

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
W. ŚLEBODZIŃSKI, H. STEINHAUS i A. ZYGMUND

TOM XXI

02338 [21]

TOPOLOGIE II

ESPACES COMPACTS, ESPACES CONNEXES,
PLAN EUCLIDIEN

P A R

CASIMIR KURATOWSKI

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA
SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

WARSZAWA — WROCŁAW 1950

02338

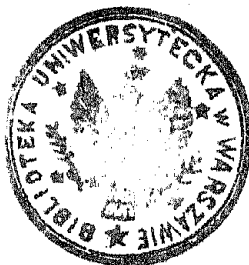
COPYRIGHT, 1950, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

WARSZAWA (Poland) WROCLAW

Seminarium Matematyczne Uniwersytetu

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.



Podpisano do druku 3. VIII. 1950

M-01629

Nakład 1000 egz.

Ark. druk.: 28 1/2

Papier bezdrz. sat. 100 g

Format 70×100 cm.

PRINTED IN POLAND

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM
PAŃSTW. ZAKŁADÓW WYDAWNICTW SZKOLNYCHB. 621/3
19-54-50

PRÉFACE AU VOLUME II.

Le manuscrit de ce volume a été presque achevé lorsque la guerre de 1939 éclata. Il n'a été sauvé que grâce à la bienveillance du Consulat Suisse à Varsovie qui a pris soin de le faire parvenir entre les mains de mon cher ami, le professeur René Wavre à Genève. En cas contraire, il aurait certainement partagé le sort de mes autres manuscrits et notices, fruits de mon travail scientifique tout entier: il serait brûlé par les agresseurs nazistes.

L'ayant recouvré après la fin de la guerre, j'ai pu m'apercevoir en parcourant la littérature scientifique plus récente, combien la Topologie s'était-elle développée, dans l'entre-temps, dans les pays où il a été possible de cultiver les sciences pendant la guerre.

Le manuscrit exigeait d'être complété et actualisé. Malheureusement, il a fallu renoncer à y faire entrer une partie de nouveaux résultats, sinon au prix d'un retard très sensible de sa publication, ce qui m'a paru particulièrement indésirable.

* * *

Ce volume, avec la seconde édition (de 1948) du volume I, forme un tout. J'ai tâché cependant de le rédiger de manière que le lecteur de la première édition du volume I n'éprouve pas de difficultés appréciables. Cette tâche n'était pas réalisable dans tous les chapitres: le § 40 par exemple, consacré à la théorie de la dimension, est intimement lié à l'exposé des éléments de cette théorie tel qu'il se trouve dans la seconde édition du volume I.

Conformément au plan adopté (voir Préface au volume I), ce volume II est consacré à l'étude des espaces plus spéciaux que ceux traités dans le volume I. Ce sont: les espaces *compacts* (Chapitre IV), *connexes* (Chapitre V), *localement connexes* (Chapitre VI), *contractiles* (*rétractes* etc., Chapitre VII) et finalement *le plan euclidien* (Chapitre IX).

L'espace y est entendu, en général, comme espace *métrique séparable*. Ce n'était peut-être pas toujours nécessaire — une bonne partie de la théorie de connexité, par exemple, se laisserait construire pour les espaces topologiques plus généraux, à savoir

ne satisfaisant qu'aux axiomes I—III du § 4 — mais l'exposé restreint aux espaces métriques séparables est beaucoup plus simple, sans préjudice — me semble-t-il — aux problèmes vraiment importants et qui rentrent dans les matières de ce volume.

Il n'est pas nécessaire de lire tous les paragraphes de ce livre dans l'ordre de leur succession; il y en a qui ne sont pas indispensables pour comprendre les suivants.

C'est ainsi que le § 40 par exemple, constituant la suite des §§ 20—24 du volume I, consacrés à la théorie de la dimension, occupe une place un peu isolée. Cependant, le charme spécifique de cette théorie, la profondeur des résultats et la richesse de ses méthodes m'ont porté à la présenter dans ce livre.

Il en est peut-être de même du § 43, consacré à la théorie des continus irréductibles. Je tenais tout particulièrement à attirer l'attention du lecteur sur les ainsi dits *continus indécomposables* qui appartiennent — comme il me semble — aux figures géométriques les plus intéressantes. Leur théorie se distingue par une simplicité exceptionnelle, malgré qu'ils puissent servir à des constructions les plus singulières; ils sont en même temps les plus fréquents (au sens de catégorie de Baire) dans l'espace de tous les continus de la surface sphérique. Plus encore, les plus fréquents sont, dans cet espace, les continus tout à fait dépourvus de sous-continus décomposables, donc ayant la structure la plus pathologique qui soit jamais connue (ce sont les ainsi dits *continus héréditairement indécomposables* ou continus de Knaster).

Pas moins intéressante est la façon dont les continus indécomposables ont été découverts. Schönflies a affirmé dans l'un de ses travaux qu'un continu plan ne peut être frontière commune de trois régions différentes¹⁾. Ce théorème a été réfuté par Brouwer²⁾. L'exemple qu'il avait défini était bien un continu indécomposable (comme on l'a montré plus tard). La question s'est présentée à son tour: est-il possible de construire une frontière commune à trois régions sans faire usage des continus indécomposables? La réponse est négative³⁾: une frontière commune à trois régions (sur la surface de sphère) est nécessairement soit un continu indécompo-

sable, soit somme de deux continus indécomposables. La question a été élucidée définitivement par Knaster, qui a réalisé les deux cas par des exemples¹⁾. L'ensemble de ces théorèmes a montré en même temps combien les problèmes purement géométriques de la topologie du plan sont intimement liés à la théorie des continus indécomposables et — plus généralement — des continus irréductibles.

La topologie de l'espace euclidien à n dimensions, \mathcal{E}^n , n'est traitée dans ce livre que de manière fragmentaire. On n'y trouvera que les théorèmes qui se laissent établir, à l'heure qu'il est, par les méthodes de la théorie des ensembles. C'est ainsi qu'il y est démontré, par exemple, que la propriété de séparer l'espace \mathcal{E}^n est un invariant topologique; j'ometts, par contre, le théorème de Jordan-Brouwer en n dimensions, de même que celui plus général sur l'invariance du nombre des régions en lesquelles un ensemble compact coupe l'espace \mathcal{E}^n ²⁾.

En topologie du plan la situation est toute différente. Les méthodes ensemblistes y ont remporté un triomphe complet. L'ancienne méthode fort compliquée et pénible (datant de Jordan et Schönflies), qui procédait par approximations à l'aide des polygones, a été tout à fait éliminée. Son élimination — un des points du programme de l'École Mathématique Polonaise, poursuivi surtout dans les colonnes de *Fundamenta Mathematicae* — a trouvé son expression culminante dans la thèse d'Eilenberg³⁾: en développant des idées de K. Borsuk, Eilenberg a montré que l'étude de l'espace \mathcal{S}^X , où $X \subset \mathcal{E}^2$, permet non seulement de démontrer les théorèmes connus d'une manière extrêmement simple et élégante, mais aussi de les généraliser très considérablement et d'enrichir la topologie du plan par la découverte des théorèmes nouveaux.

¹⁾ B. Knaster, *Quelques coupures singulières du plan*, *Fund. Math.* **7** (1925), p. 280.

²⁾ Tout récemment K. Borsuk est parvenu à établir ces théorèmes aussi par les méthodes de la théorie des ensembles. Cette découverte, pas encore publiée, élargit considérablement le champ d'application des méthodes en question et permet de saisir les problèmes topologiques qui ne semblaient accessibles qu'à la méthode de l'homologie.

La méthode de l'homologie n'est pas employée dans ce livre. Pour en exposer la théorie, il faudrait écrire un volume à part; cela a été déjà fait, d'ailleurs, par d'autres auteurs (Alexandroff, Hopf, Lefschetz).

³⁾ S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, *Fund. Math.* **28** (1936), p. 61—112.

¹⁾ A. Schönflies, *Die Entwicklung der Lehre von Punktmannigfaltigkeiten*, II, Leipzig 1908, p. 124 (XIV).

²⁾ L. E. J. Brouwer, *Math. Ann.* **68** (1910), p. 426.

³⁾ Voir ma note de *Fund. Math.* **6** (1924), p. 138.

Ces recherches constituent le sujet du dernier paragraphe (§ 55) de ce livre. L'espace $\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$, étudié par Eilenberg, y est remplacé par l'espace $\mathcal{P}^{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire par celui des fonctions continues à valeurs complexes et qui ne s'annulent nulle part. Cela donne lieu à de petites simplifications formelles et — ce qui est plus important — permet de mettre en évidence la nature topologique de plusieurs théorèmes de la théorie des fonctions analytiques. Ainsi, le théorème de Weierstrass, par exemple, sur la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires et celui de Rouché sur le nombre algébrique des zéros d'une fonction holomorphe se laissent-ils démontrer pour les fonctions continues ne s'annulant nulle part et assujetties à certaines hypothèses de nature non analytique.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail soit par leurs précieux conseils, soit par la lecture des épreuves. Je remercie tout particulièrement MM. Knaster et Sikorski.

Casimir Kuratowski

Varsovie, le 9 Mai 1950.

QUATRIÈME CHAPITRE.

Espaces compacts.

§ 37. Notion de compacité.

I. Définition. Un espace est dit *compact* lorsque toute suite de points contient une sous-suite convergente¹⁾. Autrement dit: lorsque, pour tout ensemble infini A , on a

$$(1) \quad A' \neq \emptyset,$$

A' désignant l'ensemble dérivé de A .

Le théorème classique de Bolzano-Weierstrass, d'après lequel toute suite bornée de nombres réels contient une sous-suite convergente, peut donc être énoncé comme suit:

1. *Tout intervalle $a \leq x \leq b$ est compact.*

Les espaces compacts peuvent être caractérisés de la façon suivante:

2. *Pour que l'espace soit compact, il faut et il suffit que chaque suite de points qui ne converge pas vers p contienne une sous-suite convergente qui ne converge pas vers p .*

En effet, si la suite p_1, p_2, \dots ne converge pas vers p , elle contient — d'après une propriété générale des espaces \mathcal{L}^* (vol. I, § 14, I, 3^o) — une sous-suite p_{k_1}, p_{k_2}, \dots dont aucune suite partielle ne converge vers p . L'espace étant supposé compact, la suite p_{k_1}, p_{k_2}, \dots contient une sous-suite convergente dont la limite est donc nécessairement distincte de p .

¹⁾ La définition de la compacité (pour les espaces \mathcal{L}^*) et plusieurs de ses propriétés ont été envisagées au § 14 (à partir du N^o VIII).

Cette notion est due à M. Fréchet, Rendic. di Palermo 22 (1906), p. 6. Il est à remarquer que le terme „ensemble compact“ est employé par différents auteurs dans un sens distinct de celui-ci, en entendant par ensemble compact un ensemble dont chaque suite de points contient une sous-suite convergente (mais pas nécessairement vers un point de l'ensemble considéré).

Les membres droits de ces égalités étant — comme nous venons de montrer — égaux, on parvient à la formule (3).

Nous en déduisons que

9. *L'indice est un invariant des homéomorphies positives g transformant \mathcal{E}^2 en \mathcal{E}^2 ; c'est-à-dire que $\text{ind}_{g\zeta} g(p) = \text{ind}_{\zeta} p^1$.*

En effet, d'après XII, 1,

$$(9) \quad \text{ind}_{\zeta} p = \mu_{\mathcal{O}}[\zeta^0(x) - p] \quad \text{et} \quad \text{ind}_{g\zeta} g(p) = \mu_{\mathcal{O}}[g\zeta^0(x) - g(p)].$$

Par hypothèse (cf. th. 4), $g(y) - g(p) \sim y - p$ sur $\mathcal{E}^2 - p$. Par conséquent, $g\zeta^0(x) - g(p) \sim \zeta^0(x) - p$ sur \mathcal{S} (la courbe $\zeta^0(\mathcal{S})$ étant située dans $\mathcal{E}^2 - p$). Cette homotopie implique en vertu du th. VIII, 4 que les membres droits des égalités (6) sont identiques; d'où la conclusion demandée.

Les invariants des homéomorphies positives (de \mathcal{S}_2 ou de \mathcal{E}^2) peuvent être nommés *invariants de la Topologie orientée*. Tels sont, comme nous venons de voir, la multiplicité d'un ensemble, l'indice d'un point.

Par suite, les valeurs absolues de ces invariants sont des invariants des homéomorphies arbitraires; elles sont donc des notions topologiques (bien que leurs définitions fassent usage des notions non topologiques).

Tel est aussi l'accroissement du logarithme. On a, en effet, d'après XI (3) (l'homéomorphie étant positive ou négative):

$$\Delta_{g\zeta} f g^{-1} = \text{ind}_{f g^{-1} \zeta} 0 = \text{ind}_{f \zeta} 0 = \Delta_{\zeta} f.$$

¹⁾ Voir Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 476.

INDEX TERMINOLOGIQUE DU VOLUME II.

Notations.

$f|A$ 252, $\mathcal{D}|A$ 252, $\mathcal{D}|_v A$ 252, $f+g$ 254, $f \subset g$ 253, $f \sim 1$ 310, 387, $a \sim b \text{ mod } G$ 292, $f \simeq g$ 275, $f \text{ irr non } \sim 1$ 322, $f \text{ irr non } \simeq g$ 280, \bar{A} 295, \mathcal{X}/G 292, $\mathcal{X} \equiv_{\bar{G}} \mathcal{Y}$ 292.
 $b_0(\mathcal{X})$ 302, $b_1(\mathcal{X})$ 312, 388, $\text{car}_A f$ 429, $d_0(A, B)$ 305, $d_1(A, B)$ 317, $d_n(\mathcal{X})$ 60, $dc(\mathcal{X})$ 105, $dc_{A, B}(\mathcal{X})$ 107, $\text{dist}(X, Y)$ 20, E_p 235, $e(t)$ 308, e_p 309, $\text{ind}(A)$ 318, $\text{ind}_{\zeta}(p)$ 424, $L(A)$ 168, $l_0(A, B)$ 306, $\text{ord}_p(\mathcal{X})$ 200, $\text{ord}_{A, B}(\mathcal{X})$ 201, $p_0(A, B)$ 305, $p_1(A, B)$ 317, p_N, p_S 345.
 c. r. \mathcal{S} 332, h. l. c. 195, i. c. a. 182, i. c. n 265, l. c. 161, l. c. a. 182, l. c. n 265, r. a. 259, r. a. v. 259, s. c. i. 32, s. c. s. 32.
 \mathcal{E} (espace des nombres réels) \mathcal{E}^n (espace de Fréchet), \mathcal{G} (groupe des nombre entiers), $\mathcal{G}^n, \mathcal{G}^o, \mathcal{G}^n$ 297, \mathcal{I} (intervalle $0 \leq x \leq 1$), \mathcal{I}^n (cube de Hilbert), \mathcal{P} (plan privé du point 0), \mathcal{Q}_n (sphéroïde $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$) 20, \mathcal{S}_n (sphère $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$) 20, $\mathcal{S}_n^{\pm 1}$ 270.
 $\mathcal{X}^{(m)}, \mathcal{X}^{[m]}$ 201, $2^{\mathcal{X}}$ 20, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ 28.
 $\delta(X)$ 15, $\delta_r(X)$ 182, δ_f 18, $\zeta(f)$ 301, $\mu_F f$ 414, $\mu_G f$ 412, $e_r(X, Y)$ 180, $\tau(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 19, $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$ 252, $\mathcal{X} \tau_v \mathcal{Y}$ 252, $\omega(p)$ 182.
 $\Gamma(A)$ 310, $\Delta_{\zeta} f$ 424, θ (courbe) 249, $\Theta_0(A, B)$ 304, $\Theta_1(A, B)$ 314, $\Lambda(\mathcal{X})$ 277, $\Lambda_0(A, B)$ 306, $\Lambda_1(A, B)$ 317, $\Pi_0(A, B)$ 305, $\Pi_1(A, B)$ 317, $\Psi(\mathcal{X})$ 309, $\Xi(A)$ 307, $\Omega(\mathcal{X})$ 322.
 $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$ 302, $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ 312, 388, $\mathfrak{b}_0(A, B)$ 305, $\mathfrak{b}_1(A, B)$ 317, $\mathfrak{Q}_0(A, B)$ 306, $\mathfrak{Q}_1(A, B)$ 317, $\mathfrak{X}(\mathcal{X})$ 417, $\mathfrak{P}_0(A, B)$ 305, $\mathfrak{P}_1(A, B)$ 317.

Termes.

Accessible (point) 115.
Accroissement du logarithme 424.
Arc 119, polygonal 339.
Base (d'un groupe) 296, (mod G) 299.
Bicompact 8.
Biconnexe 85.
Caractéristique de Kronecker 429.
Coefficient d'applatissage 60.
Cohérence 249.
Compact (espace) 1.

Complètement connexe par arcs (ensemble) 231.
Composant 146.
Composante 87.
Concordantes (fonctions) 254.
Connexité 79, par arcs 182, entre ensembles 89, n -dimensionnelle 105, en dimension n 264, locale 161.
Constituant 128.
Continu 108, de convergence 176, de condensation 177.
Contractilité 282, dans soi 286, locale 287.
Coupure 129.
Courbe 201, simple fermée 119, θ 249.

- Décomposition** semi-continue 42, continue 48.
Déformation (d'ensemble) 281, (de fonction) 275.
Degré n -dimensionnel 60.
Dendrite 224, locale 227.
Déplacement 17.
Diamètre 15, relatif 182.
Dimension de la connexité 105.
Discohérence 104.
Dispersé 94.
Disque 358.
Distance relative 180.
- Élément cyclique** 235.
Élémentaire (ensemble) 370.
Équivalence topologique 341.
Espace de Janiszewski 353.
Extensible (propriété) 242.
Extension (de fonction) 253.
- Gauche** (courbe) 229.
Générateur 295, (mod G) 299.
Groupe 291, topologique 300.
Groupe-facteur 292.
- Héréditaire** (connexité locale) 195.
Homéomorphie positive, négative 433.
Homomorphie 292.
Homotopie 275.
Hyperespace 46.
- Indécomposable** 143.
Indice 424.
Intérieure (fonction) 48.
Invariant intrinsèque 350.
Irrationnel (point) 207.
Irréductible (ensemble) 26, (espace) 131, 156, (séparateur) 175, (non-homotopie) 280.
Irrégulier (point) 207.
Isomorphie 292.
- Linéaire** (indépendance) 296, (mod G) 299.
Localement compact 50, connexe 161, connexe par arcs 182.
- Monotone** (transformation) 123.
Multiplicité 412, 414, cantorienne 105.
- Neutre** (élément) 291.
Nombre algébrique des zéros et des pôles 393.
Noyau de l'homomorphie 292, (dimensionnel) 66.
Nulle part connexe 94.
- Ordre** de l'espace en un point 200, de l'espace entre deux ensembles 201, de valeur 52, d'élément d'un groupe 291, d'une fonction 52.
Oscillation 182.
- Parcours**, positif, négatif 427.
Péanien (espace) 182.
Point d'arrêt 201, invariant 263, 431, d'irréductibilité 131.
Ponctiforme 130.
Propriété (M) 109.
- Quasi-composante** 92.
Quasi-homéomorphie 19.
- Rang** (d'un groupe) 296, (mod G) 299.
Rationnel (espace, point) 201.
Réductible (propriété) 242.
Région 79.
Régulier (espace, point) 201, (homéomorphie) 376.
Réseau 374.
Rétracte absolu 259, de voisinage 259, d'un ensemble 258, par déformation 281.
- Saturé** 26.
Semi-continu 128.
Semi-continuité inférieure, supérieure 32.
Séparateur 96, local 97.
Séparés (ensembles) 79.
Somme directe 296.
Sous-continu 128.
- Tranche** 17, de continuité 47, de cohésion 140, d'un espace irréductible 139.
Transformation à petites tranches 19.
Triode 224.
- Unicohérence** 104.
Uniforme (continuité) 16.

AUTEURS CITÉS AU VOLUME II.

- Aitchison B. 214.
 Albert G. E. 231.
 Alexander J. W. 265, 382, 395.
 Alexandroff P. VII, 8, 11, 19, 42, 49, 50, 64, 68, 75, 106, 144, 155, 230, 271, 273, 283, 285, 297, 317, 324, 343, 348, 389, 402, 403, 428, 430, 432, 436.
 Antoine 381, 385.
 Aronszajn 180, 184, 259.
 Artin 381.
 Ayres W. L. 11, 221, 227, 231, 242, 249.
- Baire** 38.
 Banach 25.
 Beer G. 217.
 Begle E. G. 260.
 Bendixson 25.
 Betti 312.
 Bing R. H. 118, 120, 171.
 Birkhoff G. D. 147, 263.
 Bolzano 1.
 Borel 7.
 Borsuk VII, 20, 72, 127, 167, 230, 259, 261, 262, 264, 275, 278, 279, 281, 282, 283, 285, 287, 289, 336, 338, 343, 347, 350, 351, 400.
 Brouwer L. E. J. VI, VII, 27, 64, 122, 143, 146, 338, 354, 358.
 Bruschiński N. 312, 395.
- Cantor** G. 5, 13, 25, 47, 54, 108.
 Čech 214, 317, 398.
- Dantzig**, van 143.
 Denjoy 143, 385.
 Dowker C. H. 262.
- Eilenberg** VII, VIII, 19, 48, 65, 76, 125, 168, 249, 274, 275, 283, 285, 305, 308, 314, 317, 321, 326, 330, 331, 334, 336, 346, 348, 352, 389, 390, 398, 401, 402, 403, 404, 406.
 Erdős 85.
 Euler 318.
- Flores 70.
 Fox R. H. 381.
 Frankl 218.
 Fréchet 1.
 Freudenthal H. 286, 395.
- Gawehn** J. 374.
 Gehman H. M. 118, 124, 210, 366.
 Gołąb 350.
- Hahn** H. 139, 161, 163, 185.
 Hall D. W. 231.
 Hallett 155.
 Hausdorff 13, 21, 81, 87, 92, 103, 166, 369.
 Harrold O. G. 214.
 Heemert, van 143.
 Heine 16.
 Hilbert 3.
 Hildebrandt 7.
 Hilgers 95.
 Hill L. S. 48.
 Hopf H. VII, 8, 11, 42, 50, 285, 297, 317, 389, 402, 428, 430, 432, 436.
 Hurewicz 25, 40, 52, 67, 68, 69, 72, 75, 76, 77, 207, 271, 274, 275, 286, 353.
- Janiszewski** 26, 83, 112, 121, 131, 138, 143, 145, 155, 353, 354.
 Jarník 381.
 Jones F. B. 82.
 Jordan VII, 79, 358, 366.
- Kampen**, van 374.
 Kelley J. L. 185.
 Kellogg O. D. 263.
 Kerékjártó 360, 387.
 Kincaid W. M. 190.
 Kline J. R. 121, 158, 174, 385.
 Knaster VI, VII, VIII, 82, 84, 85, 93, 95, 103, 115, 132, 141, 142, 143, 144, 145, 147, 163, 203, 210, 404.
 Kolmogoroff 68.
 Köpcke 95.
 Kronecker 429, 430.

Lebesgue 7, 352.
 Lefschetz VII, 3, 259, 265, 277, 289, 431.
 Leja 350.
 Lennes N. J. 79, 103, 119.
 Lubben 369.
 Lusternik 282.

Mayer W. 317.
 Mazurkiewicz 27, 58, 89, 95, 109, 115, 116, 118, 127, 128, 130, 132, 144, 145, 150, 161, 176, 180, 184, 185, 187, 209, 214, 230, 259, 343, 381.
 Menger 58, 59, 66, 69, 70, 71, 94, 112, 184, 200, 203, 207, 210, 216, 225, 227, 353.
 Miller E. W. 85.
 Moise E. E. 145.
 Moore R. L. 42, 102, 115, 118, 119, 120, 122, 163, 176, 178, 184, 187, 235, 369, 374, 380, 385.
 Mostowski 418.

Nalli Pia 161.
 Newman H. A. 182.
 Niemytzki 3.
 Nikodym O. 116.
 Nöbeling 69, 70, 216, 217.

Otto 105, 209.

Peano 186.
 Phragmén 338.
 Poincaré 318.
 Pompéju 95.
 Pontrjagin 286.

Radó 231.
 Reichelderfer 231.
 Reschovsky 215, 216.
 Riesz F. 5, 366, 385.
 Roberts J. H. 32, 57, 68, 214.
 Rosenthal 361.
 Rouché VIII, 416.
 Runge 410.

Saks S. 7.
 Schauder 263.

Scherrer W. 227.
 Schnirelman 282.
 Schönflies VI, VII, 143, 352, 363, 365, 366.
 Sierpiński 58, 81, 95, 113, 115, 119, 130, 185.
 Sikorski VIII, 51.
 Sperner 352.
 Steenrod N. E. 230, 286.
 Stone A. H. 85, 397.
 Stoilow 48.
 Straszewicz 119, 395, 397.
 Swingle P. M. 85.
 Szpilrajn-Marczewski 40.
 Szymański 112.

Tietze 259.
 Torhorst 360.
 Tumarkin 106.
 Tychonoff 3.

Ulam 19, 64, 283.
 Urysohn 8, 43, 60, 95, 115, 116, 151, 176, 180, 196, 200, 207, 348.

Victoris 82, 123, 139, 143, 317, 338.

Wada 143.
 Wallace A. D. 123, 231, 245, 252.
 Wallman 68, 353.
 Ważewski 225.
 Weierstrass VIII, 1, 15, 412.
 Whitehead J. H. C. 264.
 Whitney H. 374.
 Whyburn G. T. 42, 48, 84, 98, 117, 123, 125, 171, 179, 185, 194, 195, 196, 203, 210, 214, 223, 231, 235, 239, 241, 245, 249, 360, 365, 385.
 Wilder R. L. 166, 172, 199, 338, 361.
 Wilson W. A. 32, 132, 139.
 Wojdysławski 260.

Yoneyama 136, 143.
 Young W. H. 7, 81, 231.

Zarankiewicz 102, 176, 196, 229.
 Zippin L. 379.
 Zoratti 110, 131.

ERRATA

Vol. I (éd. 1948)

page remplacer

17₅ $f_i(Y^{-1})$

40₁₋₄

par

$f_i^{-1}(Y)$

En effet, si X n'est pas non-dense au point p et si G est un ensemble ouvert contenant p , $G \cap X$ n'est pas non-dense; il existe, par conséquent, un ensemble ouvert H satisfaisant à la condition $0 \neq H \subset \overline{G \cap X}$. Il vient (cf. § 5, III): $H = H \cdot \overline{G \cap X} \subset \overline{H \cap G \cap X}$, d'où $H \cap G \neq \emptyset$ et, comme $H \cap G \subset G \cdot \overline{G \cap X} \subset G \cdot \overline{X}$, l'ensemble $G \cdot \overline{X}$ n'est pas frontière, ce qui implique que \overline{X} n'est pas frontière au point p .

128₁₅ —
 129_{12, 13} G_0
 129₇ $X_i \subset G_i$
 129₅ $+ X_{i_n}$
 168₁₂ E_1
 168₁₁ E_1
 199¹⁰ $F_n \cdot W_n$

ajouter: $G \cdot \overline{B} = 0$
 G et ajouter: soit $G = G_0 - \overline{B}$
 $X_i \subset G_i \subset H_i$
 $+ \overline{X}_{i_n}$
 E_0, E_1
 $E_0 \cdot E_1$
 $H_n \cdot W_n$

Vol. II

54₅ (x, y)
 13₁₀ (\overline{Y}_1)
 65₄ —
 71_{6,8} —
 143, ex. 3 —
 195₁₄ n
 195₁₃ $m \leq 2^n$
 196₁ § 53
 249₆ 37

$\varphi(x, y)$
 (Y_1)
 omettre: $\dim \mathcal{G} = n$
 omettre: \mathcal{G}_j
 omettre les petites demi-circonférences, initiale et finale.
 $n+1$
 $m \leq 2^{n+1}$
 § 54, II, 13
 27

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II.

PRÉFACE AU VOLUME II	V
QUATRIÈME CHAPITRE. Espaces compacts.	
§ 37. Notion de compacité	1
I. Définition. II. Rapports aux espaces complets. III. Produits cartésiens. Sous-ensembles. IV. Théorèmes de Cantor et de Riesz. V. Familles d'ensembles ouverts. VI. Transformations continues. VII. Propriétés métriques des ensembles compacts. VIII. Invariants des transformations à petites tranches. Déplacements. Quasi-homéomorphie.	
§ 38. Espaces $2^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$	20
I. Propriétés de l'espace $2^{\mathcal{X}}$. II. Relations entre ensembles. III. Fonctions d'ensemble: $\delta(X)$ et $\rho(X, \mathcal{Y})$. IV. Familles d'ensembles. V. Ensembles irréductibles, ensembles saturés. VI. Propriétés de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. VII. Applications.	
§ 39. Fonctions et décompositions semi-continues	32
I. Semi-continuité supérieure et inférieure. II. Conditions nécessaires et suffisantes. III. Opérations sur les fonctions semi-continues. IV. Semi-continuité et fonctions de première classe de Baire. V. Décompositions semi-continues. VI. Décompositions continues. Transformations intérieures. VII. Applications aux espaces localement compacts.	
§ 40. Problèmes de la dimension (suite)	52
I. Transformations d'ordre k . II. Représentation paramétrique des espaces parfaits et compacts de dimension n sur l'ensemble \mathcal{C} de Cantor. Théorèmes de décomposition. IV. Degré n -dimensionnel. V. Noyau dimensionnel d'un espace compact. VI. Transformations à tranches de dimension k . VII. L'espace $(\mathcal{F}^r)^{\mathcal{X}}$ pour $r \geq 2 \dim \mathcal{X} + 1$. VIII. L'espace $(\mathcal{F}^r)^{\mathcal{X}}$ pour $r > \dim \mathcal{X}$. L'espace $(\mathcal{F}^r)^{\mathcal{X}}$ pour $r \leq \dim \mathcal{X}$.	
CINQUIÈME CHAPITRE. Espaces connexes.	
§ 41. Notion de connexité	79
I. Définition. Généralités. II. Opérations. III. Composantes. IV. Connexité entre ensembles. V. Quasi-composantes. VI. Espaces nulle part connexes. Espaces dispersés. VII. Séparateurs. VIII. Séparation des espaces connexes. IX. Points de séparation. X. Unicohérence. Discohérence. XI. Connexité n -dimensionnelle. XII. Connexité n -dimensionnelle entre deux ensembles.	

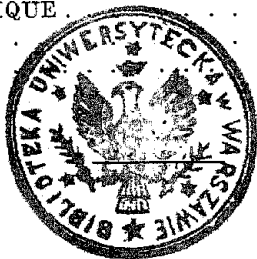
§ 42. Continus	108
I. Définition. Conséquences immédiates. II. Sous-ensembles connexes des espaces compacts. III. Sous-ensembles fermés du continu. IV. Séparation des espaces compacts. V. Arcs. Courbes simples fermées. VI. Décompositions des espaces compacts en continus. Transformations monotones. VII. Espace $2^{\mathcal{X}}$. VIII. Semi-continus. Coupures de l'espace. IX. Espaces ponctiformes.	
§ 43. Espaces irréductibles. Espaces indécomposables	131
I. Définition. Exemples. Généralités. II. Sous-ensembles connexes des espaces irréductibles. III. Sous-domaines fermés et connexes. IV. Tranches d'un espace irréductible. V. Espaces indécomposables. VI. Composants. VII. Sous-ensembles indécomposables des espaces irréductibles. VIII. Espaces irréductiblement connexes entre A et B . IX. Espaces compacts irréductiblement connexes.	
SIXIÈME CHAPITRE. Espaces localement connexes.	
§ 44. Notion de connexité locale	161
I. Points de connexité locale. II. Espaces localement connexes. III. Propriétés de la frontière. IV. Séparation des espaces l. c. V. Séparateurs irréductibles. VI. L'ensemble des points de non-connexité locale d'un continu. Continus de convergence.	
§ 45. Continus localement connexes	182
I. Connexité par arcs. II. Caractérisation des continus l. c. III. Régions et sous-continus des continus \mathcal{X} localement connexes. IV. Continus héréditairement localement connexes (h. l. e.).	
§ 46. Théorie des courbes. Ordre de l'espace en un point	200
I. Définitions et exemples. II. Généralités. III. Ordre \aleph_0 et c . IV. Espaces réguliers, espaces rationnels. V. Points d'ordre fini. Caractérisation des arcs et des courbes simples fermées. VI. Dendrites. VII. Dendrites locales.	
§ 47. Décomposition d'un continu localement connexe en éléments cycliques.	231
I. Ensembles complètement connexes par arcs. II. Éléments cycliques. III. Propriétés extensibles. IV. Courbes θ .	
SEPTIÈME CHAPITRE. Rétractes absolus. Espaces connexes en dimension n. Espaces contractiles.	
§ 48. Prolongement des fonctions continues. Rétraction	252
I. Relations τ et τ_0 . II. Opérations. III. Rétractes absolus. IV. Connexité en dimension n . Cas où $\mathcal{F}^n \tau \mathcal{G}$. V. Opérations. VI. Caractérisation de la dimension.	
§ 49. Homotopie. Contractilité	275
I. Homotopie des fonctions. II. Homotopie relative aux espaces l. c. n . III. Relation f_0 irr non $\simeq f_1$. IV. Déformation. V. Contractilité. VI. Espaces contractiles dans soi. VII. Contractilité locale.	

HUITIÈME CHAPITRE. Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$.

§ 50. Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$	291
I. Généralités sur les groupes commutatifs. II. Homomorphie. Isomorphie. III. Groupes-facteurs. IV. Opération \bar{A} . V. Indépendance linéaire, rang, base. VI. Indépendance linéaire mod \mathcal{G} . VII. Produits cartésiens. VIII. Groupe $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. IX. Groupe $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$. X. Théorèmes d'addition. XI. Rapports à la connexité entre ensembles.	
§ 51. Les groupes $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$	308
I. Généralités. II. Groupe $F(A)$. III. Groupe $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$. IV. Théorèmes d'addition. V. Relations entre les groupes-facteurs. VI. Rapports à la connexité. VII. Relation <i>f irr non</i> 1. VIII. Ensembles compacts. IX. Produits cartésiens. Rapports à l'homotopie. X. Ensembles localement connexes. XI. Transformations.	
§ 52. Espaces contractiles relativement à \mathcal{S} . Espaces univoéhérents	332
I. Contractilité relative à \mathcal{S} . II. Propriétés des espaces c. r. \mathcal{S} . III. Connexité locale et univoéhérence.	

NEUVIÈME CHAPITRE. Topologie du plan.

§ 53. Généralités sur l'espace \mathcal{E}^n	339
I. Arcs polygonaux dans \mathcal{E}^n . II. Coupures de \mathcal{S}_n . III. Coupures irréductibles. IV. Invariants.	
§ 54. La surface sphérique \mathcal{S}_2 . Problèmes qualitatifs	353
I. Espaces de Janiszewski. II. Sous-continus localement connexes de \mathcal{S}_2 . III. Ensembles élémentaires. IV. Caractérisation topologique de \mathcal{S}_2 . Conséquences. V. Prolongement de l'homéomorphie. Équivalence topologique.	
§ 55. La surface sphérique \mathcal{S}_2 . Problèmes quantitatifs. Étude du groupe \mathcal{P}^A	387
I. Généralités et notations. II. Coupures de \mathcal{S}_2 . III. Groupes \mathcal{P}^F et $\mathfrak{B}_1(F)$ pour $F = \bar{F} \subset \mathcal{S}_2$. IV. Théorèmes d'addition. V. Coupures irréductibles. VI. Groupes \mathcal{P}^A et $\mathfrak{B}_1(A)$ pour A localement connexe. VII. Groupes \mathcal{P}^G et $\mathfrak{B}_1(G)$ pour G ouvert. VIII. Multiplicité d'un ensemble par rapport à une fonction $f \in \mathcal{P}^F$ où F est fermé. IX. Multiplicité par rapport aux fonctions $f \in \mathcal{P}^G$ où G est ouvert. X. Groupe $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$. Caractérisation du groupe $\mathfrak{B}_1(G)$. XI. Accroissement du logarithme. Indice. XII. Rapport à la multiplicité. Caractéristique de Kronecker. XIII. Homéomorphies positives et négatives. Topologie orientée.	
INDEX TERMINOLOGIQUE	437
AUTEURS CITÉS	439
ERRATA	441



„MONOGRAFIE MATEMATYCZNE“

Warszawa, Śniadeckich 8

Wrocław, Politechnika, Seminarium Matematyczne

- I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, VIII+256 . \$ 3.50
 II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933, X+292, épuisé.
 III. C. Kuratowski, Topologie I, 1933, X+288 \$ 5.00
 IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, 1934, VI+194 . . . \$ 4.50
 V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, IV+332 . . . \$ 6.00
 VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, 1935, VI+500 \$ 5.00
 VII. S. Saks, Theory of the Integral, 1937, VIII+348 \$ 6.00
 VIII. S. Banach, Mechanika I, 1938, VI+234, nowe wydanie niezmiennione, 1947.
 IX. S. Banach, Mechanika II, 1938, 235-556, nowe wydanie niezmiennione, 1947.
 X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje Analityczne, 1938, VIII+432, nowe wydanie niezmiennione, 1948.
 XI. W. Sierpiński, Zasady Algebry Wyzszej, 1946, XII+438.
 XII. K. Borsuk, Geometria Analityczna w n wymiarach (w druku).
 XIII. W. Sierpiński, Działania Nieskończone, 1947, XI+503.
 XIV. W. Sierpiński, Rachunek Różniczkowy (poprzedzony badaniem funkcji elementarnych), 1947, VII+262.
 XV. K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego I, 1948, 236, nowe wydanie niezmiennione, 1949.
 XVI. E. Otto, Geometria Wykreślna (w druku).
 XVII. S. Banach, Teoria Funkcji Zmiennej Rzeczywistej (w druku).
 XVIII. A. Mostowski, Logika Matematyczna, 1948, VIII+388.
 XIX. W. Sierpiński, Teoria Liczb, nowe wydanie powiększone, 1950, VIII+544.
 XX. C. Kuratowski, Topologie I, nouvelle édition, 1948, XII+452. \$ 7.50
 XXI. C. Kuratowski, Topologie II, 1950, VIII+444 \$ 6.00
 XXII. W. Rubinowicz, Wektory i Tensory (w druku).
 XXIII. W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles (sous presse).
 XXIV. S. Banach, Mechanics (English translation) (in print).
 XXV. W. Nikliborc, Równania Różniczkowe (w druku).

EN PRÉPARATION:

- M. Biernacki, Geometria Różniczkowa.
 M. Kac and H. Steinhaus, Independent Functions.
 K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego II.
 K. Kuratowski i A. Mostowski, Kurs Teorii Mnogości.
 E. Marczewski, General Theory of Measure.
 S. Mazur, Functional Analysis.
 S. Mazurkiewicz, Rachunek Prawdopodobieństwa.
 A. Mostowski, Mathematical Logic.
 S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions (English translation).
 W. Sierpiński, Arytmetyka Teoretyczna.
 W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.
 W. Sierpiński, Teoria Mnogości, nowe wydanie powiększone.
 W. Ślesodziński, Formes différentielles symboliques et leurs applications.
 T. Ważewski, Teoria Równań Różniczkowych.
 A. Zygmund, Trigonometrical Series (New edition).

Les tomes I, III—VII, XX et XXI sont en vente chez Stechert-Hafner Inc.,
 31-37 East 10-th Street, New York, U.S.A.