MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXI

TOPOLOGIE II

ESPACES COMPACTS, ESPACES CONNEXES, PLAN EUCLIDIEN

PAR

CASIMIR KURATOWSKI
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA
SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

WARSZAWA — WROCŁAW 1950

Podpisano do druku 3. VIII. 1950 M - 01629 Nakład 1000 egz.
Ark. druk.: 28 1/2 Papier bezdrz. sat. 100 g Format 70×100 cm.

PRINTED IN POLAND
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM
PAŃSTW. ZAKŁADÓW WYDAWNICTW SZKOLNYCH

DÉDIÉ À MA FEMME

PRÉFACE AU VOLUME II.

Le manuscrit de ce volume a été presque achevé lorsque la guerre de 1939 éclata. Il n'a été sauvé que grâce à la bienveillance du Consulat Suisse à Varsovie qui a pris soin de le faire parvenir entre les mains de mon cher ami, le professeur René Wavre à Genève. En cas contraire, il aurait certainement partagé le sort de mes autres manuscrits et notices, fruits de mon travail scientifique tout entier: il serait brûlé par les agresseurs nazistes.

L'ayant recouvré après la fin de la guerre, j'ai pu m'apercevoir en parcourant la littérature scientifique plus récente, combien la Topologie s'était-elle développée, dans l'entre-temps, dans les pays où il a été possible de cultiver les sciences pendant la guerre.

Le manuscrit exigeait d'être complété et actualisé. Malheureusement, il a fallu renoncer à y faire entrer une partie de nouveaux résultats, sinon au prix d'un retard très sensible de sa publication, ce qui m'a paru particulièrement indésirable.

* * *

Ce volume, avec la seconde édition (de 1948) du volume I, forme un tout. J'ai tâché cependant de le rédiger de manière que le lecteur de la première édition du volume I n'éprouve pas de difficultés appréciables. Cette tâche n'était pas réalisable dans tous les chapitres: le § 40 par exemple, consacré à la théorie de la dimension, est intimement lié à l'exposé des éléments de cette théorie tel qu'il se trouve dans la seconde édition du volume I.

Conformément au plan adopté (voir Préface au volume I), ce volume II est consacré à l'étude des espaces plus spéciaux que ceux traités dans le volume I. Ce sont: les espaces *compacts* (Chapitre IV), *connexes* (Chapitre V), *localement connexes* (Chapitre VI), *contractiles* (*rétractes* etc., Chapitre VII) et finalement *le plan euclidien* (Chapitre IX).

L'espace y est entendu, en général, comme espace *métrique séparable*. Ce n'était peut-être pas toujours nécessaire — une bonne partie de la théorie de connexité, par exemple, se laisserait construire pour les espaces topologiques plus généraux, à savoir ne satisfaisant qu'aux axiomes I—III du § 4 — mais l'exposé restreint aux espaces métriques séparables est beaucoup plus simple, sans préjudice — me semble-t-il — aux problèmes vraiement importants et qui rentrent dans les matières de ce volume.

Il n'est pas nécessaire de lire tous les paragraphes de ce livre dans l'ordre de leur succession; il y en a qui ne sont pas indispensables pour comprendre les suivants.

C'est ainsi que le § 40 par exemple, constituant la suite des §§ 20—24 du volume I, consacrés à la théorie de la dimension, occupe une place un peu isolée. Cependant, le charme spécifique de cette théorie, la profondeur des résultats et la richesse de ses méthodes m'ont porté à la présenter dans ce livre.

Il en est peut-être de même du § 43, consacré à la théorie des continus irréductibles. Je tenais tout particulièrement à attirer l'attention du lecteur sur les ainsi dits *continus indécomposables* qui appartiennent — comme il me semble — aux figures géometriques les plus intéressantes. Leur théorie se distingue par une simplicité exceptionnelle, malgré qu'ils puissent servir à des constructions les plus singulières; ils sont en même temps les plus fréquents (au sens de catégorie de Baire) dans l'espace de tous les continus de la surface sphérique. Plus encore, les plus fréquents sont, dans cet espace, les continus tout à fait dépourvus de sous-continus décomposables, donc ayant la structure la plus pathologique qui soit jamais connue (ce sont les ainsi dits *continus héréditairement indécomposables* ou continus de Knaster).

Pas moins intéressante est la façon dont les continus indécomposables ont été découverts. Schönflies a affirmé dans l'un de ses travaux qu'un continu plan ne peut être frontière commune de trois régions differentes [1]). Ce théorème a été réfuté par Brouwer [2]). L'exemple qu'il avait défini était bien un continu indécomposable (comme on l'a montré plus tard). La question s'est présentée à son tour: est-il possible de construire une frontière commune à trois régions sans faire usage des continus indécomposables? La réponse est négative [3]): une frontière commune à trois régions (sur la surface de sphère) est nécessairement soit un continu indécomposable, soit somme de deux continus indécomposables. La question a été élucidée définitivement par Knaster, qui a réalisé les deux cas par des exemples [1]). L'ensemble de ces théorèmes a montré en même temps combien les problèmes purement géométriques de la topologie du plan sont intimement liés à la théorie des continus indécomposables et — plus généralement — des continus irréductibles.

La topologie de l'espace euclidien à n dimensions, $\mathcal{E}^n$, n'est traitée dans ce livre que de manière fragmentaire. On n'y trouvera que les théorèmes qui se laissent établir, à l'heure qu'il est, par les méthodes de la théorie des ensembles. C'est ainsi qu'il y est démontré, par exemple, que la propriété de séparer l'espace $\mathcal{E}^n$ est un invariant topologique; j'omets, par contre, le théorème de Jordan-Brouwer en n dimensions, de même que celui plus général sur l'invariance du nombre des régions en lesquelles un ensemble compact coupe l'espace $\mathcal{E}^n$ [2]).

En topologie du plan la situation est toute différente. Les méthodes ensemblistes y ont remporté un triomphe complet. L'ancienne méthode fort compliquée et pénible (datant de Jordan et Schönflies), qui procédait par approximations à l'aide des polygones, a été tout à fait éliminée. Son élimination — un des points du programme de l'École Mathématique Polonaise, poursuivi surtout dans les colonnes de Fundamenta Mathematicae — a trouvé son expression culminante dans la thèse d'Eilenberg [3]): en développant des idées de K. Borsuk, Eilenberg a montré que l'étude de l'espace $\mathcal{S}^X$, où $X \subset \mathcal{E}^2$, permet non seulement de démontrer les théorèmes connus d'une manière extrêmement simple et élégante, mais aussi de les généraliser très considérablement et d'enrichir la topologie du plan par la découverte des théorèmes nouveaux.

---

[1]) A. Schönflies, *Die Entwickelung der Lehre von Punktmannigfaltigkeiten*, II, Leipzig 1908, p. 124 (XIV).

[2]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. **68** (1910), p. 426.

[3]) Voir ma note de Fund. Math. **6** (1924), p. 138.

---

[1]) B. Knaster, *Quelques coupures singulières du plan*, Fund. Math. **7** (1925), p. 280.

[2]) Tout récemment K. Borsuk est parvenu à établir ces théorèmes aussi par les méthodes de la théorie des ensembles. Cette découverte, pas encore publiée, élargit considérablement le champ d'application des méthodes en question et permet de saisir les problèmes topologiques qui ne semblaient accessibles qu'à la méthode de l'homologie.

La méthode de l'homologie n'est pas employée dans ce livre. Pour en exposer la théorie, il faudrait écrire un volume à part; cela a été déjà fait, d'ailleurs, par d'autres auteurs (Alexandroff, Hopf, Lefschetz).

[3]) S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. **26** (1936), p. 61—112.

Ces recherches constituent le sujet du dernier paragraphe (§ 55) de ce livre. L'espace $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, étudié par Eilenberg, y est remplacé par l'espace $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire par celui des fonctions continues à valeurs complexes et qui ne s'annulent nulle part. Cela donne lieu à de petites simplifications formelles et — ce qui est plus important — permet de mettre en évidence la nature topologique de plusieurs théorèmes de la théorie des fonctions analytiques. Ainsi, le théorème de Weierstrass, par exemple, sur la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires et celui de Rouché sur le nombre algébrique des zéros d'une fonction holomorphe se laissent-ils démontrer pour les fonctions continues ne s'annulant nulle part et assujetties à certaines hypothèses de nature non analytique.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail soit par leurs précieux conseils, soit par la lecture des épreuves. Je remercie tout particulièrement MM. Knaster et Sikorski.

Casimir Kuratowski

Varsovie, le 9 Mai 1950.

QUATRIÈME CHAPITRE.

Espaces compacts.

§ 37. Notion de compacité.

I. Définition. Un espace est dit *compact* lorsque toute suite de points contient une sous-suite convergente [1]). Autrement dit: lorsque, pour tout ensemble infini A, on a

$$A' \neq 0, \tag{1}$$

A' désignant l'ensemble dérivé de A.

Le théorème classique de Bolzano-Weierstrass, d'après lequel toute suite bornée de nombres réels contient une sous-suite convergente, peut donc être énoncé comme suit:

1. *Tout intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ est compact.*

Les espaces compacts peuvent être caractérisés de la façon suivante:

2. *Pour que l'espace soit compact, il faut et il suffit que chaque suite de points qui ne converge pas vers p contienne une sous-suite convergente qui ne converge pas vers p.*

En effet, si la suite $p_1, p_2, \dots$ ne converge pas vers p, elle contient — d'après une propriété générale des espaces $\mathcal{L}^*$ (vol. I, § 14, I, 3°) — une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ dont aucune suite partielle ne converge vers p. L'espace étant supposé compact, la suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ contient une sous-suite convergente dont la limite est donc nécessairement distincte de p.

[1]) La définition de la compacité (pour les espaces $\mathcal{L}^*$) et plusieurs de ses propriétés ont été envisagées au § 14 (à partir du N° VIII).

Cette notion est due à M. Fréchet, Rendic. di Palermo **22** (1906), p. 6. Il est à remarquer que le terme „ensemble compact" est employé par différents auteurs dans un sens distinct de celui-ci, en entendant par ensemble compact un ensemble dont chaque suite de points contient une sous-suite convergente (mais pas nécessairement vers un point de l'ensemble considéré).

Les membres droits de ces égalités étant — comme nous venons de montrer — égaux, on parvient à la formule (3).

Nous en déduirons que

9. ***L'indice est un invariant des homéomorphies positives** g **transformant** $\mathcal{E}^2$ **en** $\mathcal{E}^2$*; c'est-à-dire que $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, g(p)=\mathrm{ind}_\zeta\, p$ [1].

En effet, d'après XII, 1,

$$\mathrm{ind}_\zeta\, p=\mu_Q[\zeta^0(x)-p] \quad \text{et} \quad \mathrm{ind}_{g\zeta}\, g(p)=\mu_Q[g\zeta^0(x)-g(p)]. \tag{9}$$

Par hypothèse (cf. th. 4), $g(y)-g(p)\sim y-p$ sur $\mathcal{E}^2-p$. Par conséquent, $g\zeta^0(x)-g(p)\sim\zeta^0(x)-p$ sur $\mathcal{S}$ (la courbe $\zeta^0(\mathcal{S})$ étant située dans $\mathcal{E}^2-p$). Cette homotopie implique en vertu du th. VIII, 4 que les membres droits des égalités (6) sont identiques; d'où la conclusion demandée.

Les invariants des homéomorphies positives (de $\mathcal{S}_2$ ou de $\mathcal{E}^2$) peuvent être nommés *invariants de la Topologie orientée*. Tels sont, comme nous venons de voir, la multiplicité d'un ensemble, l'indice d'un point.

Par suite, les valeurs absolues de ces invariants sont des invariants des homéomorphies arbitraires; elles sont donc des notions topologiques (bien que leurs définitions fassent usage des notions non topologiques).

Tel est aussi l'accroissement du logarithme. On a, en effet, d'après XI (3) (l'homéomorphie étant positive ou négative):

$$\Delta_{g\zeta} fg^{-1}=\mathrm{ind}_{fg^{-1}g\zeta}\, 0=\mathrm{ind}_{f\zeta}\, 0=\Delta_\zeta f.$$

[1]) Voir **Alexandroff-Hopf**, op. cit., p. 476.

INDEX TERMINOLOGIQUE DU VOLUME II.

Notations.

Termes.

AUTEURS CITÉS AU VOLUME II.

ERRATA

Vol. I (éd. 1948)

page	remplacer	par
17_5	$f_\iota(Y^{-1})$	$f_\iota^{-1}(Y)$
40_{1-4}		En effet, si X n'est pas non-dense au point p et si G est un ensemble ouvert contenant p, GX n'est pas non-dense; il existe, par conséquent, un ensemble ouvert H satisfaisant à la condition $0 \neq H \subset \overline{GX}$. Il vient (cf. § 5, III): $H = H \cdot \overline{GX} \subset \overline{HGX}$, d'où $HG \neq 0$ et, comme $HG \subset G \cdot \overline{GX} \subset G \cdot \overline{X}$, l'ensemble $G \cdot \overline{X}$ n'est pas frontière, ce qui implique que $\overline{X}$ n'est pas frontière au point p.
128_{15}	—	ajouter: $G \cdot \overline{B} = 0$
$129_{12, 13}$	G_0	G et ajouter: soit $G = G_0 - \overline{B}$
129_7	$X_\iota \subset G_\iota$	$X_\iota \subset G_\iota \subset H_\iota$
129_5	$+X_{\iota_n}$	$+\overline{X}_{\iota_n}$
168_{12}	E_1	E_0, E_1
168_{11}	E_1	$E_0 \cdot E_1$
199^{10}	$F_n \cdot W_n$	$H_n \cdot W_n$

Vol. II

page	remplacer	par
$5^{4,5}$	(x,y)	$\varphi(x,y)$
13_{10}	$(\overline{Y}_1)$	(Y_1)
65_4	—	omettre: $\dim \mathfrak{X} = n$
$71_{6,8}$	—	omettre: G_δ
143, ex. 3	—	omettre les petites demi-circonférences, initiale et finale.
195_{14}	n	$n+1$
195_{13}	$m \leqslant 2^n$	$m \leqslant 2^{n+1}$
196_1	§ 53	§ 54, II, 13
249_6	**37**	**27**

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II.

HUITIÈME CHAPITRE. **Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$.**

NEUVIÈME CHAPITRE. **Topologie du plan.**

„MONOGRAFIE MATEMATYCZNE"

Warszawa, Śniadeckich 8

Wrocław, Politechnika, Seminarium Matematyczne

I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, VIII+256 . $ 3.50
II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933, X+292, épuisé.
III. C. Kuratowski, Topologie I, 1933, X+288 . . . . $ 5.00
IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, 1934, VI+194 . . . $ 4.50
V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, IV+332 . . . . $ 6.00
VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, 1935, VI+300 . . . . $ 5.00
VII. S. Saks, Theory of the Integral, 1937, VIII+348 . . . . . $ 6.00
VIII. S. Banach, Mechanika I, 1938, VI+234, nowe wydanie niezmienione, 1947.
IX. S. Banach, Mechanika II, 1938, 235-556, nowe wydanie niezmienione, 1947.
X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje Analityczne, 1938, VIII+432, nowe wydanie niezmienione, 1948.
XI. W. Sierpiński, Zasady Algebry Wyższej, 1946, XII+438.
XII. K. Borsuk, Geometria Analityczna w *n* wymiarach (w druku).
XIII. W. Sierpiński, Działania Nieskończone, 1947, XI+503.
XIV. W. Sierpiński, Rachunek Różniczkowy (poprzedzony badaniem funkcji elementarnych), 1947, VII+262.
XV. K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego I, 1948, 236, nowe wydanie niezmienione, 1949.
XVI. E. Otto, Geometria Wykreślna (w druku).
XVII. S. Banach, Teoria Funkcji Zmiennej Rzeczywistej (w druku).
XVIII. A. Mostowski, Logika Matematyczna, 1948, VIII+388.
XIX. W. Sierpiński, Teoria Liczb, nowe wydanie powiększone, 1950, VIII+544.
XX. C. Kuratowski, Topologie I, nouvelle édition, 1948, XII+452. $ 7.50
XXI. C. Kuratowski, Topologie II, 1950, VIII+444 . . . . . . $ 6.00
XXII. W. Rubinowicz, Wektory i Tensory (w druku).
XXIII. W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles (sous presse).
XXIV. S. Banach, Mechanics (English translation) (in print).
XXV. W. Nikliborc, Równania Różniczkowe (w druku).

EN PRÉPARATION:

M. Biernacki, Geometria Różniczkowa.
M. Kac and H. Steinhaus, Independent Functions.
K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego II.
K. Kuratowski i A. Mostowski, Kurs Teorii Mnogości.
E. Marczewski, General Theory of Measure.
S. Mazur, Functional Analysis.
S. Mazurkiewicz, Rachunek Prawdopodobieństwa.
A. Mostowski, Mathematical Logic.
S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions (English translation).
W. Sierpiński, Arytmetyka Teoretyczna.
W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.
W. Sierpiński, Teoria Mnogości, nowe wydanie powiększone.
W. Ślebodziński, Formes différentielles symboliques et leurs applications.
T. Ważewski, Teoria Równań Różniczkowych.
A. Zygmund, Trigonometrical Series (New edition).

Les tomes I, III—VII, XX et XXI sont en vente chez Stechert-Hafner Inc., 31—37 East 10-th Street, New York, U.S.A.