaszczyznowymi wektorami jednostkowymi. Oznaczmy przez ϑ_1 kąt między $\vec{a}$ i $\vec{i}$, a przez ϑ_2 kąt między $\vec{b}$ i $\vec{i}$. Symbole $\vec{j}_1$ i $\vec{j}_2$ oznaczają dwa wektory jednostkowe, prostopadłe do $\vec{i}$ i leżące w płaszczyznach $\vec{i}\vec{a}$ oraz $\vec{i}\vec{b}$. Wówczas mamy:

$$\vec{a} = \vec{i} \cos \vartheta_1 + \vec{j}_1 \sin \vartheta_1,$$

$$\vec{b} = \vec{i} \cos \vartheta_2 + \vec{j}_2 \sin \vartheta_2.$$

Jeżeli oznaczymy kąt między $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przez ϑ_3 , a między $\vec{j}_1$ i $\vec{j}_2$ przez φ , to obliczając $\vec{a}\vec{b}$ otrzymujemy:

$$\cos \vartheta_3 = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi.$$

Łuki ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 są bokami trójkąta sferycznego, a φ — kątem między bokami ϑ_1 i ϑ_2 .

6. Sprawdzić wzór:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{b}(\vec{a}(\vec{c} \times \vec{d})) - \vec{a}(\vec{b}(\vec{c} \times \vec{d})) = \vec{c}(\vec{d}(\vec{a} \times \vec{b})) - \vec{d}(\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})).$$

Rys. 19. Twierdzenie cosinów trygonometrii sferycznej.

Rozwiązanie otrzymujemy wprost z (6.5).

7. Dowieść, że każdy wektor $\vec{v}$ można przedstawić za pomocą trzech niewspółpłaszczyznowych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, jak następuje:

$$(\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}))\vec{v} = \vec{a}(\vec{v}(\vec{b} \times \vec{c})) + \vec{b}(\vec{v}(\vec{c} \times \vec{a})) + \vec{c}(\vec{v}(\vec{a} \times \vec{b})).$$

Rozwiązanie wynika bezpośrednio z relacji podanej w zadaniu 6, jeżeli zastąpimy tam $\vec{d}$ przez $\vec{v}$ oraz uwzględnimy (5.4) i (5.8). W wypadku, gdy $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są wektorami jednostkowymi, podany wzór przedstawia rozkład wektora $\vec{v}$ w układzie ukośnokątnym, którego osie określone są przez wektory podstawowe $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

8. Podać dowód twierdzenia sinusowego trygonometrii sferycznej

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C},$$

gdzie A, B, C oznaczają boki, a α, β, γ przeciwległe kąty trójkąta sferycznego.

Rozwiązanie. Jeśli podamy położenie wierzchołków trójkąta sferycznego za pomocą układu prawoskrętnego trzech wektorów jednostkowych $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, to powyższe twierdzenie zawarte jest we wzorze występującym w zadaniu 6 w przypadku specjalnym $\vec{d} = \vec{b}$. Ze względu na $\vec{b}(\vec{c} \times \vec{b}) = 0$ wzór ten daje nam związek

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b}(\vec{a}(\vec{c} \times \vec{b})).$$

By go zinterpretować oznaczamy kąty przy wierzchołkach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ przez α, β, γ , a przeciwległe im boki przez A, B, C , tak że $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sin C$, $|\vec{c} \times \vec{b}| = \sin A$. Ponieważ oba wektory $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c} \times \vec{b}$ są prostopadłe do wektora $\vec{b}$ i tworzą kąt równy kątowi β , więc łatwo stwierdzić, że $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \sin A \sin C \sin \beta$, tak że $\sin A \sin C \sin \beta = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$. Ponieważ wyrażenie $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ nie zmienia się (por. (5.7)) przy przestawieniach kołowych, więc $\sin A \sin C \sin \beta = \sin B \sin A \sin \gamma = \sin C \sin B \sin \alpha$. Dzielic to równanie przez $\sin A \sin B \sin C$ otrzymujemy twierdzenie sinusowe trygonometrii sferycznej.

9. Dowieść, że jeżeli w układzie ukośnokątnym oznaczmy składowe współmiennicze wektora $\vec{a}$ przez a_x^0, a_y^0, a_z^0 , składowe zaś przeciwwziennicze wektora $\vec{b}$ przez b_x, b_y, b_z , to dla iloczynu skalarnego obu wektorów otrzymujemy następujący związek dwuliniowy:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x^0 b_x + a_y^0 b_y + a_z^0 b_z.$$

Rozwiązanie otrzymujemy, mnożąc $\vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z$ skalarnie przez $\vec{a}$ oraz uwzględniając, że $\vec{a}\vec{i} = a_x^0$, itd.

§ 7. Definicja tensora. Jeżeli każdemu wektorowi $\vec{a}$ przyporządkujemy inny wektor $\vec{v}$, to wektor $\vec{v}$ stanie się funkcją wektora $\vec{a}$:

$$(7.1) \quad \vec{v} = f(\vec{a}).$$

Mówimy, że funkcja f jest liniowa, jeżeli dla dowolnego s i t oraz $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia ona relację:

$$(7.2) \quad f(s\vec{a} + t\vec{b}) = sf(\vec{a}) + tf(\vec{b}).$$

Związek ten wyraża, że wektorom niezależnym, leżącym w pewnej płaszczyźnie, odpowiadają wektory zależne, leżące także w pewnej płaszczyźnie. Wynika to stąd, że dla stałych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektory $s\vec{a} + t\vec{b}$ leżą na płaszczyźnie przechodzącej przez $\vec{a}$ i $\vec{b}$ a wektory $sf(\vec{a}) + tf(\vec{b})$ — na płaszczyźnie przechodzącej przez $f(\vec{a})$ i $f(\vec{b})$.

Z (7.2) otrzymujemy w szczególności:

$$(7.3) \quad f(s\vec{a}) = sf(\vec{a}).$$

Znaczy to, że wektorom niezależnym o wspólnej linii działania odpowiadają wektory zależne również o wspólnej linii działania. Wartości bezwzględne wektorów zależnych są przy tym proporcjonalne do wartości bezwzględnych wektorów niezależnych.

Funkcje wektorowe liniowe mają bardzo proste własności, tak samo jak funkcje liniowe liczb zwykłych. By przekonać się o tym, przedstawiamy wektory w (7.1) przez ich składowe. Gdy do (7.1) wstawimy:

$$(7.4) \quad \vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

to otrzymamy ze względu na (7.2):

$$(7.5) \quad f(\vec{a}) = f(\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z) = a_x f(\vec{i}) + a_y f(\vec{j}) + a_z f(\vec{k}).$$

Wystarczy więc znać trzy wartości funkcji liniowej (7.1), mianowicie $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f(\vec{k})$, by móc podać wartość $f(\vec{a})$ dla każdego wektora $\vec{a}$. Podstawmy:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} f(\vec{i}) &= \vec{i}T_{xx} + \vec{j}T_{yx} + \vec{k}T_{zx}, \\ f(\vec{j}) &= \vec{i}T_{xy} + \vec{j}T_{yy} + \vec{k}T_{zy}, \\ f(\vec{k}) &= \vec{i}T_{xz} + \vec{j}T_{yz} + \vec{k}T_{zz}. \end{aligned}$$

a otrzymamy $f(\vec{a})$ w postaci

$$(7.7) \quad \begin{aligned} f(\vec{a}) &= \vec{i}(T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z) + \\ &+ \vec{j}(T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z) + \\ &+ \vec{k}(T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z). \end{aligned}$$

Liniowa funkcja wektorowa jest więc jednoznacznie określona przez 9 wielkości $T_{\mu\nu}$, które możemy też uważać za elementy macierzy

$$(7.8) \quad \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}.$$

Poszczególne składowe funkcji wektorowej liniowej otrzymujemy przy pomocy tej macierzy, mnożąc elementy $T_{\mu\nu}$, znajdujące się w jednym wierszu, przez odpowiednie składowe wektora $\vec{a}$, tj. a_x , a_y , a_z , i sumując ostatecznie otrzymane w ten sposób trzy iloczyny.

Możemy sobie pomyśleć, że związek wyrażony przez funkcję wektorową (7.1) jest wynikiem działania, wskazanego przez pewien operator. W matematyce bowiem operator jest symbolem nakazującym dokonanie pewnej operacji. Tak np. symbole

$$\int (\cdot) dx, \quad \frac{d(\cdot)}{dx}, \quad +, \quad -, \quad :,$$

są to operatory całkowania, różniczkowania, dodawania, odejmowania i dzielenia.

Zupełnie tak samo możemy uważać znak funkcyjny we wzorze $y = f(x)$ za operator, przyporządkowujący każdej wartości x pewną wartość y . Nic nie stoi więc na przeszkodzie, by uważać f w relacji wektorowej (7.1) za operator. By takie ujęcie związku (7.1) uwidocznić też graficznie, piszemy:

$$(7.1a) \quad \vec{v} = T\vec{a},$$

gdzie T jest operatorem, przyporządkowującym każdemu wektorowi $\vec{a}$ pewien wektor $\vec{v}$. Operator liniowy określony jest wówczas zgodnie z (7.2) przez:

$$(7.2a) \quad T(s\vec{a} + t\vec{b}) = sT\vec{a} + tT\vec{b},$$

a składowe wektora $T\vec{a}$ (por. (7.7)) przez:

$$(7.7a) \quad \begin{aligned} (T\vec{a})_x &= T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z, \\ (T\vec{a})_y &= T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z, \\ (T\vec{a})_z &= T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z. \end{aligned}$$

Taki operator liniowy T będziemy nazywać *tensorem*, zgodnie z nomenklaturą teorii względności, a zwłaszcza mechaniki kwantowej. Tą samą nazwą będziemy też oznaczać wielkość fizyczną, odpowiadającą takiemu operatorowi liniowemu. Wielkości $T_{\mu\nu}$ nazywamy *składowymi* lub też *przedstawicielami tensora*. Wektor $T\vec{a}$ możemy uważać za iloczyn tensora T i wektora $\vec{a}$.

§ 8. Tensory symetryczne i antysymetryczne. Dotychczasowe rozważania ważne są też dla dowolnych ukośnokątnych układów wektorów podstawowych $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Odtąd jednak ograniczymy się do układów prostokątnych, by zaledwie nie komplikować dalszych wywodów.

Przede wszystkim podamy definicję tensorów symetrycznych i antysymetrycznych.

$T\bar{a}$ jest wektorem; możemy go więc pomnożyć skalarnie przez drugi wektor $\bar{b}$. Otrzymujemy w ten sposób wielkość skalarną $\bar{b}T\bar{a}$, która jest formą dwuliniową, tzn. liniową względem składowych wektora $\bar{a}$ i wektora $\bar{b}$. Zupełnie tak samo możemy utworzyć $\bar{a}T\bar{b}$. Dla dowolnych $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wyrażenie $\bar{b}T\bar{a}$ będzie w ogólności różne od $\bar{a}T\bar{b}$. Z (7.7a) wnosimy np., że

$$(8.1) \quad \bar{i}T\bar{j} = (T\bar{j})_x = T_{xy}, \quad \bar{j}T\bar{i} = (T\bar{i})_y = T_{yx},$$

a na ogół składowa T_{xy} nie będzie równa składowej T_{yx} .

Równanie (8.1) i podobne dalsze możemy zresztą uważać za definicje składowych tensora.

Jeżeli dla pewnego tensora T spełnione jest równanie

$$(8.2) \quad \bar{b}T\bar{a} = \bar{a}T\bar{b}$$

przy wszelkich $\bar{a}$ i $\bar{b}$, to taki tensor nazywamy *symetrycznym*.

Podobnie nazywamy tensor T *antysymetrycznym* (lub *skośnym*), jeżeli spełnia on relacje

$$(8.3) \quad \bar{b}T\bar{a} = -\bar{a}T\bar{b}.$$

W wypadku tensora symetrycznego macierz (7.8) jego składowych jest symetryczna względem przekątnej, tzn. że $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Przekonujemy się o tym, wstawiając w (8.2) za $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wektory jednostkowe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Otrzymujemy w ten sposób z $\bar{a}T\bar{b}$ poszczególne składowe tensora (por. (8.1)).

Tensor symetryczny ma tylko 6 zasadniczo różnych składowych: 3 leżące na przekątnej, mianowicie T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} , i 3 pozostałe, leżące poza przekątną, ponieważ ze względu na symetrię $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ składowe znajdujące się po jednej stronie przekątnej są równe składowym, położonym symetrycznie do nich po drugiej stronie przekątnej.

Przez takie samo rozumowanie dochodzimy na podstawie (8.3) do równania $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ dla tensora antisymetrycznego. Przy przemianie obu wskaźników składowe zmieniają więc swoje znaki. Dla $\mu = \nu$ wynika stąd, że $T_{\mu\mu} = -T_{\mu\mu}$, czyli $T_{\mu\mu} = 0$. W tensorze antisymetrycznym znikają zatem składowe położone na przekątnej, składowe zaś leżące symetrycznie do przekątnej mają znaki przeciwne, a wartości bezwzględne równe. Tensor antisymetryczny ma więc, tak samo jak wektor, tylko trzy zasadniczo różne składowe.

Jeżeli przyjmiemy

$$T_{xy} = -T_{yx} = -T_z \text{ itd. (przestawienia kołowe),}$$

to otrzymujemy z (7.7a):

$$(8.4) \quad T\bar{a} = \bar{i}(T_{xy}a_x - T_{zx}a_y) + \bar{j}(T_{zx}a_x - T_{xy}a_z) + \bar{k}(T_{xy}a_y - T_{yx}a_x) = \bar{T} \times \bar{a}.$$

Ponieważ to wyrażenie jest wektorem dla każdego wektora $\bar{a}$, przeto możemy stwierdzić, że liczby T_x, T_y, T_z są składowymi pewnego wektora, który oznaczać będziemy symbolem $\bar{T}$. Możemy więc zastąpić mnożenie wektora $\bar{a}$ przez tensor antisymetryczny T mnożeniem wektorowym wektora $\bar{a}$ przez wektor $\bar{T}$. Z tego powodu tensor antisymetryczny nie odgrywa w fizyce klasycznej większej roli.

Jako sumę dwu tensorów T_1 i T_2 określamy taki tensor T , który zastosowany do dowolnego wektora $\bar{a}$ daje w wyniku wektor równy sumie wektorów, jakie otrzymujemy przez działanie T_1 i T_2 wykonane na tym samym wektorze $\bar{a}$, czyli

$$(8.5) \quad T\bar{a} = T_1\bar{a} + T_2\bar{a}.$$

Stąd wynika, że składowe tensora T są równe sumom odpowiednich składowych tensorów T_1 i T_2 . Mnożąc mianowicie (8.5) skalarnie przez $\bar{b}$, mamy

$$\bar{b}T\bar{a} = \bar{b}T_1\bar{a} + \bar{b}T_2\bar{a},$$

a wstawiając tu za $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wektory jednostkowe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, otrzymujemy wypowiedziane twierdzenie na podstawie definicji (8.1) składowych tensora.

Każdy tensor T możemy rozłożyć jednoznacznie na sumę tensora symetrycznego T_s i antisymetrycznego T_a :

$$(8.6) \quad T = T_s + T_a.$$

W celu dowodu mnożymy (8.6) prawostronnie przez wektor $\bar{a}$, a wynik lewostronnie przez wektor $\bar{b}$:

$$(8.7) \quad \bar{b}T\bar{a} = \bar{b}T_s\bar{a} + \bar{b}T_a\bar{a}.$$

Ze względu na (8.2) i (8.3) otrzymujemy następnie:

$$(8.8) \quad \bar{a}T\bar{b} = \bar{a}T_s\bar{b} + \bar{a}T_a\bar{b} = \bar{b}T_s\bar{a} - \bar{b}T_a\bar{a},$$

a z (8.7) i (8.8) ostatecznie:

$$(8.9) \quad \bar{b}T_s\bar{a} = \frac{1}{2}(\bar{b}T\bar{a} + \bar{a}T\bar{b}) \quad \text{ i } \quad \bar{b}T_a\bar{a} = \frac{1}{2}(\bar{b}T\bar{a} - \bar{a}T\bar{b}).$$

Na podstawie definicji (8.1) składowych tensora wynika z (8.9), że składowe tensora symetrycznego i antysymetrycznego dane są jednoznacznie przez macierze:

$$(8.10) \quad \left\| \begin{array}{ccc} T_{xx} & \frac{1}{2}(T_{xy}+T_{yx}) & \frac{1}{2}(T_{xz}+T_{zx}) \\ \frac{1}{2}(T_{yx}+T_{xy}) & T_{yy} & \frac{1}{2}(T_{yz}+T_{zy}) \\ \frac{1}{2}(T_{zx}+T_{xz}) & \frac{1}{2}(T_{zy}+T_{yz}) & T_{zz} \end{array} \right\|$$

i

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}(T_{xy}-T_{yx}) & \frac{1}{2}(T_{xz}-T_{zx}) \\ -\frac{1}{2}(T_{xy}-T_{yx}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{yz}-T_{zy}) \\ -\frac{1}{2}(T_{xz}-T_{zx}) & \frac{1}{2}(T_{yz}-T_{zy}) & 0 \end{array} \right\|.$$

Ponieważ składowe tensora (por. tekst poprzedzający wzór (7.8)) określają go jednoznacznie, więc twierdzenie (8.6) jest udowodnione.

§ 9. Własności tensora symetrycznego. Najbliższym celem następnych rozważań będzie interpretacja geometryczna związku między $\vec{a}$ i $T\vec{a}$ w przypadku tensora symetrycznego T za pomocą tzw. kwadryki tensorowej.

Weźmy pod uwagę wszystkie wektory $\vec{a}$ spełniające relację

$$(9.1) \quad \vec{a}T\vec{a} = F(a_x, a_y, a_z) = C = \text{const.}$$

tj. (w myśl (7.7a)) równanie

$$(9.1a) \quad F(a_x, a_y, a_z) = T_{xx}a_x^2 + T_{yy}a_y^2 + T_{zz}a_z^2 + 2T_{xy}a_xa_y + 2T_{yz}a_ya_z + 2T_{zx}a_zax = C.$$

Widzimy, że końce wektorów $\vec{a}$ leżą na powierzchni drugiego stopnia, która ma swój środek w początku wektorów $\vec{a}$.

Tę powierzchnię nazywamy *kwadryką tensorową*.

Określamy najpierw kierunek wektora $T\vec{a}$. Stwierdzamy na mocy (9.1a) i (7.7a), że

$$(9.2) \quad T\vec{a} = \frac{1}{2} \left(\vec{i} \frac{\partial F}{\partial a_x} + \vec{j} \frac{\partial F}{\partial a_y} + \vec{k} \frac{\partial F}{\partial a_z} \right),$$

tzn. że $T\vec{a}$ jest wektorem równoległym do normalnej $\vec{n}$ do powierzchni F w końcu A wektora $\vec{a}$ (rys. 20). Normalna $\vec{n}$ ma bowiem — jak uczy geometria różniczkowa — taki kierunek, którego cosinusy kierunkowe są proporcjonalne do $\frac{\partial F}{\partial a_x}, \frac{\partial F}{\partial a_y}, \frac{\partial F}{\partial a_z}$. Kierunek ten możemy otrzymać, prowadząc ze środka O kwadryki tensorowej normalną OA' do płaszczyzny stycznej AA' w końcu A wektora $\vec{a}$.

By ponadto wyznaczyć wartość bezwzględną wektora $T\vec{a}$, zauważmy, że według (9.1) i (4.1) jest $\vec{a}T\vec{a} = a_{||} |T\vec{a}| = C$ czyli

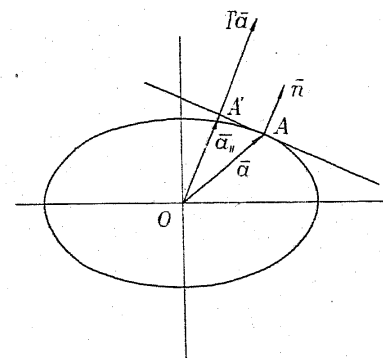
$$(9.3) \quad |T\vec{a}| = \frac{C}{a_{||}}.$$

$|T\vec{a}|$ jest więc odwrotnie proporcjonalne do rzutu $a_{||} = OA'$ (rys. 20) wektora $\vec{a}$ na kierunek normalnej $\vec{n}$.

Należy wyraźnie zaznaczyć, że wzór (9.2) zachodzi tylko dla tensora symetrycznego. Dla tensora niesymetrycznego równanie (9.3) nie wynika z równania (9.1). Te i dalsze nasze rozważania stosują się więc tylko do tensorów symetrycznych.

Co do znaku stałej C , to wobec $C = \vec{a}T\vec{a}$ jest $C > 0$, gdy kąt ϑ między wektorami $\vec{a}$ i $T\vec{a}$ jest ostry, a $C < 0$, gdy jest on rozwarty. Jedną stałą C wystarcza więc w równaniu (9.1) tylko wówczas, gdy ϑ jest dla wszystkich kierunków wektora $\vec{a}$ kątem ostrym albo dla wszystkich kierunków kątem rozwartym. Jeżeli jednak tak nie jest, to musimy dobrać dla kierunków, gdzie ϑ jest kątem ostrym, $C > 0$, dla kierunków zaś, gdzie ϑ jest kątem rozwartym, $C < 0$. Nic nie stoi na przeszkodzie, by C miało w obu wypadkach jedną i tę samą wartość bezwzględną. Wszystkie możliwości uwzględnimy więc, jeżeli w równaniach (9.1) i (9.1a) napiszemy $\pm|C|$ zamiast C . Przykładem tego rodzaju tensorów jest tensor napięć Maxwellowskich (por. § 11, zadanie 4).

Możemy też wartość bezwzględną stałej C dobrać dowolnie, a więc np. przyrównać C do ± 1 . Spowoduje to tylko zmniejsze-



Rys. 20. Konstrukcja wektora $T\vec{a}$ za pomocą kwadryki tensorowej.

nie naszego rys. 20 w stosunku liniowym 1: $\sqrt{|C|}$. Skutek będzie taki sam, jak gdybyśmy podzielili równanie (9.1a) przez $|C|$, a następnie wprowadzili nowe zmienne:

$$a'_x = \frac{a_x}{\sqrt{|C|}}, \quad a'_y = \frac{a_y}{\sqrt{|C|}}, \quad a'_z = \frac{a_z}{\sqrt{|C|}}.$$

Takie przekształcenie nie zmienia kierunku wektora $\bar{a}$, ale nie zmienia też kierunku wektora $T\bar{a}$, ponieważ jego składowe (7.7a) są funkcjami liniowymi zmiennych a_x, a_y, a_z . Widzimy więc, że zmieniają się jedynie wartości bezwzględne obu wektorów w tym samym stosunku 1: $\sqrt{|C|}$, zgodnie z równaniem (7.3), które w przyjętej przez nas symbolice ma postać

$$Ts\bar{a} = sT\bar{a}.$$

W ogólności wektory $\bar{a}$ i $T\bar{a}$ mają różne kierunki. Jak to jednak wynika z geometrycznej konstrukcji wektora $T\bar{a}$ (rys. 20), oba wektory są równoległe, jeżeli wektor $\bar{a}$ leży na jednej z trzech osi głównych kwadryki tensorowej.

Te trzy względem siebie prostopadłe kierunki nazywamy *osiąmi głównymi tensora*.

Oznaczmy przez ξ, η, ζ układ prostokątny, którego osie leżą na osiach głównych kwadryki tensorowej. Wówczas równanie (9.1a) dla kwadryki tensorowej przybierze postać:

$$(9.4) \quad \bar{a}T\bar{a} = T_{\xi\xi}a_\xi^2 + T_{\eta\eta}a_\eta^2 + T_{\zeta\zeta}a_\zeta^2.$$

W układzie ξ, η, ζ muszą bowiem zniknąć składowe tensora o wskaźnikach mieszanych, jak np. $T_{\xi\eta} = T_{\eta\xi}$. Wynika to z (7.7a), przez zastąpienie wskaźników x, y, z wskaźnikami ξ, η, ζ . Jeżeli oś ξ leży na osi głównej, to dla $\bar{a}$ mającego ten kierunek wektor $T\bar{a}$ musi mieć ten sam kierunek. To znaczy, że dla $a_\xi \neq 0$ i $a_\eta = a_\zeta = 0$ musi być

$$(T\bar{a})_\xi = T_{\xi\xi}a_\xi \neq 0, \quad (T\bar{a})_\eta = T_{\eta\xi}a_\xi = 0, \quad (T\bar{a})_\zeta = T_{\zeta\xi}a_\xi = 0.$$

Stąd wnosimy, że $T_{\eta\xi}$ i $T_{\zeta\xi}$ muszą zniknąć.

Dla kwadryki tensorowej (9.4) wektor $T\bar{a}$ przybiera, jak wynika z (7.7a), postać

$$(9.5) \quad T\bar{a} = \bar{i}_1 T_{\xi\xi} a_\xi + \bar{i}_2 T_{\eta\eta} a_\eta + \bar{i}_3 T_{\zeta\zeta} a_\zeta,$$

gdzie $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ są wektorami podstawowymi układu ξ, η, ζ . Jak wiadać z (9.5), wektor $T\bar{a}$ powstaje z wektora $\bar{a}$ w ten sposób, że jego

składowe na osiach głównych, tj. $\bar{i}_1 a_\xi, \bar{i}_2 a_\eta, \bar{i}_3 a_\zeta$, wydłużamy odpowiednio $T_{\xi\xi}, T_{\eta\eta}, T_{\zeta\zeta}$ -krotnie. Właśnie od łacińskiego słowa *tendo, tentendi, tentum* lub poetycznie *tensum* („wydłużać”) pochodzi słowo „tensor”.

W dowolnym układzie odniesienia tensor symetryczny określony jest przez 6 składowych $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. W układzie skierowanym wzdłuż osi głównych występują wprawdzie tylko 3 składowe, ale dla określenia tensora musimy oprócz tego podać jeszcze 3 wielkości (np. kąty), wyznaczające położenie osi głównych. A więc i w tym wypadku tensor symetryczny określony jest przez 6 wielkości.

W ogólności kwadryka tensorowa ma trzy różne osie główne. Jeżeli jednak dwie osie są równe, to przechodzi ona w kwadrykę obrotową. Załóżmy, że np. $T_{\xi\xi} = T_{\eta\eta}$; wówczas z konstrukcji geometrycznej wektora $T\bar{a}$ wynika, że każdemu $\bar{a}$, leżącemu w płaszczyźnie ξ, η , odpowiada $T\bar{a}$ o tym samym kierunku co $\bar{a}$. W płaszczyźnie tej możemy więc nadać osiom głównym dwa dowolne, byle prostopadłe kierunki.

Gdy wszystkie osie główne kwadryki tensorowej są równe, przechodzi ona w kulę. Wówczas musi być $T_{\xi\xi} = T_{\eta\eta} = T_{\zeta\zeta}$ i na mocy (9.5) jest $T\bar{a} = T_{\xi\xi}\bar{a}$, a więc $T\bar{a}$ jest zawsze równoległy do $\bar{a}$. Operator T jest wtedy po prostu czynnikiem liczbowym niezależnym od kierunku. Wówczas możemy przyjąć za kierunki osi głównych dowolne trzy kierunki prostopadłe.

Ważnym zagadnieniem jest wyznaczanie kierunku osi głównych. Dla takiego kierunku wektor $T\bar{a}$ jest równoległy do $\bar{a}$. Mnożąc więc $\bar{a}$ przez odpowiedni skalar λ , musimy otrzymać $T\bar{a}$, czyli

$$(9.6) \quad T\bar{a} = \lambda\bar{a},$$

gdzie λ jest liczbą rzeczywistą. Ze względu na (7.7a) związek (9.6) przedstawia następujący układ równań liniowych jednorodnych:

$$(9.7) \quad \begin{aligned} (T_{xx} - \lambda)a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z &= 0, \\ T_{yx}a_x + (T_{yy} - \lambda)a_y + T_{yz}a_z &= 0, \\ T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + (T_{zz} - \lambda)a_z &= 0. \end{aligned}$$

Jak wiadomo z algebry, układ równań liniowych jednorodnych (9.7) ma tylko wówczas nie znikające rozwiązanie a_x, a_y, a_z , jeżeli znika jego wyznacznik:

$$(9.8) \quad \begin{vmatrix} T_{xx} - \lambda & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} - \lambda & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie to nazywamy *równaniem sekularnym* czyli *wiekowym*. Tak bowiem nazywa się ono w astronomii, gdzie występuje w zagadnieniu ruchu planet dookoła Słońca. Równanie (9.8) jest równaniem algebraicznym 3-go stopnia względem λ . Możemy je napisać w postaci

$$(9.9) \quad -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0,$$

gdzie

$$(9.9a) \quad \begin{aligned} I_1 &= T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xz} \\ T_{zx} & T_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Wszystkie trzy pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ równania (9.8) muszą być rzeczywiste. Dla każdego λ , otrzymujemy z (9.7) pewne wartości dla stosunków $a_x : a_y : a_z$, czyli pewien kierunek wektora $\vec{a}$, który spełnia równanie (9.6), tak że $T\vec{a}_\nu = \lambda_\nu \vec{a}_\nu$. Gdyby którekolwiek λ_ν było liczbą zespoloną, to składowe odpowiedniego wektora $\vec{a}_\nu$ byłyby ze względu na (9.7) też liczbami zespolonymi. Przechodząc w $T\vec{a}_\nu = \lambda_\nu \vec{a}_\nu$ do sprzężonych wartości zespolonych (które oznaczamy gwiazdkami) otrzymujemy: $T\vec{a}_\nu^* = \lambda_\nu^* \vec{a}_\nu^*$. Mnożąc równanie to skalarnie przez $\vec{a}_\nu$, a równanie $T\vec{a}_\nu = \lambda_\nu \vec{a}_\nu$ przez $\vec{a}_\nu^*$, mamy:

$$\vec{a}_\nu T\vec{a}_\nu^* = \lambda_\nu^* \vec{a}_\nu^* \vec{a}_\nu \quad \text{ i } \quad \vec{a}_\nu^* T\vec{a}_\nu = \lambda_\nu \vec{a}_\nu^* \vec{a}_\nu.$$

Ponieważ T jest tensorem symetrycznym, więc $\vec{a}_\nu T\vec{a}_\nu^* = \vec{a}_\nu^* T\vec{a}_\nu$; stąd wynika $\lambda_\nu = \lambda_\nu^*$, a zatem λ_ν jest liczbą rzeczywistą.

Kierunek każdego z trzech wektorów $\vec{a}_\nu$ jest kierunkiem osi głównej, odpowiadającej liczbie λ_ν . W ten sposób rozwiązuje się zadanie wyznaczenia kierunków osi głównych.

Z równaniem (9.6) łączą się jednak również zagadnienia, z którymi dotąd nie spotykaliśmy się; są one związane ze współczynnikami I , równania sekularnego (9.9) i jego pierwiastkami λ_ν . Zauważmy, że pierwiastki λ_ν równania (9.6) mają wartości niezależne od układu odniesienia x, y, z , którego używamy. Są to mianowicie wartości stosunku wektorów $\vec{a}$ i $T\vec{a}$, gdy $\vec{a}$ ma kierunek jednej z osi głównych. Pierwiastki λ_ν są więc — jak to matematycy nazywają — *niezmiennikami* (*invariantami*) zmiany układu odniesienia. Ale też

współczynniki I , nie mogą się zmieniać przy zmianie układu odniesienia, ponieważ jako współczynniki równania algebraicznego (9.9) są one elementarno-symetrycznymi funkcjami pierwiastków λ_ν , a więc są jednoznacznie wyznaczone przez λ_ν .

By podać jeszcze interpretację geometryczną liczb λ_ν , napiszmy (9.8) w układzie ξ, η, ζ , utworzonym z osi głównych kwadryki tensorowej. Ponieważ w tym wypadku znikają składowe tensora nie leżące na przekątnej, więc równanie (9.8) przybiera postać

$$(T_{\xi\xi} - \lambda)(T_{\eta\eta} - \lambda)(T_{\zeta\zeta} - \lambda) = 0.$$

Pierwiastki λ_ν dane są więc przez $T_{\xi\xi}, T_{\eta\eta}, T_{\zeta\zeta}$. Rozwiązanie równania (9.9) określa tym samym wielkości $T_{\xi\xi}, T_{\eta\eta}, T_{\zeta\zeta}$.

Równanie (9.6) przedstawia tak zwane *zagadnienie własne*. W matematyce nazywamy tak każde zagadnienie, w którym idzie o wyznaczenie pewnej wielkości (w danym razie wektora $\vec{a}$), która by się odtwarzała z dokładnością do stałego współczynnika λ , gdy przekształcamy ją za pomocą pewnego operatora (w danym razie operatora T). Współczynnik λ nazywa się *parametrem własnym*. Wartości λ_ν dla których istnieje rozwiązanie zagadnienia własnego, nazywamy *wartościami własnymi*.

Zagadnienia własne występują często już w fizyce klasycznej, np. przy wyznaczaniu mechanicznych (w szczególności akustycznych) i elektromagnetycznych drgań własnych. Zasadnicze wprost znaczenie mają one jednak w nowszej mechanice kwantów.

Z formalno-matematycznego punktu widzenia w równaniu $\vec{b} = T\vec{a}$ możemy za macierz uważać nie tylko T , ale też oba wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Aby można było interpretować $T\vec{a}$ jako iloczyn dwu macierzy¹⁾, wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$ muszą odpowiadać macierze jednokolumnowe:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}.$$

¹⁾ Iloczyn dwu macierzy $\|a_{\mu\sigma}\|$ i $\|\beta_{\sigma\nu}\|$ jest macierzą:

$$\|\gamma_{\mu\nu}\| = \|a_{\mu\sigma}\| \cdot \|\beta_{\sigma\nu}\|,$$

której elementy określone są przez znaną regułę mnożenia wierszy przez kolumny:

$$(9.10) \quad \gamma_{\mu\nu} = a_{\mu 1} \beta_{1\nu} + a_{\mu 2} \beta_{2\nu} + a_{\mu 3} \beta_{3\nu} = \sum_{\sigma=1}^3 a_{\mu\sigma} \beta_{\sigma\nu}.$$

Element leżący w μ -tym wierszu i ν -tej kolumnie iloczynu dwu

Z możliwości takiego przedstawiania wektorów przez macierze korzysta w szerokim zakresie mechanika kwantowa.

ZADANIA. 1. Niech $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ będą dwoma tensorami. Wektor $T^{(1)}\bar{a}$ możemy poddać ponownie operatorowi tensorowemu $T^{(2)}$ otrzymując w ten sposób wektor $\bar{b} = T^{(2)}(T^{(1)}\bar{a})$. Pokazać, że możemy otrzymać ten sam wektor $\bar{b}$ za pomocą pewnego tensora T , którego macierz jest równa iloczynowi macierzy $T^{(2)}$ i $T^{(1)}$. T nazywamy *iloczynem tensorów* $T^{(2)}$ i $T^{(1)}$ i piszemy symbolicznie $T = T^{(2)} T^{(1)}$.

Stwierdzić, że w ogólności $T^{(2)} T^{(1)} \neq T^{(1)} T^{(2)}$.

Rozwiązanie. W równości $\bar{b} = T^{(2)}(T^{(1)}\bar{a})$ możemy zastąpić macierzami wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oraz tensory $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$. Ponieważ mnożenie macierzy podlega prawu łączności, więc możemy tej równości macierzowej nadać postać $\bar{b} = (T^{(2)} T^{(1)})\bar{a}$. Iloczyn macierzy $T^{(2)}$ i $T^{(1)}$ daje nam przy tym macierz T , której elementy otrzymujemy za pomocą reguły podanej na str. 41 w odnośniku. Ponieważ mnożenie macierzy nie podlega prawu przemienności, przeto $T^{(2)} T^{(1)} \neq T^{(1)} T^{(2)}$.

2. Niech T będzie tensorem, którego macierz jest symetryczna, a więc spełnia warunek $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Pokazać, że T jest tensorem symetrycznym w sensie definicji $\bar{b}T\bar{a} = \bar{a}T\bar{b}$.

Rozwiązanie. Ponieważ macierz tensora T jest symetryczna, więc ma on osie główne ξ, η, ζ . Możemy zatem posługiwać się układem odniesienia, skierowanym według tych osi. Na mocy (9.5) i równości $\bar{b} = \bar{i}_1 b_\xi + \bar{i}_2 b_\eta + \bar{i}_3 b_\zeta$ otrzymujemy wówczas równanie

$$\bar{b}T\bar{a} = b_\xi T_{\xi\xi} a_\xi + b_\eta T_{\eta\eta} a_\eta + b_\zeta T_{\zeta\zeta} a_\zeta$$

symetryczne we współrzędnych wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$, tak że przedstawia ono równocześnie i $\bar{a}T\bar{b}$.

3. Pokazać, że tensor $T = T^{(2)} T^{(1)}$ jest symetryczny, jeśli tensory $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ są symetryczne i przemienne (tzn. jeśli $T^{(2)} T^{(1)} = T^{(1)} T^{(2)}$).

macierzy otrzymujemy więc, mnożąc kolejno elementy μ -tego wiersza pierwszej macierzy przez elementy ν -tej kolumny drugiej macierzy i dodając tak otrzymane iloczyny. By można było utworzyć taki iloczyn, ilość kolumn macierzy $\|\alpha_{\mu\sigma}\|$ musi być równa ilości wierszy macierzy $\|\beta_{\sigma\nu}\|$. Macierz, przedstawiająca iloczyn, ma tyle wierszy co macierz $\|\alpha_{\mu\sigma}\|$, a tyle kolumn co $\|\beta_{\sigma\nu}\|$.

Rozwiązanie. Używając liczb 1, 2, 3 zamiast x, y, z jako wskaźników, otrzymujemy z $T = T^{(2)} T^{(1)}$ związek $T_{\mu\nu} = (T^{(2)} T^{(1)})_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 T_{\mu i}^{(2)} T_{i\nu}^{(1)}$. Ponieważ $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ są tensorami symetrycznymi, więc

$$T_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 T_{\mu i}^{(1)} T_{i\nu}^{(2)} = (T^{(1)} T^{(2)})_{\nu\mu},$$

a stąd na podstawie przemienności $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$:

$$T_{\mu\nu} = (T^{(2)} T^{(1)})_{\nu\mu} = T_{\nu\mu}.$$

4. Dowieść, że jeśli tensory symetryczne $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ są przemienne i wartości własne tensora $T^{(1)}$ są wszystkie różne, to

1° tensor $T^{(2)}$ ma te same osie główne co $T^{(1)}$,

2° te same osie główne ma też tensor $T = T^{(1)} T^{(2)} = T^{(2)} T^{(1)}$, a jego wartości własne dane są przez iloczyny odpowiednich wartości własnych tensorów $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$.

Rozwiązanie. 1° Z przemienności tensorów $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ wynika, że $(T^{(1)} T^{(2)})_{\mu\nu} = (T^{(2)} T^{(1)})_{\mu\nu}$ tzn.

$$\sum_{i=1}^3 T_{\mu i}^{(1)} T_{i\nu}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 T_{\mu i}^{(2)} T_{i\nu}^{(1)}.$$

Niech osie układu współrzędnych leżą na osiach głównych tensora $T^{(1)}$. Wtedy $T_{lm}^{(1)} = 0$, dla $l \neq m$. Powyższe równanie wybiera więc postać: $T_{\mu\mu}^{(1)} T_{\mu\nu}^{(2)} = T_{\mu\nu}^{(2)} T_{\mu\mu}^{(1)}$ czyli $T_{\mu\nu}^{(2)} (T_{\mu\mu}^{(1)} - T_{\nu\nu}^{(1)}) = 0$. Ponieważ $T_{\mu\mu}^{(1)} \neq T_{\nu\nu}^{(1)}$, gdy $\mu \neq \nu$, więc $T_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ dla $\mu \neq \nu$.

2° W tym układzie współrzędnych otrzymujemy dla składowych tensora T wyrażenie $T_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 T_{\mu i}^{(1)} T_{i\nu}^{(2)}$. Aby $T_{\mu\nu}$ nie zniknęło, musi więc być $\mu = i$ oraz $i = \nu$, czyli $T_{\mu\mu} = T_{\mu\mu}^{(1)} T_{\mu\mu}^{(2)}$. Wszystkie inne $T_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) znikają.

5. Dowieść, że jeśli dwa tensory $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ są symetryczne i ich osie główne mają te same kierunki, to tensory te są przemienne.

Rozwiązanie wynika z rozważań podobnych jak w rozwiązaniu zadania 4.

6. Okazać, że gdy dwa tensory symetryczne $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ są przemienne, to wyrażenie $\sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 T_{\mu\nu}^{(1)} T_{\mu\nu}^{(2)}$ jest niezmiennikiem.

Rozwiązanie. Obliczamy niezmiennik I_1 (p. (9.9a)) tensora $T = T^{(1)} T^{(2)}$:

$$I_1 = \sum_{\mu=1}^3 T_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^3 \left(\sum_{\nu=1}^3 T_{\mu\nu}^{(1)} T_{\nu\mu}^{(2)} \right) = \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 T_{\mu\nu}^{(1)} T_{\mu\nu}^{(2)}.$$

7. Zakładając, że T jest tensorem symetrycznym, którego wartości własne $T_{\xi\xi}, T_{\eta\eta}, T_{\zeta\zeta}$ nie znikają, dowieść, że:

1° istnieje tensor T^{-1} określony równaniem $T^{-1}T = 1$, gdzie przedstawienie operatora 1 dane jest przez macierz jednostkową o elementach $\delta_{\mu\nu} = 1$ dla $\mu = \nu$ i $\delta_{\mu\nu} = 0$ dla $\mu \neq \nu$,

2° osie główne tensora T^{-1} mają te same kierunki, co osie główne tensora T ,

3° wartości własne tensora T^{-1} równe są odwrotnościom wartości własnych tensora T ,

4° zachodzi też równanie $TT^{-1} = 1$.

Rozwiązanie. $T^{-1}T = 1$ znaczy, że między składowymi obu tych tensorów zachodzi związek

$$(T^{-1}T)_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 T_{\mu i}^{-1} T_{i\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

który w układzie odniesienia, określonym przez osie główne tensora T , ma postać $T^{-1}_{\mu\nu} T_{\nu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Składowe tensora T^{-1} w tym układzie odniesienia są więc określone przez $T^{-1}_{\nu\nu} = \frac{1}{T_{\nu\nu}}$ i $T^{-1}_{\mu\nu} = 0$ dla $\mu \neq \nu$. Tym samym stwierdziliśmy prawdziwość tez 1°, 2° i 3°. Aby dowieść, że również teza 4° jest prawdziwa, obliczamy w tymże układzie odniesienia składowe tensora TT^{-1} :

$$(TT^{-1})_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 T_{\mu i} T_{i\nu}^{-1} = \delta_{\mu\nu}.$$

8. Pokazać, że jeśli $\bar{v} = T\bar{r}$, to $\bar{r} = T^{-1}\bar{v}$ i, na odwrót, że z równania $\bar{r} = T^{-1}\bar{v}$ wynika $\bar{v} = T\bar{r}$.

Rozwiązanie. Mnożąc wektor $\bar{v} = T\bar{r}$ lewostronnie przez T^{-1} , otrzymujemy ze względu na $T^{-1}T = 1$ równanie $T^{-1}\bar{v} = T^{-1}T\bar{r} = \bar{r}$.

9. Udowodnić, że jeśli $\bar{v} = T\bar{r}$, to z $\bar{r}T\bar{r} = C$ wynika $\bar{v}T^{-1}\bar{v} = C$. Do jakiego celu używać można kwadryki tensorowej $\bar{v}T^{-1}\bar{v} = C$? Jakie są jej osie główne?

Rozwiązanie. Z uwagi na $\bar{v} = T\bar{r}$ i $\bar{r} = T^{-1}\bar{v}$ otrzymujemy

$$\bar{r}\bar{v} = \bar{r}T\bar{r} = \bar{v}\bar{r} = \bar{v}T^{-1}\bar{v} = C.$$

Jeśli więc koniec wektora $\bar{r}$ leży na kwadryce tensorowej tensora T , to koniec wektora $\bar{v}$ leży na kwadryce tensorowej tensora T^{-1} ; zarazem obie kwadryki odpowiadają tej samej stałej C . Poza tym wektor $\bar{v} = T\bar{r}$ jest prostopadły do płaszczyzny stycznej kwadryki $\bar{r}T\bar{r} = C$ w punkcie $\bar{r}$, a wektor $\bar{r} = T^{-1}\bar{v}$ jest prostopadły do płaszczyzny stycznej kwadryki $\bar{v}T^{-1}\bar{v} = C$ w punkcie $\bar{v}$.

W układzie współrzędnych ξ, η, ζ , leżącym na osiach głównych tensorów T i T^{-1} , kwadryki tensorowe $\bar{r}T\bar{r} = C$ i $\bar{v}T^{-1}\bar{v} = C$ określone są równaniami

$$T_{\xi\xi} r_{\xi}^2 + T_{\eta\eta} r_{\eta}^2 + T_{\zeta\zeta} r_{\zeta}^2 = C \quad \text{i} \quad \frac{v_{\xi}^2}{T_{\xi\xi}} + \frac{v_{\eta}^2}{T_{\eta\eta}} + \frac{v_{\zeta}^2}{T_{\zeta\zeta}} = C,$$

tak że ich półosie równe są

$$|C/T_{\xi\xi}|^{1/2}, |C/T_{\eta\eta}|^{1/2}, |C/T_{\zeta\zeta}|^{1/2} \quad \text{i} \quad |CT_{\xi\xi}|^{1/2}, |CT_{\eta\eta}|^{1/2}, |CT_{\zeta\zeta}|^{1/2}.$$

Znaczy to, że np. największa oś kwadryki T ma ten sam kierunek, co najmniejsza oś kwadryki T^{-1} .

10. Wektory $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$ są rozwiązaniami zagadnień własnych $T\bar{a}_1 = \lambda_1\bar{a}_1$ i $T\bar{a}_2 = \lambda_2\bar{a}_2$. Dowieść rachunkowo, że przy $\lambda_1 \neq \lambda_2$ wektory $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$ są do siebie prostopadłe.

Rozwiązanie. Mnożąc skalarnie $T\bar{a}_1 = \lambda_1\bar{a}_1$ przez $\bar{a}_2$, a $T\bar{a}_2 = \lambda_2\bar{a}_2$ przez $\bar{a}_1$, otrzymujemy:

$$\bar{a}_2 T \bar{a}_1 = \lambda_1 \bar{a}_1 \bar{a}_2,$$

$$\bar{a}_1 T \bar{a}_2 = \lambda_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2.$$

Ze względu na to, że T jest tensorem symetrycznym, mamy jednak $\bar{a}_2 T \bar{a}_1 = \bar{a}_1 T \bar{a}_2 = 0$ czyli $(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{a}_1 \bar{a}_2 = 0$. Z uwagi na $\lambda_1 \neq \lambda_2$ wynika stąd, że $\bar{a}_1 \bar{a}_2 = 0$, co dowodzi prostopadłości wektorów $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$.

Głównym celem wszystkich prawie powyższych zadań jest wprowadzenie czytelnika w zagadnienia algebry tensorów, z którymi spotka się on w postaci uogólnionej w nowszej teorii kwantów. Dalsze zadania z algebry tensorów, odnoszące się już do tensorów specjalnych, dajemy w § 11, ponieważ dopiero tam zapoznamy się z odpowiednimi przykładami.

§ 10. Zmiana układu współrzędnych. W fizyce spotykamy się często z zadaniem przejścia od jednego układu współrzędnych, danego przez wektory podstawowe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, do innego, określonego przez wektory podstawowe $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$. Położenie układu „kreskowanego” względem „niekreskowanego” jest określone, jeżeli dane

jest położenie wektorów podstawowych kreskowanych $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ w układzie niekreskowanym:

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \vec{i}' &= a_{11} \vec{i} + a_{12} \vec{j} + a_{13} \vec{k}, \\ \vec{j}' &= a_{21} \vec{i} + a_{22} \vec{j} + a_{23} \vec{k}, \\ \vec{k}' &= a_{31} \vec{i} + a_{32} \vec{j} + a_{33} \vec{k}. \end{aligned}$$

Przy założeniu, że oba układy współrzędnych są prostokątne współczynniki $a_{\mu\nu}$ przekształcenia (10.1) mają znaczenie cosinusów kątów między osiami obu układów (*cosinusy kierunkowe*). Mnożąc np. drugie równanie (10.1) skalarnie przez $\vec{i}$, otrzymujemy

$$(10.2) \quad \vec{j}' \vec{i} = a_{21},$$

gdzie $\vec{j}' \vec{i}$ jest według definicji iloczynu skalarnego cosinusem kąta między osią $\vec{i}$ układu niekreskowanego a osią $\vec{j}'$ układu kreskowanego. Widzimy zatem, że pierwszy wskaźnik w $a_{\mu\nu}$ odpowiada osiom układu kreskowanego, a drugi – niekreskowanego.

Wyznacznik układu równań (10.1) równy jest +1. Na mocy bowiem (6.4) jest on równy $\vec{i}'(\vec{j}' \times \vec{k}')$, czyli objętości kostki rozpiętej na wektorach jednostkowych $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, tworzących układ prawoskrętny.

Możemy zatem rozwiązać układ równań (10.1) względem $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a'_{11} \vec{i}' + a'_{12} \vec{j}' + a'_{13} \vec{k}', \\ \vec{j} &= a'_{21} \vec{i}' + a'_{22} \vec{j}' + a'_{23} \vec{k}', \\ \vec{k} &= a'_{31} \vec{i}' + a'_{32} \vec{j}' + a'_{33} \vec{k}'. \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć np. a'_{12} , mnożymy pierwsze równanie skalarnie przez $\vec{j}'$ i otrzymujemy

$$(10.3) \quad \vec{j}' \vec{i} = a'_{12}.$$

Z (10.2) i (10.3) wynika, że $a_{21} = a'_{12}$. W ten sposób możemy okazać, że w ogólności $a'_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, a więc że odwrócenie przekształcenia (10.1) ma postać

$$(10.1a) \quad \begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}' a_{11} + \vec{j}' a_{21} + \vec{k}' a_{31}, \\ \vec{j} &= \vec{i}' a_{12} + \vec{j}' a_{22} + \vec{k}' a_{32}, \\ \vec{k} &= \vec{i}' a_{13} + \vec{j}' a_{23} + \vec{k}' a_{33}. \end{aligned}$$

Układ równań (10.1a) nazywamy *transpozycją przekształcenia* (10.1). Jeżeli mianowicie napiszemy współczynniki przekształceń (10.1) i (10.1a) w postaci macierzy

$$(10.4a) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad (10.4b) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

to każda z nich jest transpozycją pozostałej, tzn. przechodzi w nią przy zamianie obu wskaźników, a więc przy zamianie wierszy i kolumn. Przy tym zachowują swe miejsca współczynniki $a_{\mu\nu}$ z dwoma równymi wskaźnikami, leżące na przekątnej; natomiast każdy współczynnik $a_{\mu\nu}$ z dwoma różnymi wskaźnikami zamienia swe miejsce ze współczynnikiem $a_{\nu\mu}$.

Mnożąc (10.1) i (10.1a) skalarnie przez $\vec{a}$, widzimy, że składowe wektora $\vec{a}$ podlegają przekształceniom:

$$(10.5) \quad \begin{aligned} a_{x'} &= a_{11} a_x + a_{12} a_y + a_{13} a_z, \\ a_{y'} &= a_{21} a_x + a_{22} a_y + a_{23} a_z, \\ a_{z'} &= a_{31} a_x + a_{32} a_y + a_{33} a_z; \\ (10.5a) \quad a_x &= a_{x'} a_{11} + a_{y'} a_{21} + a_{z'} a_{31}, \\ a_y &= a_{x'} a_{12} + a_{y'} a_{22} + a_{z'} a_{32}, \\ a_z &= a_{x'} a_{13} + a_{y'} a_{23} + a_{z'} a_{33}. \end{aligned}$$

Porównując (10.1) i (10.1a) z (10.5) i (10.5a), spostrzegamy, że składowe wektorów przekształcają się tak samo jak wektory podstawowe.

Miedzy dziewięcioma cosinusami kierunkowymi $a_{\mu\nu}$ zachodzą pewne związki. Gdy obliczymy kwadraty i mieszane iloczyny skalarnie wektorów jednostkowych $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, otrzymamy (z uwagi na to, że równości (6.1) zachodzą nie tylko dla niekreskowanych, ale też dla kreskowanych wektorów podstawowych) następujące związki dla współczynników $a_{\mu\nu}$:

$$(10.6) \quad a_{\nu 1}^2 + a_{\nu 2}^2 + a_{\nu 3}^2 = 1,$$

$$(10.7) \quad a_{\mu 1} a_{\nu 1} + a_{\mu 2} a_{\nu 2} + a_{\mu 3} a_{\nu 3} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Za pomocą symbolu Kroneckera

$$(10.8) \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu = \nu, \\ 0 & \text{dla } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

możemy oba związki (10.6) i (10.7) ściągnąć w jeden:

$$(10.9) \quad a_{\mu 1} a_{\nu 1} + a_{\mu 2} a_{\nu 2} + a_{\mu 3} a_{\nu 3} = \delta_{\mu \nu}.$$

Równania (10.6) stwierdzają, że każdy wektor jednostkowy kreskowany ma wartość bezwzględną 1, czyli jest — jak powiadamy — *unormowany*. Dlatego nazywamy równania (10.6) *warunkami unormowania*.

Natomiast równania (10.7) wyrażają, że dwa różne wektory jednostkowe kreskowane są względem siebie prostopadłe. Są to *warunki ortogonalności*.

Z (10.1a) wnioskujemy zupełnie tak samo jak z (10.1), że dla wektorów podstawowych niekreskowanych zachodzą następujące warunki unormowania i ortogonalności:

$$(10.9a) \quad a_{1\mu} a_{1\nu} + a_{2\mu} a_{2\nu} + a_{3\mu} a_{3\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Warunki te powstają formalnie z (10.9) przez przestawienie obu wskaźników we współczynnikach $a_{\mu\nu}$.

Przekształcenie, które przeprowadza jeden prostokątny układ współrzędnych w drugi, nazywamy *przekształceniem ortogonalnym*.

Zawsze możemy sobie pomyśleć, że powstało ono kinematycznie przez obrót.

Jeżeli pewna wielkość nie zmienia swej wartości liczbowej przy pewnych przekształceniach, to nazywamy ją *niezmiennikiem* tych przekształceń (por. § 9, str. 40). Otrzymujemy np. tę samą wartość liczbową dla $\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ niezależnie od tego, jakiego układu ortogonalnego używamy do obliczenia $\vec{a}^2$. Jako dalsze przykłady niezmienników przekształceń ortogonalnych przytoczyć można następujące wielkości skalarne:

$$\vec{a}\vec{b}, \quad \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}), \quad (\vec{a} \times \vec{b})^2$$

i wiele innych.

Formalnie dochodzimy do przekształcenia (10.5), przekształcając wektor $\vec{a}$ za pomocą tensora S o macierzy (10.4a). Ten tensor różni się od tensora *właściwego*, określonego w § 7, tym, że tensor właściwy przyporządkowuje pewnemu wektorowi $\vec{a}$ drugi wektor $\vec{b}$ w tym samym układzie współrzędnych, gdy tymczasem tensor S przyporządkowuje wektorowi $\vec{a}$ położenie tegoż wektora $\vec{a}$, lecz w innym układzie współrzędnych.

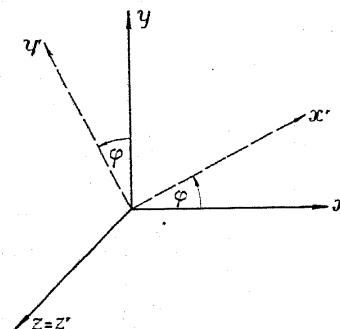
ZADANIA. 1. Związki między cosinusami kierunkowymi. Dowieść, że każdy wyraz $a_{\mu\nu}$ w wyznaczniku, odpowiada-

jącym macierzy (10.4a), równy jest należącemu do niego minorowi¹⁾; np.

$$a_{31} = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}.$$

Rozwiązanie. Zastępujemy w równości $\vec{i}' \times \vec{j}' = \vec{k}'$ i w dwu dalszych równościach otrzymanych z niej przez przestawienia kołowe (por. (6.2)) wektory jednostkowe kreskowane przez niekreskowane (za pomocą wzorów (10.1)), a następnie porządkujemy otrzymane wzory według wektorów niekreskowanych.

2. Obrót dokoła osi układu współrzędnych. Obliczyć cosinusy kierunkowe $a_{\mu\nu}$ dla obrotu układu prostokątnego o kąt φ dokoła osi z .



Rys. 21. Obrót dokoła osi z o kąt φ .

Rozwiązanie. Z rys. 21 od-
czytać możemy kąty między poszczególnymi osiami układu współrzędnych kreskowanych i niekreskowanych. Stąd możemy obliczyć odpowiednie cosinusy kierunkowe. Jak wynika z (10.1), mamy

$$\vec{i}'\vec{i} = a_{11}, \quad \vec{i}'\vec{j} = a_{12}, \quad \vec{i}'\vec{k} = a_{13}, \quad \vec{j}'\vec{i} = a_{21} \quad \text{itd.};$$

a więc macierz cosinusów kierunkowych (10.4a) ma następującą postać:

$$(10.10) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Składanie przekształceń współrzędnych. Za pomocą przekształcenia (10.1) przeprowadzono układ współrzędnych o wektorach podstawowych $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ w układ współrzędnych o wektorach podstawowych $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$. Następnie, za pomocą przekształcenia

¹⁾ Minor (czyli podwyznacznik) elementu $a_{\mu\nu}$ w wyznaczniku $|a_{\mu\nu}|$ równy jest pomnożonemu przez $(-1)^{\mu+\nu}$ wyznacznikowi, jaki otrzymujemy, skreślając w wyznaczniku $|a_{\mu\nu}|$ elementy μ -tego wiersza i ν -tej kolumny.

$$(10.11) \quad \begin{aligned} \bar{i}'' &= a'_{11} \bar{i}' + a'_{12} \bar{j}' + a'_{13} \bar{k}', \\ \bar{j}'' &= a'_{21} \bar{i}' + a'_{22} \bar{j}' + a'_{23} \bar{k}', \\ \bar{k}'' &= a'_{31} \bar{i}' + a'_{32} \bar{j}' + a'_{33} \bar{k}', \end{aligned}$$

zastąpiono układ kreskowany przez układ o wektorach podstawowych $\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$. Wyznaczyć przekształcenie liniowe, które przeprowadza bezpośrednio układ niekreskowany w układ dwukrotnie kreskowany.

Rozwiązanie. Jeśli wektory podstawowe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ i $\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$ uważamy za elementy macierzy jednokolumnowych, to możemy napisać związki (10.11) i (10.1) w postaci:

$$\begin{pmatrix} \bar{i}'' \\ \bar{j}'' \\ \bar{k}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \\ \bar{k}' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \\ \bar{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{pmatrix} \bar{i}'' \\ \bar{j}'' \\ \bar{k}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix},$$

czyli

$$\begin{pmatrix} \bar{i}'' \\ \bar{j}'' \\ \bar{k}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix},$$

gdzie macierz $\|a_{\mu\nu}^0\|$ przekształcenia, przeprowadzającego układ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ wprost w układ $\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$, równa jest iloczynowi obu macierzy $\|a'_{\mu\sigma}\|$ i $\|a_{\sigma\nu}\|$:

$$(10.12) \quad \|a_{\mu\nu}^0\| = \|a'_{\mu\sigma}\| \cdot \|a_{\sigma\nu}\|.$$

Współczynniki $a_{\mu\nu}^0$ są więc określone przez wzór:

$$a_{\mu\nu}^0 = a'_{\mu 1} a_{1\nu} + a'_{\mu 2} a_{2\nu} + a'_{\mu 3} a_{3\nu} = \sum_{\sigma=1}^3 a'_{\mu\sigma} a_{\sigma\nu},$$

jak to wynika z (9.10). Ponieważ mnożenie macierzy nie czyni za-
dość prawu przemienności, więc kolejność macierzy w iloczynie

(10.12) nie jest obojętna. Macierze występują w iloczynie w tej kolejności, w jakiej stosujemy przekształcenia, jeżeli czytamy iloczyn od strony prawej ku lewej (a więc na odwrót niż w zwykłym czytaniu). Regułę tę możemy uogólnić bezpośrednio na przypadek kilku kolejnych przekształceń.

Jeżeli przekształcenie współrzędnych interpretujemy jako obrót układu odniesienia, to musimy stwierdzić, że wynik dwu kolejnych obrotów zależy od kolejności, w jakiej je wykonywamy. Zatem dodawanie dwu obrotów również nie podlega prawu przemienności. Dlatego obrotów nie możemy uważać za wektory (por. § 1, str. 2).

4. Kąty Eulera. Układ o wektorach podstawowych $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ nazywamy *układem pierwotnym*, a układ o wektorach $\bar{i}^0, \bar{j}^0, \bar{k}^0$ — *układem obróconym*. Niech OW oznacza linię węzłów, która określona jest przez przecięcie się płaszczyzny $\bar{i}, \bar{j}$ z płaszczyzną $\bar{i}^0, \bar{j}^0$. Kąty Eulera są wówczas następujące:

φ między $\bar{i}$ a OW , tj. między osią x układu pierwotnego a linią węzłów,

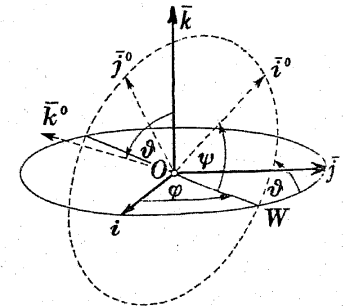
ψ między OW a $\bar{i}^0$, tj. między linią węzłów a osią x układu obróconego,

ϑ między $\bar{k}$ a $\bar{k}^0$, tj. między osiami z układów pierwotnego i obróconego.

Wszystkie kąty liczymy dodatnio w kierunkach oznaczonych na rys. 22.

Wyrazić elementy macierzy przekształcenia przez kąty Eulera φ, ψ, ϑ .

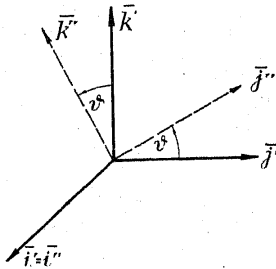
Rozwiązanie można znaleźć na podstawie rozwiązań zadań 2 i 3, składając obrót całkowity z trzech obrotów o kąty φ, ψ, ϑ . Obrót przeprowadzający układ współrzędnych $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ w układ współrzędnych $\bar{i}^0, \bar{j}^0, \bar{k}^0$, rozkładamy na trzy kolejne obroty, odbywające się za każdym razem dokoła jednej z osi chwilowego układu współrzędnych. Najpierw przeprowadzamy układ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ przez obrót o kąt φ dokoła osi z w układ $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$. Współczynniki $a_{\mu\nu}$, odpowiadające temu obrotowi, wyznaczone zostały w zadaniu 2. Następnie obracamy



Rys. 22. Kąty Eulera φ, ψ, ϑ .

układ $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ o kąt ϑ dookoła osi $\bar{i}'$ i przeprowadzamy go w ten sposób w układ $\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$. Ostatecznie doprowadzamy ten układ do położenia końcowego $\bar{i}^0, \bar{j}^0, \bar{k}^0$ przez obrót dookoła osi $\bar{k}''$ o kąt ψ .

Z rys. 23 możemy odczytać cosinusy kierunkowe $\alpha'_{\mu\nu}$, odpowiadające obrotowi dookoła osi $\bar{i}'$. W ten sposób otrzymujemy macierz:



$$\| \alpha'_{\mu\nu} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix}.$$

Rys. 23. Obrót dookoła osi $\bar{i}'$ o kąt ϑ .

Cosinusy kierunkowe $\alpha''_{\mu\nu}$, pośredniczące przy przejściu od układu $\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$ do układu końcowego $\bar{i}^0, \bar{j}^0, \bar{k}^0$, odpowiadają obrotowi dookoła osi $\bar{k}''$ i określone są przez wzory (10.10), jeżeli zastąpimy w nich φ przez ψ :

$$\| \alpha''_{\mu\nu} \| = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Macierz, odpowiadająca całkowitemu obrotowi, równa jest według zadania 3 iloczynowi:

$$\| \alpha^0_{\mu\nu} \| = \| \alpha'_{\mu\nu} \| \cdot \| \alpha''_{\mu\nu} \| \cdot \| \alpha_{\mu\nu} \|,$$

jeżeli przez $\| \alpha_{\mu\nu} \|$ oznaczymy macierz (10.10). Najpierw obliczamy:

$$\| \alpha'_{\mu\nu} \| \cdot \| \alpha_{\mu\nu} \| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & -\cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix}.$$

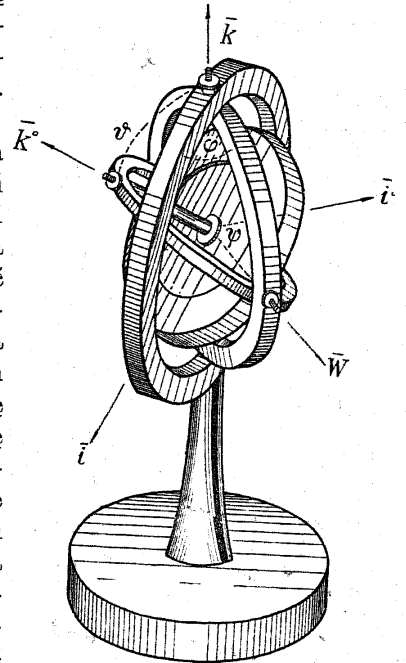
Mnożąc tę macierz przez $\| \alpha'_{\mu\nu} \|$, otrzymujemy ostatecznie dla cosinusów kierunkowych $\alpha^0_{\mu\nu}$ następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned} \alpha^0_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ \alpha^0_{12} &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ \alpha^0_{13} &= \sin \psi \sin \vartheta, \\ \alpha^0_{21} &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \alpha^0_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \alpha^0_{23} &= \cos \psi \sin \vartheta, \\ \alpha^0_{31} &= \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \alpha^0_{32} &= -\cos \varphi \sin \vartheta, \\ \alpha^0_{33} &= \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Trzy użyte przez nas obroty są to obroty obu ruchomych pierścieni oraz krążka giroskopu, znajdującego się w zawieszeniu Cardana (rys. 24), jeżeli wykonujemy obroty te z położenia początkowego, w którym znajdują się oba pierścienie ruchome i oś $\bar{i}^0$, leżąca w krążku giroskopu, w płaszczyźnie pierścienia nieruchomego.

§ 11. Pojęcie wektora i tensora z punktu widzenia przekształceń układów współrzędnych. Wykład rachunku wektorowego oparliśmy na tym, że wektory można wyobrażać sobie w postaci strzałek. Ten poglądowo-geometryczny punkt widzenia odpowiada w zupełności nawykowi myślowym fizyka, zajmującego się fizyką klasyczną. Student musi się więc przede wszystkim z nim zapoznać i przyswoić sobie dokładnie ten sposób myślenia. Jednakże ten poglądowy sposób przedstawiania wektorów ma swoją wadę, mianowicie nie daje się on uogólnić i dostosować do wymogów nowszej, bardziej abstrakcyjnej fizyki.

Podstawą do takiego uogólnienia jest przejście od poglądowo-



Rys. 24. Giroskop w zawieszeniu Cardana (Według Weber-Gans, Repertorium der Physik).

geometrycznego do abstrakcyjno-analitycznego sposobu myślenia przez zastąpienie strzałki geometrycznej jej składowymi.

Ta własność strzałki, że zachowuje ona swe położenie w przestrzeni przy przejściu od układu niekreskowanego do układu kreskowanego współrzędnych ortogonalnych, znajduje swój wyraz analityczny w tym, że składowe strzałki przekształcają się według wzoru (10.5).

Dla stwierdzenia tego, że pewna trójka wielkości b_x, b_y, b_z składa się ze współrzędnych wektora, możemy również posługiwać się niezmienniczością iloczynu skalarnego względem przekształceń ortogonalnych:

$$(11.1) \quad \bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_x' b_x' + a_y' b_y' + a_z' b_z'.$$

Jeżeli trójka wielkości b_x, b_y, b_z zachowuje się przy tych przekształceniach tak, że dla wektora $\bar{a}$, dowolnego co do kierunku i wielkości, wyrażenie dwuliniowe (11.1) nie ulega zmianie, to z tego wynika, że możemy uważać tę trójkę wielkości za składowe pewnego wektora $\bar{b}$. Gdy bowiem wyrazimy w (11.1) składowe a_x, a_y, a_z przez (10.5a), to zobaczymy (z uwagi na to, że wielkości a_x', a_y', a_z' są dane dowolnie), że b_x, b_y, b_z i b_x', b_y', b_z' przekształcają się według (10.5), a więc przedstawiają wektor.

Zupełnie podobnie, dla rozpoznania, czy dana wielkość jest tensorem, miarodajny jest sposób, w jaki przekształcają się składowe tej wielkości (por. zadanie 5). Możemy wnioskować jednak również z niezmienniczości wyrażenia $\bar{b}T\bar{a}$ lub specjalnie dla tensora symetrycznego z wyrażenia $\bar{a}T\bar{a}$ (por. (9.1a)), że dane wielkości $T_{\mu\nu}$ są składowymi tensora. Wywód wzorów przekształceniowych w zadaniu 5 opiera się właściwie na niezmienniczości wyrażenia $\bar{b}T\bar{a}$.

T jest tensorem również wtedy, gdy przy wszelkich przekształceniach układów współrzędnych ortogonalnych i dla wszelkich wektorów $\bar{a}$ wielkość $\bar{b} = T\bar{a}$ przekształca się jak wektor. Z takim stanem rzeczy mamy do czynienia we wszystkich przypadkach, w których wektory $\bar{b}$ i $\bar{a}$ związane są ze sobą operacjami wektorowymi i to w ten sposób, że składowe wektora $\bar{a}$ występują w tych operacjach liniowo-jednorodnie.

PRZYKŁADY. 1. $\bar{b} = T\bar{a} = \bar{T} \times \bar{a}$. Tensor T , określony przez wektor $\bar{T}$, jest antysymetryczny (por. (8.4)).

2. Wzór

$$(11.2) \quad \bar{b} = T\bar{a} = \sum_{\nu} m_{\nu} \bar{r}_{\nu} \times (\bar{a} \times \bar{r}_{\nu})$$

określa w mechanice *tensor momentu bezwładności* dla układu punktów materialnych o masach m_{ν} . W tym wzorze $\bar{r}_{\nu}$ oznacza wektor, tzw. *wektor wodzący* (por. § 12), zaczepiony w stałym punkcie przestrzeni O (dla którego obliczamy właśnie tensor bezwładności) i sięgający do punktu materialnego z masą m_{ν} . Jeżeli $\bar{a}$ jest wektorem prędkości kątowej (por. § 12), to $\bar{b}$ jest momentem pędu.

3. Niech

$$(11.3) \quad \bar{b} = T\bar{a} = 2\bar{v}(\psi\bar{v} \cdot \bar{a}) - \bar{a}\psi v^2,$$

gdzie ψ jest skalar, a $\bar{v}$ — wektorem. Jeżeli pomnożymy (11.3) przez pewną stałą, otrzymamy *tensor napięć Maxwellowskich*, który występuje w teorii pola elektromagnetycznego.

ZADANIA. 1. Obliczyć składowe obu tensorów, wymienionych w przykładach 2 i 3.

Rozwiązanie. Opierając się na tym, że $T_{xx} = iT\bar{i}$, $T_{xy} = iT\bar{j}$ itd. (por. (7.7a) i (8.1)), otrzymujemy dla składowych tensora momentu bezwładności (11.2) następującą macierz:

$$(11.4) \quad \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{\nu} m_{\nu}(y_{\nu}^2 + z_{\nu}^2) & -\sum_{\nu} m_{\nu}x_{\nu}y_{\nu} & -\sum_{\nu} m_{\nu}x_{\nu}z_{\nu} \\ -\sum_{\nu} m_{\nu}y_{\nu}x_{\nu} & \sum_{\nu} m_{\nu}(z_{\nu}^2 + x_{\nu}^2) & -\sum_{\nu} m_{\nu}y_{\nu}z_{\nu} \\ -\sum_{\nu} m_{\nu}z_{\nu}x_{\nu} & -\sum_{\nu} m_{\nu}z_{\nu}y_{\nu} & \sum_{\nu} m_{\nu}(x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2) \end{vmatrix}.$$

Tensorowi napięć Maxwellowskich odpowiada macierz:

$$(11.5) \quad \begin{vmatrix} \psi(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) & 2\psi v_x v_y & 2\psi v_x v_z \\ 2\psi v_y v_x & \psi(v_y^2 - v_x^2 - v_z^2) & 2\psi v_y v_z \\ 2\psi v_z v_x & 2\psi v_z v_y & \psi(v_z^2 - v_x^2 - v_y^2) \end{vmatrix}.$$

2. Dowieść, że kwadryka tensorowa tensora momentu bezwładności jest elipsoidą.

Rozwiązanie. Jeśli tensor (11.4) sprowadzimy do osi głównych ξ, η, ζ , to znikną jego składowe nie leżące na przekątnej, nato-

miast wszystkie składowe na przekątnej $T_{\xi\xi} = \sum_{\nu} m_{\nu}(\eta_{\nu}^2 + \zeta_{\nu}^2)$ itd. będą dodatnie, tak że (9.4) jest równaniem elipsoidy trójosiowej.

3. Przedyskutować w przypadku napięć Maxwellowskich zależność wektora $\bar{b} = 2\bar{v}(\psi\bar{v}\cdot\bar{a}) - \bar{a}\psi v^2$ od wektora $\bar{a}$, zakładając, że ψ jest dodatnie.

Rozwiązanie. Oznaczmy składowe wektora $\bar{a}$ przez ξ, η, ζ i połączmy wektor $\bar{v}$ na osi x :

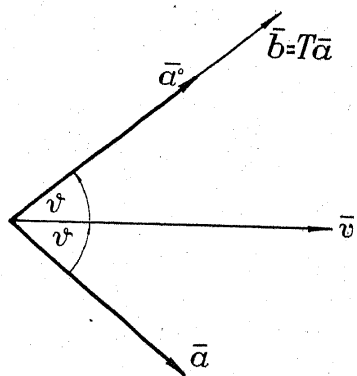
$$v_x = v, \quad v_y = v_z = 0.$$

Wektor $\bar{b}$ przybierze wówczas postać

$$\bar{b} = 2\psi v \bar{v} \bar{a} - \psi v^2 (\bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta) = \psi v^2 (\bar{i}\xi - \bar{j}\eta - \bar{k}\zeta).$$

Wektor $\bar{a}^0 = \bar{i}\xi - \bar{j}\eta - \bar{k}\zeta$ powstaje z wektora $\bar{a} = \bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta$ przez zmianę znaków jego składowych y i z , a więc przez odbicie zwierciadlane wektora $\bar{a}$ od osi x , tj. od kierunku wektora $\bar{v}$. Wektor $\bar{a}^0$ leży zatem w tej samej płaszczyźnie, przechodzącej przez $\bar{v}$, co $\bar{a}$, i tworzy ten sam kąt ϑ z $\bar{v}$, co $\bar{a}$.

Wektor $\bar{v}$ leży więc symetrycznie między $\bar{a}$ i $\bar{a}^0$ (rys. 25). Jeśli $\bar{a}$ ma długość stałą, to i $\bar{b} = \psi v^2 \bar{a}^0$ ma stałą długość i leży względem $\bar{v}$ symetrycznie do $\bar{a}$. W szczególności: jeżeli $\bar{a}$ ma kierunek $\bar{v}$, to $\vartheta = 0$ i wszystkie trzy wektory $\bar{a}, \bar{b}$ i $\bar{v}$ mają jeden i ten sam kierunek oraz zwrot. Dla $\vartheta = 45^\circ$ wektor $\bar{a}$ jest prostopadły do $\bar{b}$. Jeżeli $\vartheta = 90^\circ$, czyli $\bar{a}$ prostopadłe do $\bar{v}$, to $\bar{a}$ i $\bar{b}$ leżą na jednej i tej samej prostej, mają jednak zwroty przeciwne. Dla $\vartheta = 135^\circ$



Rys. 25. Położenie wektora $T\bar{a}$ dla tensora napięć Maxwellowskich.

wektor $\bar{a}$ jest znów prostopadły do $\bar{b}$, dla $\vartheta = 180^\circ$ wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ mają zwroty przeciwne.

4. Wyznaczyć kwadrykę tensorową napięć Maxwellowskich (11.5).

Rozwiązanie. Przede wszystkim, jak wiemy z rozwiązania zadania 3 wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ leżą symetrycznie po obu stronach tego wektora $\bar{v}$. Dlatego $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}T\bar{a}$ ma znak $+$, gdy $0 < \vartheta < 45^\circ$ lub $135^\circ < \vartheta < 180^\circ$, a znak $-$, gdy $45^\circ < \vartheta < 135^\circ$. Musimy więc tu założyć, że stała C w równaniu (9.1) kwadryki tensorowej $\bar{a}T\bar{a} = \pm C$

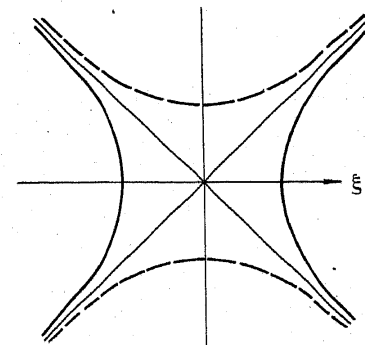
ma oba znaki (por. str. 37). W pierwszych obu przedziałach zmienności kąta ϑ musimy wziąć $+C$, a w ostatnim $-C$. Jeżeli $\bar{v}$ ma kierunek jednej z osi współrzędnych, to znikają składowe tensora napięć Maxwellowskich, nie znajdujące się na przekątnej macierzy (11.5), tak że tensor jest sprowadzony do osi głównych. Jeżeli np. $\bar{v}$ ma kierunek osi ξ , to $\bar{v} = \bar{i}v$, i dla nieznikających składowych mamy następujące wyrażenia:

$$T_{\xi\xi} = \psi v^2, \quad T_{\eta\eta} = -\psi v^2, \quad T_{\zeta\zeta} = -\psi v^2.$$

Równanie kwadryki tensorowej (9.1a) przybiera wtedy postać

$$(11.6) \quad v^2 \psi (\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) = \pm C.$$

Składowe wektora $\bar{a}$ oznaczamy przy tym przez ξ, η, ζ . W przypadku $+C$ równanie (11.6) jest równaniem hiperboloidy dwupowłokowej obrotowej dookoła osi ξ , ze stożkiem asymptotycznym o kącie wierzchołkowym 90° . W przypadku $-C$ mamy natomiast hiperboloidę jednopowłokową obrotową dookoła osi ξ z tym samym stożkiem asymptotycznym. O wyglądzie kwadryki tensorowej napięć Maxwellowskich daje pojęcie obracanie rysunku 26 dookoła osi ξ . Wówczas krzywa ciągła utworzy hiperboloidę obrotową dwupowłokową, a krzywa kreskowana — jednopowłokową. Stożek asymptotyczny powstanie przez obrót asymptot.



Rys. 26. Kwadryka tensorowa napięć Maxwellowskich.

Jasnym jest, że C ma znaki $+$ i $-$ we wszystkich przypadkach, w których kwadryka tensorowa jest kombinacją hiperboloidy jedno- i dwupowłokowej (w ogólności nie obrotowej).

5. W jaki sposób wyrażają się składowe tensorowe kreskowane $T_{x'x'}, T_{y'y'}$ itd. przez składowe niekreskowane?

Rozwiązanie. Według (8.1) mamy $T_{x'x'} = \bar{i}'T\bar{i}'$, $T_{x'y'} = \bar{i}'T\bar{j}'$ itd. Jeżeli wyrazimy tu $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ za pomocą (10.1) przez wektory podstawowe niekreskowane i zauważymy, że $T_{xx} = \bar{i}T\bar{i}$, $T_{xy} = \bar{i}T\bar{j}$ itd., to otrzymamy bezpośrednio:

$$T_{x'x'} = \bar{i}'T\bar{i}' = (a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} + a_{13}\bar{k})T(a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} + a_{13}\bar{k}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_{11}(T_{xx}\alpha_{11} + T_{xy}\alpha_{12} + T_{xz}\alpha_{13}) + \\
 &+ \alpha_{12}(T_{yx}\alpha_{11} + T_{yy}\alpha_{12} + T_{yz}\alpha_{13}) + \\
 &+ \alpha_{13}(T_{zx}\alpha_{11} + T_{zy}\alpha_{12} + T_{zz}\alpha_{13}) = \\
 &= T_{xx}\alpha_{11}^2 + T_{yy}\alpha_{12}^2 + T_{zz}\alpha_{13}^2 + 2T_{xy}\alpha_{11}\alpha_{12} + 2T_{yz}\alpha_{12}\alpha_{13} + 2T_{zx}\alpha_{13}\alpha_{11}. \\
 T_{x'y'} &= \bar{i}'\bar{j}' = (\alpha_{11}\bar{i} + \alpha_{12}\bar{j} + \alpha_{13}\bar{k})T(\alpha_{21}\bar{i} + \alpha_{22}\bar{j} + \alpha_{23}\bar{k}) = \\
 &= \alpha_{11}(T_{xx}\alpha_{21} + T_{xy}\alpha_{22} + T_{xz}\alpha_{23}) + \\
 (11.7) \quad &+ \alpha_{12}(T_{yx}\alpha_{21} + T_{yy}\alpha_{22} + T_{yz}\alpha_{23}) + \\
 &+ \alpha_{13}(T_{zx}\alpha_{21} + T_{zy}\alpha_{22} + T_{zz}\alpha_{23}) = \\
 &= T_{xx}\alpha_{11}\alpha_{21} + T_{yy}\alpha_{12}\alpha_{22} + T_{zz}\alpha_{13}\alpha_{23} + \\
 &+ T_{xy}(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + T_{yz}(\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22}) + T_{zx}(\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}).
 \end{aligned}$$

W każdym z obu tych wzorów wyrażenia znajdujące się na pierwszych miejscach dotyczą tensorów dowolnych, na drugich zaś miejscach — tylko tensorów symetrycznych.

B. ANALIZA WEKTORÓW

§ 12. Różniczkowanie wektorów. Weźmy pod uwagę wektory o wspólnym punkcie zaczepienia O . Jeżeli każdej wartości zmiennej skalarnej u przyporządkujemy pewien wektor $\bar{a}$, to wektor

$$(12.1) \quad \bar{a} = \bar{a}(u)$$

będzie funkcją parametru u . Końce wektora $\bar{a}$ będą wówczas leżały na krzywej przestrzennej. Widzimy to, rozkładając funkcję wektorową (12.1) na składowe skalarne:

$$(12.2) \quad a_x = a_x(u), \quad a_y = a_y(u), \quad a_z = a_z(u).$$

Tak samo możemy się przekonać, że końce wektora $\bar{b}$, zależnego od dwu zmiennych skalarnych u i v :

$$(12.3) \quad \bar{b} = \bar{b}(u, v)$$

leżą na pewnej powierzchni.

Aby określić pochodną funkcji wektorowej (12.1), zauważmy, że przyrost $\Delta \bar{a}$ wektora $\bar{a}$ przy przyroście Δu parametru u (rys. 27) jest to wektor

$$(12.4) \quad \Delta \bar{a} = \bar{a}(u + \Delta u) - \bar{a}(u).$$

Jeżeli założymy, że $\bar{a}(u)$ jest funkcją wektorową *ciągłą* zmiennej u , (łatwo widzieć, jak tu należy określić ciągłość) to $\Delta \bar{a} \rightarrow 0$, gdy $\Delta u \rightarrow 0$. Istnieje wobec tego możliwość, że wektor $\frac{\Delta \bar{a}}{\Delta u}$ dąży wraz

z $\Delta u \rightarrow 0$ do pewnego wektora granicznego; jeżeli tak jest istotnie, to granicę

$$(12.5) \quad \frac{d\bar{a}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(u + \Delta u) - \bar{a}(u)}{\Delta u}$$

nazywamy *pochodną funkcji wektorowej* $\bar{a}(u)$ względem zmiennej skalarnej u . Ponieważ $\frac{\Delta \bar{a}}{\Delta u}$ leży na cięciwie krzywej K (p. rys. 27),

to $\frac{d\bar{a}}{du}$ leży na jej stycznej. Zwrot wektora $\frac{d\bar{a}}{du}$ odpowiada przy tym zwrotowi postępowania po krzywej, gdy u wzrasta (zwrot ten jest zaznaczony strzałką na rys. 27).

W szczególności wynika z tej definicji, że jeżeli $|\alpha(u)| = \text{const}$, a więc jeżeli koniec wektora $\bar{a}(u)$ leży stale na powierzchni kuli, to wektor $\frac{d\bar{a}}{du}$ jest prostopadły do wektora $\bar{a}(u)$.

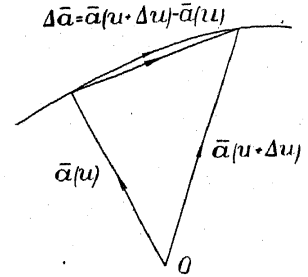
Zupełnie tak samo jak w analizie funkcji zmiennej rzeczywistej dowodzi się wzorów:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x) \text{ i } \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

możemy opierając się na definicji pochodnej (12.5) udowodnić wzory:

$$(12.6a) \quad \frac{d}{du}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{du} + \frac{d\bar{b}}{du}$$

$$(12.6b) \quad \frac{d(s\bar{a})}{du} = \frac{ds}{du}\bar{a} + s\frac{d\bar{a}}{du},$$



Rys. 27. Pochodna $\frac{d\bar{a}}{du}$.

$$(12.6c) \quad \frac{d(\bar{a}\bar{b})}{du} = \frac{d\bar{a}}{du}\bar{b} + \bar{a}\frac{d\bar{b}}{du},$$

$$(12.6d) \quad \frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{du} = \frac{d\bar{a}}{du} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{du}.$$

Wszystkie występujące tu wektory i skalary należy uważać za funkcje zmiennej niezależnej u .

Jeśli wektor $\bar{a}$ przedstawiony jest w układzie współrzędnych o stałych wektorach podstawowych $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$(12.7) \quad \bar{a}(u) = \bar{i}a_x(u) + \bar{j}a_y(u) + \bar{k}a_z(u),$$

to za pomocą (12.6a i b) otrzymujemy:

$$(12.8) \quad \frac{d\bar{a}}{du} = \bar{i}\frac{da_x}{du} + \bar{j}\frac{da_y}{du} + \bar{k}\frac{da_z}{du}.$$

W stałym układzie współrzędnych składowe pochodnej wektora $\bar{a}$ są więc wyznaczone przez pochodne jego składowych.

Jeżeli u jest funkcją wielkości skalarnej w :

$$u = u(w),$$

to mamy:

$$(12.9) \quad \frac{d\bar{a}(u(w))}{dw} = \frac{d\bar{a}}{du} \cdot \frac{du}{dw}.$$

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE.

1. Wektor stycznej. Wektor wodzący (por. § 11, przykład 2) jest to wektor określający położenie punktu geometrycznego P względem drugiego punktu O . Oznaczamy go zwykle przez $\bar{r}$. Jego składowe są współrzędnymi punktu P . Jeżeli za zmienną niezależną przyjąć długość łuku s , to wówczas

$$(12.10) \quad \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}$$

jest wektorem jednostkowym. Jego wartość bezwzględna określona jest bowiem przez wartość graniczną stosunku długości cięciwy do długości przynależnego do niej łuku. Według (12.5) wektor (12.10) ma kierunek stycznej do krzywej:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{i}x(s) + \bar{j}y(s) + \bar{k}z(s).$$

Wektor ten nazywamy *wektorem stycznej*.

Jego składowe t_x, t_y, t_z , jako rzuty wektora jednostkowego stycznej na osie układu, są cosinusami kierunkowymi stycznej do krzywej K (por. (12.8)):

$$(12.10a) \quad \begin{aligned} t_x &= \cos(ds, x) = \frac{dx}{ds}, & t_y &= \cos(ds, y) = \frac{dy}{ds}, \\ t_z &= \cos(ds, z) = \frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

Wektor $\Delta\bar{r}$ ma długość, kierunek i zwrot cięciwy. Wobec tego możemy uważać wektor $d\bar{r}$ za *element wektorowy łuku* krzywej przestrzennej i oznaczać go przez $d\bar{s}$, ilekroć chcemy podkreślić jego łączność z elementem skalarnym łuku ds .

2. Krzywizna krzywej przestrzennej. Zobaczymy obecnie, jakie znaczenie geometryczne ma wektor $\frac{d\bar{t}}{ds}$. Możemy przyjąć

w pierwszym przybliżeniu, że dla dostatecznie małych Δs tak $\bar{t}(s)$ jak i $\bar{t}(s + \Delta s)$ leżą w jednej i tej samej płaszczyźnie p , którą nazywamy *płaszczyzną ściśle styczną* i która przez tę własność może być określona. W tym samym przybliżeniu możemy uważać element łuku Δs krzywej przestrzennej za element łuku koła, leżącego w płaszczyźnie ściśle stycznej (rys. 28). Środek tego koła — jak wiadomo — nosi nazwę *środką krzywizny* krzywej K .

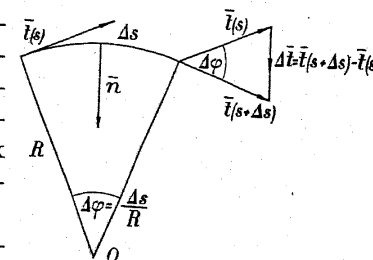
W płaszczyźnie ściśle stycznej leży też normalna główna $\bar{n}$ i wektor $\Delta\bar{t} = \bar{t}(s + \Delta s) - \bar{t}(s)$. Oba te wektory skierowane są ku środkowi O krzywizny. Kąt między $\bar{t}(s + \Delta s)$ i $\bar{t}(s)$ równy jest kątowi $\Delta\varphi$ między wektorami wodzącymi przeprowadzonymi z punktu O do początku i końca elementu Δs . Ponieważ wektor $\bar{t}(s)$ ma długość 1, to — jak widzimy na górnej prawej części rys. 28 — jest

$$\Delta\bar{t} = \bar{n}\Delta\varphi.$$

Z rys. 28 widzimy też, że

$$\Delta s = R\Delta\varphi,$$

gdzie R jest promieniem krzywizny, czyli promieniem koła prze-



Rys. 28. Wzór Freneta.

przewodzonego przez Δs . Dzielać obie ostatnie równości jedną przez drugą otrzymujemy wzór Freneta:

$$(12.11) \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{R}.$$

Zatem $\frac{d\bar{t}}{ds}$ jest wektorem, mającym kierunek normalnej głównej $\bar{n}$ i wartość bezwzględną równą krzywiznie $1/R$ krzywej K .

ZASTOSOWANIA KINEMATYCZNE.

1. Prędkość punktu. Niech

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

określa dla danej chwili czasu t położenie poruszającego się punktu P . Oznaczając przez kropkę różniczkowanie względem czasu, określamy przez

$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t)$$

wektor prędkości punktu P . Możemy jednak uważać $\bar{r}$ również za funkcję długości łuku s , a dopiero s uznać za zależne od czasu. Opierając się na (12.9) i (12.10), mamy wówczas:

$$(12.12) \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}}(t) = \frac{d\bar{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \bar{t} \frac{ds}{dt}.$$

Ponieważ $\frac{ds}{dt}$ oznacza drogę przypadającą na jednostkę czasu, więc prędkość $\bar{v}$ jest wektorem o kierunku stycznej $\bar{t}$ i o wartości bezwzględnej równej drodze przypadającej na jednostkę czasu.

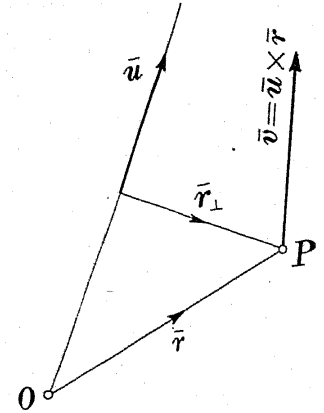
2. Obrót ciała sztywnego dookoła pewnej osi niech odbywa się z prędkością kątową u . A więc u jest wartością bezwzględną prędkości punktu odległego o jednostkę długości od osi obrotu. Prędkość $\bar{v}$ punktu P ciała sztywnego w odległości ρ od osi ma wówczas wartość bezwzględną ρu i jest prostopadła do płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu i punkt P .

Aby wyrazić $\bar{v}$ wektorowo, określmy najpierw wektor prędkości kątowej $\bar{u}$; jego wartością bezwzględną niechaj będzie u , jego linią działania niech będzie oś obrotu, a jego zwrot niech będzie przyporządkowany wektorowi $\bar{v}$ według reguły śruby prawoskrętnej. Wówczas

$$(12.13) \quad \bar{v} = \bar{u} \times \bar{r},$$

gdzie $\bar{r}$ jest wektorem wodzącym, którego punkt zaczepienia O (rys. 29) leży na osi obrotu. Według (5.1) mamy przecież $\bar{v} = r_{\perp} u$, gdzie $r_{\perp}$ jest składową wektora $\bar{r}$ prostopadłą do osi obrotu, a więc odległością ρ punktu P od osi. Kierunek wektora $\bar{v}$ jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez $\bar{r}$ i $\bar{u}$, oraz jest przyporządkowany wektorowi $\bar{u}$ według reguły śruby prawoskrętnej. Sprawdziliśmy więc wzór (12.13) co do wartości bezwzględnej, co do kierunku i zwrotu.

3. Pochodna czasowa w układzie obracającym się. Niech dany będzie pewien układ — który nazywać będziemy *stałym* — i drugi, *obracający się* względem układu stałego z prędkością kątową $\bar{u}$ dookoła danej osi. Okażemy, że pochodna czasowa wektora $\bar{a} = \bar{a}(t)$, zależnego od czasu, różna jest dla obserwatorów, mierzących ją w układzie stałym, i dla obserwatorów, mierzących ją w układzie obracającym się.



Rys. 29. Obrót ciała sztywnego.

Oznaczmy te pochodne odpowiednio przez $\frac{d\bar{a}}{dt}$ i $\frac{d'\bar{a}}{dt}$.

Aby znaleźć związek między tymi dwoma wektorami, zauważmy, że droga końca strzałki wektora $\bar{a}$ w czasie dt równa jest w układzie stałym $d\bar{a} = \frac{d\bar{a}}{dt} dt$, a w obracającym się $d'\bar{a} = \frac{d'\bar{a}}{dt} dt$.

Oczywiście, przesunięcie $d\bar{a}$ końca strzałki wektora $\bar{a}$ w układzie stałym składa się z jego przesunięcia $d'\bar{a}$ w układzie obracającym się oraz z przesunięcia $\bar{u} \times \bar{a} dt$, którego doznaje w układzie stałym ten punkt układu obracającego się, w którym znajduje się chwilowo koniec strzałki wektora $\bar{a}$. Ostatecznie otrzymujemy więc

$$(12.14) \quad \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d'\bar{a}}{dt} + \bar{u} \times \bar{a}.$$

§ 13. Całkowanie wektorów. W fizyce często spotykamy całki, w których pod znakiem całkowania występują wektory bądź jako funkcje podcałkowe, bądź jako różniczki (np. $d\bar{s}$). Mogą to

być całki liniowe, powierzchniowe i przestrzenne. Określenie takich całek nie przedstawia żadnych trudności, ponieważ całki powstają ze zwykłych sum przez przejście do granicy.

Jeżeli różniczka dana jest przez wektor, to możemy jej część wektorową związać z funkcją podcałkową. Możemy np. napisać różniczkę $d\vec{s}$ całki liniowej w postaci $d\vec{s} = \vec{i} ds$, a element powierzchniowy $d\vec{f}$, jeżeli występuje on jako wektor o kierunku normalnej, przedstawić w postaci $d\vec{f} = \vec{n} df$.

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE.

Następujące twierdzenia są uogólnieniem twierdzeń pomocniczych z § 4 i § 5:

1. Dla krzywej zamkniętej K znika całka liniowa (por. twierdzenie pomocnicze z § 4):

$$(13.1) \quad \oint_K d\vec{s} = \oint_K \vec{i} ds = 0.$$

Dla tej samej całki rozłożonej na składowe, wzór (13.1) przybiera postać

$$(13.1a) \quad \oint_K \cos(ds, x) ds = \oint_K \cos(ds, y) ds = \oint_K \cos(ds, z) ds = 0.$$

Znak $\oint$ oznacza tu całkę po linii zamkniętej czyli tzw. całkę obiegową.

2. Dla powierzchni zamkniętej F znika całka powierzchniowa (por. twierdzenie pomocnicze z § 5)

$$(13.2) \quad \int_F d\vec{f} = \int_F \vec{n} df = 0.$$

Oznaczając przez $\cos(n, x)$, ... cosinusy kierunkowe normalnej, otrzymujemy stąd wzory:

$$(13.2a) \quad \int_F \cos(n, x) df = \int_F \cos(n, y) df = \int_F \cos(n, z) df = 0.$$

3. Wartość całki powierzchniowej

$$(13.3) \quad \vec{F}_K = \int_{F_K} \vec{n} df = \int_{F_K} d\vec{f}$$

dla jakiegokolwiek powierzchni F_K , rozpiętej na krzywej zamkniętej K nie zależy od kształtu tej powierzchni.

Przyjmujemy tu zawsze, że normalna na F_K związana jest z kierunkiem obiegu na K regułą śruby prawoskrętnej.

Aby przekonać się o prawdziwości twierdzenia, rozpinamy na krzywej K oprócz F_K drugą powierzchnię F'_K . Wówczas całka powierzchniowa po F_K i po F'_K (jeżeli tylko na tej powierzchni odwrócimy kierunek normalnej) jest całką po powierzchni zamkniętej, tak jak (13.2), a więc znika. Odwrócenie kierunku normalnej zmienia tylko znak całki; oznaczając więc przez $\vec{F}'_K$ jej wartość przy pierwotnym kierunku normalnej, otrzymujemy po odwróceniu kierunku normalnej $-\vec{F}'_K$. Ponieważ $\vec{F}_K - \vec{F}'_K = 0$, przeto $\vec{F}_K = \vec{F}'_K$, tak jak głosi twierdzenie.

Ze względu na to, że $\vec{F}_K$ nie zależy od przebiegu powierzchni $\vec{F}_K$ (jeżeli tylko powierzchnia $\vec{F}_K$ jest rozpięta na krzywej K i ma odpowiednio skierowaną normalną), możemy za $\vec{F}_K$ użyć powierzchni stożkowej, którą otrzymujemy, łącząc pewien punkt O wektorami wodzącymi z poszczególnymi punktami krzywej K . Oznaczmy przez $d\vec{s}$ element wektorowy łuku krzywej K , skierowany zgodnie z kierunkiem obiegu na tej krzywej; wówczas pole trójkąta, którego podstawą jest $d\vec{s}$ a wierzchołkiem O , wyraża się przez wektor $\frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{s})$. Mamy zatem dla $\vec{F}_K$ całkę liniową:

$$(13.4) \quad \vec{F}_K = \frac{1}{2} \oint_K (\vec{r} \times d\vec{s}).$$

Co do geometrycznego znaczenia wektora $\vec{F}_K$, zauważmy, że rzut wektora $\vec{F}_K$ na jakiegokolwiek kierunek równy jest polu ograniczonemu przez rzut krzywej K na płaszczyznę prostopadłą do tego kierunku.

Łatwo stwierdzimy, że tak jest, uważając $\vec{F}_K$ za sumę elementów i pamiętając rozważania z § 5.