Il vient

(12) $$g_0(x)=g_1(x) \quad \text{pour} \quad x \in g_0^{-1}(q_j).$$

Car la condition $x \in g_0^{-1}(q_j)$ implique, d'une part, que $g_0(x)=q_j$, et d'autre part, d'après (10), que $f_1(x)=q_j$, d'où (cf. (11)) $g_1(x)=q_j$.

Les formules (6), (7) et (12) impliquent que la fonction g_0+g_1 est une rétraction de $\mathfrak{X}$ en A_0+A_1.

5. *Corollaire. Pour tout continu localement connexe $\mathfrak{X}$ qui n'est pas unicohérent, il existe une transformation $f \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ qui n'admet aucun point invariant* [1]).

Remarque. Les th. 4 et 5 peuvent être généralisés en remplaçant le terme *continu localement connexe* par *espace localement et intégralement connexe par arcs* [2]).

6. *Soit $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe, unicohérent, qui n'est séparé par aucun point. Si R est une région et si* dim $E=0$, *l'ensemble $R-E$ est connexe* [3]).

Supposons par impossible que l'ensemble $R-E$ ne soit pas connexe entre p et q. Il existe par conséquent (d'après 1) un continu $C \subset E+(\mathfrak{X}-R)$ qui sépare p et q. Comme dim $E=0$, il vient $C \subset \mathfrak{X}-R$ (rappelons que C ne se réduit pas à un seul point, par hypothèse). Mais ceci est impossible, puisque $\mathfrak{X}-R$ ne sépare pas les points p et q.

7. *Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, on a* dim $\mathfrak{X} \geqslant 2$ *(à condition que $\mathfrak{X}$ contienne plus d'un point).*

Plus précisément: *on a* dc $\mathfrak{X} \geqslant 2$ (cf. § 41, XI).

8. *Corollaire. Tout continu localement connexe, unicohérent et de dimension* 1 *est une dendrite* [4]).

Car, dans le cas contraire, il contiendrait un élément cyclique C (ne se réduisant pas à un seul point). C étant unicohérent (d'après § 47, III, 5), on aurait dim $C \geqslant 2$.

[1]) Voir ma note *Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'Analysis situs*, Fund. Math. **14** (1929), p. 307.

[2]) Voir K. Borsuk, l. cit. p. 184 et 188.

[3]) Cf. R. L. Wilder, Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), p. 349. Pour le cas où $\mathfrak{X}=\mathcal{S}_2$, cf. E. Phragmèn, Acta Math. **7** (1885), p. 43 et L. E. J. Brouwer, Math. Ann. **69** (1910), p. 169.

[4]) Cf. L. Vietoris, Proc. Akad. Amsterdam 1926, p. 446.

NEUVIÈME CHAPITRE.

Topologie du plan.

§ 53. Généralités sur l'espace $\mathcal{E}^n$.

I. Arcs polygonaux dans $\mathcal{E}^n$. Tout arc composé d'un nombre fini de segments rectilignes est dit *arc polygonal.*

1. *Tout couple de points d'une région $R \subset \mathcal{E}^n$ se laisse unir dans R par un arc polygonal.*

Soit, en effet, p un point fixe de R. Il s'agit de démontrer que l'ensemble P des points qui se laissent unir à p par un arc polygonal contenu dans R est fermé-ouvert dans R (donc identique à R). Or, cela résulte facilement du fait, que x et y étant deux points appartenant à une sphère (à n dimensions) contenue dans R, si l'un d'eux appartient à P, l'autre lui appartient également.

2. *Lemme. Soit c une constante telle que $0<c<1$. Soient:*

$$R_1 \text{ le rectangle } c-1 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1-c,$$
$$R_c \text{ le rectangle } c(c-1) \leqslant x \leqslant c,\ |y| \leqslant c(1-c),$$

L le segment $0 \leqslant x \leqslant c$ de l'axe X, M et N les segments unissant le point $(0,0)$ respectivement au contour F_c de R_c et au contour F_1 de R_1 et formant avec l'axe X l'angle θ, respectivement l'angle $\theta+\pi$, où θ est donné d'avance et où $0<\theta<\pi$. Il existe alors une homéomorphie h telle que

$$h(R_1)=R_1, \quad h(L)=M \quad \text{et} \quad h(x,y)=(x,y) \quad \text{pour} \quad (x,y) \in F_1+N.$$

Soit φ une fonction continue croissante telle que

(1) $$\varphi(0)=\theta, \quad \varphi(\theta+\pi)=\theta+\pi, \quad \varphi(2\pi)=\theta+2\pi.$$

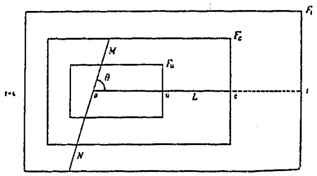
Considérons la fonction $g(a,u)$ définie comme suit:

(2) $$g(a,u)=\begin{cases} \varphi(a) & \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant c \\ \dfrac{1}{1-c}[a(u-c)+\varphi(a)(1-u)], & c \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

On constate facilement que:

1° $g(2\pi,u)-g(0,u)=2\pi$,

2° $g(\alpha,u)$ est une fonction croissante de α pour u fixe,



3° $g(\alpha,0)=\varphi(\alpha)$, $g(\alpha,1)=\alpha$,

4° $g(\theta+\pi,u)=\theta+\pi$.

Désignons, de façon générale, par R_u le rectangle

$$u(c-1)\leqslant x\leqslant u, \quad |y|\leqslant u(1-c)$$

et par F_u sa frontière. Il vient

$$(3) \qquad R_1=\sum_{0\leqslant u\leqslant 1} F_u, \quad \text{où} \quad F_u\cdot F_{u'}=0 \quad \text{pour} \quad u\neq u'.$$

La fonction h est définie comme suit. Soit (x,y) un point de R_1 différent de l'origine; soit α son argument $(=\operatorname{arc}\operatorname{tg} y/x)$ et soit $(x,y)\in F_u$. Nous désignons par $h(x,y)$ le point situé sur F_u dont l'argument est $g(\alpha,u)$. En outre, nous posons $h(0,0)=(0,0)$.

On déduit de 2° et 1° que h est une transformation homéomorphe de F_u en F_u, donc — en vertu de (3) — de R_1 en R_1.

Puis $h(L)=M$. Car pour $(x,y)\in L$, on a $\alpha=0$ et $u\leqslant c$. Donc suivant (2): $g(0,u)=\varphi(0)=\theta$ d'après (1).

Enfin, si $(x,y)\in F_1$, on a $u=1$, donc d'après 3° $g(\alpha,1)=\alpha$, d'où $h(x,y)=(x,y)$.

La même égalité a lieu si $(x,y)\in N$, car on a alors $\alpha=\theta+\pi$, d'où $g(\alpha,u)=\alpha$ d'après 4°.

3. *Lemme généralisé. Soit, dans $\mathcal{E}^n$, P le rectangle à n dimensions:*

$$c-1\leqslant x_1\leqslant 1, \quad |x_2|\leqslant 1-c, \quad \ldots, \quad |x_n|\leqslant 1-c.$$

L, M et N ayant le même sens que dans le lemme 2 (en y remplaçant x par x_1 et y par x_2), il existe une homéomorphie f telle que

$$f(P)=P, \quad f(L)=M \quad \text{et} \quad f(x)=x \quad \text{pour} \quad x\in \operatorname{Fr}(P)+N$$

(x désignant le point $x_1,\ldots,x_n$).

Soit, en effet, v_x le plus grand parmi les $n-1$ nombres:

$$u, \quad |x_3|:(1-c), \quad \ldots, \quad |x_n|:(1-c),$$

u étant défini par la condition: $(x_1,x_2)\in F_u$.

Le point $(y_1,\ldots,y_n)=f(x_1,\ldots,x_n)$ est défini comme suit: (y_1,y_2) est le point situé sur F_u dont l'argument est $g(\alpha,v_x)$ et où α désigne l'argument de (x_1,x_2); en outre $y_3=x_3,\ldots,y_n=x_n$; enfin $f(0)=0$.

Étant donné un système de $n-2$ nombres $x_3^0,\ldots,x_n^0$, désignons par $P_{x_3^0\ldots x_n^0}$ la section de P composée des points $x_1,\ldots,x_n$ tels que $x_3=x_3^0,\ldots,x_n=x_n^0$.

L'ensemble des points de $P_{x_3^0\ldots x_n^0}$ tels que $(x_1,x_2)\in F_u$ (u étant donné en avance) sera désigné par $P_{x_3^0\ldots x_n^0 u}$.

On constate aussitôt que, lorsque x parcourt l'ensemble $P_{x_3^0\ldots x_n^0 u}$, v_x est une constante. En conséquence (cf. 1° et 2°), la fonction f transforme cet ensemble en lui-même de façon homéomorphe. Comme d'autre part,

$$P=\sum P_{x_3\ldots x_n u},$$

la sommation étant étendue aux systèmes $x_3\ldots x_n u$ tels que

$$|x_3|\leqslant 1-c, \quad \ldots, \quad |x_n|\leqslant 1-c, \quad 0\leqslant u\leqslant 1,$$

et les sommandes étant disjoints, — on en conclut que f est une homéomorphie telle que $f(P)=P$.

Sur le plan X_1X_2, on a $v_x=u$; de sorte que la fonction f coïncide avec h. Par conséquent, $f(L)=M$ et $f(x)=x$ pour $x\in N$.

Soit, enfin $x\in \operatorname{Fr}(P)$. Il s'agit de prouver que $f(x)=x$. Or, la frontière de P se compose des points x tels que $(x_1,x_2)\in F_1$, ainsi que des x pour lesquels on a soit $|x_3|=1-c,\ldots,$ soit $|x_n|=1-c$. Si $(x_1,x_2)\in F_1$, on a $u=1$, d'où $v_x=1$, donc $f(x)=x$ d'après 3°. On parvient à la même conclusion si $|x_j|=1-c$ pour un indice $j\geqslant 3$.

4. *Théorème*[1]). *Tous les arcs polygonaux contenus dans l'espace $\mathcal{E}^n$ sont topologiquement équivalents; c'est-à-dire qu'à tout couple d'arcs polygonaux correspond une homéomorphie de $\mathcal{E}^n$ en $\mathcal{E}^n$ qui transforme l'un de ces arcs en l'autre.*

Procédons par induction suivant le nombre m des côtés de l'arc polygonal considéré. Le théorème étant évident pour $m=1$ (segment rectiligne!), admettons qu'il soit vrai pour $m-1$ $(m\geqslant 2)$. Soit $A=a_0a_1\ldots a_{m-1}a_m$ un arc polygonal. Il est évidemment légitime d'admettre que le point a_{m-1} coïncide avec l'origine des axes, que le côté $a_{m-1}a_m$ est situé sur l'axe X_1, $a_{m-2}a_{m-1}$ sur le plan X_1X_2

[1]) Pour une généralisation de ce théorème aux arcs arbitraires (où $n=2$), voir § 54, V, 2.

et que $\theta = \sphericalangle a_{m-2}a_{m-1}a_m < \pi$. Soit $c = |a_m - a_{m-1}|$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre tel que le rectangle P (à n dimensions) défini par les conditions

$$-\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant c+\varepsilon, \quad |x_2| \leqslant \varepsilon, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqslant \varepsilon,$$

est disjoint de l'arc $a_0 a_1 \ldots a_{m-2}$.

En admettant, pour simplifier les notations, que $c+\varepsilon=1$, on peut poser dans le lemme 3: $L = a_{m-1}a_m$ et $N = P \cdot a_{m-2}a_{m-1}$ et on peut désigner par M le prolongement rectiligne de $a_{m-2}a_{m-1}$ à partir de a_{m-1} jusqu'à F_c. Considérons l'homéomorphie f envisagé dans le lemme 3 et désignons par h la transformation de $\mathcal{E}^n$ en $\mathcal{E}^n$ définie par les conditions:

$$h(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in P, \quad h(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{E}^n - P.$$

Comme $f(x) = x$ sur la frontière de P, h est continue et, comme $f(P) = P$, h est une homéomorphie transformant $\mathcal{E}^n$ en $\mathcal{E}^n$. De plus, h transforme l'arc A en l'arc polygonal $B = a_0 a_1 \ldots a_{m-1} + M$ à $m-1$ côtés, car la condition $f(x) = x$ pour $x \in N$ implique que $h(x) = x$ pour $x \in a_0 \ldots a_{m-1}$, et comme $f(a_{m-1}a_m) = M$, il vient $h(A) = B$.

Le théorème étant supposé vrai pour B, il l'est aussi pour A.

Voici plusieurs conséquences du th. 4.

5. *A étant un arc polygonal, on a*

$$A = \prod_{k=1} F_k, \quad \text{où} \quad F_{k+1} \subset \operatorname{Int}(F_k) \quad \text{et} \quad F_k \underset{\text{top}}{=} \underset{x}{E}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1).$$

En vertu du th. 4, la démonstration se réduit au cas où A est un segment rectiligne. Mais, dans ce cas, la démonstration est immédiate; on peut représenter, en effet, tout segment comme produit d'une suite infinie d'ellipsoïdes décroissants.

6. *A étant un arc polygonal, on a $\mathcal{E}^n - A \underset{\text{top}}{=} \mathcal{E}^n - (0)$. De plus, on peut admettre que l'homéomorphie en question ne diffère de l'identité que dans l'entourage de A.*

En effet, A étant un segment de droite et les ensembles F_k du th. 5 étant supposés des ellipsoïdes, soit K_m la sphère $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1/m$. En transformant $\mathcal{E}^n - F_1$ en $\mathcal{E}^n - K_1$ et, de façon générale, $F_m - F_{m+1}$ en $K_m - K_{m+1}$, on définit facilement une transformation homéomorphe de $\mathcal{E}^n - A$ en $\mathcal{E}^n - (0)$.

7. *Accessibilité rectilinéaire. Soient: A un arc polygonal, R une région $\subset \mathcal{E}^n$, $p \in A \subset R$ et $q \in R - A$. Il existe un arc polygonal B tel que $p, q \in B \subset R$ et $AB = p$.*

En entourant le point p d'une sphère suffisamment petite, on constate aussitôt qu'il existe dans cette sphère un segment rectiligne $pq' \subset R$ n'ayant que le point p en commun avec A. D'après 6, $\mathcal{E}^n - A$ est une région. Donc $R - A$ l'est également (puisque $R - A = R \cdot (\mathcal{E}^n - A)$ et $R + (\mathcal{E}^n - A) = \mathcal{E}^n$, cf. § 52, II, 2). Il existe donc, en vertu de 1, un arc polygonal $q'q \subset R - A$. On désignera par B un arc pq extrait de $pq' + q'q$.

Appliqués à l'espace $\mathcal{S}_n$, les th. 5—7 conduisent à l'énoncé:

8. *$a_0, \ldots, a_m$ étant un système de points extraits d'une région $R \subset \mathcal{S}_n$, il existe un arc A et une région R^* tels que*

1° $a_0, \ldots, a_m \in A \subset R^*$, $\overline{R^*} \subset R$,

2° $\mathcal{S}_n - A \underset{\text{top}}{=} \mathcal{E}^n$,

3° $\overline{R^*} \underset{\text{top}}{=} \underset{x}{E}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1)$, $R^* \underset{\text{top}}{=} \mathcal{E}^n$ et $\operatorname{Fr}(R^*) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_{n-1}$.

En effet, en tenant compte de 1 et 7, on constate (par induction) qu'étant donné un système de points $a_0, \ldots, a_m$ dans une région $R \subset \mathcal{E}^n$, il existe dans R une ligne polygonale contenant ces points. On en conclut — en considérant $\mathcal{S}^n$ comme l'espace $\mathcal{E}^n$ augmenté du point à l'infini — qu'il existe un arc A tel que $a_0, \ldots, a_m \in A \subset R$, et une homéomorphie h de $\mathcal{E}^n - A$ en $\mathcal{E}^n - (0)$ laissant invariant, conformément à 6, le point à l'infini; h détermine donc une homéomorphie de $\mathcal{S}_n - A$ en $\mathcal{S}_n - (0)$; le dernier ensemble étant homéomorphe à $\mathcal{E}^n$, la condition 2° se trouve établie.

Le reste du théorème se déduit de 5.

II. Coupures de $\mathcal{S}_n$[1]. D'après le th. 2' du § 49, III, la dimension de connexité de $\mathcal{S}_n$, ainsi que de $\mathcal{E}^n$ est n. Autrement dit, aucun ensemble fermé de dimension $\leqslant n-2$ ne sépare ces espaces. Nous allons démontrer à présent qu'aucun ensemble de dimension $\leqslant n-2$ (qu'il soit fermé ou non) *ne les coupe*. Plus précisément:

1. *Théorème de Mazurkiewicz*[2]. *Soit R une région de $\mathcal{E}^n$ (ou de $\mathcal{S}_n$). Si $\dim A \leqslant n-2$, $R - A$ est un semi-continu.*

2. *Lemme. Soit $S = p_0 \ldots p_n$ un simplexe à n dimensions. Si $E \subset \overline{S} - \overline{p_1 \ldots p_n} - p_0$ et $\dim E \leqslant n-2$, il existe un sous-continu de $\overline{S} - E$ unissant p_0 à $p_1 \ldots p_n$.*

[1] Pour les th. 3—11, cf. K. Borsuk, *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. **106** (1932), p. 239. Cf. aussi du même auteur Monatsh. Math.-Phys. **38** (1931), p. 381, ainsi que P. Alexandroff, *Dimensionstheorie* § 5, Math. Ann. **106** (1932), p. 218.

[2] Fund. Math. **13** (1929), p. 211.

Posons, en effet,

$$Q_i = p_0 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n \quad \text{et} \quad G_i = \bar{S} - \bar{Q}_i - \bar{Q}_0.$$

Comme $G_1+\dots+G_n = \bar S - p_0 - \bar Q_0 \supset E$, l'inégalité $\dim E \leqslant n-2$ implique en vertu du th. 4 du § 22, III, l'existence d'un système d'ensembles ouverts $H_1,\dots,H_n$ tels que

$$E\subset H_1+\dots+H_n,\quad H_1\cdot\ldots\cdot H_n=0,\quad H_i\subset G_i,\quad \text{d'où}\quad H_i\cdot\bar Q_i=0.$$

On en conclut en vertu du th. 8 du § 23, II, que l'ensemble $H_1+\dots+H_n$ ne sépare pas $\bar S$ entre p_0 et Q_0. Il existe donc un continu unissant p_0 à Q_0 dans $\bar S-(H_1+\dots+H_n)\subset \bar S - E$.

Le lemme établi, on en déduit que, $\mathcal{Q}_n$ désignant le sphéroïde $\underset{x}{E}[|x|\leqslant 1]$ de $\mathcal{E}^n$ et p_N et p_S désignant ses pôles, aucun sous-ensemble A de $\mathcal{Q}_n - p_N - p_S$ de dimension $\leqslant n-2$ ne coupe $\mathcal{Q}_n$ entre p_N et p_S. En effet, f étant une transformation continue de $\bar S$ en $\mathcal Q_n$, telle que

$$f(\bar S)=\mathcal Q_n,\quad f(p_0)=p_N,\quad f^{-1}(p_S)=\bar Q_0$$

et que $f|\bar S - p_0 - \bar Q_0$ est une homéomorphie, l'ensemble $E=f^{-1}(A)$ satisfait aux conditions du lemme. C désignant un continu tel que

$$p_0\in C\subset \bar S - E \quad\text{et}\quad CQ_0 \neq 0,$$

$f(C)$ est un continu unissant p_N à p_S dans $\mathcal Q_n - A$.

De là résulte qu'aucun ensemble de dimension $\leqslant n-2$ ne coupe $\mathcal E^n$ entre deux points a et b; car il ne coupe pas le sphéroïde de centre $\frac12(a+b)$ et de diamètre $|a-b|$ entre a et b.

Soient, enfin, R une région de $\mathcal E^n$, $a,b\in R$ et $\dim A\leqslant n-2$. D'après I, 8, il existe une région $R^*\subset R$ homéomorphe à $\mathcal E^n$ et contenant a et b. Comme nous venons de prouver, il existe un continu unissant a et b dans R^*-A, donc dans $R-A$.

3. *Soient* $F=\bar F\subset \mathcal S_n \neq F$ *et* $f\in \mathcal S_{n-1}^F$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1° $f\simeq 1$, *c'est-à-dire que* f *est homotope à l'unité*,

2° f *admet une extension sur* $\mathcal S_n$,

3° f *admet une extension sur* $\mathcal S_n$ *privé d'un seul point.*

L'implication 1°→2° résulte directement du th. 7 du § 49, II, et l'implication 2°→3° est évidente. Reste à démontrer que 3°→1°. Or, soient $f\subset g\in \mathcal S_{n-1}^{\mathcal S_n - p}$ et $p\in\mathcal S_n - F$. L'ensemble $\mathcal S_n - p$ étant contractile dans soi (en tant qu'homéomorphe à $\mathcal E^n$), on a $g\simeq 1$ (cf. § 49, VI, 2 (3)), d'où $f\simeq 1$.

4. *Soient* $p\neq q$, $f\in \mathcal S_{n-1}^{\mathcal S_n - p - q}$ *et* $F=\bar F\subset \mathcal S_n - p - q$. *Si* F *n'est pas une coupure entre* p *et* q, *on a* $f|F\simeq 1$.

Soit, en effet L un arc polygonal tel que $p,q\in L\subset \mathcal S_n - F$. En tant qu'homéomorphe à $\mathcal E^n$ (cf. I, 8,2°), $\mathcal S_n - L$ est contractile dans soi. Donc $(f|\mathcal S_n - L)\simeq 1$, d'où $f|F\simeq 1$.

5. *Soient* $p\neq q$, $f\in\mathcal S_{n-1}^{\mathcal S_n-p-q}$ *et* f *non* $\simeq 1$. *Si* X *sépare* p *et* q, *on a* $f|X$ *non* $\simeq 1$.

En effet, en tant que séparateur entre p et q, X contient un séparateur fermé F entre ces points (§ 16, VI). On a donc

$$\mathcal S_n = A+B,\quad p\in A=\bar A,\quad q\in B=\bar B\quad\text{et}\quad AB=F.$$

Sans restreindre la généralité, on peut admettre que p est le pôle nord de $\mathcal S_n$, q le pôle sud et que A est contenu dans l'hémisphère fermée du nord. Admettons que

$$f|X\simeq 1,\quad\text{d'où}\quad f|F\simeq 1,\quad\text{donc}\quad (f|F)\subset g\in \mathcal S_{n-1}^{\mathcal S_n},$$

d'après 3. En posant

$$f^*(x)=\begin{cases} g(x) & \text{pour } x\in A,\\ f(x) & \text{pour } x\in B-q,\end{cases}$$

il vient $(f|\mathcal S_{n-1})\subset f^*\in\mathcal S_{n-1}^{\mathcal S_n - q}$ puisque $\mathcal S_{n-1}\subset B$. Il en résulte d'après 3 que $f|\mathcal S_{n-1}\simeq 1$. L'ensemble $\mathcal S_n-p-q$ étant déformable dans soi en $\mathcal S_{n-1}$ (cf. § 49, IV, ex. 2), il vient $f\simeq 1$ d'après § 49, IV, 1.

6. *Corollaire. Désignons par* p_N *et* p_S *les pôles, nord et sud, de* $\mathcal S_n$ *et par* $r(x)$, *où* $p_N\neq x\neq p_S$, *la projection de* x *sur l'équateur* $\mathcal S_{n-1}$ *effectuée le long des méridiens. Pour qu'un sous-ensemble fermé* [1]) F *de* $\mathcal S_n - p_N - p_S$ *soit une coupure entre les pôles, il faut et il suffit que* $r|F$ *non* $\simeq 1$.

Il ne s'agit que de constater que r non $\simeq 1$. Or, pour $x\in\mathcal S_{n-1}$, on a $r(x)=x$; donc (cf. § 49, I, 9) $r|\mathcal S_{n-1}$ non $\simeq 1$ et à plus forte raison r non $\simeq 1$.

7. *Lemme. Toute fonction* $f\in\mathcal Y^{\mathcal S_{n-1}}$ *admet une extension* $f^*\in\mathcal Y^{\mathcal Q_n-(0)}$.

On n'a qu'à poser $f^*(x)=f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ pour $0\neq x\in\mathcal Q_n$.

---

[1]) Pour $n=2$, l'hypothèse que F soit fermé peut être omise, voir § 55, II, 1.

8. *Lemme. Soient: R une région $\subset \mathcal{S}_n$, $p, q \in R$ et $f \in \mathcal{Y}^{\bar{R}-p}$. Il existe une fonction g telle que $f|\mathrm{Fr}(R) \subset g \in \mathcal{Y}^{\bar{R}-q}$.*

D'après I, 8, il existe une région R^* telle que

$$p, q \in R^*, \quad \overline{R^*} \subset R, \quad \overline{R^*} \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{Q}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}(R^*) \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{S}_{n-1}.$$

Soit, conformément à 7, h une extension de la fonction $f|\mathrm{Fr}(R^*)$ sur $\overline{R^*}-q$. Il reste à poser:

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{pour } x \in \overline{R^*}-q \\ f(x) & \text{pour } x \in \bar{R}-R^*. \end{cases}$$

9. *Soient $F = \bar{F} \subset \mathcal{S}_n$ et $f \in \mathcal{S}_{n-1}^F$. Il existe un ensemble fini $A \subset \mathcal{S}_n - F$ et une extension $f^* \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n - A}$ de f* [1]).

Plus précisément, *il existe un système fini (vide ou non) de composantes (différentes) $R_0, \dots, R_k$ de $\mathcal{S}_n - F$ tel que:*

1^0 *pour aucun $j \leqslant k$, on n'a $f|\mathrm{Fr}(R_j) \simeq 1$,*

2^0 $k \neq 0$,

3^0 *E désignant un système de points $p_0, \dots, p_k$, où $p_j \in R_j$, il existe une extension $f^* \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n - E}$ de f.*

$\mathcal{S}_{n-1}$ étant un rétracte absolu de voisinage, f admet une extension sur un entourage de F, donc sur un polytope contenant F. Il existe donc un complexe (simple fermé) $T_1, \dots, T_r$ tel que $\mathcal{S}_n = \bar{T}_1 + \dots + \bar{T}_m + \dots + \bar{T}_r$ et $\dim T_j = n$, ainsi qu'une extension $f_1 \in \mathcal{S}_{n-1}^P$ de f, où $P = \bar{T}_1 + \dots + \bar{T}_m$. Soit $Q = \mathrm{Fr}(T_{m+1}) + \dots + \mathrm{Fr}(T_r)$. Donc $\dim Q \leqslant n-1$. La sphère $\mathcal{S}_{n-1}$ étant localement et intégralement connexe en dimensions $< n-1$ (cf. § 48, V, 2), f_1 admet une extension $f_2 \in \mathcal{S}_{n-1}^{P+Q}$ (d'après § 48, IV, 1'). Soit a_j le centre de T_j. Posons $A = (a_{m+1}, \dots, a_r)$. D'après 8, la fonction $f_2|\mathrm{Fr}(T_j)$ admet (pour tout $j > m$) une extension $f_{2,j} \in \mathcal{S}_{n-1}^{\bar{T}_j - a_j}$. La fonction f_3 identique à f_2 sur $P+Q$ et à $f_{2,j}$ sur $\bar{T}_j - a_j$, où $j = m+1, \dots, r$, est une extension de f, et on a $f_3 \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n - A}$.

La première partie du théorème se trouve ainsi établie.

Soit $B = (b_0, \dots, b_k)$ un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n - F$ tel que $f \subset g \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n - B}$ et que B est irréductible par rapport à cette propriété, c'est-à-dire que f n'admet aucune extension sur $\mathcal{S}_n - B + b_j$, quel que soit $j \leqslant k$.

Soit R_j la composante de $\mathcal{S}_n - F$ qui contient b_j. Nous allons démontrer que $R_i \neq R_j$ pour $i \neq j$.

[1]) Voir, par exemple, S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 280.

Supposons, par contre, que $b_0, b_1 \in R_0$. L'ensemble $R_0 - (b_2, \dots, b_k)$ étant une région (cf. 1), soit, conformément à I, 8, R^* une région telle que:

$$b_0, b_1 \in R^*, \quad \overline{R^*} \subset R_0 - (b_2, \dots, b_k), \quad \overline{R^*} \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{Q}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}(R^*) \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{S}_{n-1}.$$

Il vient d'après 7

$$[g|\mathrm{Fr}(R^*)] \subset g_1 \in \mathcal{S}_{n-1}^{\overline{R^*} - b_1}.$$

Mais alors la fonction g^* identique à g sur $\mathcal{S}_n - R^* - B$ et à g_1 sur $\overline{R^*} - b_1$ est une extension de f sur $\mathcal{S}_n - (b_1, \dots, b_k)$, contrairement à la définition de B.

En supposant, contrairement à 1^0, que $f|\mathrm{Fr}(R_j) \simeq 1$, il existerait d'après 3 une extension $h \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n}$ de $f|\mathrm{Fr}(R_j)$. Mais alors la fonction g^* identique à g sur $\mathcal{S}_n - R_j - B$ et à h sur $\bar{R}_j$ serait une extension de f sur $\mathcal{S}_n - B + b_j$, ce qui est impossible.

Si l'on supposait que $k = 0$, on aurait $B = b_0$, d'où $g \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n - b_0}$, mais alors f admettrait une extension sur l'espace $\mathcal{S}_n$ tout entier en raison du th. 3.

Pour établir 3^0, posons conformément à 8:

$$g|\mathrm{Fr}(R_j) \subset f_j \in \mathcal{S}_{n-1}^{\bar{R}_j - p_j}.$$

Il suffit de désigner par f^* la fonction identique à g sur $\mathcal{S}_n - (R_0 + \dots + R_k)$ et à f_j sur $\bar{R}_j - p_j$ pour $j = 0, \dots, k$.

10. *Théorème de Borsuk* [1]). *Soit $F = \bar{F} \subset \mathcal{S}_n \neq F$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1^0 *$\mathcal{S}_n - F$ est connexe,*

2^0 *$\mathcal{S}_{n-1}^F$ est connexe,*

3^0 *F est contractile relativement à $\mathcal{S}_{n-1}$,*

4^0 *$\mathcal{S}_{n-1}^F = \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n}|F$.*

L'équivalence $2^0 \equiv 3^0$ résulte du th. 2 du § 49, V. L'équivalence $3^0 \equiv 4^0$ résulte du th. 3. L'implication $3^0 \rightarrow 1^0$ résulte du th. 6. Reste à démontrer que $1^0 \rightarrow 4^0$. Admettons donc que F n'est pas une coupure et que $f \in \mathcal{S}_{n-1}^F$. L'ensemble $\mathcal{S}_n - F$ étant une région, on a d'après 9, 2^0, $f \subset f^* \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n}$.

[1]) Voir p. 343, renvoi 2.

11. *Si aucun de deux ensembles fermés F_0 et F_1 n'est une coupure entre les points p et q et si* $\dim(F_0 \cdot F_1) \leqslant n-3$, *$F_0+F_1$ n'est non plus une coupure entre ces points*[1].

En admettant que $p=p_N$ et $q=p_S$, on a, d'après 6, $r|F_0 \simeq 1$ et $r|F_1 \simeq 1$, et il vient en vertu du § 49, II, 9, $r|F_0+F_1 \simeq 1$, d'où la conclusion en raison du th. 6.

III. Coupures irréductibles. 1. *Soient* $f \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n-p-q}$, f *non* $\simeq 1$ *et* $F=\overline{F} \subset \mathcal{S}_n-p-q$. *Pour que F soit une coupure irréductible de $\mathcal{S}_n$ entre p et q, il faut et il suffit que $f|F$ irr non $\simeq 1$.*

Autrement dit, la condition: F est une coupure entre p et q tandis qu'aucun $A=\overline{A} \subset F \neq A$ n'en est une, équivaut à la condition: $f|F$ *non* $\simeq 1$ tandis que $f|A \simeq 1$ pour tout $A=\overline{A} \subset F \neq A$.

C'est une conséquence directe de II, 4 et 5.

Remarque. Si $p=p_N$ et $q=p_S$, on peut substituer à f la fonction r du corollaire 6 du N° II.

2[2]. *Soit* $F=\overline{F} \neq \mathcal{S}_n$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1° *F est une coupure irréductible entre deux points,*

2° *F est la frontière commune de deux composantes de $\mathcal{S}_n-F$,*

3° *il existe une fonction $f \in \mathcal{S}_{n-1}^F$ telle que f irr non $\simeq 1$.*

L'équivalence $1° \equiv 2°$ résulte du th. 1 du § 44, V, et l'implication $1° \rightarrow 3°$ résulte du th. 1. Reste à démontrer que $3° \rightarrow 2°$. Soit donc $f \in \mathcal{S}_{n-1}^F$ et f *irr non* $\simeq 1$. Comme f *non* $\simeq 1$, il existe deux composantes $R_0 \neq R_1$ de $\mathcal{S}_n-F$ telles que $f|\mathrm{Fr}(R_j)$ *non* $\simeq 1$ pour $j=0,1$ (cf. II, 9, 2° et II, 3, 2°). Il vient $F=\mathrm{Fr}(R_j^{*})$, car on aurait autrement $f|\mathrm{Fr}(R_j) \simeq 1$ en vertu de la condition f *irr non* $\simeq 1$.

3. *F étant une coupure irréductible fermée entre p et q, F n'est séparé par aucun sous-ensemble fermé de dimension $\leqslant n-3$*[3].

C'est une conséquence directe de II, 11.

Nous en déduirons l'application suivante:

[1] Pour $n=2$, on peut remplacer l'hypothèse que l'ensemble $F_0 \cdot F_1$ s'annule par celle de sa connexité. Voir § 54, I, 6. Pour $n=3$, le th. 11 résulte de l'unicohérence de $\mathcal{S}_3$, voir § 52, II, 3.

[2] S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 104.

[3] Cf. P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932), p. 227, et ma note dans Ann. Soc. Polon. Math. **16** (1937), p. 220. Le th. 3 remonte à P. Urysohn (cf. son mémoire de Fund. Math. **7**, 1925, p. 96 et **8**, 1926, p. 312).

4. *Soient: C un continu $\subset \mathcal{S}_n$, R une région-composante de $\mathcal{S}_n-C$ et $F=\overline{F} \subset \mathrm{Fr}(R)$. Si* $\dim F \leqslant n-3$ *et si $C-F$ est connexe,* $\mathrm{Fr}(R)-F$ *l'est également.*

Supposons que $\mathrm{Fr}(R)-F$ ne soit pas connexe, donc que

$$\mathrm{Fr}(R)-F=M+N, \quad \overline{M} \cdot N+\overline{N} \cdot M=0, \quad M \neq 0 \neq N.$$

Posons $K=\mathcal{S}_n-R$. Il vient

$$K=\mathrm{Fr}(R)+(\mathcal{S}_n-\overline{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_n-\overline{R}=B_1+B_2+\ldots$$

une série (infinie, finie ou nulle) de régions-composantes de $\mathcal{S}_n-\overline{R}$. D'après le th. 2 du § 44, V, $\mathrm{Fr}(B_i)$ est une coupure irréductible de $\mathcal{S}_n$. La formule

$$\mathrm{Fr}(B_i) \subset \mathrm{Fr}(\overline{R}) \subset \mathrm{Fr}(R)=M+F+N,$$

implique que l'on a soit $M \cdot \mathrm{Fr}(B_i)=0$, soit $N \cdot \mathrm{Fr}(B_i)=0$, car l'ensemble F, en tant que de dimension $\leqslant n-3$, n'est pas un séparateur de $\mathrm{Fr}(B_i)$, d'après 3.

Désignons par M^* l'ensemble $M+F$ augmenté de tous les B_i tels que $N \cdot \mathrm{Fr}(B_i)=0$, et par N^* l'ensemble $N+F$ augmenté de tous les autres B_i. Il vient (cf. § 44, III, 3)

$$K=M^*+N^*, \quad \overline{M^*}=M^*, \quad \overline{N^*}=N^* \quad \text{et} \quad M^* \cdot N^*=F.$$

Comme

$$M+N \subset \mathrm{Fr}(R) \subset C \subset \mathcal{S}_n-R=K,$$

il en résulte que

$$C=CM^*+CN^*, \quad F=CM^* \cdot CN^* \quad \text{et} \quad CM^* \neq C \neq CN^*,$$

ce qui prouve que $C-F$ n'est pas connexe.

IV. Invariants. La notion de coupure fermée de $\mathcal{S}_n$, ainsi que celle de coupure irréductible fermée, étant caractérisées par des conditions intrinsèques (II, 10 et III, 2, 3°), *ces notions sont des invariants topologiques*. Il en résulte, en particulier, qu'*un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ homéomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$ est une coupure irréductible de $\mathcal{S}_n$.*

De façon plus précise, on a le théorème suivant:

1. *La notion de coupure fermée est invariante par rapport aux transformations à petites tranches.*

C'est une conséquence du th. 5 du § 49, V, rapproché de II, 10, 3°.

2. *Soit $F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_n-p-q$. Si F est une coupure entre p et q, tout ensemble que l'on obtient de par F une déformation dans $\mathcal{S}_n-p-q$ est une coupure entre p et q.*

C'est une conséquence du th. 1 du § 49, IV, rapproché de II, 6.

La notion de coupure irréductible fermée étant un invariant intrinsèque, on déduit de 2 que:

3. *Aucune coupure irréductible fermée ne se laisse déformer en un vrai sous-ensemble.*

Le th. 2 entraîne aussi le théorème suivant:

4. *Théorème de balayage. Il est impossible de déformer une coupure fermée entre p et q en un seul point sans passer au cours de cette déformation soit par p, soit par q.*

En voici une autre forme du théorème de balayage [1]):

4a. *F étant un sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}^n$, toute composante bornée de $\mathcal{E}^n-F$ est balayée au cours de toute déformation de F en un seul point.*

On peut, en effet, désigner par p un point arbitraire d'une composante bornée et par q le point à l'infini.

5. *Tout ensemble $F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_n-p-q$ qui n'est pas une coupure entre p et q se laisse réduire en un seul point par une déformation effectuée dans $\mathcal{S}_n-p-q$.*

Car A désignant un arc polygonal $pq\subset\mathcal{S}_n-F$, l'ensemble $\mathcal{S}_n-A$, en tant qu'homéomorphe à $\mathcal{E}^n$ (I, 8), est contractile dans soi.

6. *La notion de séparateur est un invariant intrinsèque; c'est-à-dire, si A et B sont deux ensembles homéomorphes contenus dans $\mathcal{S}_n$ et si $\mathcal{S}_n-A$ est connexe, $\mathcal{S}_n-B$ l'est aussi.*

En effet, si $\mathcal{S}_n-B$ n'est pas connexe, il existe d'après le th. 7 du § 44, IV, un ensemble fermé $F\subset B$ tel que les conditions $F\subset H=\overline{H}\subset B$ impliquent que H est une coupure de $\mathcal{S}_n$. La notion de coupure fermée étant un invariant intrinsèque, il en résulte en vertu du même théorème que A est un séparateur de $\mathcal{S}_n$.

Remarque. La notion de coupure (non fermée) de $\mathcal{S}_2$ n'est pas un invariant intrinsèque.

[1]) K. Borsuk, Monatsh. Math.-Phys. **38** (1931), p. 383. Voir, dans un ordre d'idées analogue, S. Gołąb, *Un théorème de balayage*, Fund. Math. **12** (1928), p. 4, et F. Leja, Fund. Math. **10** (1927), p. 421.

Pour s'en convaincre, posons

$$A=\underset{xy}{E}\left\{\left(y=\sin\frac{1}{x}\right)(0<|x|<1)\right\}+(0,1)+(0,-1),$$

$$B=\underset{xy}{E}\left\{\left(y=\sin\frac{1}{x}\right)(0<x<1)\right\}+$$
$$+\underset{xy}{E}\left\{\left(y=x+\sin\frac{1}{x}\right)(0<x<1)\right\}+(0,1)+(0,-1).$$

7. *Lemme. G étant un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathcal{E}^n$, il n'existe aucune rétraction de $\overline{G}$ en* Fr(G) [1]).

En effet, il est légitime d'admettre que $G\subset\mathcal{Q}_n$ et que le point 0 appartient à G. Soit r une rétraction de $\overline{G}$ en Fr(G). En posant

$$f(x)=\begin{cases} r(x):|r(x)| & \text{pour} \quad x\in\overline{G} \\ x:|x| & \text{pour} \quad x\in\mathcal{Q}_n-G, \end{cases}$$

on définit une rétraction de $\mathcal{Q}_n$ en $\mathcal{S}_{n-1}$, contrairement au th. 2 du § 23, III.

8. *A étant un rétracte d'un sous-ensemble compact F de $\mathcal{E}^n$, le nombre des composantes de $\mathcal{E}^n-A$ ne dépasse pas celui des composantes de $\mathcal{E}^n-F$.*

Si A est un rétracte par déformation de F, ces nombres sont égaux.

Soit, en effet, r une rétraction de F en A. Soit R une composante de $\mathcal{E}^n-A$. On a donc Fr$(R)\subset A$. Il en résulte que $R-F\neq 0$, car en supposant que $R\subset F$, $r|\overline{R}$ serait une rétraction de $\overline{R}$ en $A\cdot\overline{R}=$ Fr(R), contrairement à 7.

On peut donc faire correspondre à R un point $p_R\in R-F$. Soit Q_R la composante de $\mathcal{E}^n-F$ contenant p_R. Comme $\mathcal{E}^n-F\subset\mathcal{E}^n-A$, il vient $Q_R\subset R$, d'où la première partie du th. 8.

La deuxième en résulte en vertu du th. 2.

9. *A étant un rétracte absolu de voisinage, compact et situé dans $\mathcal{E}^n$, le nombre des régions de $\mathcal{E}^n-A$ est fini.*

Si A est un rétracte absolu, ce nombre est 1, c'est-à-dire que A ne coupe pas l'espace.

En effet, en tant que rétracte d'un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathcal{E}^n$, A est un rétracte d'un polytope, donc d'un ensemble compact qui coupe l'espace en un nombre fini de régions.

[1]) K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 161.

Ce polytope peut être supposé un cube à n dimensions, si A est un retracte absolu.

10. *Pour les sous-ensembles de $\mathcal{S}_n$, la notion de point intérieur est un invariant intrinsèque.*

Il en est donc de même de la notion d'ensemble ouvert et de celle d'ensemble frontière [1]).

Soient: $A \subset \mathcal{S}_n$, G un ensemble ouvert, $p \in G \subset A$ et h une transformation homéomorphe de A en $h(A)$. Il s'agit de démontrer que $h(p)$ est un point intérieur de $h(A)$.

Soient F un ensemble fermé et P et R deux régions non vides telles que

$$(1) \qquad F \subset G - p, \quad \mathcal{S}_n - F = P + R, \quad p \in P \subset G \quad \text{et} \quad PR = 0$$

(F peut être défini, par exemple, comme l'intersection de $\mathcal{S}_n$ avec la surface d'une petite sphère de centre p).

F étant une coupure de $\mathcal{S}_n$ (entre P et R), $h(F)$ en est une aussi (cf. 6); il existe donc deux ensembles ouverts M et N tels que

$$\mathcal{S}_n - h(F) = M + N, \quad MN = 0, \quad M \neq 0 \neq N.$$

L'ensemble $h(P)$ étant connexe, on a soit $h(P) \subset M$, soit $h(P) \subset N$. Admettons que

$$(2) \qquad h(P) \subset M, \quad \text{d'où} \quad N \cdot h(P) = 0.$$

Il vient

$$\mathcal{S}_n - h(F+P) = \mathcal{S}_n - [h(F) + h(P)] = [M - h(P)] + [N - h(P)] = [M - h(P)] + N.$$

L'ensemble $F+P$ n'étant pas une coupure (puisque la région R est son complémentaire), il en est de même de $h(F+P)$. Autrement dit, l'ensemble $[M-h(P)]+N$ est connexe. Les ensembles $M-h(P)$ et N étant séparés (puisque M et N le sont), l'un d'eux est donc vide. Comme $N \neq 0$, il vient $M - h(P) = 0$, d'où $M \subset h(P)$, donc $M = h(P)$ d'après (2). L'ensemble $h(P)$ est donc ouvert.

Comme $h(p) \in h(P) \subset h(G) \subset h(A)$, $h(p)$ est un point intérieur de $h(A)$.

---

[1]) Théorème établi par Schönflies pour $n=2$; cf. Jahresber. d. Math. Ver. 1908. Pour le cas général, cf. H. Lebesgue, *Sur les correspondances entre les points de deux espaces*, Fund. Math. **2** (1921), p. 270 et *Sur le théorème de Schönflies*, Fund. Math. **6** (1924), p. 96, E. Sperner, Abh. Math. Seminar Hamburg **6** (1928), p. 265, et S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 94.

Remarque. Pour les continus localement connexes $\mathfrak{X}$, l'invariance de la notion de coupure fermée implique celle de la notion de point intérieur.

En effet, $\mathfrak{X}$ contenant un point qui ne le coupe pas (cf. § 42, IV, 5), l'invariance de coupure implique qu'aucun point de $\mathfrak{X}$ n'est un point de coupure. Il existe donc (cf. § 45, III, 1) un ensemble fermé H tel que $p \in \mathrm{Int}(H) \subset G$ et que l'ensemble $R = \mathfrak{X} - H$ est une région. En désignant par P la composante du point p dans $\mathrm{Int}(H)$ et en posant $F = H - P$, on satisfait aux conditions (1); la démonstration précédente reste valable en remplaçant $\mathcal{S}_n$ par $\mathfrak{X}$.

Ajoutons sans démonstration le théorème suivant (facile à établir) [1]):

11. *Tout ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{E}^n$ est topologiquement équivalent à l'ensemble des points rationnels de $\mathcal{E}^n$.*

Il en résulte que:

12. *Tout ensemble A frontière dans $\mathcal{E}^n$ est de dimension $<n$.*

La démonstration se réduit au cas où A se compose des points dont chacun admet au moins une coordonnée irrationnelle. En désignant par A_k l'ensemble des points de $\mathcal{E}^n$ qui ont k coordonnées rationnelles et $n-k$ irrationnelles, il vient

$$A = A_0 + \ldots + A_{n-1}, \quad \text{où} \quad \dim A_j = 0 \text{ [2])},$$

donc $\dim A \leqslant n-1$ d'après § 22, I, th. 2.

§ 54. La surface sphérique $\mathcal{S}_2$. Problèmes qualitatifs.

I. Espaces de Janiszewski. $\mathfrak{X}$ est dit un espace de Janiszewski lorsque $\mathfrak{X}$ est un continu localement connexe jouissant de la propriété suivante:

(J) *C_0 et C_1 étant deux continus dont le produit $C_0 \cdot C_1$ n'est pas connexe, la somme $C_0 + C_1$ est une coupure de l'espace.*

1. *La propriété (J) équivaut, pour les continus $\mathfrak{X}$ localement connexes, à la suivante:*

(J_0) *R étant une région, $\mathfrak{X} - R$ est contractile relativement à $\mathcal{S}$.*

---

[1]) Voir, par exemple, K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 263, ou bien Hurewicz-Wallman, *Dimension Theory*, p. 44.

[2]) Ibid. p. 147, respectivement p. 29.

$(J)\to(J_0)$. Soit, en effet, R une région. En vertu du th. 8 du § 52, I, il suffit de démontrer que toute composante C de $\mathcal{X}-R$ est contractile relativement à $\mathcal{S}$.

D'après le th. 5 du § 41, III, $\mathcal{X}-C$ est une région. Posons, conformément au th. 1 du § 45, III,

$$C=\prod_{n=1}^{\infty}(\mathcal{X}-R_n),\quad R_1\subset R_2\subset\ldots,$$

où R_n est une région et $\mathcal{X}-R_n$ est un continu localement connexe.

D'après (J), $\mathcal{X}-R_n$ est unicohérent, donc contractile relativement à $\mathcal{S}$ (d'après § 52, III, 3).

Il en résulte en vertu du th. 7 du § 52, I, que C est contractile relativement à $\mathcal{S}$.

$(J_0)\to(J)$. En effet, en admettant que C_0 et C_1 sont deux continus tels que $\mathcal{X}-(C_0+C_1)$ est une région, C_0+C_1 est, d'après (J_0), contractile relativement à $\mathcal{S}$, donc unicohérent (d'après § 52, II, 2). Mais alors $C_0\cdot C_1$ est connexe.

En posant dans (J_0): $R=0$, il vient

1'. *Tout espace de Janiszewski est contractile relativement à $\mathcal{S}$, donc unicohérent* (cf. § 52, II, 2).

D'après § 53, II, 10 (1^0 et 3^0):

2. *La surface sphérique $\mathcal{S}_2$ est un espace de Janiszewski* [1]).

Admettons à présent que $\mathcal{X}$ *est un espace de Janiszewski*. On a les théorèmes suivants (3—9):

3. *C étant un continu, $\mathcal{X}-C$ est contractile relativement à $\mathcal{S}$.*

Soient, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la suite des composantes de $\mathcal{X}-C$ et $f\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}-C}$. D'après le th. 5 du § 41, III, $\mathcal{X}-R_m$ est connexe. On a donc, d'après § 45, III, 2,

$$R_m=C_{m,1}+C_{m,2}+\ldots\quad\text{et}\quad C_{m,n}\subset\operatorname{Int}(C_{m,n+1}),$$

où $C_{m,n}$ est un continu et $\mathcal{X}-C_{m,n}$ est une région. $C_{m,n}$ étant contractile relativement à $\mathcal{S}$ en vertu de (J_0), il en est de même de R_m d'après § 52, I, 6, donc de $\mathcal{X}-C$, d'après § 52, I, 8.

[1]) La propriété (J) du plan $\mathcal{S}_2$ a été établie par Z. Janiszewski. C'est le *deuxième théorème de Janiszewski*. Voir de cet auteur *Sur les coupures du plan*, Prace Mat.-Fiz. **26** (1913), p. 55. Cf. aussi L. E. J. Brouwer, Proc. Akad. Amsterdam 1911.

La condition (J_0) et le th. 3, rapprochés du th. 2 du § 52, II, impliquent que:

4. *Si A est un continu et $\mathcal{X}-A$ est une région, A et $\mathcal{X}-A$ sont unicohérents.*

5. *Soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés ou deux ensembles ouverts. Si ces ensembles sont connexes tandis que leur produit $A_0\cdot A_1$ ne l'est pas, leur somme A_0+A_1 est une coupure de l'espace $\mathcal{X}$.*

Rapprochés du th. 3 du § 52, II, les mêmes énoncés impliquent le théorème suivant:

6. *Soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés ou deux ensembles ouverts. Si A_0+A_1 n'est pas une coupure et si les ensembles A_0 et A_1 sont connexes entre p_0 et p_1, $A_0\cdot A_1$ l'est également.*

6'. *Corollaire. Soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés ou deux ensembles ouverts. Soient C_0 et C_1 deux composantes de A_0 et de A_1 respectivement. Si le produit $C_0\cdot C_1$ n'est pas connexe, la somme A_0+A_1 est une coupure.*

Soit, en effet, p_0, p_1 un couple de points de l'ensemble $C_0\cdot C_1$. Les ensembles A_0 et A_1 sont donc connexes entre ces points. En admettant que A_0+A_1 n'est pas une coupure, $A_0\cdot A_1$ est connexe entre p_0 et p_1, c'est-à-dire (cf. § 42, II, 3 et § 44, II, 17) qu'il existe une composante Q de $A_0\cdot A_1$ qui contient p_0 et p_1. Il vient

$$Q\subset A_j,\quad\text{d'où}\quad Q\subset C_j,\quad\text{donc}\quad Q\subset C_0\cdot C_1,$$

ce qui prouve que tout couple de points de $C_0\cdot C_1$ s'y laisse unir par un ensemble connexe. $C_0\cdot C_1$ est donc connexe.

6''. *Corollaire. G étant ouvert, C une composante de $\mathcal{X}-G$ et K un continu tel que KC n'est pas connexe, $G-K$ n'est non plus connexe.*

Posons, en effet, dans 6': $A_0=\mathcal{X}-G$, $A_1=K=C_1$ et $C_0=C$. L'ensemble $C_0\cdot C_1=KC$ n'étant pas connexe, il en résulte que l'ensemble $\mathcal{X}-(A_0+A_1)=G-K$ ne l'est non plus.

En posant dans 6: $B_j=\mathcal{X}-A_j$, il vient:

7. *Soient B_0 et B_1 deux ensembles fermés ou deux ensembles ouverts. Si aucun de ces ensembles n'est une coupure entre p_0 et p_1 et si $B_0\cdot B_1$ est connexe, B_0+B_1 n'est non plus une coupure entre p_0 et p_1* [1]).

[1]) C'est — dans le cas où B_0 et B_1 sont fermés et où $\mathcal{X}=\mathcal{S}_2$ — *le premier théorème de Janiszewski*; cf. op. cit.

Les deux théorèmes de Janiszewski sont *équivalents* (si $\mathcal{X}$ est un continu localement connexe). Cf. ma note de Fund. Math. **13** (1929), p. 311.

Le th. 7 implique que:

8. *Tout ensemble fermé F qui sépare $\mathcal{X}$ irréductiblement entre deux points, p_0 et p_1, est discohérent.*

Si F est, en outre, localement connexe (et ne se réduit pas à un seul point), il est une courbe simple fermée (cf. § 44, IV, 6).

En substituant le th. 8 au th. 3 du § 53, III dans la démonstration du th. 4 du § 53, III, on en déduit le corollaire suivant:

8'. *Soient: C un continu, R une composante de $\mathcal{X}-C$ et $F=\overline{F}\subset\mathrm{Fr}(R)$. Si les ensembles F et $C-F$ sont connexes, l'ensemble* $\mathrm{Fr}(R)-F$ *l'est également.*

9. *La notion d'espace de Janiszewski est un invariant des transformations monotones.*

Autrement dit, *l'hyperespace de toute décomposition semi-continue de $\mathcal{X}$ en continus est un espace de Janiszewski.*

Soit, en effet, f une transformation monotone de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$. Soit R une région dans l'espace $\mathcal{Y}$. D'après le th. 4 du § 42, VI, $f^{-1}(R)$ est une région dans $\mathcal{X}$. L'ensemble $\mathcal{X}-f^{-1}(R)=f^{-1}(\mathcal{Y}-R)$ est donc contractile relativement à $\mathcal{S}$ (en vertu de la propriété (J)). Il en est de même de l'ensemble $ff^{-1}(\mathcal{Y}-R)=\mathcal{Y}-R$ d'après le th. 2, 2° du § 52, I.

10. *La notion d'espace de Janiszewski est réductible et extensible* [1]).

Admettons d'abord que $\mathcal{X}$ est un espace de Janiszewski. Soient: C un élément cyclique, R une région relative à C, et K et L deux continus tels que $C-R=K+L$. Il s'agit de prouver que KL est connexe.

Désignons par R_1 et K_1 la somme de toutes les composantes S de $\mathcal{X}-C$ telles que $\mathrm{Fr}(S)\subset R$ ou $\mathrm{Fr}(S)\subset K$ respectivement. Soit L_1 la somme des composantes S qui n'entrent ni dans R_1, ni dans K_1; on a dans ce cas (d'après § 47, I, 4) $\mathrm{Fr}(S)\subset L$. Il vient

$$R+R_1=\mathcal{X}-(K+K_1+L+L_1).$$

D'après la définition de K_1 et d'après § 44, III, 1, on a $\mathrm{Fr}(K_1)\subset K$. L'ensemble $K+K_1$ est donc fermé. Il en est de même de $L+L_1$. L'ensemble $R+R_1$ est donc ouvert.

[1]) Cf. ma note *Quelques applications d'éléments cycliques de M. Whyburn*, Fund. Math. **14** (1929), p. 139.

Les ensembles $R+R_1$, $K+K_1$ et $L+L_1$ étant connexes (cf. § 41, II, 2), la condition (J) implique que le produit

$$(K+K_1)(L+L_1)=KL$$

est connexe.

Admettons à présent que $\mathcal{X}$ est un continu localement connexe qui ne satisfait pas à la condition (J). Il s'agit de définir un élément cyclique C qui ne satisfasse non plus à cette condition.

Soient donc: R une région, K et L deux continus et M et N deux ensembles fermés tels que

(1) $\mathcal{X}-R=K+L$, (2) $KL=M+N$,

(3) $MN=0$, (4) $M\neq 0\neq N$.

C étant un élément cyclique, on déduit du th. 5' du § 47, I que CR est une région relative à C et que CK et CL sont des continus. De plus, d'après (1)—(3)

$$C-CR=CK+CL,\quad (CK)\cdot(CL)=CM+CN \quad\text{et}\quad (CM)\cdot(CN)=0.$$

Donc, pour prouver que la propriété de Janiszewski est extensible, il suffit d'établir l'existence d'un élément cyclique C tel que

(5) $$CM\neq 0\neq CN.$$

Désignons par A et B la somme de tous les éléments cycliques C tels que $CM\neq 0$ ou $CN\neq 0$ respectivement.

C_1 et C_2 étant deux éléments cycliques différents tels que $C_1\cdot C_2\neq 0$, le produit $C_1\cdot C_2$ se réduit à un seul point p qui coupe $\mathcal{X}$ entre C_1-C_2 et C_2-C_1 (cf. § 47, II, 4). Par suite, en supposant que

$$C_1M\neq 0\neq C_2N,\quad\text{donc}\quad C_1K\neq 0\neq C_2K$$

d'après (2), il vient $p\in K$, et de façon analogue $p\in L$. On a par conséquent, d'après (2), soit $p\in M$, soit $p\in N$, d'où:

$$\text{soit}\quad C_2M\neq 0,\quad\text{soit}\quad C_1N\neq 0.$$

L'un des deux éléments cycliques, C_1 ou C_2, satisfait donc à la double inégalité (5).

Ainsi tout revient à démontrer que

(6) $$AB\neq 0.$$

Désignons par V et W la somme de tous les éléments cycliques C tels que $CK\neq 0$ ou bien $CL\neq 0$ respectivement. D'après § 47, II, 9, V et W sont des continus, donc — d'après § 47, II, 11 — des ensembles complètement connexes par arcs; par conséquent VW (cf. § 47, I, 1) est un continu.

En raisonnant comme tout-à-l'heure, on prouve que le continu VW se compose de tous les éléments cycliques C tels que

(7) $$CK \neq 0 \neq CL.$$

Or $K+L$ étant un continu (d'après (2) et (4)), $C(K+L)$ l'est également (d'après § 47, I, 5'). Il en résulte, en vertu de (7) et (2) que $C(M+N)\neq 0$. Autrement dit, $VW=A+B$. Les ensembles A et B étant non vides (d'après (4)) et fermés d'après § 47, II, 9, et VW étant un continu, l'inégalité (6) en résulte.

11. *Corollaire. Toute dendrite est un espace de Janiszewski.*

Ce corollaire résulte aussi du th. 1 du § 46, VI.

II. Sous-continus localement connexes de $\mathcal{S}_2$. L'espace $\mathcal{X}$ envisagé dans ce N⁰ est *un espace de Janiszewski ne contenant aucun point de coupure (et contenant plus d'un point)*. En vertu de I, 2, tous les théorèmes de ce N⁰ sont applicables à $\mathcal{S}_2$ [1]).

Définition. Toute région dont la frontière est une courbe simple fermée est dite un *disque*.

1. *Théorème de Jordan* [2]). *Toute courbe simple fermée coupe l'espace en deux régions et est leur frontière commune.*

Autrement dit, *le complémentaire de toute courbe simple fermée se compose de deux disques disjoints.*

Nous allons démontrer d'abord que:

1'. *Aucun arc n'est une coupure de l'espace.*

Supposons par impossible qu'un arc L soit une coupure entre p_0 et p_1. D'après I, 1' et § 52, II, 5, L contient un continu, donc un arc L^*, qui sépare l'espace irréductiblement entre p_0 et p_1. Mais cela est incompatible avec le th. I, 8.

Le th. 1' établi, soit C une courbe simple fermée.

D'après (J), C est une coupure de l'espace.

C est la frontière commune des composantes de $\mathcal{X}-C$, car C est une coupure irréductible de $\mathcal{X}$ d'après 1' (cf. § 44, V, 1).

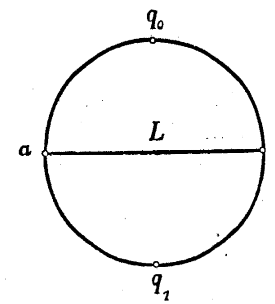
Reste à démontrer que $\mathcal{X}-C$ contient deux composantes au plus [3]).

[1]) Comme on verra dans le N⁰ III, $\mathcal{X} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_2$.

[2]) C. Jordan, *Cours d'Analyse*, Paris 1893, p. 92. Cf. L. E. J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, Math. Ann. **69** (1910), p. 169.

[3]) C'est, d'ailleurs, pour $\mathcal{X}=\mathcal{S}_2$ une conséquence directe du th. III, 6 du § 55.

Supposons, par contre, qu'il en contienne trois: R_0, R_1 et R_2. Soit L un arc qui unit deux points a et b de C, accessibles de R_2 (cf. § 45, III, 7): $L\subset R_2+a+b$. Soient aq_jb $(j=0,1)$, les deux arcs déterminés par a et b dans C:



$$aq_0b+aq_1b=C \quad \text{et} \quad aq_0b\cdot aq_1b=(a,b).$$

Soit $p_j \in R_j$. Posons $A_j=aq_jb+L$. Il vient

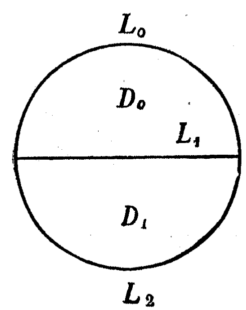
(1) $$A_0\cdot A_1=L.$$

Comme $C=\mathrm{Fr}\,(R_j)$, l'ensemble $R_0+q_j+R_1$ est connexe; donc A_{1-j} (qui en est disjoint) n'est pas une coupure entre p_0 et p_1. D'après I, 7 et (1), A_0+A_1 n'en est une non plus. Mais cela implique une contradiction, puisque $C\subset A_0+A_1$ et C est une coupure entre p_0 et p_1 d'après la définition de ces points.

2. *Théorème sur les courbes θ. C étant une courbe θ formée de trois arcs L_0, L_1 et L_2 n'ayant deux à deux que les extrémités en commun, on a*

(2) $$\mathcal{X}-C=D_0+D_1+D_2, \qquad (3) \quad \mathrm{Fr}\,(D_j)=L_j+L_{j+1},$$

où les disques D_0, D_1 et D_2 sont les composantes de $\mathcal{X}-C$ (les indices étant réduits mod 3).



En effet, d'après le th. de Jordan, la courbe fermée L_j+L_{j+1} coupe $\mathcal{X}$ en deux disques dont l'un, soit Q_j, contient l'arc L_{j+2} (diminué de ses extrémités) et l'autre, soit D_j, est disjoint de L_{j+2}. De plus,

$$\mathrm{Fr}\,(D_j)=L_j+L_{j+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}-\overline{D}_j=Q_j.$$

D_j est une composante de $\mathcal{X}-C$, car, d'une part, $D_j\subset\mathcal{X}-C$ et, d'autre part, l'inclusion $\mathrm{Fr}\,(D_j)\subset C$ implique que $\overline{D}_j-C=D_j-C$, c'est-à-dire que D_j est fermé-ouvert dans $\mathcal{X}-C$.

Reste à démontrer que $\mathcal{X}-(C+D_0+D_1)=D_2$.

Or, les formules

$$\overline{D}_0\cdot\overline{D}_1=(L_0+L_1)\cdot(L_1+L_2)=L_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{X}-\overline{D}_j=Q_j$$

impliquent en vertu de I, 7 que l'ensemble

$$\mathcal{X}-(\bar{D}_0+\bar{D}_1)=\mathcal{X}-(C+D_0+D_1)$$

est connexe. En tant que sous-ensemble connexe de $\mathcal{X}-C$ et sur-ensemble de la composante D_2 de $\mathcal{X}-C$, il coïncide avec D_2.

3. *Corollaire. Étant donnée une suite infinie convergente d'arcs $L_0, L_1, \dots$ n'ayant que leurs extrémités a et b en commun, il n'y a que tout au plus deux termes L_n tels que*

$$L_n \cdot \operatorname*{Lim}_{m=\infty} L_m \neq (a,b). \tag{4}$$

Supposons par contre qu'il existe trois indices n, soient 0, 1 et 2, qui satisfont à l'inégalité (4). Envisageons la courbe $\theta=L_0+L_1+L_2$. Pour tout $n>2$, L_n-a-b est contenu d'après 2 dans l'une des trois régions D_0, D_1 ou D_2. Il est donc légitime d'admettre qu'il existe une infinité d'indices k tels que $L_k-a-b\subset D_0$. Par conséquent

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty} L_m \subset \bar{D}_0 = D_0+L_0+L_1, \quad \text{d'où} \quad (L_2-a-b)\cdot \operatorname*{Lim}_{m=\infty} L_m=0,$$

contrairement à l'hypothèse.

4. *C étant un continu localement connexe, toute région-composante R de $\mathcal{X}-C$ jouit des propriétés suivantes:*

(i) Fr (R) *est un continu régulier ne contenant aucune courbe θ* [1],

(ii) *si C ne contient aucun point qui le coupe, R est un disque, donc* Fr (R) *est une courbe simple fermée,*

(iii) *$\bar{R}$ est un continu localement connexe.*

$\mathcal{X}$ étant contractile relativement à $\mathcal{S}$ (cf. I, 1'), l'ensemble $K=\mathrm{Fr}(R)$ est un continu (§ 52, II, 6). En admettant que K n'est pas localement connexe, il existe dans C une courbe $\theta=L_0+L_1+L_2$, ainsi que 3 continus Q_0, Q_1 et Q_2, tels que:

$$Q_j\cdot L_j \neq 0 \neq Q_j \cdot K, \tag{5}$$ $$Q_j\cdot(L_{j+1}+L_{j+2})=0, \tag{6}$$

les indices étant réduits mod 3 (cf. § 47, IV, 4).

On parvient à la même conclusion en supposant que K contient une courbe θ; on admettra alors que Q_j est un point de $L_j-(L_{j+1}+L_{j+2})$.

[1] Voir M. Torhorst, Math. Zeitschr. **9** (1921), p. 44. Cf. aussi B. v. Kerékjártó, Abh. Math. Seminar Hamburg **4** (1925), p. 167 et G. T. Whyburn, Fund. Math. **12** (1928), p. 267.

Or, soient (cf. th. 2) D_0, D_1 et D_2 les disques, composantes de $\mathcal{X}-\theta$. Comme $R\cdot\theta=0$, R est contenu dans l'un de ces disques: soit $R\subset D_0$. Donc

$$K\subset \bar{D}_0, \quad \text{d'où} \quad Q_2\cdot \bar{D}_0 \neq 0$$

en vertu de (5). D'autre part,

$$Q_2\cdot(L_2-L_0-L_1)\neq 0, \quad \text{d'où} \quad Q_2-\bar{D}_0\neq 0.$$

Donc $Q_2\cdot \mathrm{Fr}(\bar{D}_0)\neq 0$, c'est-à-dire (cf. (3)) que $Q_2\cdot(L_0+L_1)\neq 0$, contrairement à (6).

En tant que continu localement connexe dépourvu des courbes θ, K est un continu régulier suivant le th. 3 du § 47, IV.

Si C ne contient aucun point qui le coupe, Fr (R) n'en contient aucun non plus (cf. I, 8'). En tant que continu localement connexe qui n'est coupé par aucun point et qui ne contient aucune courbe θ, Fr (R) est une courbe simple fermée d'après § 47, IV, 1.

Enfin, la frontière Fr (R) étant localement connexe, $\bar{R}$ l'est également d'après le th. 4 du § 44, III.

Remarque. La frontière d'un continu localement connexe peut être un continu qui n'est pas localement connexe [1].

5. *Tout continu localement connexe C qui coupe $\mathcal{X}$ entre deux continus A et B contient une courbe simple fermée qui coupe $\mathcal{X}$ entre ces continus* [2].

En effet, Q étant la composante de $\mathcal{X}-C$ qui contient A, et R — celle de $\mathcal{X}-\bar{Q}$ qui contient B, Fr (R) est une coupure irréductible entre A et B (cf. § 44, V, 2). $\bar{Q}$ étant localement connexe d'après 4 (iii), Fr (R) l'est également (d'après 4 (i)). En tant que coupure irréductible et localement connexe, Fr (R) est une courbe simple fermée (cf. I, 8).

Rapproché du th. 2 du § 52, III, le th. 5 implique que:

5'. *Tout couple de continus disjoints peut être séparé par une courbe simple fermée.*

6. *Tout continu C qui n'est pas une coupure de l'espace est produit d'une suite de disques:*

$$C=D_1\cdot D_2 \cdot \dots \quad \text{où} \quad \bar{D}_n\subset D_{n-1}. \tag{7}$$

[1] A. Rosenthal, Math. Ztschr. **10** (1921), p. 102.
[2] Cf. R. L. Wilder, Fund. Math. **7** (1925), p. 354.

Il s'agit de démontrer que, G étant un ensemble ouvert tel que $C\subset G$, il existe un disque D satisfaisant à la condition:

(8) $$C\subset D\subset \overline{D}\subset G.$$

D'après le th. 2 du § 45, III (où $\mathcal{X}-C$ est substitué à G), il existe un continu H tel que

(9) $$\mathcal{X}-G\subset H\subset \mathcal{X}-C.$$

Soit, conformément à 5′, D un disque tel que

(10) $$C\subset D\subset \overline{D}\subset \mathcal{X}-H.$$

Il vient (8) en raison de (10) et (9).

7. *Corollaire. L'espace $\mathcal{X}$ contient une base composée de disques.*

En effet, d'après 6, à tout point p et à tout $\varepsilon>0$ correspond un disque D tel que $p\in D$ et $\delta(D)<\varepsilon$. Le corollaire en résulte en appliquant le th. de Borel-Lebesgue (§ 37, V, 2).

8. *Corollaire. R étant une région qui n'est pas une coupure de l'espace, il existe une suite de disques $\{D_n^*\}$ telle que*

(11) $$R=D_1^*+D_2^*+\dots,\quad \textit{où}\quad \overline{D_{n-1}^*}\subset D_n^*.$$

Par conséquent, *si $F=\overline{F}\subset R$, il existe un disque D tel que*

(12) $$F\subset D\subset \overline{D}\subset R.$$

Il suffit en effet de poser dans 6: $R=\mathcal{X}-C$ et $D_n^*=\mathcal{X}-\overline{D}_n$.

9. *Tout couple d'ensembles A,B, fermés, disjoints et qui ne coupent pas l'espace peut être séparé par une courbe simple fermée.*

D'après § 45, III, 1, il existe un système fini de continus disjoints $C_1,\dots,C_n$ tel que $A\subset C_1+\dots+C_n\subset \mathcal{X}-B$, et que l'ensemble $C_1+\dots+C_n$ n'est pas une coupure de l'espace. D'après § 41, III, 5, aucun des continus $C_1,\dots,C_n$ n'est une coupure.

Le théorème se réduit donc au cas où A est somme d'un système fini de continus: $A=C_1+\dots+C_n$, dont aucun n'est une coupure.

Procédons par induction. Le théorème étant vrai pour $n=1$ (d'après 6), admettons qu'il est vrai pour $n-1$.

L'ensemble C_n+B n'étant pas une coupure (cf. § 52, II, 2), il existe par hypothèse une courbe simple fermée K qui sépare l'espace entre les ensembles $C_1+\dots+C_{n-1}$ et C_n+B. Soit D le disque tel que

$$C_1+\dots+C_{n-1}\subset D\quad \text{et}\quad \mathrm{Fr}\,(D)=K.$$

Soit L un arc disjoint de B et irréductible entre $\overline{D}$ et C_n. On déduit aussitôt du th. de Janiszewski (I, 7) que le continu $E=\overline{D}+L+C_n$ ne coupe pas l'espace (cf. 1 et 1′). Il existe, par conséquent, d'après 6 une courbe simple fermée qui sépare l'espace entre E et B, donc entre A et B.

Le th. 9 admet la généralisation suivante:

9′. *Étant donné un système d'ensembles fermés et disjoints $F_0,\dots,F_n$ dont aucun ne coupe l'espace, il existe un système de disques $D_0,\dots,D_n$ tels que*

$$F_j\subset D_j\quad \textit{et}\quad \overline{D}_i\cdot\overline{D}_j=0\quad \textit{pour}\quad i\neq j.$$

En effet, la somme d'un système fini d'ensembles fermés, disjoints et dont aucun ne coupe l'espace n'étant pas une coupure (cf. § 52, II, 2), les disques $D_0,\dots,D_n$ peuvent être définis successivement de façon à satisfaire aux conditions:

$$\begin{cases} F_0\subset D_0 & \text{et}\quad \overline{D}_0\cdot(F_1+\dots+F_n)=0,\\ F_1\subset D_1 & \text{et}\quad \overline{D}_1\cdot(\overline{D}_0+F_2+\dots+F_n)=0,\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\\ F_n\subset D_n & \text{et}\quad \overline{D}_n\cdot(\overline{D}_0+\dots+\overline{D}_{n-1})=0.\end{cases}$$

10. *Théorème de Schönflies*[1]). *Si C est fermé et localement connexe et si la suite $R_1,R_2,\dots$ des régions-composantes de $\mathcal{X}-C$ est infinie, on a*

(13) $$\lim_{n=\infty}\delta(R_n)=0.$$

Supposons, par contre, que $\varepsilon>0$, $i_1<i_2<\dots$ et que $\delta(R_{i_n})>\varepsilon$ pour $n=1,2,\dots$ On peut admettre (cf. § 25, VIII) que la suite $\{R_{i_n}\}$ est convergente. Soit $r\in \operatorname{Lim}_{n=\infty} R_{i_n}$. Donc $r\in C$. Soient, conformément à 7, U et V deux disques tels que

$$r\in V,\quad \overline{V}\subset U\quad \text{et}\quad \delta(U)<\varepsilon.$$

Posons $K=\mathrm{Fr}\,(U)$ et $L=\mathrm{Fr}\,(V)$. On a donc pour n suffisamment grand

$$V\cdot R_{i_n}\neq 0,\quad \text{d'où}\quad KR_{i_n}\neq 0\neq LR_{i_n},$$

puisque $R_{i_n}-U\neq 0$.

[1]) A. Schönflies, *Bericht über die Entwickelung der Mengenlehre II*, Leipzig 1908, p. 199.

Il existe donc un arc $A_{i_n} \subset R_{i_n}$ irréductible entre K et L, c'est-à-dire, dont seules les extrémités — appelons les k_{i_n}, l_{i_n} — appartiennent à K et L respectivement.

Il est légitime d'admettre que la suite $\{A_{i_n}\}$ est convergente:

$$Z = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_{i_n}, \quad \text{d'où} \quad Z \subset C \quad \text{et} \quad ZK \neq 0 \neq ZL.$$

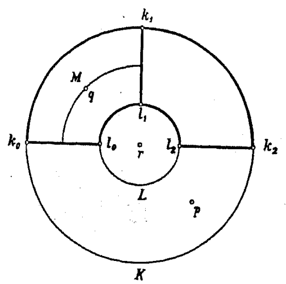
Z étant un continu, il existe un point $p \in Z-(K+L)$. Nous allons montrer que p est un point de non-connexité locale de C.

Il suffit à ce but de prouver que toute région G telle que

$$(14) \qquad p \in G \quad \text{et} \quad G \cdot (K+L) = 0$$

contient un point de C qui ne se laisse pas unir à p par un sous-continu de $C-(K+L)$.

En tant qu'entourage de p, G admet des points communs avec une infinité des termes de la suite $\{A_{i_n}\}$. Pour simplifier les notations, on peut admettre que



$$(15) \qquad GA_j \neq 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, 2.$$

Envisageons la courbe θ formée des arcs A_0, A_1, A_2 et des arcs $k_0k_1k_2$ et $l_0l_1l_2$ extraits de K et de L respectivement.

D_0, D_1 et D_2 étant les disques, composantes de $\mathcal{X}-\theta$, on a (cf. 2)

$$\operatorname{Fr}(D_j) = A_j + A_{j+1} + k_jk_{j+1} + l_jl_{j+1}.$$

L'un de ces disques, soit D_2, contient p (puisque $p \in C-K-L$). En vertu de (15), la région G contient un arc M irréductible entre les ensembles A_1 et A_0+A_2, c'est-à-dire que l'ensemble $M \cdot (A_0+A_1+A_2)$ se compose des extrémités de M, dont l'une est MA_1 et l'autre est $M \cdot (A_0+A_2)$. En tant que connexe et disjoint de $K+L$ (d'après (14)), l'ensemble $N = M-(A_0+A_1+A_2)$ est donc contenu dans l'un des disques D_0, D_1 ou D_2; comme $MA_1 \neq 0$, on a donc soit $N \subset D_0$, soit $N \subset D_1$. Admettons que

$$(16) \qquad N \subset D_0.$$

Donc $M \subset \overline{D}_0$. Comme

$$0 \neq MA_1 \subset MR_1 \quad \text{et} \quad 0 \neq M \cdot (A_0+A_2) \subset M \cdot (R_0+R_2),$$

il vient $MC \neq 0$. Soit $q \in MC$. Donc $q \in GN$ et d'après (16)

$$(17) \qquad q \in GD_0.$$

Il reste à démontrer que tout continu H tel que $p, q \in H \subset C$ passe par $K+L$.

On a, en effet, d'après (17):

$$0 \neq H \cdot \operatorname{Fr}(D_0) = H \cdot (A_0+A_1+k_0k_1+l_0l_1) \subset C \cdot (A_0+A_1) + H \cdot (K+L),$$

d'où la conclusion demandée, puisque $C \cdot (A_0+A_1) = 0$.

11. *C étant fermé et localement connexe et R étant une région-composante de $\mathcal{X}-C$, tout point $p \in \operatorname{Fr}(R)$ est accessible de R.*

Plus précisément: *$R+p$ est localement connexe*[1]).

Pour établir la deuxième partie du th. 11, il suffit de prouver que, D étant un disque qui contient p (cf. 7), il existe un ensemble T connexe, ouvert dans $R+p$ et tel que $p \in T \subset D$. Or, $\mathcal{X}-D$ et $\mathcal{X}-R$ étant fermés et localement connexes (§ 44, II, 11), leur somme $\mathcal{X}-DR$ l'est également. D'après 10, la suite $R_1, R_2, \ldots$ des composantes de DR satisfait donc à la condition (13) (à moins qu'elle ne soit finie).

On peut admettre que la suite $\{R_n\}$ ne se réduit pas à un seul élément (car on poserait alors $T = DR+p$). R étant connexe et R_n étant ouvert dans R, on en conclut que la frontière de R_n relative à R désignons-la par $\operatorname{Fr}_R(R_n)$ — n'est pas vide, c'est-à-dire que $R \cdot \overline{R}_n - R_n \neq 0$. D'après le th. 3 du § 44, III, on a

$$\operatorname{Fr}_R(R_n) \subset \operatorname{Fr}_R(RD) = R \cdot \overline{RD} - RD \subset \mathcal{X} - \dot{D}, \quad \text{d'où} \quad \overline{R}_n - D \neq 0.$$

Il en résulte que, si $p \in \overline{R}_n$, on a $\delta(R_n) \geqslant \varrho(p, \mathcal{X}-D)$. L'égalité (13) implique donc que le nombre des régions R_n tels que $p \in \overline{R}_n$ est fini. Soient $R_1, \ldots, R_k$ ces régions. L'ensemble $T = R_1 + \ldots + R_k + p$ est donc connexe.

Reste à prouver que T est ouvert dans $R+p$, c'est-à-dire que p *non-*$\in \operatorname{Ls} R_n$. Or, si l'on avait $p = \lim_{i=\infty} p_i$ où $p_i \in R_{n_i}$, on aurait, pour i suffisamment grand,

$$\delta(R_{n_i}) \geqslant \varrho(p_i, \mathcal{X}-D) > \tfrac{1}{2}\varrho(p, \mathcal{X}-D),$$

— contrairement à l'égalité (13).

La connexité locale de $R+p$ étant établie, p se laisse unir à tout point de R par un arc dans $R+p$. Car $R+p$ est connexe, localement connexe et topologiquement complet (cf. § 45, II, 1).

[1]) Ce théorème remonte à Schönflies. Cf. G. T. Whyburn, Bull. Amer. Math. Soc. **34** (1928), p. 504 et *Analytic Topology*, Chap. VI, § 4.

12. *Théorème réciproque de Jordan* [1]). *Soient C un continu, et R_0 et R_1 deux régions-composantes de $\mathfrak{X}-C$ telles que tout point de C est accessible de R_0 et de R_1. C est alors une courbe simple fermée.*

D'après le th. 2 du § 42, V, il suffit de démontrer que tout couple $a,b \in C$ sépare C. Or, a et b étant accessibles de R_j $(j=0,1)$, il existe un arc $(ab)_j$ tel qu'en posant $A_j=(ab)_j-a-b$, on a

$$A_j \subset R_j. \tag{18}$$

Soient D_0 et D_1 les deux disques en lesquels l'espace est coupé par la courbe simple fermée $A_0+a+b+A_1$. Il s'agit de prouver que $D_0 \cdot C \neq 0 \neq D_1 \cdot C$.

Or, l'ensemble $S_j=D_j+A_0+A_1$ étant connexe, les inégalités $S_jR_0 \neq 0 \neq S_jR_1$ (qui résultent de (18)) entraînent

$$S_j \cdot \mathrm{Fr}\,(R_0) \neq 0, \quad \text{d'où} \quad S_j \cdot C \neq 0, \quad \text{donc} \quad D_j \cdot C \neq 0,$$

puisque $(A_0+A_1)\cdot C=0$ d'après (18).

13. *Théorème de Gehman* [2]). *C étant un sous-continu héréditairement localement connexe de $\mathfrak{X}$, et $K_0, K_1, \ldots$ étant une suite infinie de sous-continus de C, disjoints deux à deux, on a $\lim\limits_{n=\infty} \delta(K_n)=0$.*

Supposons, par contre, qu'il existe dans C une suite infinie $\{K_n\}$ de sous-continus tels que:

$$(19) \quad \delta(K_n) > \eta \text{ où } \eta > 0, \qquad (20) \quad K_n \cdot K_m = 0 \text{ pour } n \neq m.$$

Soit conformément à (19), $p_n, q_n \in K_n$ et $|p_n-q_n| \geqslant \eta$. K_n étant localement connexe, soit A_n un arc $p_nq_n \subset K_n$. Il est légitime d'admettre que les suites $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ sont convergentes:

$$\lim_{n=\infty} p_n = p \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} q_n = q.$$

Les points p et q étant différents, soient P et Q deux continus disjoints qui ne coupent pas $\mathfrak{X}$ et tels que $p \in \mathrm{Int}\,(P)$ et $q \in \mathrm{Int}\,(Q)$ (cf. 7).

On a donc $PA_n \neq 0 \neq QA_n$ à partir d'un indice n suffisamment grand. Il est légitime d'admettre qu'il en est ainsi pour chaque n. Extrayons de A_n un arc B_n dont seules les extrémités appartiennent à P et à Q respectivement. On peut admettre encore que la suite $\{B_n\}$ est convergente.

[1]) Cf. A. Schönflies, op. cit. p. 180. Voir aussi F. Riesz, Math. Ann. **59** (1914), p. 409.

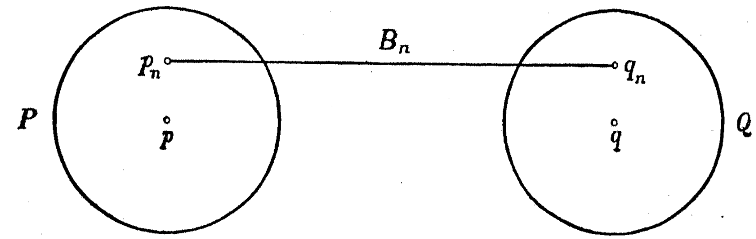
[2]) Annals of Math. **27** (1926), p. 39.

La décomposition de $\mathfrak{X}$ qui a pour tranches les points individuels de $\mathfrak{X}-P-Q$, ainsi que les ensembles P et Q, est semi-continue supérieurement. D'après le th. I, 9, il existe donc une transformation continue f de $\mathfrak{X}$ telle que:

1° $f(\mathfrak{X})$ est un espace de Janiszewski qui n'est coupé par aucun point,

2° $f(P)$ et $f(Q)$ se réduisent à deux points différents a et b,

3° f est une transformation homéomorphe de $\mathfrak{X}-P-Q$ en $f(\mathfrak{X})-a-b$.



En posant $L_n=f(B_n)$, on en déduit que $L_0, L_1, \ldots$ est une suite convergente d'arcs n'ayant deux à deux que leurs extrémités (a et b) en commun (cf. (20)). D'après 3, sauf pour deux indices (soit pour 0 et 1), on a constamment $L_n \cdot \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{m=\infty} L_m=(a,b)$. Autrement dit, on a

$$(L_n-a-b)\cdot \mathop{\mathrm{Lim}}_{m=\infty}(L_m-a-b)=0 \quad \text{pour} \quad n>1.$$

En désignant par B_n^* l'arc B_n sans extrémités, on a

$$B_n^*=f^{-1}(L_n-a-b), \quad \text{donc} \quad B_n^* \cdot \mathop{\mathrm{Lim}}_{m=\infty} B_m^*=0 \quad \text{pour} \quad n>1.$$

Mais alors $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{m=\infty} B_m^*$ est un continu de convergence contenant plus d'un point et, en conséquence, C n'est pas héréditairement localement connexe (cf. § 45, IV, 2).

Remarques. Le théorème est en défaut dans $\mathcal{E}^3$. Voir § 45, IV, 3, remarque.

Le th. 13 implique aussitôt que:

13'. *Si l'on décompose en continus disjoints un sous-continu héréditairement localement connexe de $\mathfrak{X}$, la décomposition est semi-continue.*

14. *Théorème de séparation* [1]). *A et B étant deux ensembles séparés, il existe un ensemble ouvert G tel que*:

(21) $A\subset G$, (22) $\bar{G}\cdot B=0$, (23) $\mathrm{Fr}\,(G)-\bar{A}\cdot\bar{B}\subset[\mathrm{Fr}\,(G)]^{(\omega)}$,

c'est-à-dire que l'ensemble $\mathrm{Fr}\,(G)$ est régulier en tout point de $\mathrm{Fr}\,(G)-\bar{A}\cdot\bar{B}$.

Posons, en effet,

$$A_n=\mathop{E}_{x}(x\in\bar{A})\left[\frac{1}{n+1}\leqslant\varrho(x,\bar{B})\leqslant\frac{1}{n}\right].$$

Il vient

$$\bar{A}-\bar{B}=A_0+A_1+\dots \tag{24}$$

L'ensemble A_n étant compact, il existe un système fini de disques $D_1^n,\dots,D_{k_n}^n$ tels que:

(25) $A_n\cdot D_i^n\neq 0$, (26) $\overline{D_i^n}\cdot\bar{B}=0$, (27) $\delta(D_i^n)<1/n$

et

$$A_n\subset D_1^n+\dots+D_{k_n}^n. \tag{28}$$

Posons

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}D_i^n. \tag{29}$$

Les ensembles A et B étant séparés, on a $A\subset\bar{A}-\bar{B}$, d'où l'inclusion (21) en vertu des formules (24), (28) et (29).

Avant de passer à (22), remarquons que tout point p de $\bar{G}-\bar{A}$ appartient à un $\overline{D_{i_0}^{n_0}}$ et que dans l'entourage de p il n'y a qu'un nombre fini de disques D_i^n.

Supposons, en effet, que

$$p=\lim_{m=\infty}p_m,\quad\text{où}\quad p_m\in D_{i_m}^{n_m}\quad\text{et}\quad n_m<n_{m+1}.$$

Il en résulte en vertu de (25), (27) et (24) que

$$p\in\overline{A_1+A_2+\dots}\subset\bar{A},$$

contrairement à l'hypothèse.

L'existence d'un couple d'indices (n_0,i_0) tel que $p\in\overline{D_{i_0}^{n_0}}$ en résulte immédiatement.

[1]) Voir ma note *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. **12** (1928), p. 217.

Ceci établi, on en déduit, d'une part, en vertu de (26), que

$$\bar{G}\cdot\bar{B}-\bar{A}=0, \tag{30}$$

d'où l'égalité (22), car $B\bar{A}=0$.

D'autre part, tout point p de l'ensemble $\mathrm{Fr}\,(G)-\bar{A}\cdot\bar{B}=\mathrm{Fr}(G)-\bar{A}$ étant contenu dans un entourage relatif à $\mathrm{Fr}\,(G)$ composé d'un nombre fini de courbes simples fermées, on en tire l'inclusion (23) (toute somme finie d'arcs étant un ensemble régulier d'après le th. 8 du § 46, IV).

15. *Corollaire. A et B étant deux ensembles séparés, à tout couple $a\in A$, $b\in B$, correspond une coupure C irréductible entre a et b, fermée, telle que $C\cdot(A+B)=0$ et qui est localement un arc en tout point de $C-\bar{A}\cdot\bar{B}$.*

Si, en outre, $\dim\bar{A}\cdot\bar{B}=0$, *$C$ est une courbe simple fermée* [1]).

En effet, en tant que coupure entre a et b, $\mathrm{Fr}\,(G)$ contient une coupure C irréductible entre ces points (cf. § 44, V, 3). D'après I, 8, C est discohérent, donc d'après § 44, VI, 5, C est localement un arc en tout point de $C-\bar{A}\cdot\bar{B}$.

Enfin, l'ensemble des points de non-connexité locale étant vide ou de dimension positive (cf. § 44, VI, 1), la deuxième partie du corollaire résulte de la discohérence de C en vertu du th. I, 8.

Ajoutons sans démonstration le théorème suivant:

16. *A et B étant deux continus tels que*:

1⁰ *$A-B$ est connexe,*

2⁰ $\dim AB=0$,

3⁰ *A n'est une coupure entre aucun couple de points de $B-A$, — il existe alors une courbe simple fermée qui est une coupure entre $A-B$ et $B-A$* [2]).

17. *R étant une région et A un arc pq tel que $A-R=(p,q)$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $R-A$ soit connexe est que les extrémités de A appartiennent à deux composantes différentes de $\mathcal{X}-R$ (donc de $\mathrm{Fr}\,(R)$)* [3]).

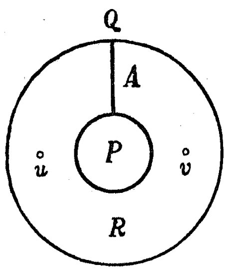
[1]) Cf. R. L. Moore, *Concerning the separation of point sets by curves*, Proc. Nat. Ac. Sc. **11** (1925), p. 469, et R. G. Lubben, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), p. 668.

[2]) Voir ma note précitée de Fund. Math. **12**, p. 232. Cf. aussi R. L. Moore, op. cit. p. 470.

[3]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 350.

En effet, si les points p et q appartiennent à la même composante C de $\mathfrak{X}-R$, l'ensemble $R-A$ n'est pas connexe en vertu de I, 6'.

Admettons en second lieu que les points p et q appartiennent à deux composantes différentes de $\mathfrak{X}-R$. L'ensemble $\mathfrak{X}-R$ n'est donc pas connexe entre ces points, c'est-à-dire qu'il existe deux ensembles fermés P et Q tels que



(31) $$\mathfrak{X}-R=P+Q,\quad PQ=0,\quad p\in P,\quad q\in Q.$$

Soient u et v deux points arbitraires de $R-A$. Il s'agit de prouver que l'ensemble $\mathfrak{X}-R+A$ ne les sépare pas.

Il vient d'après (31)

(32) $$\mathfrak{X}-R+A=(P+A)+(Q+A)\quad \text{et}\quad (P+A)(Q+A)=A.$$

En appliquant le th. 1', on déduit du th. I, 7 que ni $P+A$, ni $Q+A$ ne sépare les points u et v. Il en résulte, d'après (32) et I, 7, que l'ensemble $\mathfrak{X}-R+A$ ne les sépare non plus.

III. Ensembles élémentaires. Soit, comme auparavant, $\mathfrak{X}$ un espace de Janiszewski ne contenant aucun point de séparation.

Soit $D_0,\dots,D_n$ un système de disques tel que

(1) $$\bar{D}_i\cdot\bar{D}_j=0\quad \text{pour}\quad i\neq j.$$

Les ensembles

$$\mathfrak{X}-(D_0+\dots+D_n)\quad \text{et}\quad \mathfrak{X}-(\bar{D}_0+\dots+\bar{D}_n)$$

sont dits: *continu élémentaire*, respectivement *région élémentaire*. L'espace $\mathfrak{X}$ et l'ensemble 0 sont considérés comme continus élémentaires et comme régions élémentaires.

Nous établirons plusieurs propriétés d'ensembles élémentaires qui interviendront dans la suite (Nº V et § 55, XII).

Toute somme finie de continus élémentaires disjoints est nommée *ensemble élémentaire fermé*. Toute somme finie de régions élémentaires dont les fermetures sont disjointes est dite *ensemble élémentaire ouvert*.

On constate aussitôt que:

1. *L'intérieur d'un continu élémentaire est une région élémentaire. L'intérieur d'un ensemble fermé élémentaire est un ensemble ouvert élémentaire.*

2. *La fermeture d'une région élémentaire est un continu élémentaire. La fermeture d'un ensemble ouvert élémentaire est un ensemble fermé élémentaire.*

3. *Tout ensemble élémentaire fermé (ouvert) est un domaine fermé (ouvert).*

4. *$A_1,\dots,A_m$ étant les composantes d'un ensemble élémentaire A, on a*

$$\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(A_1)+\dots+\mathrm{Fr}(A_m)\quad \textit{et}\quad \mathrm{Int}(A)=\mathrm{Int}(A_1)+\dots+\mathrm{Int}(A_m).$$

5. *R étant une région élémentaire et D étant un disque tel que $\mathrm{Fr}(D)\subset R$, l'ensemble RD est une région élémentaire.*

De façon analogue: *C étant un continu élémentaire et D un disque tel que $\mathrm{Fr}(D)\subset\mathrm{Int}(C)$, l'ensemble $C\cdot\bar{D}$ est un continu élémentaire.*

Nous en déduirons que:

6. *R étant une région élémentaire et C étant un continu élémentaire tel que $C\subset R$, l'ensemble $R-C$ est élémentaire.*

De façon analogue: *C étant un continu élémentaire et R étant une région élémentaire telle que $\bar{R}\subset\mathrm{Int}(C)$, $C-R$ est un ensemble élémentaire.*

Soient, en effet (en posant $X'=\mathfrak{X}-X$):

$$C=(D_0+\dots+D_n)'\quad \text{et}\quad K_j=\mathrm{Fr}(D_j).$$

Il vient $R-C=RD_0+\dots+RD_n$. L'inclusion $K_j\subset R$ implique donc d'après 5 que l'ensemble RD_j est une région élémentaire.

Comme $\overline{RD_i}\cdot\overline{RD_j}=0$ d'après (1), il en résulte que $R-C$ est un ensemble élémentaire.

La démonstration de la deuxième partie est analogue.

7. *Le complémentaire d'un ensemble élémentaire fermé (ouvert) est un ensemble élémentaire ouvert (fermé).*

Soit $F=C_0+\dots+C_n$ et $C_i\cdot C_j=0$, les ensembles $C_0,\dots,C_m$ étant des continus élémentaires.

Procédons par induction. Le théorème étant évident pour $n=0$, admettons qu'il est vrai pour $n-1$. Il vient

$$F'=G-C_n, \quad \text{où} \quad G=C_0'\cdot\ldots\cdot C_{n-1}'.$$

L'ensemble ouvert G étant élémentaire (par hypothèse), on a $G=R_0+\ldots+R_m$ et $\bar{R}_i\cdot\bar{R}_j=0$, les ensembles $R_0,\ldots,R_m$ étant des régions élémentaires.

Comme $C_n\cdot(C_0+\ldots+C_{n-1})=0$, on a $C_n\subset G$. Le continu C_n est donc contenu dans l'une des régions-composantes de G: soit $C_n\subset R_0$. Par conséquent

$$F'=(R_0-C_n)+R_1+\ldots+R_m. \tag{2}$$

R_0-C_n étant une région élémentaire d'après 6, F' est un ensemble élémentaire ouvert.

La démonstration dans le cas d'ensemble ouvert est analogue.

8. *$G_0,\ldots,G_n$ étant des ensembles élémentaires ouverts tels que $G_i+G_j=\mathcal{X}$ pour $i\neq j$, le produit $G_0\cdot\ldots\cdot G_n$ est un ensemble élémentaire.*

$F_0,\ldots,F_n$ étant des ensembles élémentaires fermés tels que $\mathrm{Int}(F_i)+\mathrm{Int}(F_j)=\mathcal{X}$ pour $i\neq j$, le produit $F_0\cdot\ldots\cdot F_n$ est un ensemble élémentaire.

On a en outre

$$\begin{cases} b_0(G_0\cdot\ldots\cdot G_n)=b_0(G_0)+\ldots+b_0(G_n) \\ b_0(F_0\cdot\ldots\cdot F_n)=b_0(F_0)+\ldots+b_0(F_n). \end{cases} \tag{3}$$

Car la condition $G_i'\cdot G_j'=0$ implique que $G_0'+\ldots+G_n'$, en tant que somme d'ensembles élémentaires (cf. 7), fermés et disjoints, est un ensemble élémentaire.

De façon analogue, la condition $\overline{F_i'}\cdot\overline{F_j'}=0$ implique que l'ensemble ouvert $F_0'+\ldots+F_n'$ est élémentaire.

La formule (3) est une conséquence immédiate du th. 4 du § 52, II (généralisé au cas de n termes).

9. *E étant un ensemble élémentaire et K étant une composante de $\mathcal{X}-E$, l'ensemble $E+K$ est élémentaire.*

Soient, en effet, $K_0,\ldots,K_n$ les composantes de E':

$$E'=K_0+\ldots+K_m, \quad \bar{K}_i\cdot\bar{K}_j=0.$$

Il vient $(E+K_0)'=K_1+\ldots+K_n$.

Les composantes d'un ensemble élémentaire étant des ensembles élémentaires, on conclut du th. 7 que $E+K_0$ est élémentaire.

10. *F étant un sous-ensemble fermé d'un ensemble ouvert G, il existe un ensemble élémentaire fermé A tel que*

(4) $F\subset\mathrm{Int}(A)\subset A\subset G$, (5) $b_0(A)\leqslant b_0(F)$, (6) $b_0(A')\leqslant b_0(G')$.

Soient, en effet, $R_0,\ldots,R_k$ les régions-composantes de G qui contiennent des points de F. Posons $F_i=FR_i$. Il vient

$$F=F_0+\ldots+F_k \quad \text{et} \quad 0\neq F_i=\bar{F}_i, \tag{7}$$

puisque $\overline{FR_i}-FR_i\subset F\cdot\bar{R}_i-R_i\subset F-G=0$.

On a en outre

$$k\leqslant b_0(F). \tag{8}$$

Soient $R_{i1},\ldots,R_{im_i}$ (où $0\leqslant i\leqslant k$) les régions-composantes de F_i' qui contiennent des points de R_i'. Posons $H_{ij}=R_{ij}-R_i$. Il vient, comme auparavant,

$$R_i'=H_{i0}+\ldots+H_{im_i} \quad \text{et} \quad \bar{H}_{ij}=H_{ij}. \tag{9}$$

En tant que fermé-ouvert dans R_i', H_{ij} est somme d'une famille de composantes de R_i'. R_i étant une région, il en résulte que H_{ij} n'est pas une coupure, car autrement il existerait une composante de H_{ij} (donc une composante de R_i') qui serait une coupure (d'après § 52, III, 1), ce qui est incompatible avec le th. 5 du § 41, III.

Il existe donc d'après II, 9 un disque D_{ij} tel que

$$H_{ij}\subset D_{ij}\subset\bar{D}_{ij}\subset R_{ij}. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) donnent

$$R_i'\subset D_{i0}+\ldots+D_{im_i}\subset\bar{D}_{i0}+\ldots+\bar{D}_{im_i}\subset F_i' \quad \text{et} \quad \bar{D}_{ij}\cdot\bar{D}_{ij'}=0. \tag{10'}$$

On a en outre

$$m_i\leqslant b_0(R_i'). \tag{11}$$

Le continu élémentaire $C_i=(D_{i0}+\ldots+D_{im_i})'$ satisfait d'après (10') à la condition

$$F_i\subset\mathrm{Int}(C_i)\subset C_i\subset R_i, \quad \text{où} \quad i=0,\ldots,k, \tag{12}$$

et par conséquent (cf. (7)) l'ensemble élémentaire fermé

$$A=C_0+\ldots+C_k \tag{13}$$

satisfait à la formule (4).

La formule (5) résulte de (8) et (13). Enfin

$$b_0(A')=b_0(C_0')+\ldots+b_0(C_k')=m_0+\ldots+m_k\leqslant$$
$$\leqslant b_0(R_0')+\ldots+b_0(R_k')=b_0(R_0'\cdot\ldots\cdot R_k')\leqslant b_0(G'),$$

d'après (13), (11), (3) et § 52, II, 4 (cf. aussi § 44, II, 4).

Le th. 10 entraîne aussitôt (cf. § 45, II, 2) le suivant:

11. *À tout ensemble fermé F correspond une suite d'ensembles élémentaires fermés $F_1, F_2, \ldots$ satisfaisant aux conditions suivantes*:

(14) $F=F_1\cdot F_2\cdot\ldots,$ (15) $F_n\subset \mathrm{Int}\,(F_{n-1}),$

(16) $b_0(F_n)\leqslant b_0(F),$ (17) $b_0(\mathcal{X}-F_n)\leqslant b_0(\mathcal{X}-F).$

En particulier, *si F est un continu, F_n l'est également; si F ne sépare pas l'espace, F_n ne le sépare non plus.*

IV. Caractérisation topologique de $\mathcal{S}_2$[1]. Conséquences.

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Janiszewski qui n'est coupé par aucun point. Nous allons établir l'homéomorphie

(1) $$\mathcal{X} \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{S}_2\ ^{2)}.$$

À ce but, nous introduirons une notion auxiliaire et nous en établirons plusieurs propriétés.

Définition. La somme $L_0+\ldots+L_n$ de $n+1$ arcs $(n\geqslant 1)$ est dite un *réseau*, lorsque:

(i) L_0+L_1 est une courbe simple fermée,

(ii) $L_k\cdot(L_0+\ldots+L_{k-1})$ se compose des extrémités de L_k.

Le réseau $L_0+\ldots+L_n$ est dit un *prolongement* du réseau $L_0+\ldots+L_m$ lorsque $m<n$.

On constate par induction finie que

1. *L'ensemble $\mathcal{X}-(L_0+\ldots+L_n)$ se compose de $n+1$ disques disjoints (qui en sont les composantes).*

[1]) En ce qui concerne ce problème, cf. R. L. Moore, *On the foundations of plane analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), p. 131, J. Gawehn, Math. Ann. **98** (1927). Voir aussi H. Whitney, *A characterization of the closed 2-cell*, Tans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), p. 261, et E. R. v. Kampen, *On some characterizations of 2-dimensional manifolds*, Duke Math. Journ. **1** (1935), p. 74, où l'on trouvera de nombreux renvois bibliographiques.

[2]) Voir ma note, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. **13** (1929), p. 307. Cf. aussi *Un système d'axiomes pour la Topologie de la surface de la sphère*, Atti del Congr. Int. dei Matemat. Bologna 1928, VI, p. 239.

2. *Soient: D un disque, A et B deux sous-continus de $\overline{D}$, et L un arc tel que l'ensemble $L\cdot\overline{D}$ sépare $\overline{D}$ entre A et B. Il existe alors une composante M de DL qui sépare D entre AD et BD.*

Il est légitime d'admettre que $AD\neq 0\neq BD$. Soient: $a\in AD$ et $b\in BD$. L'ensemble LD est donc un séparateur de D entre a et b. L'ensemble $\mathcal{X}-D$ étant un continu (d'après le théorème de Jordan), D est contractile relativement à $\mathcal{S}$ (d'après I, 3); LD contient donc (cf. § 52, III, 1) une composante M qui sépare D entre a et b. Évidemment $\mathrm{Fr}\,(D)+M$ est une courbe θ. En désignant par U et V les composantes de $\mathcal{X}-\theta$ qui contiennent a et b respectivement, il vient

$$A\subset\overline{U} \quad \text{et} \quad B\subset\overline{V}, \quad \text{d'où} \quad AD\subset U \quad \text{et} \quad BD\subset V.$$

3. *Soient R_0 un réseau et A et B deux continus disjoints qui ne séparent pas l'espace. Il existe alors un réseau R_1 qui est un prolongement du réseau R_0 et qui sépare $\mathcal{X}$ entre $A-R_1$ et $B-R_1$ (c'est-à-dire qu'il n'existe aucune composante de $\mathcal{X}-R_1$ qui contienne simultanément des points de A et de B).*

Soit D une composante de $\mathcal{X}-R_0$ telle que $DA\neq 0\neq DB$. Admettons d'abord que

(2) $$A\cdot\mathrm{Fr}\,(D)\neq 0\neq B\cdot\mathrm{Fr}\,(D).$$

Soit C une courbe simple fermée qui sépare A de B (cf. II, 5'). L'ensemble $C\cdot\overline{D}$ sépare donc $\overline{D}$ entre $\overline{D}\cdot A$ et $\overline{D}\cdot B$ et d'après (2), on a $C-\overline{D}\neq 0$. Il existe donc un sous-arc L de C qui contient $C\cdot\overline{D}$ et dont les extrémités appartiennent à $\mathrm{Fr}(D)$. Soient (cf. § 45, III, 1) $A_1,\ldots,A_m$ et $B_1,\ldots,B_n$ deux systèmes de continus tels qu'en posant

$$F=A_1+\ldots+A_m \quad \text{et} \quad H=B_1+\ldots+B_n,$$

on a

$$\overline{D}\cdot A\subset F\subset\overline{D},\quad \overline{D}\cdot B\subset H\subset\overline{D},\quad FH=0,\quad FL=0=HL.$$

D'après 2, à tout couple i,j (où $i\leqslant m$ et $j\leqslant n$) correspond une composante M_{ij} de DL qui sépare D entre DA_i et DB_j. En posant

$$R(D)=\mathrm{Fr}\,(D)+\sum_{ij}M_{ij},$$

aucune composante de $\overline{D}-R(D)$ ne contient donc simultanément des points de A et de B.

Dans le cas où la formule (2) est en défaut, où, par exemple $A\cdot\mathrm{Fr}(D)=0$, on a $A\subset D$ et il existe (cf. II, 6) une courbe simple fermée C qui sépare A et B et qui est contenue dans D. On désignera dans ce cas par $R(D)$ le réseau qui s'obtient en unissant les courbes $\mathrm{Fr}(D)$ et C par deux arcs irréductibles entre ces courbes.

En définitive, on posera $R_1=\Sigma R(D)$, la sommation étant étendue à toutes les composantes D de $\mathcal{X}-R_0$.

4. *À tout $\varepsilon>0$ correspond un réseau R tel que les composantes de $\mathcal{X}-R$ sont de diamètre $\leqslant\varepsilon$.*

On peut supposer de plus que le réseau R est un prolongement d'un réseau R_0 donné en avance.

Soit (conformément au § 45, III, 1) $K_1,\dots,K_n$ un système de continus qui ne coupent pas l'espace et tels que

(3) $$\mathcal{X}=K_1+\dots+K_n \quad\text{et}\quad \delta(K_i)<\varepsilon/2.$$

Soit

(4) $$(j_1,m_1),(j_2,m_2),\dots,(j_r,m_r)$$

le système de tous les couples d'indices tels que $K_{j_i}\cdot K_{m_i}=0$.

Soit R_0 un réseau (une courbe simple fermée, par exemple). En appliquant le th. 3 successivement aux couples:

$$(K_{j_1},K_{m_1}),\dots,(K_{j_r},K_{m_r}),$$

on parvient au réseau R tel qu'aucune composante D de $\mathcal{X}-R$ ne satisfait pour aucun $i\leqslant r$ à la double inégalité

(5) $$DK_{j_i}\neq 0\neq DK_{m_i}.$$

Il vient $\delta(D)\leqslant\varepsilon$. Supposons, en effet, que $a,b\in D$ et $|a-b|>\varepsilon$. Soient $a\in K_\alpha$ et $b\in K_\beta$. Donc, suivant (3), $K_\alpha\cdot K_\beta=0$ et par conséquent le couple α,β appartient au système (4): soient $\alpha=j_i$ et $\beta=m_i$. L'inégalité (5) est donc satisfaite. Mais — comme nous venons de montrer — ceci est impossible.

Nous dirons, pour abréger, que l'homéomorphie h transformant le réseau R en R^* est *régulière*, lorsque les composantes de $\mathcal{X}-R$ et de $\mathcal{X}-R^*$ se laissent ranger en deux systèmes

$$D_1,\dots,D_n \quad\text{et}\quad D_1^*,\dots,D_n^*$$

de façon que l'on ait

(6) $$h[\mathrm{Fr}(D_i)]=\mathrm{Fr}(D_i^*) \quad\text{pour}\quad i=1,2,\dots,n.$$

5. *Soient R_0 et R_1 deux réseaux, dont le second est un prolongement du premier. Toute homéomorphie régulière h définie sur R_0 se laisse étendre en une homéomorphie régulière h_1 définie sur R_1.*

Il suffit évidemment d'établir le théorème pour le cas où $R_1=R_0+L$, L étant un arc ab tel que $LR_0=(a,b)$.

Soit, pour simplifier les notations, $L\subset D_n+(a,b)$. Conformément à (6), on a donc $h(a),h(b)\in\mathrm{Fr}(D_n^*)$. Soit (cf. II, 11) L^* un arc $h(a)h(b)$ tel que $L^*\subset D_n^*+h(a)+h(b)$.

L'homéomorphie h s'étend immédiatement sur R_0+L de façon que L se transforme en L^*. Désignons par h_1 l'homéomorphie ainsi prolongée.

Il reste à poser $E_i=D_i$ et $E_i^*=D_i^*$ pour $i<n$, et à désigner par E_n et E_{n+1} (respectivement par E_n^* et E_{n+1}^*) les deux composantes de D_n-L (respectivement de $D_n^*-L^*$), numérotées de façon à satisfaire à la condition (cf. II, 2):

$$h_1[\mathrm{Fr}(E_j)]=\mathrm{Fr}(E_j^*) \quad\text{pour}\quad j=n \quad\text{et}\quad \text{pour } j=n+1.$$

Remarque. Dans le cas envisagé, où $R_1=R_0+L$, on a évidemment

(7) $$h_1(R_1\cdot\overline{D}_i)\subset\overline{D_i^*} \quad\text{pour } i=1,\dots,n.$$

Il en résulte par induction que la même inclusion est satisfaite dans le cas général, où $R_1=R_0+L_2+L_3+\dots+L_m$, les arcs $L_2,\dots,L_m$ étant assujettis à la condition (ii) (en remplaçant L_0+L_1 par R_0).

6. *Théorème fondamental. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^*$ étant deux espaces de Janiszewski qui ne contiennent aucun point de séparation et qui ne se réduisent pas à des points individuels, on a $\mathcal{X}\underset{\mathrm{top}}{=}\mathcal{X}^*$.*

En particulier (cf. I, 2), *$\mathcal{X}$ est homéomorphe à la surface sphérique $\mathcal{S}_2$.*

Posons $\delta(\mathcal{X})<1$ et $\delta(\mathcal{X}^*)<1$. Soient R_0 et R_0^* deux courbes simples fermées contenues dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^*$ respectivement (cf. II, 7). Soit h_0 une homéomorphie transformant R_0 en R_0^*. Désignons par h_0^* l'homéomorphie inverse à h_0.

Soit, conformément à 4, R_1^* un prolongement du réseau R_0^*, tel que les composantes de $\mathcal{X}^*-R_1^*$ sont de diamètre $<1/2$. Soit, conformément à 5, h_1^* une homéomorphie régulière telle que $h_0^*\subset h_1^*$. Posons $R_1=h_1^*(R_1^*)$ et désignons par h_1 l'homéomorphie inverse à h_1^*.

De façon analogue, soit R_2 un prolongement du réseau R_1, tel que les composantes de $\mathscr{X}-R_2$ sont de diamètre $<1/3$, et soit h_2 une homéomorphie régulière telle que $h_1 \subset h_2$. Posons $R_2^* = h_2(R_2)$ et désignons par h_2^* l'homéomorphie inverse à h_2.

En procédant ainsi de proche en proche, on définit:

1° deux suites de réseaux

$$R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset \mathscr{X}, \quad R_0^* \subset R_1^* \subset \ldots \subset \mathscr{X}^*,$$

tels que les composantes de $\mathscr{X}-R_n$ et celles de $\mathscr{X}-R_n^*$ sont de diamètre $<1/n$;

2° deux suites d'homéomorphies régulières:

$$h_0 \subset h_1 \subset \ldots, \quad h_0^* \subset h_1^* \subset \ldots,$$

telles que h_n^* est inverse à h_n et que $h_n(R_n) = R_n^*$.

Posons

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n, \quad R^* = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^*, \quad h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n, \quad h^* = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^*.$$

Il vient

$$h(R) = R^*, \quad h^*(R^*) = R,$$

et les transformations h et h^* — inverses l'une à l'autre — sont biunivoques.

Nous allons démontrer qu'elles sont continues.

Soit $x_0 \in R$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n > 1/\varepsilon$. On a donc $\delta(D^*) < \varepsilon$ pour toute composante D^* de $\mathscr{X}^* - R_n^*$.

Soit $D_1, \ldots, D_k$ le système de toutes les composantes D_i de $\mathscr{X}-R_n$ telles que $x_0 \in \overline{D}_i$. L'ensemble $E = \overline{D}_1 + \ldots + \overline{D}_k$ est donc un entourage de x_0.

D'après (7), on a

$$h(R\overline{D}_i) \subset \overline{D_i^*},$$

donc $h(x_0) \subset \overline{D_1^*} \cdot \ldots \cdot \overline{D_k^*}$ et $h(RE) \subset \overline{D_1^*} + \ldots + \overline{D_k^*}$, d'où $\delta[h(RE)] < 2\varepsilon$. La fonction h est donc continue au point x_0.

De même, la fonction h^* est continue sur R^*.

Nous allons démontrer à présent que l'oscillation de la fonction h aux points de $\mathscr{X}-R$ (ainsi que celle de la fonction h^* aux points de $\mathscr{X}^*-R^*$) s'annule.

Soit, en effet, $x_0 \in \mathscr{X}-R$. L'indice n étant défini comme auparavant, soit D la composante de $\mathscr{X}-R_n$ qui contient x_0. Il vient

$$h(R\overline{D}) \subset \overline{D^*}, \quad \text{d'où} \quad \delta[h(RD)] < \varepsilon,$$

ce qui prouve que l'oscillation de la fonction h au point x_0 s'annule (cf. § 15, III).

Il existe donc une extension continue g de h sur l'espace $\mathscr{X}$ tout entier (cf. § 31, I, 1). On a, de façon analogue, $h^* \subset g^* \in \mathscr{X}^{\mathscr{X}^*}$.

Il reste à prouver que la fonction g^* est inverse à g, c'est-à-dire que $g^*g(x) = x$.

Or, soit $x = \lim_{n=\infty} x_n$ où $x_n \in R$. Donc

$$g(x) = \lim_{n=\infty} g(x_n) = \lim_{n=\infty} h(x_n),$$

d'où

$$g^*g(x) = \lim_{n=\infty} g^*h(x_n) = \lim_{n=\infty} h^*h(x_n) = \lim_{n=\infty} x_n = x.$$

Remarques. 1° En admettant que R_0 est un réseau arbitraire et que $R_0^* = h_0(R_0)$, où h_0 est une homéomorphie *régulière*, on montre, comme auparavant, que la transformation homéomorphe g de $\mathscr{X}$ en $\mathscr{X}^*$ est un prolongement de l'homéomorphie h_0.

2° Voici une autre caractérisation intéressante de l'espace $\mathscr{S}_2$: *$\mathscr{X}$ est un continu localement connexe contenant au moins une courbe simple fermée et tel que toute courbe simple fermée est une coupure irréductible de $\mathscr{X}$* [1]).

7. *Corollaire* [2]). *Pour qu'un continu localement connexe soit un espace de Janiszewski, il faut et il suffit que chacun de ses éléments cycliques qui ne se réduit pas à un seul point soit homéomorphe à $\mathscr{S}_2$.*

En effet, $\mathscr{X}$ étant supposé un espace de Janiszewski, tout élément cyclique E l'est également (d'après I, 10). Comme, en outre, E n'est séparé par aucun point, on a, d'après 6, $E \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2$ (pourvu que E ne se réduise pas à un point individuel).

La condition envisagée est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante, car la propriété de Janiszewski est extensible (cf. I, 10) et appartient à $\mathscr{S}_2$ (cf. I, 2).

---

[1]) Voir L. Zippin, *On continuous curves and the Jordan curve theorem*, Amer. Journ. Math. **52** (1930), p. 331.

[2]) Cf. L. Zippin, Tans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), p. 744.

8. *Théorème de R. L. Moore*[1]). *Si f est une transformation continue de $\mathcal{S}_2$ telle que, quel que soit y, $f^{-1}(y)$ est un continu qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$, on a $f(\mathcal{S}_2) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_2$.*

Autrement dit, *l'hyperespace d'une décomposition semi-continue de $\mathcal{S}_2$ en continus qui ne coupent pas $\mathcal{S}_2$ est homéomorphe à $\mathcal{S}_2$.*

En effet, d'après I, 9, $f(\mathcal{S}_2)$ est un espace de Janiszewski et, par hypothèse, aucun point n'en est une coupure. Donc d'après 6 cet espace est homéomorphe à $\mathcal{S}_2$.

9. *Corollaire. Toute région R contenue dans $\mathcal{S}_2$ est homéomorphe à la surface $\mathcal{S}_2$ privée d'un ensemble fermé de dimension 0, à savoir d'un ensemble homéomorphe à l'hyperespace de la décomposition de $\mathcal{S}_2-R$ en composantes* (cf. § 42, VI, 1).

En particulier: *si la région $R(\neq\mathcal{S}_2)$ ne coupe pas $\mathcal{S}_2$, on a $R \underset{\text{top}}{=} \mathcal{E}^2$.*

Car, d'une part, la décomposition de $\mathcal{S}_2$ en composantes de $\mathcal{S}_2-R$ et en points individuels de R est semi-continue, et d'autre part, les composantes de $\mathcal{S}_2-R$ ne coupent pas $\mathcal{S}_2$ (d'après le th. 5 du § 41, III).

10. *D étant un disque, on a $\overline{D} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{J}^2$.*

C'est une conséquence directe de la remarque 1⁰.

De façon plus générale:

11. *C étant un continu localement connexe (contenant plus d'un point), qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ et qui n'est coupé par aucun point, on a $C \underset{\text{top}}{=} \mathcal{J}^2$.*

L'ensemble $R=\mathcal{S}_2-C$ étant un disque d'après II, 4 (ii), l'ensemble $D=\mathcal{S}_2-\overline{R}$ est aussi un disque. Il vient

$$C=\mathcal{S}_2-R=\overline{D}, \quad \text{donc} \quad C \underset{\text{top}}{=} \mathcal{J}^2$$

en vertu de 10.

Remarques. Désignons par U le continu universel de Sierpiński (voir § 46, I, ex. 5). Soit $D_0, D_1, \ldots$ la suite des composantes de $\mathcal{S}_2-U$. La décomposition de $\mathcal{S}_2$ qui a pour tranches les continus $\overline{D}_0, \overline{D}_1, \ldots$ et les points individuels de l'ensemble $V=U-(\overline{D}_0+\overline{D}_1+\ldots)$ est semi-continue. Son hyperespace est homéomorphe à $\mathcal{S}_2$ d'après 8. L'ensemble V est donc homéomorphe au plan privé d'un ensemble dénombrable. Par conséquent (cf. § 53, 11):

[1]) *Concerning upper semi-continuous collections of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), p. 416. Voir aussi la note du même auteur dans Monatsh. Math.-Phys. **36** (1929), p. 80, où un problème plus général est considéré (sans l'hypothèse que $f^{-1}(y)$ ne coupe pas l'espace).

12. *Tout ensemble frontière dans le plan est contenu topologiquement dans le continu U.*

En ce qui concerne le continu U, on a l'intéressant théorème suivant[1]):

13. *C étant un continu à une dimension, les fonctions $f \in (\mathcal{E}^2)^C$ telles que $f(C) \underset{\text{top}}{=} U$, constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{E}^2)^C$.*

V. Prolongement de l'homéomorphie. Équivalence topologique.

1. *$A(\subset\mathcal{S}_2)$ étant soit un arc, soit une courbe simple fermée, soit une courbe θ, toute homéomorphie h définie sur A et telle que $h(A)\subset\mathcal{S}_2$, se laisse étendre à une homéomorphie sur l'espace $\mathcal{S}_2$ tout entier.*

Autrement dit, *il existe une homéomorphie h^* telle que*

$$h\subset h^* \quad \text{et} \quad h^*(\mathcal{S}_2)=\mathcal{S}_2.$$

Dans le cas où A est une courbe simple fermée ou une courbe θ, le théorème résulte de la remarque IV, 6, 1⁰, toute homéomorphie définie sur A étant dans ce cas régulière.

Soient A un arc ab et $h(A)=a_1b_1$. Les points a et b étant accessibles de $\mathcal{S}_2-A$ (cf. II, 11), l'arc A se laisse compléter à une courbe simple fermée C. De même, a_1b_1 est contenu dans une courbe simple fermée C_1. Il existe évidemment une homéomorphie h_1 telle que

$$h\subset h_1 \quad \text{et} \quad h_1(C)=C_1$$

et — comme nous venons de constater — une homéomorphie h^* telle que

$$h^*(\mathcal{S}_2)=\mathcal{S}_2 \quad \text{et} \quad h_1\subset h^*, \quad \text{d'où} \quad h\subset h^*.$$

2. *Corollaire. Tous les arcs contenus dans $\mathcal{S}_2$ sont topologiquement équivalents. Il en est de même des courbes simples fermées, ainsi que des courbes θ, contenues dans $\mathcal{S}_2$.*

Remarque. Dans $\mathcal{E}^3$ le corollaire est en défaut. Il y existe en effet *un arc qui n'est pas équivalent topologiquement à un segment de droite*[2]).

[1]) S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **31** (1938), p. 247. Cf. aussi du même auteur, Fund. Math. **25** (1935), p. 253, et V. Jarník, Monatsh. Math.-Phys. **41** (1934), p. 408.

[2]) L. Antoine, *Sur l'homéomorphie de figures et de leurs voisinages*, Journ. de Math. 1921, p. 221. Voir aussi de cet auteur, Fund. Math. **5** (1924), p. 265. Cf. E. Artin et R. H. Fox, Ann. of Math. **49** (1948), p. 979.

Il y existe aussi *une surface homéomorphe à $\mathcal{S}_2$ qui ne lui est pas équivalente topologiquement* [1]).

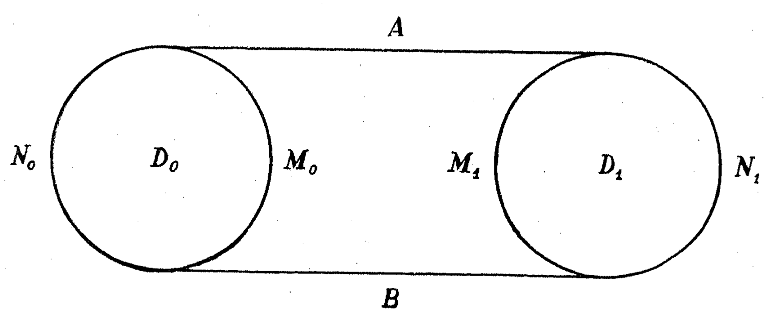
3. *Soient:* $D_0, \dots, D_n$ *et* $D_0^*, \dots, D_n^*$ *deux systèmes de disques tels que*

$$\overline{D}_i \cdot \overline{D}_j = 0 = \overline{D_i^*} \cdot \overline{D_j^*} \quad \textit{pour} \quad i \neq j.$$

Posons $C_i = \mathrm{Fr}(D_i)$ *et* $C_i^* = \mathrm{Fr}(D_i^*)$. *Toute transformation homéomorphe* h *de* C_0 *en* C_0^* *admet une extension homéomorphe* h^* *telle que:*

(1) $\quad h^*(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}_2, \qquad$ (2) $\quad h^*(D_i) = D_i^*$ *pour* $i = 0, 1, \dots, n.$

Procédons par induction. Soit $n=1$. Soient $A = a_0 a_1$ et $B = b_0 b_1$ deux arcs disjoints irréductibles entre $\overline{D}_0$ et $\overline{D}_1$, et de façon analogue: $A^* = a_0^* a_1^*$ et $B^* = b_0^* b_1^*$ deux arcs disjoints irréductibles entre $\overline{D_0^*}$ et $\overline{D_1^*}$, où $a_0^* = h(a_0)$ et $b_0^* = h(b_0)$ (cf. II, 11).



L'ensemble $\mathcal{S}_2 - (C_0 + C_1 + A + B)$ se compose de 4 disques D_0, D_1, D_2 et D_3. Pour s'en convaincre on n'a qu'à appliquer le théorème de Jordan à l'hyperespace qui s'obtient en considérant $\overline{D}_0$ et $\overline{D}_1$ comme des points individuels.

Soient M_j et N_j les deux arcs $a_j b_j$ de C_j numérotés de façon que

(3) $\quad \mathrm{Fr}(D_2) = M_0 + A + M_1 + B$, donc que $\mathrm{Fr}(D_3) = N_0 + A + N_1 + B$.

De façon analogue, soit

$$\text{(4)} \qquad \begin{gathered} \mathcal{S}_2 - (C_0^* + C_1^* + A^* + B^*) = D_0^* + D_1^* + D_2^* + D_3^*, \\ M_0^* = h(M_0), \quad N_0^* = h(N_0), \end{gathered}$$

[1]) Cf. J. W. Alexander, Proc. Nat. Acad. Sc. **10** (1924) (trois communications).

le numérotage de M_1^* (et N_1^*) et de D_2^* (et D_3^*) étant assujetti aux conditions:

(5) $\quad \mathrm{Fr}(D_2^*) = M_0^* + A^* + M_1^* + B^*. \quad \mathrm{Fr}(D_3^*) = N_0^* + A^* + N_1^* + B$.

L'homéomorphie h se laisse étendre évidemment à une homéomorphie entre $C_0 + C_1 + A + B$ et $C_0^* + C_1^* + A^* + B^*$ et celle-ci — à une homéomorphie h^* telle que $h^*(D_j) = D_j^*$ pour $j = 0, 1, 2, 3$ (en vertu des formules (3)—(5)).

Le cas $n=1$ étant établi, admettons que le théorème est vrai pour $n-1$. Nous l'établirons pour n.

Soient a et b deux points de C_0, et L_1 et L_2 les deux sous-arcs de C_0 à extrémités a et b. On constate facilement qu'il existe un arc ab tel que $\overline{D}_0 \cdot ab = (a, b)$ et qu'en désignant par R_i la composante de $\mathcal{S}_2 - C_0 - ab$ à frontière $L + ab$ où $(i = 1, 2)$, on a

$$\overline{D}_n \subset R_1 \quad \text{et} \quad \overline{D}_1 + \dots + \overline{D_{n-1}} \subset R_2.$$

(Pour s'en convaincre, on considère $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$ comme points individuels et on applique le théorème de Moore, IV, 8).

Soient, de façon analogue, $h(a)h(b)$ un arc tel que

$$\overline{D_0^*} \cdot h(a)h(b) = [h(a), h(b)]$$

et que R_i^* désignant la composante de $\mathcal{S}_2 - C_0^* - h(a)h(b)$ à frontière $h(L_i) + h(a)h(b)$, on a

$$\overline{D_n^*} \subset R_1^* \quad \text{et} \quad \overline{D_1^*} + \dots + \overline{D_{n-1}^*} \subset R_2^*.$$

Soit h_0 un prolongement de l'homéomorphie h sur $\overline{D}_0 + ab$ tel que

$$h(D_0) = D_0^* \quad \text{et} \quad h(ab) = h(a)h(b).$$

L'application du th. 3 pour les cas de deux disques: $\mathcal{S}_2 - \overline{R}_1$ et D_n, et de n disques: $\mathcal{S}_2 - \overline{R}_2, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$, permet d'étendre d'abord l'homéomorphie $h_0 | L_1 + ab$ sur $\overline{R}_1$ et puis — l'homéomorphie $h_0 | L_2 + ab$ sur $\overline{R}_2$ de façon à satisfaire aux conditions (2) d'abord pour $i = n$ et puis — pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.

4. *Toute homéomorphie entre deux ensembles fermés de dimension 0 se laisse étendre à une homéomorphie sur l'espace* $\mathcal{S}_2$ *tout entier.*

En particulier, *tout ensemble parfait de dimension 0 est topologiquement équivalent sur* $\mathcal{S}_2$ *à l'ensemble* $\mathbf{C}$ *de Cantor.*

Soient:

$$F=\overline{F}, \quad \dim F=0 \quad \text{et} \quad F^*=h(F),$$

où h est une homéomorphie.

Nous allons définir deux suites d'ensembles fermés $\{F_n\}$ et $\{F_n^*\}$, ainsi qu'une suite de transformations homéomorphes $\{h_n\}$ de $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{S}_2$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) $\quad F\subset F_n\subset \operatorname{Int}(F_{n-1}), \quad F^*\subset F_n^*\subset \operatorname{Int}(F_{n-1}^*),$

(ii) $\quad F_n=\overline{D}_{n1}+\ldots+\overline{D}_{nk_n}, \quad \overline{D_{ni}}\cdot\overline{D_{nj}}=0, \quad F\cdot D_{ni}\neq 0,$

(iii) $\quad F_n^*=\overline{D_{n1}^*}+\ldots+\overline{D_{nk_n}^*}, \quad \overline{D_{ni}^*}\cdot\overline{D_{nj}^*}=0, \quad F^*\cdot D_{ni}^*\neq 0,$

(iv) $\quad h_n(D_{ni})=D_{ni}^*,$

(v) $\quad h(F\cdot D_{ni})=F^*\cdot D_{ni}^*,$

(vi) $\quad h_{n-1}|\overline{\mathcal{S}_2-F_{n-1}}\subset h_n,$

(vii) $\quad \delta(D_{ni})<1/n \quad$ pour n pair,

(viii) $\quad \delta(D_{ni}^*)<1/n \quad$ pour n impair,

D_{ni} et D_{ni}^* étant des disques.

Procédons par induction. Soient D_0 et D_0^* deux disques tels que $F\subset D_0$ et $F^*\subset D_0^*$. Posons $F_0=\overline{D}_0$ et $F_0^*=\overline{D_0^*}$. Soit h_0 une homéomorphie telle que $h_0(\mathcal{S}_2)=\mathcal{S}_2$ et $h_0(D_0)=D_0^*$.

Soit $n>0$ pair. Admettons que les conditions (i)—(vii) sont satisfaites pour $n-1$.

F n'étant pas une coupure (d'après § 52, III, 6), soit, conformément à III, 11, F_n un ensemble satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (vii).

Définissons les disques $D_{n1}^*,\ldots,D_{nk_n}^*$ successivement comme suit:

Il est légitime d'admettre en vertu de (i)—(iii) que

$$\overline{D}_{n1}+\ldots+\overline{D}_{ns_n}\subset D_{n-1,1} \quad \text{et} \quad \overline{D}_{nm}\ non\subset D_{n-1,1} \quad \text{pour} \quad s_n<m\leqslant k_n.$$

Donc $FD_{n-1,1}=FD_{n1}+\ldots+FD_{ns_n}$ et d'après (v) (pour $n-1$):

$$h(FD_{n1})+\ldots+h(FD_{ns_n})=h(FD_{n-1,1})=F^*\cdot D_{n-1,1}^*.$$

Il existe donc, d'après II, 9', un système de disques $D_{n1}^*,\ldots,D_{ns_n}^*$ tel que

$$h(FD_{ni})\subset D_{ni}^*, \quad \overline{D_{ni}^*}\subset D_{n-1,1}^* \quad \text{et} \quad \overline{D_{ni}^*}\cdot\overline{D_{nj}^*}=0 \quad \text{pour} \quad i\neq j.$$

En définissant de façon analogue les disques D_{nm}^* pour $m>s_n$ et en définissant F_n^* par la première égalité (iii), les formules (i), (iii) et (v) se trouvent vérifiées.

Enfin, l'homéomorphie h_n est définie conformément à 3 de façon à satisfaire aux conditions (iv) et (vi).

Les conditions (i)—(vii) se trouvent ainsi satisfaites.

Pour n impair, on procède de façon analogue, en remplaçant F et F_n par F^* et F_n^*, et D_{ni}^* et F_{n-1}^* par D_{ni} et F_{n-1}. On parvient à l'homéomorphie h_n^{-1}, inverse à h_n.

Posons

$$h^*(x)=\lim_{n=\infty} h_n(x).$$

La convergence étant uniforme, la fonction h^* est continue et $h^*(\mathcal{S}_2)=\mathcal{S}_2$.

On a $h\subset h^*$, car en vertu de (iv), (v) et (viii)

$$|h(x)-h_n(x)|\leqslant\delta(D_{ni}^*)<1/(n-1) \quad \text{pour} \quad x\in FD_{ni}.$$

$h^*|\mathcal{S}_2-F$ étant d'après (vi) une transformation homéomorphe de $\mathcal{S}_2-F$ en $\mathcal{S}_2-F^*$, il en résulte que h^* est une homéomorphie sur l'espace $\mathcal{S}_2$ tout entier.

Remarque. Le théorème est en défaut dans l'espace $\mathcal{E}^3$ [1]).

5. *Théorème de Denjoy-Riesz. Tout ensemble fermé F de dimension* 0 *est situé sur un arc* [2]).

En effet, A étant un sous-ensemble de l'intervalle $\mathcal{J}$ et h une transformation homéomorphe de A en F (cf. § 21, IV, th. VI), il suffit d'étendre cette homéomorphie sur $\mathcal{J}$ pour obtenir un arc contenant F.

Remarque. Le théorème reste vrai en remplaçant $\mathcal{S}^2$ par un *continu localement connexe qui ne contient aucun point de séparation locale* (c'est-à-dire qu'aucun point ne sépare aucune région) [3]).

Le th. 5 se laisse préciser comme suit:

6. *A et B étant deux sous-ensembles fermés de $\mathcal{E}^2$ de dimension* 0, *il existe un arc L tel que*

(6) $$LB\subset A\subset L.$$

---

[1]) Voir L. Antoine, op. cit. Cf. du même auteur *Sur les voisinages de deux figures homéomorphes*, Fund. Math. **5** (1924), p. 265.

[2]) Voir F. Riesz, C. R. Paris **141** (1906), p. 650 et A. Denjoy ibid. **151** (1910), p. 138. Pour une généralisation, voir J. R. Kline et R. L. Moore, Ann. of Math. **20** (1918), p. 218.

[3]) Théorème de G. T. Whyburn, Fund. Math. **18** (1932), p. 57.

De plus, *a_0 et a_1 étant deux points de A donnés en avance, on peut admettre qu'ils sont les extrémités de L.*

Comme $A+B \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{C}$ et comme $\mathcal{C}$ est homogène, il existe d'après 4 une homéomorphie h telle que

$$h(A+B)\subset\mathcal{C}, \quad h(\mathcal{E}^2)=\mathcal{E}^2, \quad h(a_0)=0 \quad \text{et} \quad h(a_1)=1.$$

Posons

$$K=\underset{xy}{E}\{y=\varrho[x,h(A)]\} \quad \text{où } x\in\mathcal{I}, \quad \text{et} \quad L=h^{-1}(K).$$

K étant un arc (cf. § 15, IV (5) et § 24, XI, 2) aux extrémités 0 et 1, L est un arc a_0a_1. En outre

$$K\cdot\mathcal{I}=h(A), \quad \text{donc} \quad L\cdot h^{-1}(\mathcal{I})=A,$$

d'où la formule (6), puisque $B\subset h^{-1}(\mathcal{I})$.

7. *R_0 et R_1 étant deux régions homéomorphes telles que* $\dim(\mathcal{S}_2-R_0)=0=\dim(\mathcal{S}_2-R_1)$, *toute transformation homéomorphe h de R_0 en R_1 se laisse étendre à une homéomorphie sur $\mathcal{S}_2$.*

Soit $p\in\mathcal{S}_2-R_0$. Nous allons montrer que l'oscillation $\omega_h(p)$ s'annule.

Supposons par contre que $\omega_h(p)>0$.

Il existe alors une suite de points $a_n\in R_0$ telle que:

(7) $\lim\limits_{n=\infty} a_n=p$, (8) $|h(a_n)-h(a_{n+1})|>\eta$ où $\eta>0$.

Soit A l'ensemble composé du point p et des points a_n, où $n=1,2,\dots$ Comme $\bar{A}=A$ et $\dim A=0$, il existe d'après 6 (en posant $B=\mathcal{S}_2-R_0$) un arc $L=a_1p$ tel que $A\subset L$ et $L-R_0=p$.

Posons

(9) $$C_n=h(a_na_{n+1}) \quad \text{où} \quad a_na_{n+1}\subset L.$$

Soit $\{C_{k_n}\}$ une sous-suite convergente de la suite $\{C_n\}$; soit

$$C=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, C_{k_n}.$$

D'après (8), $\delta(C)\geqslant\eta$. Le continu C ne se réduit donc pas à un seul point. Mais alors — comme $\dim(\mathcal{S}_2-R_1)=0$ — il vient $CR_1\neq0$; ceci est impossible puisque d'après (9):

$$p=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}(a_na_{n+1}), \quad \text{donc} \quad R_0\cdot\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}(a_{k_n}a_{k_n+1})=0, \quad \text{d'où} \quad R_1\cdot\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, C_{k_n}=0.$$

Il est ainsi établi que $\omega_h(p)=0$ pour tout $p\in\mathcal{S}_2-R_0$, et de même: $\omega_{h^{-1}}(q)=0$ pour tout $q\in\mathcal{S}_2-R_1$.

On a donc

$$h\subset f\in\mathcal{S}_2^{\mathcal{S}_2}, \quad f(\bar{R}_0)=\mathcal{S}_2, \quad h^{-1}\subset g\in\mathcal{S}_2^{\mathcal{S}_2}, \quad g(\bar{R}_1)=\mathcal{S}_2.$$

Il en résulte facilement que $g=f^{-1}$ (cf. la fin de la démonstration du th. IV, 6).

Le th. IV, 9 peut être précisé comme suit:

8 [1]). *Soient, pour $j=0,1$, R_j une région et H_j l'hyperespace de la décomposition de $\mathcal{S}_2-R_j$ en composantes. On a alors l'équivalence:*

(10) $$(R_0 \underset{\text{top}}{=} R_1)\equiv(H_0 \underset{\text{top}}{=} H_1).$$

H_j étant conçu comme sous-ensemble de $\mathcal{S}_2$, on a d'après IV, 9:

(11) $$R_j \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_2-H_j.$$

Comme $\dim H_j=0$, il vient en vertu de 7:

$$(\mathcal{S}_2-H_0 \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_2-H_1)\to(H_0 \underset{\text{top}}{=} H_1)$$

et en vertu de 4:

$$(H_0 \underset{\text{top}}{=} H_1)\to(\mathcal{S}_2-H_0 \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_2-H_1).$$

Rapprochées de (11), ces implications donnent (10).

9. *Théorème d'invariance. R étant une région $\subset\mathcal{S}_2$, la puissance de la famille des composantes de $\mathcal{S}_2-R$ est un invariant intrinsèque de R.*

C'est une conséquence directe du th. 8.

Le problème analogue concernant les sous-ensembles ouverts de $\mathcal{S}_2$ sera envisagé au § 55, X.

§ 55. La surface sphérique $\mathcal{S}_2$. Problèmes quantitatifs. Étude du groupe $\mathcal{P}^A$.

I. Généralités et notations. Conformément à la remarque finale du § 51, I, tous les théorèmes des §§ 51 et 52 restent valables en remplaçant la circonférence $\mathcal{S}$ par l'ensemble $\mathcal{P}$ (plan $\mathcal{E}^2$ privé du point 0) et l'ensemble $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}^2$. Désormais, nous convenons que $f\sim1$, où $f\in\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$, veut dire qu'il existe une fonction $u\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{X}}$ telle que

$$f(x)=e^{u(x)} \quad \text{pour} \quad x\in\mathcal{X}.$$

[1]) Voir B. v. Kerékjártó, *Topologie* I, p. 123.

$\Psi(\mathcal{X})$ désignera l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ telles que $f \sim 1$. $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ désignera le groupe-facteur $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}/\Psi(\mathcal{X})$ et $b_1(\mathcal{X})$ — son rang.

Notons quelques énoncés faciles à établir, dont nous ferons constamment usage.

1. *Soit $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$. Définissons $\vec{f}$ par la condition:*

$$\vec{f}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $f(x) = e^{u(x)}$ où $u \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{X}}$, est que $\vec{f}(x) = e^{i\varphi(x)}$ où $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{X}}$.

Par conséquent, *les conditions: $f \sim 1$, f est homotope à 1 par rapport à $\mathcal{P}$, $\vec{f} \sim 1$, $\vec{f}$ est homotope à 1 par rapport à $\mathcal{S}$, — sont équivalentes.*

2. *x non~ 1 sur $\mathcal{P}$* (cf. § 51, III, 4, 1⁰).

De façon plus générale:

3. *$x-p$ non~ 1 sur $\mathcal{E}^2 - p$ et $\dfrac{x-p}{x-q}$ non~ 1 sur $\mathcal{S}_2 - p - q$.*

En effet, l'homographie $f(x) = \dfrac{x-p}{x-q}$ transforme $\mathcal{S}_2 - p - q$ en $\mathcal{P}$. En supposant que $f(x) = e^{u(x)}$ pour $x \in \mathcal{S}_2 - p - q$, on aurait $y = e^{uf^{-1}(y)}$ pour $y \in \mathcal{P}$, contrairement à 2.

Remarque. Nous convenons que: *si $q = \infty$, $x - q \equiv 1$.*

4. *C désignant la circonférence $|x-p| = r$ où $p \neq \infty$, à tout $f \in \mathcal{P}^C$ correspond un et un seul n tel que $f(x) \sim (x-p)^n$.*

Autrement dit, *la fonction $x-p$ constitue une base du groupe $\mathcal{P}^C$ mod $\Psi(C)$.*

C'est une conséquence facile du th. 4 du § 51, III.

Avec les mêmes notations, on a:

5. *$|q-p| > r$ entraîne $(x-q) \sim 1$ sur C.*

Car (cf. § 51, II, 6) le rayon R issu du point 0 et parallèle au vecteur $q-p$ ne contient aucune valeur de la fonction $x-q$ où $x \in C$.

6. *Q désignant le cercle $|x-p| \leqslant r$, toute fonction $f \in \mathcal{P}^Q$ est homotope à l'unité, c'est-à-dire que $f \sim 1$.*

C'est une conséquence directe du § 52, I, 9, 1⁰.

Remarque. Les théorèmes 4 et 6 permettent d'établir d'une façon très simple le *théorème fondamental de l'Algèbre*[1]).

Supposons, en effet, que le polynôme

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ne s'annule pas. Posons $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Soit r un nombre réel suffisamment grand pour que l'on ait

$$(1) \qquad |x^n| > |g(x)| \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant r.$$

Soit Q le cercle $|x| \leqslant r$ et C — sa circonférence. D'après 6, $f \sim 1$ sur Q, donc sur C.

Nous allons montrer, d'autre part, que $f(x) \sim x^n$ sur C, ce qui impliquera une contradiction, puisque x^n *non*~ 1 sur C d'après 4.

En effet, en posant

$$h(x,t) = x^n + t \cdot g(x) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

on conclut que f est homotope à x^n sur C. Car

$$h(x,0) = x^n, \quad h(x,1) = f(x) \quad \text{et} \quad h(x,t) \neq 0 \quad \text{pour} \quad |x| = r,$$

puisque, en supposant que $h(x,t) = 0$, on aurait

$$x^n = -t \cdot g(x), \quad \text{d'où} \quad |x^n| = t \cdot |g(x)|, \quad \text{donc} \quad |x^n| \leqslant |g(x)|,$$

contrairement à (1).

II. Coupures de $\mathcal{S}_2$. 1. *Théorème d'Eilenberg*[2]). *Pour qu'un ensemble $A \subset \mathcal{S}_2 - p - q$ ne soit pas une coupure entre p et q, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(1) \qquad \frac{x-p}{x-q} \sim 1 \ \textit{sur} \ A.$$

Posons

$$(2) \qquad f(x) = \frac{x-p}{x-q}.$$

Admettons d'abord que C est un continu tel que $p, q \in C \subset \mathcal{S}_2 - A$. D'après § 54, I, 3, on a $f|\mathcal{S}_2 - C \sim 1$, d'où la relation (1), puisque $A \subset \mathcal{S}_2 - C$.

Réciproquement, admettons la formule (1). Il existe d'après § 51, II, 9, un ensemble ouvert G tel que

$$(3) \qquad A \subset G \subset \mathcal{S}_n - p - q \quad \text{et} \quad f|G \sim 1.$$

[1]) Cf. aussi Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, p. 469.

[2]) Op. cit. Fund. Math. **26** (1936), p. 75.

En supposant que A est une coupure entre p et q, G est un séparateur entre ces points. Il contient donc un séparateur fermé F entre p et q. Mais alors $f|F$ *non* ~ 1 (d'après I, 3 et § 53, II, 5), contrairement à (3).

2. *Aucun ensemble contractile relativement à $\mathcal{S}$ n'est une coupure de $\mathcal{S}_2$.*

En particulier, *aucun ensemble homéomorphe à un sous-ensemble de l'intervalle n'est une coupure de $\mathcal{S}_2$* (cf. § 52, I, 9, 4⁰).

3. *Étant donnés un ensemble connexe C et une coupure D entre p et q telle que $C\subset D\subset \bar{C}-p-q$, il existe un point $a\in D$ tel que $C+a$ est une coupure entre p et q.*

En effet, f étant défini par la formule (2), les conditions $f|D$ *non* ~ 1 et $f|C\sim 1$ entraînent en vertu du th. 7 du § 51, VI (en posant $\mathcal{X}=D$) l'existence d'un point a tel que $(f|C+a)$ *non* ~ 1.

4—5. *En remplaçant, dans les énoncés 2 et 5 du § 53, IV, $\mathcal{S}_n$ par $\mathcal{S}_2$, on peut omettre l'hypothèse que F soit fermé.*

La démonstration du th. 4 reste valable en remplaçant le corollaire 6 du § 53, II par le th. 1.

En vue d'établir 5, posons, pour simplifier les notations, $p=0$ et $q=\infty$. On a alors d'après 1: $x|F\sim 1$. Cela veut dire (cf. § 49, IV) que l'ensemble F se laisse déformer dans $\mathcal{P}$ en un seul point.

6. *Théorème généralisé d'Eilenberg. Soient $p_0,\ldots,p_n$ $n+1$ points différents et soit $A\subset\mathcal{S}_2-(p_0,\ldots,p_n)$. Pour que A soit une coupure entre tout couple p_i,p_j (où $i\neq j$), il faut et il suffit que les homographies*

$$(4)\qquad f_1(x)=\frac{x-p_1}{x-p_0}\;,\ldots,\; f_n(x)=\frac{x-p_n}{x-p_0}$$

soient linéairement indépendantes sur A mod $\Psi(A)$; c'est-à-dire que *les conditions*

$$(5)\qquad (x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1 \quad \textit{sur}\quad A$$

et

$$(6)\qquad k_0+\ldots+k_n=0,$$

entraînent: $k_0=0,\ldots,k_n=0$.

La condition **nécessaire**. Pour s'en convaincre, procédons par induction. L'énoncé est vrai pour $n=1$, car on a f_1 *non* ~ 1 d'après 1. Admettons qu'il soit vrai pour $n-1$ et chaque A.

Soit $k_0,\ldots,k_n$ un système d'entiers satisfaisant aux conditions (5) et (6).

Soit, conformément au th. 9 du § 51, II, G un ensemble ouvert tel que

$$(7)\qquad A\subset G\subset\mathcal{S}_2-(p_0,\ldots,p_n)\quad\text{et}\quad (x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1\quad\text{sur } G.$$

Désignons par C_j la composante de $\mathcal{S}_2-G$ qui contient p_j. Soit L un arc irréductible entre C_0 et $C_1+\ldots+C_n$, donc un arc dont l'une extrémité, soit a, appartient à C_0, l'autre, soit b, à l'un des ensembles $C_1,\ldots,C_n$, à C_n par exemple, et $LC_j=0$ pour $0\neq j\neq n$. On constate aussitôt que les ensembles C_0+L+C_n, $C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}$ sont des composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-H$ où $H=G-L$. Donc H est une coupure entre tout couple p_i,p_j où $i<j<n$, et n'est pas une coupure entre p_0 et p_n. Il en résulte d'après 1 que $f_n\sim 1$ sur H, donc que $f_n^{k_n}\sim 1$, d'où — en vertu de (7) — que

$$(x-p_0)^{k_0+k_n}\cdot(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_{n-1})^{k_{n-1}}\sim 1\quad\text{sur}\quad H,$$

ce qui implique par hypothèse que: $k_0+k_n=0$, $k_1=0,\ldots,k_{n-1}=0$. Rapprochées de (5), ces identités donnent $f_n^{k_n}\sim 1$ sur A, d'où $k_n=0$ puisque A coupe entre p_0 et p_n.

La condition **suffisante**. Admettons que A n'est pas une coupure entre p_0 et p_1. On a donc, d'après 1, $f_1\sim 1$ sur A et en posant $k_0=-1$, $k_1=1$, $k_2=0,\ldots,k_n=0$, on satisfait aux conditions (5) et (6).

7. *Si $A=\mathcal{S}_2-(p_0,\ldots,p_n)$ où $p_i\neq p_j$ pour $i\neq j$, les homographies* (4) *constituent une base du groupe $\mathcal{P}^A$* mod $\Psi(A)$.

Autrement dit (en tenant compte du th. 6), *toute fonction $f\in\mathcal{P}^A$ est de la forme*:

$$(8)\qquad f(x)=e^{u(x)}(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\quad \textit{où}\quad u\in(\mathcal{E}^1)^A\quad\textit{et}\quad k_0+\ldots+k_n=0.$$

Procédons par induction.

1⁰ Soit $n=0$. Comme $\mathcal{S}_2-p_0\underset{\text{top}}{=}\mathcal{E}^2$, on a $f\sim 1$ (cf. § 52, I, 9, 1⁰). Donc $k_0=0$.

2⁰ Soit $n>0$ et admettons le théorème pour $n-1$. Il est légitime d'admettre que $p_n\neq\infty$. Décrivons du point p_n comme centre un cercle $K\subset\mathcal{S}_2-(p_0,\ldots,p_{n-1})$. Soit $C=\mathrm{Fr}(K)$. D'après I, 4 et 5, on a sur C:

$$f(x)\sim(x-p_n)^{k_n}\quad\text{et}\quad x-p_0\sim 1,$$

donc, en posant

$$(9)\qquad h(x)=f(x)\,(x-p_0)^{k_n}(x-p_n)^{-k_n},$$

il vient $h|C\sim 1$.

Soit conformément au th. 8 du § 51, II,

(10) $$h|C \subset f^* \in \mathfrak{P}^K \quad \text{et} \quad f^* \sim 1.$$

Posons

(11) $$g(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{si} \quad x \in K, \\ h(x) & \text{si} \quad x \in A - \operatorname{Int}(K). \end{cases}$$

D'après (10) et (11), on a $g \in \mathfrak{P}^{A+p_n}$. Il vient donc par hypothèse

(12) $g(x) \sim (x-p_0)^{l_0} \cdot \ldots \cdot (x-p_{n-1})^{l_{n-1}}$ sur $A+p_n$ et $l_0 + \ldots + l_{n-1} = 0$.

On a, d'autre part,

(13) $$g \sim h \quad \text{sur} \quad A - \operatorname{Int}(K) \quad \text{et sur} \quad K - p_n,$$

car on a d'après (11), $g=h$ sur $A-\operatorname{Int}(K)$, donc $g=h$ sur C, d'où $g \sim h$ sur $K-p_n$, puisque $K-p_n$ est déformable en C (cf. § 49, IV, 1).

Les ensembles $A-\operatorname{Int}(K)$ et $K-p_n$ étant fermés dans leur somme, A, et leur produit, C, étant connexe, on a d'après (13) $g \sim h$ sur A (cf. § 51, VI, 3).

Il en résulte en vertu de (9) et (12) que

$$f(x) \sim (x-p_0)^{l_0-k_n} \cdot (x-p_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x-p_{n-1})^{l_{n-1}} \cdot (x-p_n)^{k_n} \quad \text{sur } A.$$

En posant $k_0 = l_0 - k_n$, $k_1 = l_1, \ldots, k_{n-1} = l_{n-1}$, on a donc les formules (8).

Les énoncés suivants se déduisent de 1:

8. *Soit $g \in \mathcal{S}_2^{\mathfrak{X}}$. Si l'ensemble $g(\mathfrak{X})$ ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre p et q, on a*

(14) $$\frac{g(x)-p}{g(x)-q} \sim 1 \quad \textit{sur} \quad \mathfrak{X}.$$

On a, en effet, d'après 1

$$\frac{y-p}{y-q} = e^{v(y)} \quad \text{où} \quad v \in (\mathcal{E}^2)^{g(\mathfrak{X})},$$

donc

$$\frac{g(x)-p}{g(x)-q} = e^{vg(x)} \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Réciproquement:

9. *Si la fonction $g \in \mathcal{S}_2^{\mathfrak{X}}$ est une homéomorphie assujettie à la condition* (14), *l'ensemble $g(\mathfrak{X})$ ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre p et q.*

Soit, en effet, $x = h(y)$ la fonction inverse à $y = g(x)$. En admettant (14), on a

$$\frac{g(x)-p}{g(x)-q} = e^{u(x)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{y-p}{y-q} = e^{uh(y)} \quad \text{pour} \quad y \in g(\mathfrak{X}).$$

Il en résulte, d'après 1, que $g(\mathfrak{X})$ n'est pas une coupure entre p et q.

III. Groupes $\mathfrak{P}^F$ et $\mathfrak{B}_1(F)$ pour $F = \bar{F} \subset \mathcal{S}_2$.

1. *Toute fonction $f \in \mathfrak{P}^F$ est homotope à une fonction rationnelle dont les zéros et pôles appartiennent à $\mathcal{S}_2 - F$.*

Il existe, en effet, d'après le th. 9 du § 53, II, un ensemble fini $p_0, \ldots, p_n$ contenu dans $\mathcal{S}_2 - F$ et une fonction f^* telle que

$$f \subset f^* \in \mathfrak{P}^A \quad \text{où} \quad A = \mathcal{S}_2 - (p_0, \ldots, p_n).$$

D'après II, 7, $f^*(x) \sim (x-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x-p_n)^{k_n}$, d'où

(1) $$f(x) \sim (x-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x-p_n)^{k_n} \quad \text{sur} \quad F \quad \text{et} \quad k_0 + \ldots + k_n = 0.$$

Remarque. Soit $R_0, R_1, \ldots$ la suite (finie ou infinie) des composantes de $\mathcal{S}_2 - F$. On peut admettre conformément au § 53, II, 9, que

(2) $$p_j \in R_j \quad \text{où} \quad j = 0, 1, \ldots,$$

(3) $$k_j = 0 \quad \text{si} \quad f|\operatorname{Fr}(R_j) \sim 1.$$

En tenant compte de (2), le th. 1 peut être complété comme suit:

2. *$r(x)$ étant une fonction rationnelle arbitraire homotope à $f(x)$ sur F, l'exposant k_j est le nombre algébrique des zéros et des pôles de la fonction $r(x)$ qui appartiennent à R_j*[1]*.*

Les exposants $k_0, k_1, \ldots$ sont donc déterminés de façon univoque (il ne dépendent pas du choix des points $p_j \in R_j$).

Soit, en effet, $r(x) = c(x-q_0)^{l_0} \cdot \ldots \cdot (x-q_m)^{l_m}$, où $q_0 = \infty$, si F est borné. On a donc

(3') $$f(x) \sim (x-q_0)^{l_0} \cdot \ldots \cdot (x-q_m)^{l_m} \quad \text{et} \quad l_0 + \ldots + l_m = 0.$$

Posons $Q_j = R_j \cdot (q_0, \ldots, q_m)$. Pour j fixe, soit $Q_j = (q_{t_1}, \ldots, q_{t_v})$.

---

[1]) C'est-à-dire, le nombre des zéros et pôles, chacun compté avec sa multiplicité. Ajoutons que la multiplicité d'un pôle est négative (par définition).

Il vient d'après II, 1 sur F:

$$\frac{x-q_{t_1}}{x-p_j}\sim 1,\ \ldots,\ \frac{x-q_{t_v}}{x-p_j}\sim 1,$$

d'où

(4) $$(x-q_{t_1})^{l_{t_1}}\cdot\ldots\cdot(x-q_{t_r})^{l_{t_r}}\cdot(x-p_j)^{-k'_j}\sim 1,$$

où $k'_j=l_{t_1}+\ldots+l_{t_r}$ (et $k'_j=0$ si $Q_j=0$).

k'_j est donc le nombre algébrique des zéros et des pôles de la fonction r qui appartiennent à R_j.

Il résulte de (3′) et (4) que

(5) $$f(x)\sim(x-p_0)^{k'_0}\cdot(x-p_1)^{k'_1}\cdot\ldots\ \text{ et }\ k'_0+k'_1+\ldots=l_0+\ldots+l_m=0.$$

En posant $k_j=0$ pour $j>n$, les formules (1) et (5) donnent

$$1\sim(x-p_0)^{k'_0-k_0}\cdot(x-p_1)^{k'_1-k_1}\cdot\ldots\ \text{sur } F,\quad\text{et}\quad (k'_0-k_0)+(k'_1-k_1)+\ldots=0,$$

d'où $k_j=k'_j$ pour $j=0,1,\ldots$ en vertu de (2) et II, 6.

2′. *Corollaire: Pour que l'on ait $k_j=0$, il faut et il suffit que la fonction f admette une extension $f^*\in\mathcal{P}^{F+R_j}$.*

On a, en effet, d'après (1), pour $x\in F$

(6) $$f(x)=e^{u(x)}\cdot(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\quad\text{où}\quad u\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}.$$

En admettant que $k_j=0$ et en posant, pour $x\in F+R_j$,

(7) $$f^*(x)=e^{u(x)}(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_{j-1})^{k_{j-1}}\cdot(x-p_{j+1})^{k_{j+1}}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n},$$

il vient

(8) $$f\subset f^*\in\mathcal{P}^{F+R_j}.$$

Réciproquement, en admettant la formule (8), on a l'égalité (7) sur $F+R_j$. Il est donc légitime d'omettre l'astérisque dans (7); d'où $k_j=0$.

3. *Sous l'hypothèse* (2), *les homographies*

(9) $$\frac{x-p_1}{x-p_0},\ \frac{x-p_2}{x-p_0},\ \ldots,\quad\text{où}\quad x\in F$$

constituent une base de $\mathcal{P}^F$ mod $\Psi(F)$.

La démonstration du th. 3 se réduit en vertu du th. 1 à montrer que les homographies (9) sont linéairement indépendantes sur F mod $\Psi(F)$; en d'autres termes, que les conditions

$$(x-p_0)^{m_0}\cdot(x-p_1)^{m_1}\cdot\ldots\sim 1\quad\text{sur}\quad F\ \text{et}\ m_0+m_1+\ldots=0$$

entraînent: $m_0=0,\ m_1=0,\ldots$

Mais cela est une conséquence directe du th. II, 6.

Le théorème suivant sur la *caractérisation du groupe* $\mathfrak{B}_1(F)$, pour F fermé, en résulte immédiatement:

4. $$\mathfrak{B}_1(F)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{G}^n,$$

où $n=\omega$ si le nombre $b_0(\mathcal{S}_2-F)$ des composantes de $\mathcal{S}_2-F$ est infini, et $n=b_0(\mathcal{S}_2-F)$ si ce nombre est fini.

Plus précisément, *on définit une isomorphie entre les groupes $\mathfrak{B}_1(F)$ et $\mathcal{G}^n$, en faisant correspondre à $f\in\mathcal{P}^F$ le point $(k_1,k_2,\ldots)\in\mathcal{G}^n$ déterminé par* (1) *et* (2).

Le th. 4 entraîne directement le suivant:

5. *Théorème de dualité*[1]. $b_1(F)=b_0(\mathcal{S}_2-F)$.

6. *Théorème d'invariance*[2]. *Le nombre des parties séparées (non vides) en lesquelles un ensemble $A\subset\mathcal{S}_2$ décompose $\mathcal{S}_2$ est un invariant intrinsèque.*

Pour $A=\bar{A}$ ce théorème résulte du précédent. Le cas général s'en déduit en vertu du th. 7 du § 44, IV (cf. la démonstration du th. 6 du § 53, IV).

IV. Théorèmes d'addition. 1. *Si aucun des ensembles A_0 et A_1 fermés (ou ouverts) dans A_0+A_1 ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre aucun couple de points $p_0,\ldots,p_n$ $(n>0)$, tandis que A_0+A_1 coupe $\mathcal{S}_2$ entre chaque couple de ces points, l'ensemble $A_0\cdot A_1$ contient au moins $n+1$ composantes*[3].

---

[1]) Cf. le théorème de dualité de J. W. Alexander en Topologie algébrique, *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), p. 343. Cf. aussi N. Bruschlinsky, Math. Ann. **109** (1934), p. 525, et H. Freudenthal, Comp. Math. **2** (1935), p. 134.

[2]) Pour $\mathcal{S}_n$ où $n>2$, ce théorème a été démontré à l'aide de l'homologie.

[3]) Théorème de S. Straszewicz (pour A_0 et A_1 fermés). Voir *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. **7** (1925), p. 168.

On a d'après II, 1

$$\frac{x-p_k}{x-p_0}\sim 1 \quad \text{sur } A_0 \text{ et sur } A_1 \text{ pour } k=1,2,\dots,n,$$

et d'après II, 6 les homographies

$$\frac{x-p_1}{x-p_0},\dots,\frac{x-p_n}{x-p_0}$$

sont linéairement indépendantes sur A_0+A_1 mod $\Psi(A_0+A_1)$.

Le rang $p_1(A_0,A_1)$ du groupe $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)$ (voir § 51, V (4) où l'on posera $\mathcal{X}=A_0+A_1$) est donc $\geqslant n$. Comme, d'autre part, $p_1(A_0,A_1)\leqslant b_0(A_0\cdot A_1)$ (d'après § 51, V, 6), il vient $b_0(A_0,A_1)\geqslant n$.

2. *Lemme. A_0 et A_1 étant deux ensembles tels que $A_0+A_1\neq\mathcal{S}_2$ et dont le produit $A_0\cdot A_1$ est fermé, à toute fonction $f\in\mathcal{P}^{A_0\cdot A_1}$ correspondent deux fonctions $f_0\in\mathcal{P}^{A_0}$ et $f_1\in\mathcal{P}^{A_1}$ telles que*

(1) $$f(x)=f_0(x)\cdot f_1(x) \quad \textit{pour} \quad x\in A_0\cdot A_1.$$

En symbole (cf. § 51, IV (0)): $\theta_1(A_0,A_1)=\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}$, *d'où*

(2) $$d_1(A_0,A_1)=b_1(A_0\cdot A_1),$$

sous l'hypothèse que $\overline{A_0\cdot A_1}=A_0\cdot A_1$ *et* $A_0+A_1\neq\mathcal{S}_2$.

Soit, en effet, $p_0,p_1,\dots$ une suite contenant précisément un point de toute composante de $\mathcal{S}_2-A_0\cdot A_1$; admettons, en outre, que $p_0\in\mathcal{S}_2-(A_0+A_1)$. En posant dans III, 1, $F=A_0\cdot A_1$, on obtient

$$f(x)=e^{u(x)}\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_0}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n} \quad \text{pour} \quad x\in A_0\cdot A_1 \quad \text{et} \quad u\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}.$$

Comme $\mathcal{S}_2-A_0\cdot A_1=(\mathcal{S}_2-A_0)+(\mathcal{S}_2-A_1)$, il est légitime d'admettre que

$$(p_1,\dots,p_m)\subset\mathcal{S}_2-A_0 \quad \text{et} \quad (p_{m+1},\dots,p_n)\subset\mathcal{S}_2-A_1.$$

En posant

$$f_0(x)=e^{u(x)}\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_0}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_m}{x-p_0}\right)^{k_m}$$

et

$$f_1(x)=\left(\frac{x-p_{m+1}}{x-p_0}\right)^{k_{m+1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n},$$

on satisfait à (1).

3. *A_0 et A_1 étant deux ensembles fermés (ouverts) dans A_0+A_1 et tels que*

$$\overline{A_0\cdot A_1}=A_0\cdot A_1\neq 0\neq\mathcal{S}_2-(A_0+A_1),$$

on a, en posant $\operatorname{ind}(A)=b_0(A)-b_1(A)$:

(3) $$\operatorname{ind}(A_0+A_1)+\operatorname{ind}(A_0\cdot A_1)=\operatorname{ind}(A_0)+\operatorname{ind}(A_1).$$

La formule (3) résulte de (2) et du § 51, V (7.3).

4. *Théorème de Straszewicz*[1]. *Soient:* $A_j=\bar{A}_j$, $B_j=\mathcal{S}_2-A_j$, *où* $j=0,1$, *et*

(4) $$A_0\cdot A_1\neq 0\neq B_0\cdot B_1.$$

On a alors

$$b_0(A_0+A_1)+b_0(A_0\cdot A_1)-b_0(A_0)-b_0(A_1)=$$
$$=b_0(B_0+B_1)+b_0(B_0\cdot B_1)-b_0(B_0)-b_0(B_1).$$

C'est une conséquence des th. 3 et III, 5.

Remarque. Si l'une des inégalités (4) n'est pas satisfaite, on a, en vertu de § 52, II, 4 et § 50, X, 10, les implications suivantes:

1° si $A_0\cdot A_1=0$, on a $b_0(B_0\cdot B_1)=b_0(B_0)+b_0(B_1)$[2],

2° si $A_0+A_1=\mathcal{S}_2$ et $B_j\neq 0$, on a $b_0(B_0+B_1)=b_0(B_0)+b_0(B_1)+1$.

5. *Si A_0 et A_1 sont des continus, on a*

(5) $$b_0(A_0\cdot A_1)\leqslant b_0[\mathcal{S}_2-(A_0+A_1)].$$

Si, en outre, A_0 et A_1 ne coupent pas $\mathcal{S}_2$, on a

(6) $$b_0(A_0\cdot A_1)=b_0[\mathcal{S}_2-(A_0+A_1)].$$

En effet, l'inégalité (5) résulte facilement du th. 4 (en vertu de l'unicohérence de $\mathcal{S}_2$ et du th. 9 du § 50, X). On en déduit la deuxième partie en vertu du th. 1 (qui entraîne l'inégalité inverse).

6. *Si le produit $A_0\cdot A_1$ de deux continus A_0 et A_1 n'est pas connexe, il existe un couple de points $(p,q)\subset\mathcal{S}_2-(A_0+A_1)$ tel que A_0+A_1, mais non A_0, coupe $\mathcal{S}_2$ entre eux*[3].

D'après § 51, VI, 4, il existe une fonction $f\in\mathcal{P}^{A_0+A_1}$ telle que:

(7) f *non* ~ 1, (8) $f|A_0\sim 1$.

---

[1]) Op. cit., p. 184.

[2]) Dans un ordre d'idées analogue, voir A. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), p. 427.

[3]) Théorème de S. Straszewicz et de moi-même, *Généralisation d'un théorème de Janiszewski*, Fund. Math. **13** (1929), p. 154.

Posons conformément à III, 1:

(9) $$f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\quad\text{sur}\quad A_0+A_1,$$

(10) $$k_0+\ldots+k_n=0,$$ (11) $$|k_0|+\ldots+|k_n|\neq 0,$$

les points $p_0,\ldots,p_n$ appartenant à des composantes différentes de $\mathcal{S}_2-(A_0+A_1)$.

Les conditions (8) et (9) impliquent que

$$(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1\quad\text{sur}\quad A_0.$$

Il en résulte, en vertu de (10) et (11) que les homographies

$$\frac{x-p_1}{x-p_0},\ldots,\frac{x-p_n}{x-p_0}$$

ne sont pas linéairement indépendantes mod $\Psi(A_0)$. Il existe donc, d'après II, 6, un couple p_i,p_j, où $0\leqslant i<j\leqslant n$, entre lequel A_0 ne coupe pas $\mathcal{S}_2$.

Remarque. L'exemple de deux circonférences qui ont deux points en commun montre que l'on ne peut pas demander dans la thèse du th. 6 qu'il existe un couple de points entre lequel A_0+A_1 est une coupure, tandis que *ni* A_0, *ni* A_1, n'est une coupure.

Les deux théorèmes suivants généralisent les *théorèmes sur trois continus* [1]):

7 *Soient C_0, C_1 et C_2 trois ensembles connexes et p_0,p_1 deux points de $\mathcal{S}_2-(C_0+C_1+C_2)$. Si aucun des ensembles C_k+C_{k+1} pour $k=0,1,2$ (les indices étant réduits* mod 3) *ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre les points p_0 et p_1, et si $C_0\cdot C_1\cdot C_2\neq 0$, $C_0+C_1+C_2$ ne coupe non plus $\mathcal{S}_2$ entre ces points.*

En effet, on a par hypothèse (cf. II, 1)

$$\frac{x-p_1}{x-p_0}\sim 1\quad\text{sur}\quad C_k+C_{k+1}\quad\text{pour}\quad k=0,1,2.$$

On a donc, en vertu du th. 5 du § 51, VI,

$$\frac{x-p_1}{x-p_0}\sim 1\quad\text{sur}\quad C_0+C_1+C_2,$$

d'où la conclusion demandée (d'après II, 1).

[1]) Cf. ma note *Théorème sur trois continus*, Monatsh. Math.-Phys. **36** (1929), p. 77, E. Čech, Public. Univ. Masaryk **19** (1931), p. 20 et S. Eilenberg, op. cit. p. 78.

8. *Soient C_0, C_1 et C_2 trois ensembles connexes et p_0,p_1,p_2 trois points de $\mathcal{S}_2-(C_0+C_1+C_2)$. Si aucun des ensembles C_k+C_{k+1} pour $k=0,1,2$ (les indices étant réduits* mod 3) *ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre aucun des couples $(p_0,p_1),(p_1,p_2)$ et (p_2,p_0), $C_0+C_1+C_2$ ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre l'un au moins de ces couples.*

Posons $\mathfrak{X}=C_0+C_1+C_2$. Si p_0, p_1 et p_2 appartiennent à trois constituants différents de $\mathcal{S}_2-\mathfrak{X}$, les fonctions

$$f_1(x)=\frac{x-p_1}{x-p_0}\quad\text{et}\quad f_2(x)=\frac{x-p_2}{x-p_0}$$

sont d'après II, 6, linéairement indépendantes sur $\mathfrak{X}$ mod $\Psi(\mathfrak{X})$.

On en conclut en vertu du th. 6 du § 51, VI, que l'une des six fonctions $f_j|C_k+C_{k+1}$, où $j=1,2$ et $k=0,1,2$, est *non*~ 1. Soit, par exemple,

$$\frac{x-p_1}{x-p_0}\ \textit{non}\sim 1\quad\text{sur}\quad C_0+C_1.$$

Il en résulte d'après II, 1, que C_0+C_1 coupe $\mathcal{S}_2$ entre p_0 et p_1.

Remarque. Les théorèmes 5' et 6' du § 51, VI impliquent la généralisation suivante des théorèmes 7 et 8 [1]) (on réduira les indices mod n):

7'. *Soient $A_0,\ldots,A_{n-1}$ n ensembles arbitraires ($n\geqslant 3$) et p_0,p_1 deux points de $\mathcal{S}_2-(A_0+\ldots+A_{n-1})$. Si aucun des ensembles $A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-1}$ ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre p_0 et p_1, si tous les ensembles $C_k=A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-2}$ sont connexes et si $C_0\cdot\ldots\cdot C_{n-1}\neq 0$, l'ensemble $A_0+\ldots+A_{n-1}$ ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre p_0 et p_1.*

8'. *Soit $(p_0,p_1,p_2)\subset\mathcal{S}_2-(A_0+\ldots+A_{n-1})$. Si aucun des ensembles $A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-1}$ ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre aucun des couples (p_0,p_1), (p_1,p_2), et (p_2,p_0), et si tous les ensembles $C_k=A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-2}$ sont connexes, l'ensemble $A_0+\ldots+A_{n-1}$ ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre l'un au moins des trois couples précités.*

9. *Théorème de décomposition. C étant un continu localement connexe, à tout ensemble fermé F disjoint de C correspondent deux continus localement connexes C_0 et C_1 tels que $C=C_0+C_1$ et dont aucun n'est une coupure de $\mathcal{S}_2$ entre aucun couple de points de F.*

[1]) Pour la démonstration, voir ma note de Fund. Math. **36** (1949), p. 277.

D'après le théorème de Borel, il existe un système fini $R_0,\ldots,R_n$ de composantes de $\mathcal{S}_2-C$ tel que $F\subset R_0+\ldots+R_n$. Si $n=0$, on posera $C_0=C=C_1$. Admettons donc que $n\geqslant 1$ [1]). Soit $p_j\in R_j$ pour $j=0,\ldots,n$. Soit L un arc unissant les points $p_0,\ldots,p_n$. D'après § 52, I, 9, 4°, l'ensemble LC est contractile relativement à $\mathcal{S}$. On a donc

$$\frac{x-p_j}{x-p_0}\sim 1 \quad \text{sur} \quad LC, \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,n.$$

Soit, conformément à § 51, II, 9, F_0 un entourage fermé de LC dans C tel que

$$\frac{x-p_j}{x-p_0}\sim 1 \quad \text{sur} \quad F_0 \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,n. \tag{12}$$

Posons $F_1=\overline{C-F_0}$. On a donc $F_1\cdot L=0$, et par conséquent, F_1 n'est pas une coupure entre p_0 et p_j. Il en résulte (d'après II, 1) que

$$\frac{x-p_j}{x-p_0}\sim 1 \quad \text{sur} \quad F_1 \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,n. \tag{13}$$

On déduit de (12) et (13), en vertu du th. 6 du § 51, X (en posant $\mathfrak{X}=C$), l'existence de deux continus localement connexes C_0 et C_1 tels que l'on a pour $m=0,1$:

$$F_m\subset C_m\subset C \quad \text{et} \quad \frac{x-p_j}{x-p_0}\sim 1 \quad \text{sur } C_m \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,n.$$

C_m n'est donc une coupure entre aucun couple p_0,p_j; c'est-à-dire qu'il existe une région-composante Q_m de $\mathcal{S}_2-C_m$ telle que

$$(p_0,\ldots,p_n)\subset Q_m, \quad \text{d'où} \quad R_0+\ldots+R_n\subset Q_m, \quad \text{donc} \quad F\subset Q_m.$$

En outre, comme $C=F_0+F_1$, il vient $C=C_0+C_1$.

10. *Corollaire* [2]). *Tout continu localement connexe C qui coupe $\mathcal{S}_2$ en un nombre fini de régions est somme de deux continus localement connexes qui ne coupent pas $\mathcal{S}_2$.*

Soit E un ensemble fini contenant un point de toute composante de $\mathcal{S}_2-C$.

[1]) Pour le cas particulier où $n=1$, cf. ma note de Fund. Math. **8** (1926), p. 137.

[2]) Théorème de Borsuk, Fund. Math. **24** (1935), p. 135.

Il existe d'après 9 deux continus localement connexes C_0 et C_1, ainsi que deux composantes R_0 et R_1 de $\mathcal{S}_2-C_0$ et de $\mathcal{S}_2-C_1$ respectivement tels que

$$C=C_0+C_1 \tag{14}$$

et

$$E\subset R_m, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{S}_2-C\subset R_m \quad \text{pour} \quad m=0,1. \tag{15}$$

L'ensemble $C_m^*=\mathcal{S}_2-R_m$ est donc (cf. § 44, II, 11) un continu localement connexe qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$.

En outre, d'après (15),

$$\mathcal{S}_2-C\subset R_m\subset\mathcal{S}_2-C_m, \quad \text{d'où} \quad C_m\subset\mathcal{S}_2-R_m=C_m^*\subset C,$$

donc $C=C_0^*+C_1^*$ en vertu de (14).

V. Coupures irréductibles. Le th. II, 1 entraîne le suivant:

1. *Pour qu'un ensemble $A\subset\mathcal{S}_2-p-q$ coupe $\mathcal{S}_2$ irréductiblement entre p et q, il faut et suffit que l'on ait*

$$\frac{x-p}{x-q}\ \textit{irr non}\sim 1 \quad \textit{sur} \quad A.$$

De façon plus générale [1]):

2. *Soit $A\subset\mathcal{S}_2-(p_0,\ldots,p_n)$. Pour que A coupe $\mathcal{S}_2$ irréductiblement entre tout couple p_i,p_j (où $i\neq j$), il faut et il suffit que les homographies*

$$\frac{x-p_1}{x-p_0},\ldots,\frac{x-p_n}{x-p_0}$$

soient linéairement indépendantes sur A mod $\Psi(A)$ et que l'on ait

$$\frac{x-p_k}{x-p_0}\ \textit{irr non}\sim 1 \quad \textit{sur } A \textit{ pour} \quad k=1,\ldots,n.$$

C'est une conséquence directe de II, 6 et II, 1.

3. *Soit $F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_2$. Soient $R_0,\ldots,R_m$ (m fini ou infini) les composantes de $\mathcal{S}_2-F$ telles que* $\operatorname{Fr}(R_j)=F$. *On a alors* (cf. § 51, VII (1)):

$$\operatorname{rang}[\Omega(F)/\Psi(F)]=m. \tag{1}$$

Autrement dit, *pour que l'ensemble F soit la frontière commune à $n+1$ régions ($n\geqslant 1$), il faut et il suffit qu'il existe n fonctions $f_1,\ldots,f_n$ linéairement indépendantes sur F mod $\Psi(F)$ et telles que $f_i\sim 1$ sur tout vrai sous-ensemble fermé de F (pour $i=1,\ldots,n$).*

[1]) Cf. S. Eilenberg, op. cit., p. 103.

En effet, d'après § 44, V, 1, l'ensemble F coupe irréductiblement $\mathcal{S}_2$ entre p et q sous l'hypothèse qu'il est la frontière commune des composantes de $\mathcal{S}_2-F$ qui contiennent p et q respectivement.

En vertu du th. 2 on a donc rang$[\Omega(F)/\Psi(F)]\geqslant m$.

Soit, d'autre part, $f_1,\ldots,f_n$ un système satisfaisant à la seconde partie du théorème. Soit $p_j\in R_j$, où $j=0,\ldots,m$. On a d'après III, 1:

$$f_i(x)\sim\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{i,1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_m}{x-p_0}\right)^{k_{i,m}}\quad \text{sur } F\quad (i=1,\ldots,n), \tag{2}$$

car (cf. III (3)) R étant une composante de $\mathcal{S}_2-F$ telle que $\mathrm{Fr}(R)\neq F$, on a par hypothèse $f_i|\mathrm{Fr}(R)\sim 1$ pour $i=1,\ldots,n$.

Le système (2) de n homotopies implique aussitôt que $n\leqslant m$. L'identité (1) en résulte directement.

4. *Théorème d'invariance*[1]). *La propriété d'être une frontière commune à n régions est un invariant intrinsèque.*

C'est une conséquence directe du th. 3.

5. *Théorème de décomposition. Soit $A\subset\mathcal{S}_2-(p_0,\ldots,p_n)$. Si A coupe irréductiblement $\mathcal{S}_2$ entre tout couple p_i,p_j $(i\neq j)$ et si A est décomposable, A se décompose en deux ensembles connexes A_0 et A_1 tels que*

$$A_1=A\cdot\overline{A-A_0}\quad \text{et}\quad A_0=A\cdot\overline{A-A_1}$$

et $A_0\cdot A_1$ est somme de $n+1$ ensembles $F_0,\ldots,F_n$, non vides, fermés dans $A_0\cdot A_1$ et tels que chacun des ensembles A_0 et A_1 est irréductiblement connexe entre F_k et $A_0\cdot A_1-F_k$ pour $k=0,1,\ldots,n$.

C'est une conséquence du § 51, VII, 5, rapproché du th. 2, qui implique que rang $[\Omega(A)/\Psi(A)]\geqslant n$.

6. *Théorème d'addition. Soient $A=A_0+A_1$ une décomposition de A en deux continus et $A_0\cdot A_1=F_0+\ldots+F_n$ une décomposition en $n+1$ $(\geqslant 2)$ ensembles fermés, disjoints et non vides. Si chacun de deux ensembles A_0 et A_1 est irréductiblement connexe entre F_k et $A_0\cdot A_1-F_k$, pour $k=0,1,\ldots,n$, il existe dans $\mathcal{S}_2-A$ un système de points $p_0,\ldots,p_n$ tel que A coupe irréductiblement $\mathcal{S}_2$ entre tout couple p_i,p_j (où $i\neq j$).*

Autrement dit, *A est la frontière commune à $n+1$ régions.*

C'est une conséquence du th. 3, rapproché du § 51, VII, 5, qui implique que rang $[\Omega(F)/\Psi(F)\geqslant n$.

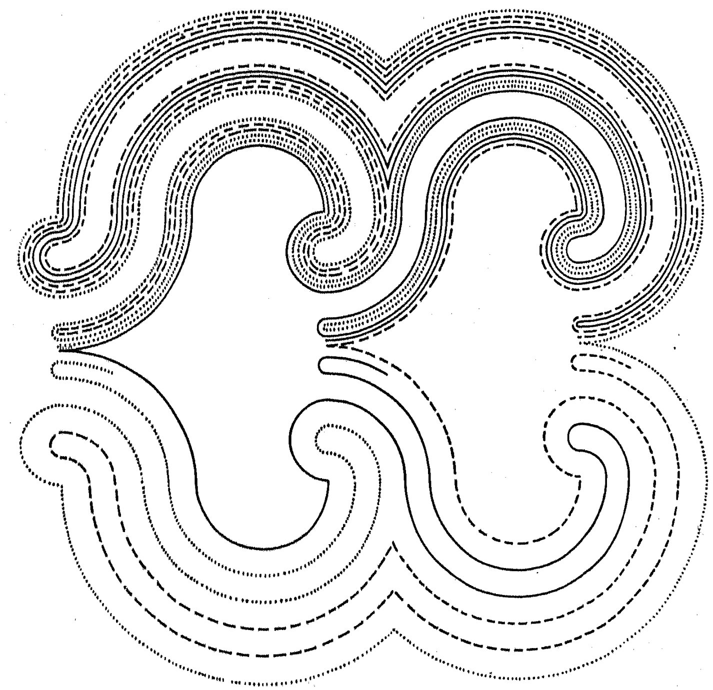
[1]) Cf. Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, p. 392 et S. Eilenberg, op. cit. p. 104.

Voici quelques corollaires:

7. *Tout ensemble A qui coupe $\mathcal{S}_2$ irréductiblement entre p et q est connexe et discohérent.*

Si, en outre, A est localement connexe, il est une courbe simple fermée.

C'est une conséquence du th. 1, rapproché du § 51, VII, 1 et 2.



8. *Tout ensemble qui coupe $\mathcal{S}_2$ irréductiblement entre p et q est ou bien indécomposable, ou bien somme de deux ensembles irréductibles entre le même couple de points*[1]).

C'est une conséquence directe du th. 5.

[1]) Cf. mes notes *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. **6** (1924), p. 137, et *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fund. Math. **12** (1928), p. 21.

9. *Tout ensemble irréductible entre a et b qui coupe $\mathcal{S}_2$ irréductiblement entre p et q est ou bien indécomposable, ou bien somme de deux ensembles indécomposables fermés* [1]).

C'est une conséquence du § 51, VII, 3 (cf. aussi § 43, VII, 7).

10. *Tout ensemble A qui coupe $\mathcal{S}_2$ irréductiblement entre p_0 et p_1, entre p_1 et p_2 et entre p_2 et p_0 est ou bien indécomposable, ou bien somme de deux ensembles fermés indécomposables* [2]).

Si A est, en outre, compact, A est un continu irréductible entre deux points.

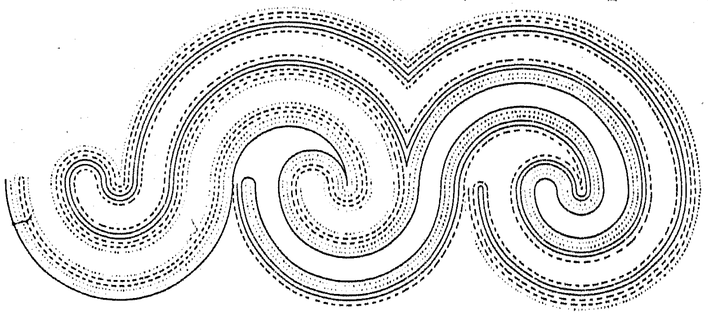
C'est une conséquence du th. 2 et du § 51, VII, 6.

En tenant compte du th. 1 du § 44, V, on en déduit que:

11. *Toute frontière commune à trois régions est soit un continu indécomposable, soit somme de deux continus indécomposables* [3]).

Les figures p. 404 et p. 403 présentent des frontières communes à trois régions: l'une indécomposable et l'autre — somme de deux continus indécomposables [4]).

Ajoutons qu'une modification convenable de cette construction permet de remplacer le terme *trois* par n, ou même par ∞ [5]).



VI. Groupes $\mathfrak{P}^A$ et $\mathfrak{B}_1(A)$ pour A localement connexe [6]). Plusieurs propriétés des continus plans localement connexes qui ont été établies au § 54, II seront généraliser à présent aux ensembles localement connexes (fermés ou non).

[1]) Voir ma note *Über geschlossene Kurven und unzerlegbare Kontinua*, Math. Ann. **98** (1927), p. 404. Cf. P. Alexandroff, Math. Ann. **96** (1926), p. 537.

[2]) S. Eilenberg, op. cit., p. 82.

[3]) Voir mes notes précitées, Fund. Math. **6**, p. 138 et Fund. Math. **12**, p. 36.

[4]) Pour les définitions précises, voir B. Knaster, *Quelques coupures singulières du plan*, Fund. Math. **7** (1925), p. 277 et 280.

[5]) Ibid., p. 281.

[6]) Voir S. Eilenberg, op. cit., p. 83 et 105.

Les théorèmes II, 1 et § 51, X, 4 impliquent directement le théorème suivant, qui généralise le th. 5 du § 54, II.

1. *Tout ensemble localement connexe par arcs $A \subset \mathcal{S}_2 - p - q$, qui coupe $\mathcal{S}_2$ entre p et q, contient une courbe simple fermée qui est une coupure entre ces points.*

2. *A étant un ensemble localement connexe par arcs, toute composante de $\mathcal{S}_2 - A$ est un semi-continu (donc un constituant de $\mathcal{S}_2 - A$).*

En effet, p et q étant deux points de $\mathcal{S}_2 - A$ qui ne se laissent pas unir dans $\mathcal{S}_2 - A$ par un continu, ils sont séparés d'après 1 par un sous-ensemble fermé (même par une courbe simple fermée) de A. Mais alors ils n'appartiennent pas à la même composante de $\mathcal{S}_2 - A$.

3. *A étant un ensemble localement connexe qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$, il en est de même de tout ensemble B tel que*

$$A \subset B \subset A + L(A).$$

Plus précisément, *si l'ensemble localement connexe A ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre p et q, il en est de même de l'ensemble $[A + L(A)] - p - q$.*

En effet, d'après II, 1,

$$\frac{x-p}{x-q} \sim 1 \quad \text{sur } A, \quad \text{donc sur} \quad [A + L(A)] - p - q$$

suivant le th. 3 du § 51, X.

4. *Pour qu'un ensemble localement connexe A ne coupe pas $\mathcal{S}_2$, il faut et il suffit qu'il soit contractile relativement à $\mathcal{S}$ (donc relativement à $\mathfrak{P}$).*

Soit, en effet, A un ensemble localement connexe qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$. Soit $f \in \mathcal{S}^A$. Il s'agit de prouver que $f \sim 1$. Soient, conformément au § 44, II, 23, B un G_δ localement connexe tel que $A \subset B \subset L(A)$, et $g \in \mathcal{S}^B$ une extension de f.

Supposons, par impossible, que f *non*~ 1, donc que g *non*~ 1.

B étant connexe par arcs (d'après § 45, II, 1), il existe, suivant § 51, X, 4, une courbe simple fermée C telle que:

(1) $C \subset B$, (2) $g|C$ *non*~ 1.

Soient D_0 et D_1 les disques, composantes de $\mathcal{S}_2 - C$. Comme B n'est pas une coupure de $\mathcal{S}_2$ (d'après 3), on a pour l'un de ces disques — pour D_0 par exemple — l'inclusion

(3) $D_0 \subset B$ d'où $\overline{D_0} \subset B$

d'après (1).

L'ensemble $\mathcal{S}_2 - \overline{D_0} = D_1$ étant connexe, il vient, en raison du § 53, II, 10:

$$g|\overline{D}_0 \sim 1, \quad \text{d'où} \quad g|C \sim 1, \tag{4}$$

contrairement à (2).

Réciproquement, si A coupe $\mathcal{S}_2$ entre p et q, on a

$$\frac{x-p}{x-q}\, non \sim 1 \quad \text{sur} \quad A,$$

d'après II, 1. A n'est donc pas contractile relativement à $\mathcal{P}$, donc à $\mathcal{S}$.

5. *Tout ensemble A connexe, localement connexe, qui n'est pas une coupure de $\mathcal{S}_2$ est un semi-continu*[1]).

Soit $p, q \in A$. Il s'agit de démontrer que l'ensemble $B = \mathcal{S}_2 - A$ n'est pas une coupure entre p et q. Admettons, pour simplifier les notations, que $p = 0$, $q = \infty$ et $1 \in B$.

Posons

$$f(x,y) = \frac{xy - y}{x - y} \quad \text{où} \quad x \in A \quad \text{et} \quad y \in B.$$

On constate aussitôt que:

$$\text{(5)} \quad f \in \mathcal{P}^{A \times B}, \qquad \text{(5')} \quad f(0,y) = 1, \qquad \text{(5'')} \quad f(\infty, y) = y.$$

A étant contractile relativement à $\mathcal{P}$ (d'après 4), on déduit de (5) et (5') en vertu du th. 2 du § 51, X (en posant $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$ et $a = 0$), que

$$f \sim 1 \quad \text{sur} \quad A \times B, \quad \text{d'où} \quad y \sim 1 \quad \text{sur} \quad B,$$

d'après (5'').

Il en résulte, suivant II, 1, que B ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre les points 0 et ∞.

On rapprochera le théorème suivant du th. 11 du § 54, II.

6. *A étant localement connexe et C étant un constituant de $\mathcal{S}_2 - A$, tout point p de $A \cdot \overline{C}$ est accessible de C.*

Soit $c \in C$. Il s'agit d'établir l'existence d'un continu K tel que

$$c, p \in K \subset C + p. \tag{6}$$

Soit F un ensemble fermé tel que

$$c, p \in F \subset C + p \quad \text{et} \quad p \in \overline{F - p} \tag{7}$$

[1]) Théorème de S. **Eilenberg**, Fund. Math. **29** (1937), p. 159. Rappelons qu'il existe dans $\mathcal{S}_2$ des ensembles connexes, localement connexes et totalement imparfaits (mais qui coupent $\mathcal{S}_2$); cf. § 44, I, exemple 8⁰.

(on peut admettre par exemple que F se compose de c, de p et d'une suite extraite de C et convergente vers p). D'après (7), tout point x de $F - p$ se laisse unir à c par un continu disjoint de A, donc (cf. 3) par un continu disjoint de $L(A) - x - c$, donc de $L(A) - F$. Autrement dit, il existe un constituant D de $\mathcal{S}_2 - [L(A) - F]$ tel que $F - p \subset D$. Il vient d'après (7) $p \in \overline{D}$ et par conséquent $D + p$ est connexe.

L'ensemble $L(A)$ étant un G_δ localement connexe (d'après § 44, II, 20 et 22), $L(A) - F$ l'est également. Il est donc (cf. § 45, II, 1) localement connexe par arcs, et en vertu du th. 2, D est une composante de l'ensemble $\mathcal{S}_2 - [L(A) - F]$. L'ensemble $D + p$ étant un sous-ensemble connexe de celui-ci (car $p \in F$), on en conclut que $p \in D$. En tant que semi-continu, D contient donc un continu K irréductible entre c et p. D'après le th. 3 du § 43, II, $K - p$ est connexe. Soit H la composante de $\mathcal{S}_2 - [L(A) - F + p]$ qui contient $K - p$, donc c, La formule (cf. (7)):

$$A \subset L(A) - F + p \subset L(A) \tag{7'}$$

montre que $L(A) - F + p$ est un G_δ localement connexe (cf. § 44. II, 20—22), donc localement connexe par arcs. Par conséquent (d'après 2), H est un semi-continu et d'après (7') $H \subset \mathcal{S}_2 - A$.

En tant que constituant du point c dans $\mathcal{S}_2 - A$, C contient donc H; d'où $K - p \subset C$ et la formule (6) en découle.

7. *Soit A un ensemble localement connexe dont le complémentaire $\mathcal{S}_2 - A$ se compose d'un nombre fini de constituants*:

$$\mathcal{S}_2 - A = B_0 + \ldots + B_n.$$

Soit $p_j \in B_j$ pour $j = 0, \ldots, n$. Toute fonction $f \in \mathcal{P}^A$ est homotope alors à une fonction rationnelle:

$$f(x) \sim (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}, \quad \text{où} \quad k_0 + \ldots + k_n = 0. \tag{8}$$

En conséquence (cf. II, 6), *les homographies*

$$\frac{x - p_1}{x - p_0}, \ldots, \frac{x - p_n}{x - p_0}$$

constituent une base de $\mathcal{P}^A$ mod $\Psi(A)$.

Envisageons d'abord le cas où A est localement connexe par arcs. Soit, conformément à 1, C_{ij} une courbe simple fermée contenue dans A et qui coupe $\mathcal{S}_2$ entre p_i et p_j. Soit C la somme des courbes C_{ij} (où $i \neq j$). Soit R_j la composante de $\mathcal{S}_2 - C$ telle que $p_j \in R_j$. Comme $C \subset A$, on a $B_j \subset R_j$. Posons

$$\text{(9)} \quad F = \mathcal{S}_2 - (R_0 + \ldots + R_n), \qquad \text{d'où} \qquad \text{(10)} \quad F \subset A.$$

La formule (8) peut donc être supposée satisfaite sur F (d'après III, 1). Supposons, par impossible, qu'elle ne soit pas satisfaite sur A, donc qu'en posant

(11) $g(x)=f(x)\cdot(x-p_0)^{-k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{-k_n}$, on a g *non* ~ 1 sur A.

Soit conformément au th. 4 du § 51, X, K une courbe simple fermée telle que

(12) $K\subset A$, (13) g *non* ~ 1 sur K.

Soit Q_j la composante de $\mathcal{S}_2-(F+K)$ telle que $p_j\in Q_j$. Comme $F+K\subset A$ (d'après (10) et (12)), on a $B_j\subset Q_j$. Posons

(14) $H=\mathcal{S}_2-(Q_0+\ldots+Q_n)$, d'où (15) $F+K\subset H\subset A$.

D'après (14) et III, 1, on a sur H:

(16) $g(x)\sim(x-p_0)^{m_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{m_n}$, (17) $m_0+\ldots+m_n=0$.

On a donc sur F, d'après (11) et (15),

$$(x-p_0)^{k_0+m_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n+m_n}\sim f(x),$$

d'où

(18) $(x-p_0)^{m_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{m_n}\sim 1$ sur F,

l'homotopie (8) étant vérifiée sur F.

L'ensemble F étant une coupure entre tout couple p_i,p_j $(i\neq j)$, il résulte de (17), (18) et II, 6 que $m_0=\ldots=m_n=0$. Mais alors d'après (16) $g\sim 1$ sur H, donc (cf. (15)) sur K, contrairement à (13).

Le théorème se trouve ainsi établi dans le cas où A est un G_δ. Le cas général sera ramené à celui-ci.

Soit, en effet, $f\in\mathcal{P}^A$. Il existe une extension continue f_1 de f sur un ensemble G_δ (désignons le par A_1) contenant A, c'est-à-dire que $f\subset f_1\in\mathcal{P}^{A_1}$. Posons

$$A^*=A_1\cdot L(A)-(p_0,\ldots,p_n)\quad\text{et}\quad f^*=f_1|A^*.$$

D'après 3, A^* est un G_δ localement connexe qui coupe $\mathcal{S}_2$ en $n+1$ constituants contenant respectivement les points $p_0,\ldots,p_n$. Comme nous venons de prouver, la formule (8) est satisfaite sur A^* en substituant f^* à f. La conclusion demandée en résulte puisque $A\subset A^*$ et $f(x)=f^*(x)$ pour $x\in A$.

Désignons par $c(X)+1$ le nombre des constituants de X, ce nombre étant supposé fini. Comme dans le cas d'ensemble fermé, on déduit du th. 7 le théorème suivant:

8. *Théorème d'invariance et de dualité. A étant un ensemble localement connexe tel que $c(\mathcal{S}_2-A)=n<\infty$, on a*

$$\mathfrak{B}_1(A)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{G}^n.$$

Ajoutons que plusieurs théorèmes du N° IV sont applicables aux ensembles localement connexes en remplaçant $b_1(A)$ par $c(\mathcal{S}_2-A)$.

VII. Groupes $\mathcal{P}^G$ et $\mathfrak{B}_1(G)$ pour G ouvert. 1. *Soit G un ensemble ouvert dont le complémentaire $\mathcal{S}_2-G$ est formé d'un nombre fini de composantes $C_0,\ldots,C_n$. Toute fonction $f\in\mathcal{P}^G$ est homotope à une fonction rationnelle.*

Plus précisément: *en posant $p_j\in C_j$, on a sur G*:

(1) $f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}$ *où* $k_0+\ldots+k_n=0$.

C'est une conséquence directe du th. VI, 7.

Remarques. 1° Le th. 1 peut être déduit aussi du th. III, 1, comme suit. Soit A_j un séparateur fermé entre C_j et $\mathcal{S}_2-G-C_j$ et soit, conformément au th. 2 du § 45, III (et au théorème de Borel), $F_1,F_2,\ldots$ une suite d'ensembles fermés tels que $A_0+\ldots+A_n\subset F_1$ et que:

(2) $G=F_1+F_2+\ldots$, (3) $F_m\subset\mathrm{Int}\,(F_{m+1})$,

(4) $\mathcal{S}_2-F_m=R_{m,0}+\ldots+R_{m,n}$ et $C_j\subset R_{m,j}$ pour $j=0,\ldots,n$,

où $R_{m,0},\ldots,R_{m,n}$ sont les composantes de $\mathcal{S}_2-F_m$.

D'après (4) et III (1)—(2), on a sur F_m:

(5) $f(x)\sim(x-p_0)^{k_{m,0}}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_{m,n}}$ et $k_{m,0}+\ldots+k_{m,n}=0$.

Comme $F_1\subset F_m$, l'homotopie (5) a lieu sur F_1. On a donc d'après III, 2, $k_{m,j}=k_{1,j}$ pour $j=0,\ldots,n$. Posons $k_{1,j}=k_j$. Par conséquent on a l'homotopie (1) sur F_m, donc sur G en vertu de (2), (3) et du th. 8 du § 51, X (en posant $\mathcal{X}=G$ et $G_m=\mathrm{Int}\,(F_m)$).

2°. *Les exposants $k_0,\ldots,k_n$ sont déterminés de façon univoque.*

C'est une conséquence facile du th. III, 2.

Le théorème suivant présente une analogie au théorème de Runge concernant la représentation des fonctions holomorphes comme limites de fonctions rationnelles:

2. *G étant un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$, toute fonction $f \in \mathfrak{P}^G$ est de la forme*

$$f(x)=\lim_{m=\infty} r_m(x)e^{u_m(x)} \quad \text{où} \quad u_m \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2} \tag{6}$$

et où $r_m(x)$ est une fonction rationnelle.

La convergence est uniforme sur tout sous-ensemble fermé F de G.

Plus encore: *à tout F correspond un m_0 tel que l'on a pour $m \geqslant m_0$ et $x \in F$:*

$$f(x)=r_m(x)e^{u_m(x)}. \tag{7}$$

Enfin, *$\{C_j\}$ étant une suite de composantes de $\mathcal{S}_2-G$ telle qu'on a $C\cdot\overline{C_0+C_1+\ldots}\neq 0$ pour toute composante C de $\mathcal{S}_2-G$, et p_j étant un point de C_j, les zéros et les pôles des fonctions $r_1, r_2, \ldots$ appartiennent à la suite $\{p_j\}$.*

Les formules (2) et (3) étant supposées vérifiées et $R_{m,0}, R_{m,1}, \ldots$ désignant la suite des composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-F_m$, il est légitime d'admettre (cf. § 45, III, (iv)) que $R_{m,j}$ contient une composante de $\mathcal{S}_2-G$. Il existe donc — l'ensemble $R_{m,j}$ étant ouvert — un indice $t=t(m,j)$ tel que

$$C_t\cdot R_{m,j}\neq 0, \quad \text{d'où} \quad C_t\subset R_{m,j}, \quad \text{donc} \quad p_t\in R_{m,j}.$$

D'après III, 1 on a, par conséquent, l'égalité (7) sur F_m en posant

$$r_m(x)=(x-p_{t(m,0)})^{k_{m,0}}\cdot\ldots\cdot(x-p_{t(m,n_m)})^{k_{m,n_m}}.$$

Soit $F=\overline{F}$. En vertu de (2) et (3) et du th. de Borel, on a $F\subset F_{m_0}$ pour m_0 suffisamment grand. L'égalité (7) est donc satisfaite pour tout $x\in F$.

3. *G étant un ensemble ouvert tel que l'ensemble $\mathcal{S}_2-G$ est formé d'une suite infinie de composantes dont chacune, sauf une seule — nommons-la C_0 — est ouverte dans $\mathcal{S}_2-G$, toute fonction $f\in\mathfrak{P}^G$ est de la forme*

$$f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n}e^{u_n(x)} \quad \text{où} \quad u_n\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}, \quad p_n\in\mathcal{S}_2-G \quad \text{et} \quad p_0\in C_0. \tag{8}$$

La convergence est uniforme sur tout sous-ensemble fermé F de G.

Plus encore: *à tout F correspond un n_0 tel que l'on a pour $n>n_0$ et $x\in F$:*

$$f(x)=\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n}e^{v_n(x)}, \tag{9}$$

$$v_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x). \tag{9'}$$

Dans le cas où $\infty\in C_0$, on peut omettre dans (8) *et* (9) *le terme $x-p_0$* (en posant $p_0=\infty$).

En effet, d'après le th. 4 du § 45, III, on peut ranger les composantes de $\mathcal{S}_2-G$ en une suite infinie $C_0, C_1, C_2, \ldots$ de façon que l'on ait:

$$\mathcal{S}_2-F_n=R_{n,0}+\ldots+R_{n,n}, \tag{10}$$

(11) $C_j\subset R_{n,j}$ pour $1\leqslant j\leqslant n$, (12) $C_0+C_{n+1}+C_{n+2}+\ldots\subset R_{n,0}$,

les ensembles fermés F_n satisfaisant aux conditions (2), et $R_{n,0}, \ldots, R_{n,n}$ désignant les composantes de $\mathcal{S}_2-F_n$.

Soit $p_n\in C_n$. Donc $p_0\in R_{n,0}, \ldots, p_n\in R_{n,n}$ d'après (11) et (12). Il vient sur F_n, en vertu de (10) et de III (1)—(2):

$$f(x)=\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{n,1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_{n,n}}e^{v_n(x)} \quad \text{où} \quad v_n\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}, \tag{13}$$

et par conséquent

$$f(x)\sim\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{n+1,1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_{n+1}}{x-p_0}\right)^{k_{n+1,n+1}} \quad \text{sur} \quad F_n, \tag{14}$$

puisque $F_n\subset F_{n+1}$.

D'après (12), F_n n'est pas une coupure entre p_0 et p_{n+1}. On a donc (d'après II, 1):

$$\frac{x-p_{n+1}}{x-p_0}\sim 1 \quad \text{sur} \quad F_n, \tag{15}$$

d'où en vertu de (14):

$$f(x)\sim\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{n+1,1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_{n+1,n}} \quad \text{sur} \quad F_n. \tag{16}$$

Les formules (13) et (16) impliquent d'après III, 2 que

$$k_{n,1}=k_{n+1,1}, \ \ldots, \ k_{n,n}=k_{n+1,n}.$$

En posant $k_{n,n}=k_n$ pour $n=1,2,\ldots$, (13) implique (9) sur F_n.

Soit $F=\overline{F}\subset G$. Il existe d'après (2) et (3) un n_0 tel que $F\subset F_n$ pour $n\geqslant n_0$. L'égalité (9) est donc satisfaite sur F.

Finalement, en posant

$$u_1(x)=v_1(x) \quad \text{et} \quad u_n(x)=v_n(x)-v_{n-1}(x),$$

on satisfait à l'égalité (9′).

Remarques. 1° *La convergence du produit infini* (8) *est absolue. Elle ne dépend donc pas de l'ordre des facteurs.*

En conséquence, *on peut admettre que la suite $p_0,p_1,\ldots$ est une suite donnée en avance de points extraits un à un de toutes les composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-G$ (avec $p_0\in C_0$).*

Car pour tout x, il n'y a qu'un nombre fini de facteurs différents de l'unité.

2° [1]). *Si* $\lim\limits_{n=\infty} C_n=\infty$, *toute fonction $f\in\mathfrak{P}^G$ est homotope à une fonction méromorphe sur $\mathcal{E}^2$.*

3°. Le th. 3 présente une analogie remarquable au *théorème de Weierstrass sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires.*

g désignant une fonction entière et G désignant le plan $\mathcal{E}^2$ privé des zéros de cette fonction, l'hypothèse du th. 3 se trouve évidemment vérifiée.

VIII. Multiplicité d'un ensemble par rapport à une fonction $f\in\mathfrak{P}^F$ où F est fermé. Soient

(1) $$F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2-F=R_0+R_1+\ldots$$

où $R_0,R_1,\ldots$ sont les composantes de $\mathcal{S}_2-F$.

Soit

(2) $$G=R_{l_1}+R_{l_2}+\ldots$$

Nous appelons multiplicité de G par rapport à la fonction $f\in\mathfrak{P}^F$, en symbole: $\mu_G f$, *le nombre algébrique des zéros et des pôles d'une fonction rationnelle arbitraire homotope à f, qui appartiennent à G.*

En d'autres termes: *en posant conformément à* III, 1:

$$f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots,\quad k_0+k_1+\ldots=0,\quad p_j\in R_j,$$

[1]) Pour la démonstration, voir mon mémoire cité de Fund. Math. **33**, p. 340.

on a

(3) $$\mu_G f=k_{l_1}+k_{l_2}+\ldots$$

D'après III, 2 le nombre $\mu_G f$ ne dépend pas du choix de la fonction rationnelle. On a en particulier

(4) $$\mu_{R_n} f=k_n.$$

On établit facilement les six propriétés suivantes de $\mu_G f$:

1. *(norme)* $\mu_0 f=0=\mu_{\mathcal{S}_2-F} f$;
2. *(additivité)* $\mu_{G_1+G_2} f=\mu_{G_1} f+\mu_{G_2} f$ *si* $G_1\cdot G_2=0$;
3. *(homomorphie)* $\mu_G(f_1\cdot f_2)=\mu_G f_1+\mu_G f_2$;
4. *(invariance) si* $f_1\sim f_2$, *on a* $\mu_G f_1=\mu_G f_2$,

donc

$f\sim 1$ entraîne $\mu_G f=0$ quel que soit G;

5. *(caractérisation de l'homotopie) si* $\mu_{R_j} f_1=\mu_{R_j} f_2$ *pour* $j=0,1,\ldots$, *on a* $f_1\sim f_2$.

Par conséquent (cf. 4), *l'homotopie $f_1\sim f_2$ équivaut à la condition:*

$$\mu_G f_1=\mu_G f_2 \quad \textit{quel que soit } G.$$

En particulier: *$f\sim 1$ équivaut à la condition: $\mu_G f=0$ quel que soit G.*

6. *(continuité) si* $\lim\limits_{n=\infty} f_n=f$ *(la convergence étant uniforme), on a $\mu_G f_n=\mu_G f$ pour n suffisamment grand.*

C'est une conséquence de 4 et du § 49, II (1).

7. *Pour que la fonction $f\in\mathfrak{P}^F$ admette une extension $f^*\in\mathfrak{P}^{F+R_j}$, il faut et il suffit que $\mu_{R_j} f=0$.*

C'est une conséquence de (4) et de III, 2′.

8. *En posant* $f_j=f|\mathrm{Fr}(R_j)$, *on a*

$$\mu_{R_j} f_j=\mu_{R_j} f.$$

Car R_j est une composante de l'ensemble $\mathcal{S}_2-\mathrm{Fr}(R_j)=$ $=R_j+(\mathcal{S}_2-\overline{R_j})$.

IX. Multiplicité par rapport aux fonctions $f \in \mathfrak{P}^G$ où G est ouvert. Soit F un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-G$, c'est-à-dire que

$$F=\overline{F} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2-G-F=\overline{\mathcal{S}_2-G-F}.$$

D'après VII, 2, il existe une suite de fonctions rationnelles $r_1(x), r_2(x), \dots$ dont les zéros et pôles appartiennent à $\mathcal{S}_2-G$ et que

$$(1) \qquad f(x)=\lim_{n=\infty} r_n(x)e^{u_n(x)}, \quad u_n \in (\mathcal{E}^2)^G,$$

où la convergence est uniforme sur tout $F^*=\overline{F^*}\subset G$.

Nous admettons par définition que

$$(2) \qquad \mu_F f=\lim_{n=\infty} \mu_F(r_n|G),$$

$\mu_F(r_n|G)$ désignant le nombre algébrique des zéros et des pôles de r_n qui appartiennent à F.

Il s'agit de démontrer que cette limite existe et qu'elle ne dépend pas du choix des fonctions r_n.

Soit F^* un ensemble fermé qui sépare les ensembles F et $\mathcal{S}_2-G-F$. Il existe donc un G^* fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-F^*$ qui contient F et est disjoint de $\mathcal{S}_2-G-F$; d'où $F\subset G^*\subset G+F$, donc $F=G^*-G$. Soit $f^*=f|F^*$. D'après (1) et § 49, II (1), on a $f^*\sim r_n|F^*$ pour $n\geqslant n_0$. Donc, d'après VIII, 4: $\mu_{G^*}f^*=\mu_{G^*}(r_n|F^*)$. Mais $\mu_{G^*}(r_n|F^*)=\mu_F(r_n|G)$, puisque $F=G^*-G$ et aucun zéro ni pôle de r_n n'appartient à G. On parvient ainsi à la conclusion que, pour $n\geqslant n_0$, $\mu_F(r_n|G)$ a une valeur constante égale à $\mu_{G^*}f^*$, donc indépendante du choix des fonctions r_n.

Remarques. 1° Nous avons démontré en même temps que

F^* étant un sous-ensemble fermé de G, et G^* un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-F^*$ tel que $F=G^*-G$, on a

$$(3) \qquad \mu_F f=\mu_{G^*}f^* \quad \text{où} \quad f^*=f|F^*.$$

Cet énoncé permet de réduire la définition de la multiplicité par rapport à une fonction définie sur un ensemble ouvert à celle de la multiplicité d'une fonction définie sur un ensemble fermé.

2° Posons dans la formule (1):

$$(4) \qquad r_n(x)=c_n(x-p_{n,0})^{k_{n,0}}\cdot\ldots\cdot(x-p_{n,l_n})^{k_{n,l_n}}$$

où $p_{n,0}=\infty$ si $\infty\in\mathcal{S}_2-G$ et où $k^{n,0}+\ldots+k_{n,l_n}=0$.

On a alors d'après (2)

$$(5) \qquad \mu_F f=\lim_{n=\infty}(k_{n,j_1}+k_{n,j_2}+\ldots)$$

où $p_{n,j_1}, p_{n,j_2}, \dots$ appartiennent à F.

3° Dans le cas particulier où $\mathcal{S}_2-G=C_0+\ldots+C_m$ (nombre *fini* de composantes), on a d'après VII, 1:

$$f(x)=(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_m)^{k_m}\cdot e^{u(x)},$$
$$k_0+\ldots+k_m=0, \quad u\in(\mathcal{E})^G, \quad p_j\in C_j.$$

Posons dans la formule (1): $r_n(x)=(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_m)^{k_m}$; il vient alors d'après (5)

$$(6) \qquad \mu_F f=k_{j_1}+\ldots+k_{j_s} \quad \text{où} \quad p_{j_1},\dots,p_{j_s}\in F, \quad \text{et en particulier} \quad \mu_{C_j}f=k_j.$$

Remplaçons G par F et F par G dans les th. VIII, 1—4. On en conclut que:

1—4. *Dans le cas où $f\in\mathfrak{P}^G$ et où G est ouvert, la multiplicité jouit des propriétés de norme, d'additivité, d'homomorphie et d'invariance.*

Le théorème sur la *caractérisation de l'homotopie* est également vrai:

5. *Si $\mu_F f_1=\mu_F f_2$ pour tout F, on a $f_1\sim f_2$. Ces deux conditions sont donc équivalentes* (en vertu de 4).

En particulier, *la condition $f\sim 1$ équivaut à la suivante: $\mu_F f=0$ quel que soit F.*

Posons, en effet, $f=f_1:f_2$. Supposons que f *non*~ 1. On en déduit en vertu du th. 4 du § 51, X, qu'il existe un ensemble fermé $F^*\subset G$ tel qu'en posant $f^*=f|F^*$, on a f^* *non*~ 1. Il existe donc d'après VIII, 5, un G^* fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-F^*$ tel que $\mu_{G^*}f^*\neq 0$. Posons $F=G^*-G$. Cet ensemble est évidemment ouvert dans $\mathcal{S}_2-G$, mais il y est aussi fermé, car

$$G^*=\overline{G^*}-F^*, \quad \text{d'où} \quad F=\overline{G^*}-F^*-G=\overline{G^*}-G.$$

Il vient d'après (3), $\mu_F f\neq 0$, d'où $\mu_F f_1\neq\mu_F f_2$.

Rapports à quelques théorèmes sur les fonctions analytiques[1]).

6. *La notion de multiplicité est une notion* l o c a l e: *on n'altère pas la valeur de $\mu_F f$ en réduisant le domaine des x à un ensemble ouvert qui, augmenté de F, constitue un entourage de F.*

[1]) Pour les démonstrations, voir mon mémoire cité, N° XII et XX.

De façon plus générale:

Soient: G et G_0 deux ensembles ouverts tels que $G_0 \subset G \subset \mathcal{S}_2$, F et F_0 deux ensembles fermés-ouverts dans $\mathcal{S}_2 - G$ et $\mathcal{S}_2 - G_0$ respectivement et tels que $F = F_0 - G$. Soit $f \in \mathfrak{L}^G$. On a alors

$$\mu_{F_0} f_0 = \mu_F f \quad \text{où} \quad f_0 = f|G_0.$$

7. *g étant une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert et p un zéro k-uple de cette fonction, on a*

$$\mu_p g^* = k,$$

g^* désignant la fonction g réduite aux x tels que $g(x) \neq 0$.

Le même théorème s'étend aux fonctions *méromorphes*.

Remarque. Dans les hypothèses du th. 7, on a donc $\mu_p g^* > 0$. Cependant dans le domaine des fonctions continues arbitraires, un zéro (isolé) peut avoir la multiplicité 0, ou même une multiplicité négative. Les fonctions suivantes en fournissent des exemples:

1° $g(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$, $g(0) = 0$. On a $\mu_p g^* = 0$ pour $p = 0$.

2° $g(x) = x^{-n} e^{-\frac{1}{|x|}}$, $g(0) = 0$. On a $\mu_p g^* = -n$ pour $p = 0$.

8. *Théorème de Rouché généralisé. Soient: M un sous-ensemble fermé de $\mathcal{S}_2$, g et g_1 deux fonctions-éléments de $(\mathcal{E}^2)^M$ telles que l'on a $|g_1(x)| < |g(x)|$ pour tout $x \in \operatorname{Fr}(M)$. F et F^* désignant respectivement l'ensemble des zéros de $g(x)$ et de $g^*(x) = g(x) + g_1(x)$, on a*

$$\mu_F f = \mu_{F^*} f^{*}\ {}^{1)},$$

où $\quad f = g|G, \quad f^* = g^*|G^*, \quad G = \operatorname{Int}(M) - F \quad$ *et* $\quad G^* = \operatorname{Int}(M) - F^*$.

9. *Soient $M = \overline{M} \subset \mathcal{S}_2$ et $g_n \in (\mathcal{E}^2)^M$, où $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction g qui ne s'annule en aucun point de* $\operatorname{Fr}(M)$. *F_n et F désignant respectivement l'ensemble des zéros de $g_n(x)$ et de $g(x)$. on a pour n suffisamment grand*

$$\mu_F f = \mu_{F_n} f_n \quad \text{où} \quad f = g|[\operatorname{Int}(M) - F] \quad \text{et} \quad f_n = g_n|[\operatorname{Int}(M) - F_n].$$

10. *A étant un continu élémentaire ou une région, toute homéomorphie $f \in \mathfrak{L}^A$ est homotope à une homographie.*

---

[1]) On constate aussitôt (en tenant compte du th. 7) que dans le cas où les fonctions g et g_1 sont *holomorphes* sur $\operatorname{Int}(M)$, $\mu_F f$ et $\mu_{F^*} f^*$ désignent respectivement les nombres algébriques des zéros des fonctions g et g^*.

De façon plus générale:

11. *Soient G un ensemble ouvert et $f \in \mathfrak{L}^G$. Si la multiplicité $\mu_F f$ n'admet (pour F variable) que trois valeurs k, 0 et $-k$ on a*

$$f(x) \sim \left(\frac{x-p}{x-q}\right)^k.$$

X. Groupe $\mathfrak{N}\mathcal{X}$. Caractérisation du groupe $\mathfrak{B}_1(G)$. Étant donné un espace $\mathcal{X}$, désignons par $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ la famille de toutes les fonctions ν qui font correspondre à tout ensemble fermé-ouvert F un entier $\nu(F)$ de façon que:

(i) *(norme)* $\nu(\mathcal{X}) = 0$,

(ii) *(additivité)* $\nu(F_1 + F_2) = \nu(F_1) + \nu(F_2)$ *si* $F_1 \cdot F_2 = 0$.

$\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ devient un groupe en définissant la composition de ses éléments par l'équivalence:

(iii) $\quad (\nu_3 = \nu_1 + \nu_2) \equiv [\nu_3(F) = \nu_1(F) + \nu_2(F)$ *quel que soit* $F]$.

$\mathcal{X}$ étant un ensemble fini: $\mathcal{X} = (p_0, \ldots, p_n)$, on a évidemment

$$\mathfrak{N}(\mathcal{X}) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}^n.$$

1. *Soit $Y = F(X)$ une isomorphie algébro-logique entre le corps des sous-ensembles fermés-ouverts d'un espace $\mathcal{X}$ et entre celui des sous-ensembles fermés-ouverts d'un espace $\mathcal{Y}$; c'est-à-dire que*

(1) $\quad F(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$, $F(X_1 - X_2) = F(X_1) - F(X_2)$, $[F(X) = 0] \rightarrow (X = 0)$.

On a alors

(2) $$\mathfrak{N}(\mathcal{X}) \underset{\text{gr}}{=} \mathfrak{N}(\mathcal{Y}).$$

Plus précisément: on établit l'isomorphie (2) en faisant correspondre à tout élément ν de $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ l'élément νF^{-1} de $\mathfrak{N}(\mathcal{Y})$.

En effet, les formules (1) impliquent que

$$F(X_1 + X_2) = F(X_1) + F(X_2), \quad (X_1 \cdot X_2 = 0) \equiv [F(X_1) \cdot F(X_2) = 0].$$

Par conséquent:

$$\nu F^{-1}(\mathcal{Y}) = \nu(\mathcal{X}) = 0,$$

$$\nu F^{-1}(Y_1 + Y_2) = \nu F^{-1}[F(X_1) + F(X_2)] = \nu F^{-1} F(X_1 + X_2) = \nu(X_1 + X_2) =$$
$$= \nu(X_1) + \nu(X_2) = \nu F^{-1}(Y_1) + \nu F^{-1}(Y_2),$$

où

$$Y_1 \cdot Y_2 = 0 \quad \text{et} \quad Y_1 = F(X_1),\ Y_2 = F(X_2),$$

$\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$ entraîne $\nu_3 F^{-1} = \nu_1 F^{-1} + \nu_2 F^{-1}$, $\quad (\nu F^{-1} = 0) \equiv (\nu = 0)$,

$\nu^* \in \mathfrak{N}(\mathcal{Y})$ entraîne $\nu^* = \nu F^{-1}$ où $\nu = \nu^* F \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$.

2. *$\mathcal{X}$ étant un espace compact et $\mathcal{Y}$ désignant l'hyperespace de ses composantes, on a l'isomorphie* (2).

En effet, f étant une transformation continue de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ telle que, pour tout y de $\mathcal{Y}$, $f^{-1}(y)$ est une composante de $\mathcal{X}$ (cf. § 42, VI, 1), on a $X=f^{-1}f(X)$ pour tout sous-ensemble fermé-ouvert X de $\mathcal{X}$ (cf. § 41, III, 4). Il suffit donc de poser $F(X)=f(X)$ et d'appliquer le th. 1.

3 [1]). *$\mathcal{X}$ étant un espace compact à une infinité de composantes, on a*

$$\mathfrak{N}(\mathcal{X}) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}^{\aleph_0}. \tag{3}$$

(où $\mathcal{G}^{\aleph_0}$ désigne le groupe des suites infinies de nombres entiers, l'addition des suites étant entendue dans le sens habituel).

En vertu du th. 2 (cf. aussi § 42, VI, 1), il est légitime d'admettre que $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble fermé, infini et non dense de l'intervalle 01. Nous allons faire correspondre à certains systèmes $\alpha_1 ... \alpha_n$, de chiffres 0 et 1, des ensembles $F_{\alpha_1...\alpha_n}$ définis comme suit:

Soient F_0 et F_1 deux ensembles fermés tels que

$$\mathcal{X}=F_0+F_1,\ F_0\cdot F_1=0,\ F_\alpha\neq 0,\ \delta(F_\alpha)<1 \quad \text{pour} \quad \alpha=0,1.$$

De façon générale, si $F_{\alpha_1...\alpha_n}$ est un ensemble fermé contenant plus d'un point et de diamètre $<1/2^{n-1}$, soient $F_{\alpha_1...\alpha_n0}$ et $F_{\alpha_1...\alpha_n1}$ deux ensembles fermés tels que

$$\begin{gathered} F_{\alpha_1...\alpha_n}=F_{\alpha_1...\alpha_n0}+F_{\alpha_1...\alpha_n1},\ F_{\alpha_1...\alpha_n0}\cdot F_{\alpha_1...\alpha_n1}=0, \\ F_{\alpha_1...\alpha_{n+1}}\neq 0,\ \delta(F_{\alpha_1...\alpha_{n+1}})<1/2^n. \end{gathered} \tag{4}$$

Appelons portions d'ordre n les ensembles $F_{\alpha_1...\alpha_n}$, ainsi que les ensembles $F_{\alpha_1...\alpha_m}$ avec $m<n$ qui se réduisent à des points individuels. On constate aussitôt que, pour n fixe, $\mathcal{X}$ est somme des portions d'ordre n et que ces portions sont disjointes, non vides et de diamètre $<1/2^{n-1}$. En conséquence, tout ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{X}$ est — pour n suffisamment grand — somme de certaines portions d'ordre n.

Rangeons tous les ensembles $F_{\alpha_1...\alpha_n0}$ (où $n\geqslant 0$) en une suite infinie: $A_1, A_2, ...$ Soit $A_0=\mathcal{X}$.

Posons, pour $\nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$,

$$\varkappa(\nu)=\{\nu(A_1),\ \nu(A_2),...\}.$$

[1]) Ce théorème est dû à A. Mostowski.

Nous allons montrer que la fonction $\varkappa$ établit l'isomorphie (3). D'abord, $\varkappa$ est une homomorphie. On a, en effet (cf. (iii)):

$$\varkappa(\nu_1+\nu_2)=\{\nu_1(A_1)+\nu_2(A_1),\ \nu_1(A_2)+\nu_2(A_2),...\}=\varkappa(\nu_1)+\varkappa(\nu_2).$$

Puis, la condition $\varkappa(\nu)=\{0,0,...\}$ entraîne $\nu(A_m)=0$ pour $m=1,2,...$ Nous en déduirons que $\nu(F)=0$ quel que soit F fermé-ouvert dans $\mathcal{X}$.

Il suffit évidemment de démontrer que $\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n})=0$. Ceci se démontre par induction. On a en effet, d'après (i), $\nu(\mathcal{X})=0=\nu(0)$. Puis, en admettant que $\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n})=0$ et que $\overline{\overline{F}}_{\alpha_1...\alpha_n}>1$, on a d'après (ii) et (4): $\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n0})+\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n1})=0$ et comme $F_{\alpha_1...\alpha_n0}$ appartient à la suite $\{A_m\}$, il vient

$$\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n0})=0=\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n1}).$$

Reste à démontrer qu'à toute suite infinie de nombres entiers $k_1, k_2, ...$ correspond une fonction $\nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$ telle que

$$\nu(A_m)=k_m \quad \text{pour} \quad m=1,2,... \tag{5}$$

Définissons la fonction ν d'abord pour $F=A_m$, en admettant que ν satisfait à la condition (5); puis définissons $\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n1})$ par induction (par rapport à n) en posant $\nu(0)=0=\nu(\mathcal{X})$ et

$$\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n0})+\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n1})=\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n}). \tag{5'}$$

Enfin, F étant somme de certaines portions d'ordre n (n minimum): $F=P_1+...+P_r$, posons

$$\nu(F)=\nu(P_1)+...+\nu(P_r).$$

On déduit de (5') que, si $P_1=F_{\alpha_1...\alpha_n0}+F_{\alpha_1...\alpha_n1}$, on a

$$\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n0})+\nu(F_{\alpha_1...\alpha_n1})+\nu(P_2)+...+\nu(P_r)=\nu(F).$$

Par conséquent, si l'on représente F en somme de portions d'ordre $n+1$ (ou plus généralement, d'ordre $p>n$): $F=R_1+...+R_s$, on a

$$\nu(R_1)+...+\nu(R_s)=\nu(F).$$

L'additivité de la fonction ν (c'est-à-dire la condition (ii)) en découle facilement.

En définitive: $\nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$.

4. *Théorème de dualité. G étant un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$, on a l'isomorphie*:

$$\mathfrak{B}_1(G) \underset{\text{gr}}{=} \mathfrak{N}(\mathcal{S}_2-G).$$

Plus précisément: *en faisant correspondre à $f \in \mathfrak{P}^G$ la multiplicité $\mu_F f$, conçue comme fonction de la variable F (qui parcourt la famille des ensembles fermés-ouverts dans $\mathcal{S}_2-G$), on établit l'isomorphie en question.*

En tenant compte des théorèmes IX, 1—5 et § 50, III, 5, il reste à démontrer qu'*il existe une fonction $f \in \mathfrak{P}^G$ par rapport à laquelle les ensembles F ont la multiplicité donnée en avance.*

En d'autres termes: *à toute fonction $\nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{S}_2-G)$, correspond une fonction $f \in \mathfrak{P}^G$ telle que*

$$\mu_F f = \nu(F) \text{ quel que soit } F \text{ fermé-ouvert dans } \mathcal{S}_2-G. \tag{6}$$

Soit, conformément au § 45, III, 2:

$$G = F_1^* + F_2^* + \dots, \quad F_n^* = \overline{F}_n^* \subset \operatorname{Int}(F_{n+1}^*), \tag{7}$$

où $\mathcal{S}_2-F_n^*$ n'admet qu'un nombre fini de composantes et où $R-G \neq 0$ pour chaque composante R de $\mathcal{S}_2-F_n^*$.

Les composantes de $\mathcal{S}_2-F_n^*$ étant contenues dans celles de $\mathcal{S}_2-F_{n-1}^*$, on peut les numéroter à l'aide d'un nombre fini de systèmes $i_1 \dots i_n$ composés de n entiers $\geqslant 0$ de sorte que l'on ait:

$$\mathcal{S}_2-F_n^* = \sum R_{i_1 \dots i_n}, \tag{8}$$

$$R_{i_1 \dots i_{n+1}} \subset R_{i_1 \dots i_n}, \tag{9}$$

la sommation étant étendue aux systèmes $i_1 \dots i_n$ (n fixe) pour lesquels $R_{i_1 \dots i_n}$ est défini.

Posons:

$$F_{i_1 \dots i_n} = R_{i_1 \dots i_n} - G. \tag{10}$$

Il vient pour tout n (cf. (8)—(10)):

$$F_{i_1 \dots i_n} = \sum_j F_{i_1 \dots i_n j}, \tag{11}$$

$$F_{i_1 \dots i_n} \cdot F_{l_1 \dots l_n} = 0 \quad \text{si} \quad (i_1 \dots i_n) \neq (l_1 \dots l_n), \tag{12}$$

$$\mathcal{S}_2 - G = \sum F_{i_1 \dots i_n}, \tag{13}$$

car d'après (7) et (8):

$$\mathcal{S}_2-G = \mathcal{S}_2-F_n^*-G = \sum R_{i_1 \dots i_n} - G.$$

D'après la définition de F_n^*, on a $R_{i_1 \dots i_n} - G \neq 0$. Soit donc (cf. (10)):

$$p_{i_1 \dots i_n} \in F_{i_1 \dots i_n}. \tag{14}$$

$F_{i_1 \dots i_n}$ étant, d'après (10), (12) et (13), fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-G$, posons:

$$k_{i_1 \dots i_n} = \nu(F_{i_1 \dots i_n}). \tag{15}$$

Il vient d'après (ii), (11) et (12):

$$k_{i_1 \dots i_n} = \sum_j k_{i_1 \dots i_n j} \tag{16}$$

et, d'après (i) et (13), on a pour tout n

$$\sum k_{i_1 \dots i_n} = 0. \tag{17}$$

Considérons la fonction rationnelle

$$r_n(x) = \prod (x - p_{i_1 \dots i_n})^{k_{i_1 \dots i_n}}. \tag{18}$$

On a

$$r_n(x) \sim r_{n+1}(x) \quad \text{sur} \quad F_n^*. \tag{19}$$

En effet, d'après (14), (11) et (10), on a $p_{i_1 \dots i_n j} \in R_{i_1 \dots i_n}$. Or, $R_{i_1 \dots i_n}$ étant une composante de $\mathcal{S}_2-F_n^*$ contenant les points $p_{i_1 \dots i_n}$ et $p_{i_1 \dots i_n j}$, il vient sur F_n^* (cf. II, 1):

$$\frac{x-p_{i_1 \dots i_n}}{x-p_{i_1 \dots i_n j}} \sim 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{(x-p_{i_1 \dots i_n})^{k_{i_1 \dots i_n j}}}{(x-p_{i_1 \dots i_n j})^{k_{i_1 \dots i_n j}}} \sim 1,$$

donc, en vertu de (16):

$$\frac{(x-p_{i_1 \dots i_n})^{k_{i_1 \dots i_n}}}{\prod_j (x-p_{i_1 \dots i_n j})^{k_{i_1 \dots i_n j}}} \sim 1,$$

d'où la formule (19). Conformément à cette formule, soit

$$r_n(x) = r_{n+1}(x) e^{u_{n+1}(x)} \quad \text{pour} \quad x \in F_n^*, \quad u_{n+1} \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2} \quad \text{et} \quad u_1(x) = 0. \tag{20}$$

Posons:

$$f_n(x) = r_n(x) e^{u_1(x) + \dots + u_n(x)}. \tag{21}$$

Il vient suivant (20) et (21):

$$f_n(x) = f_{n+1}(x) = \dots \quad \text{pour} \quad x \in F_n^*. \tag{22}$$

Par conséquent, en posant

(23) $$f(x)=f_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in F_n^*,$$

on définit la fonction f sur G de façon univoque. En vertu de (7), cette fonction est continue: $f \in \mathcal{P}^G$.

On a

(24) $$\mu_{F_{i_1 \dots i_n}} f = k_{i_1 \dots i_n}.$$

En effet, d'après (10), IX (3) et (23), on a

$$\mu_{F_{i_1 \dots i_n}} f = \mu_{R_{i_1 \dots i_n}} f | F_n^* = \mu_{R_{i_1 \dots i_n}} r_n | F_n^*,$$

puisque $f = f_n \sim r_n$ sur F_n^* (cf. (21) et th. 4). Enfin $\mu_{R_{i_1 \dots i_n}} r_n | F_n^* = k_{i_1 \dots i_n}$ en vertu des formules (18), (14) et (10).

On a ainsi $\mu_F f = \nu(F)$ (cf. (15)), si F est de la forme $F = F_{i_1 \dots i_n}$.

Dans le cas où F est un ensemble arbitraire fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$, il existe un F^* fermé qui sépare les ensembles (fermés et disjoints) F et $\mathcal{S}_2 - G - F$. En vertu de (7), il existe un n tel que $F^* \subset F_n^*$. On peut donc admettre que $F^* = F_n^*$.

$R_{i_1 \dots i_n}$ étant connexe et disjoint de F_n^*, il en résulte que l'inégalité $FR_{i_1 \dots i_n} \neq 0$ entraîne $(\mathcal{S}_2 - G - F) R_{i_1 \dots i_n} = 0$, donc que (cf. (10)) $FF_{i_1 \dots i_n} \neq 0$ entraîne $F_{i_1 \dots i_n} \subset F$.

On en conclut, en tenant compte de (13), que F est la somme des ensembles $F_{i_1 \dots i_n}$ tels que $FF_{i_1 \dots i_n} \neq 0$. D'où l'égalité (6) en vertu de (ii), (12) et (24).

En rapprochant le th. 4 du th. 3, on en déduit la *caractérisation* suivante de groupe $\mathfrak{B}_1(G)$:

5. *Si G est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$, on a*

$$\textit{soit} \quad \mathfrak{B}_1(G) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}^n, \quad \textit{soit} \quad \mathfrak{B}_1(G) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}^{\aleph_0},$$

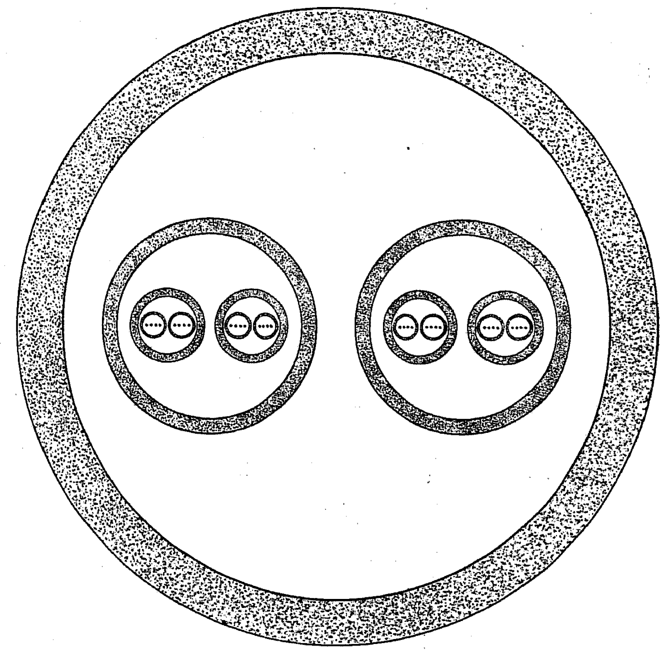
suivant que l'ensemble $\mathcal{S}_2 - G$ se compose d'un nombre fini (soit $n+1$) ou infini de composantes.

Pour les ensembles ouverts G qui coupent $\mathcal{S}_2$ en un nombre fini de continus, ce nombre est donc un *invariant intrinsèque* de G.

Remarque. L'exemple suivant montre que le complémentaire d'un ensemble ouvert G peut contenir une infinité de la *puissance* $\mathfrak{c}$ de composantes, tandis que $\mathcal{S}_2 - G^*$ n'en contient qu'une infinité *dénombrable*, bien que $G \underset{\text{top}}{=} G^*$ (cette singularité ne peut se présenter, d'ailleurs, que si G n'est pas connexe, cf. § 54, V, 9).

On considère en ce but deux systèmes de disques $\{D_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$ et $\{E_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$ (où $n = 0, 1, \dots$ et $\alpha_k = 0, 1$) tels que

$$\bar{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \subset E_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad \bar{E}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}} \subset D_{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$
$$\bar{E}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot \bar{E}_{\beta_1 \dots \beta_n} = 0 \quad \text{dès que} \quad (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (\beta_1 \dots \beta_n),$$
$$\prod_{n=0}^{\infty} \sum E_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \mathcal{C}.$$



G est la somme de tous les anneaux circulaires

$$E_{\alpha_1 \dots \alpha_n} - \bar{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

G^* est la somme d'une suite infinie d'anneaux circulaires concentriques et disjoints.

XI. Accroissement du logarithme. Indice. Soit $\zeta \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{J}}$ où $\zeta(0) = \zeta(1)$. Posons $C = \zeta(\mathcal{J})$. Soit $f \in \mathcal{P}^C$. On a donc $f\zeta \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}$, d'où (cf. § 51, III, 3) $f\zeta \sim 1$. Par conséquent

(0) $$f\zeta(t) = e^{u(t)} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \text{ et } u \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{J}}.$$

Comme $\zeta(0)=\zeta(1)$, il vient $u(1)-u(0)=2n\pi i$.
L'entier

$$\Delta_\zeta f=\frac{1}{2\pi i}[u(1)-u(0)]$$

s'appelle *l'accroissement du logarithme de la fonction f par rapport au parcours ζ.*

On constate aussitôt que le nombre $\Delta_\zeta f$ ne dépend pas du choix de la fonction u satisfaisant à (0).

Rappelons que d'après § 51, III, 4, si $f\in\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$, on a $f(x)\sim x^n$ où $n=\Delta_\zeta f$ et où $\zeta(t)=e^{2\pi i t}$.

Ajoutons que, sous des hypothèses de régularité faites sur f et sur C, on a

$$\Delta_\zeta f=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Soit $p\in\mathcal{S}_2-C$. Posons par définition

(1) $$\operatorname{ind}_\zeta p=\Delta_\zeta(x-p).$$

Autrement dit, on a, en posant $\zeta(t)-p=e^{u(t)}$ et $u\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{J}}$:

(2) $$\operatorname{ind}_\zeta p=\frac{1}{2\pi i}[u(1)-u(0)].$$

En particulier (cf. I, remarque p. 388):

(2′) $$\operatorname{ind}_\zeta \infty=0.$$

Réciproquement, l'accroissement se laisse définir à l'aide de l'indice: pour $f\in\mathcal{P}^C$ on a

(3) $$\Delta_\zeta f=\Delta_{f\zeta}x=\operatorname{ind}_{f\zeta}0,$$

$f\zeta$ désignant la fonction superposée $f[\zeta(t)]$.

De façon plus générale, si $g\in(\mathcal{E}^2)^C$ et $p\in\mathcal{S}_2-g(C)$, on a

(4) $$\Delta_\zeta[g(x)-p]=\operatorname{ind}_{g\zeta}p.$$

La transformation ζ de l'intervalle $\mathcal{J}$ détermine une transformation ζ^0 de la circonférence $\mathcal{S}$.

A savoir: $2\pi t$ *étant l'argument de* x (*où* $0\leqslant t\leqslant 1$), *posons*

$$\zeta^0(x)=\zeta(t).$$

On constate aussitôt que la fonction ζ^0 est continue:

(5) $$\zeta^0\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}},\quad \zeta^0(\mathcal{S})=C\quad\text{et}\quad \zeta^0(e^{2\pi i t})=\zeta(t).$$

Réciproquement, si $g\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}}$, on a

(6) $$\zeta^0(x)=g(x)\ \text{en posant}\ \zeta(t)=g(e^{2\pi i t}).$$

On a les th. 1 et 2 faciles à établir (quant au th. 1, cf. § 51, III, 4, 2° et I, 4):

1. $[\operatorname{ind}_\zeta p=n]\equiv[\zeta^0(x)-p\sim x^n$ (*sur* $\mathcal{S}$)$]$.

2. *Pour que la fonction ζ^0 soit une homéomorphie, il faut et il suffit que l'on ait $\zeta(t)\neq\zeta(t')$ pour tout couple $t\neq t'$, sauf lorsque $|t-t'|=1$.*

3. *Si p et q appartiennent à la même composante de $\mathcal{S}_2-C$ où $C=\zeta(\mathcal{J})\subset\mathcal{E}^2$, on a $\operatorname{ind}_\zeta p=\operatorname{ind}_\zeta q$.*

Si p appartient à la composante non-bornée, on a $\operatorname{ind}_\zeta p=0$ (cf. (2′)).

Si ζ^0 est une homéomorphie et p appartient à la composante bornée de $\mathcal{S}_2-C$, on a $\operatorname{ind}_\zeta p\neq 0$.

Posons, en effet, dans II, 8 et 9: $g=\zeta^0$ et $\mathcal{X}=\mathcal{S}$. Il vient $\zeta^0(x)-p\sim\zeta^0(x)-q$ sur $\mathcal{S}$, d'où $\operatorname{ind}_\zeta p=\operatorname{ind}_\zeta q$ en vertu de 1.

Si ζ^0 est une homéomorphie, on a $\zeta^0(x)-p$ *non*$\sim\zeta^0(x)-\infty\sim 1$, d'après II, 9. Donc $\operatorname{ind}_\zeta p\neq 0$ d'après 1.

La dernière partie du th. 3 sera précisée (cf. 6) en vertu des théorèmes qui suivent.

4 [1]. *Soient: ζ^0 une homéomorphie, $f\in\mathcal{P}^C$ et $p\in\mathcal{S}_2-C$. Si $\operatorname{ind}_\zeta p=1$ et $\Delta_\zeta f=n$, on a $f(x)\sim(x-p)^n$.*

Posons, en effet,

$$\zeta(t)-p=e^{u(t)},\quad u(1)-u(0)=2\pi i,\quad f\zeta(t)=e^{v(t)},\quad v(1)-v(0)=2n\pi i.$$

Définissons la fonction $y=w(x)$ pour $x\in C$, en admettant que

$$w(x)=v(t)-nu(t)\quad\text{où}\quad x=\zeta(t).$$

Bien qu'à $x=\zeta(0)=\zeta(1)$ correspondent deux valeurs de t, la fonction w est définie d'une façon univoque, puisque

$$v(1)-nu(1)=\big(v(0)+2n\pi i\big)-\big(2n\pi i+nu(0)\big)=v(0)-nu(0).$$

[1]) C'est une généralisation du th. I, 4.

Donc $w \in (\mathcal{E}^2)^C$ et $w\zeta(t)=v(t)-nu(t)$. Il vient

$$\big(\zeta(t)-p\big)^n e^{w\zeta(t)}=e^{nu(t)}\cdot e^{v(t)-nu(t)}=e^{v(t)}=f\zeta(t),$$

d'où $(x-p)^n e^{w(x)}=f(x)$, en posant $x=\zeta(t)$.

5. *Soient A la circonférence $|x-p|=r$ et $g \in (\mathcal{E}^2)^A$ une transformation homéomorphe de A en la courbe simple fermée $C=g(A)$. Si q est un point de la composante bornée D de $\mathcal{S}_2-C$, on a $g(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}$.*

Envisageons d'abord le cas où C est une circonférence de centre q et de rayon s. Posons $\zeta(t)=p+re^{2\pi it}$ où $0\leqslant t\leqslant 1$. On a donc $A=\zeta(\mathcal{J})$. Il vient

$$g\zeta(t)-q=|g\zeta(t)-q|e^{2\pi i\varphi(t)}=se^{2\pi i\varphi(t)}, \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{J}}.$$

Supposons, par impossible, que $|\varphi(1)-\varphi(0)|>1$. Il existe alors un t_0 tel que $|\varphi(t_0)-\varphi(0)|=1$. Par conséquent:

$$e^{2\pi i\varphi(t_0)}=e^{2\pi i\varphi(0)}, \quad \text{d'où} \quad g\zeta(t_0)=g\zeta(0), \quad \text{donc} \quad \zeta(t_0)=\zeta(0).$$

Il en résulte, d'après la définition de ζ, que $e^{2\pi it_0}=1$, ce qui est impossible puisque $0<t_0<1$.

On a donc $|\varphi(1)-\varphi(0)|\leqslant 1$, d'où $|\mathrm{ind}_{g\zeta}q|\leqslant 1$.

D'autre part, $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q\neq 0$. Cette inégalité résulte de la dernière partie du th. 3, car pour $t\neq t'$ et $|t-t'|<1$, on a $g\zeta(t)\neq g\zeta(t')$ (cf. aussi 2).

Ainsi, $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q=\pm 1$. En substituant dans 4: $C=A$, $f(x)=g(x)-q$ et en tenant compte de (4), il vient $g(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}$.

Dans le cas général, désignons par A_0 la circonférence $|x-p|=r/2$ et par C_0 la circonférence d'un cercle décrit du centre q et contenu dans D. D'après § 54, V, 3, l'homéomorphie g de A en C se laisse étendre à une homéomorphie g^* des deux „anneaux circulaires" compris respectivement entre A_0 et A et entre C_0 et C; de sorte que $g^*(A_0)=C_0$.

Posons, pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et $x \in A$:

$$h(x,t)=g^*[p+(x-p)\,(1-\tfrac{1}{2}t)]-q \quad \text{et} \quad g_0(x)=g^*\left(\frac{p+x}{2}\right).$$

Il vient

$$h \in \mathcal{P}^{A\times\mathcal{J}}, \quad h(x,0)=g(x)-q \quad \text{et} \quad h(x,1)=g_0(x)-q.$$

Donc $g(x)-q\sim g_0(x)-q$ et, g_0 étant une transformation homéomorphe de A en C_0, on a — comme nous venons de montrer —

$$g_0(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}, \quad \text{d'où} \quad g(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}.$$

Définition. Si ζ^0 est une homéomorphie et si l'on a $\mathrm{ind}_\zeta\, p=1$ pour tout point p appartenant à la composante bornée D de $\mathcal{S}_2-C$, ζ est dit un *parcours positif de la courbe C*.

Si l'on a constamment $\mathrm{ind}_\zeta\, p=-1$, le parcours est dit *négatif*.

6. *ζ^0 étant une homéomorphie, ζ est soit un parcours positif, soit négatif de la courbe $C=\zeta(\mathcal{J})$.*

Remplaçons, en effet, dans 5, A par $\mathcal{S}$ et g par ζ^0. Il vient

$$\zeta^0(x)-p\sim x^{\pm 1}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{ind}_\zeta\, p=\pm 1$$

en vertu de 1. En outre, d'après 3, $\mathrm{ind}_\zeta\, p$ a une valeur constante (pour $p \in D$).

Remarque. Si le parcours $y=\zeta(t)$ est positif, le parcours $y=\zeta(1-t)$ est négatif. Chaque courbe simple fermée admet donc deux parcours: l'un positif et l'autre négatif.

Le th. 4 implique le suivant:

7. *Soient: ζ un parcours positif de la courbe C, $f \in \mathcal{P}^C$ et $p \in D$. Si $\Delta_\zeta f=n$, on a $f(x)\sim(x-p)^n$.*

Ou encore: *si $g \in (\mathcal{E}^2)^C$ et $q \in \mathcal{S}_2-g(C)$, on a*

$$g(x)-q\sim(x-p)^{\mathrm{ind}_{g\zeta} q}.$$

XII. Rapport à la multiplicité. Caractéristique de Kronecker. Le th. XI, 1 entraîne aussitôt l'identité:

1. $\mathrm{ind}_\zeta\, p=\mu_Q[\zeta^0(x)-p]$ *où Q désigne le disque $|x|<1$.*

2. *Soient: ζ un parcours positif de la courbe simple fermée $C\subset\mathcal{E}^2$, D la composante bornée de $\mathcal{S}_2-C$ et $f \in \mathcal{P}^C$. On a*

(1) $$\mu_D f=\Delta_\zeta f=\mathrm{ind}_{f\zeta}\, 0.$$

Parsuite: *si $g \in (\mathcal{E}^2-q)^C$, on a $\mu_D[g(x)-q]=\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q$.*

Soit, en effet, $p \in D$. Soit conformément à III, 1, $f(x)\sim(x-p)^n$. Donc $\mu_D f=n$ d'après VIII (4). D'autre part, $\Delta_\zeta f=n$ suivant XI, 7.

De façon analogue:

2'. *Si D_1 est la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2-C$ et ζ_1 est un parcours négatif de C, on a $\mu_{D_1} f=\Delta_{\zeta_1} f=\mathrm{ind}_{f\zeta_1}\, 0$.*

Soit $\zeta(t)=\zeta_1(1-t)$. ζ étant un parcours positif, la formule (1) est vérifiée. Comme $\mu_D f+\mu_{D_1} f=0$ (cf. VIII, 1 et 2) et $\Delta_\zeta f=-\Delta_{\zeta_1} f$, on en tire la relation demandée.

Soit $G \subset \mathcal{S}_2$ un ensemble ouvert. Admettons que *p est un point isolé de l'ensemble $\mathcal{S}_2 - G$*. On peut donc l'entourer d'un cercle (ouvert) D de centre p et tel que $\overline{D} - p \subset G$. Soit C le contour de D; on peut admettre que $\infty \in \mathcal{S}_2 - C$. On a le théorème suivant:

3. *Pour $f \in \mathfrak{P}^G$, on a $\mu_p f = \Delta_\zeta f^* = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0$, où $f^* = f|C$ et où ζ est un parcours positif ou négatif de C, suivant que $p \neq \infty$ ou $p = \infty$* [1].

On a, en effet, $\mu_p f = \mu_D f^*$ d'après IX (3), et $\mu_D f^* = \Delta_\zeta f^*$ d'après 2 et 2'.

Soit, à présent, R une région dont le complémentaire est formé d'un nombre fini de composantes: $\mathcal{S}_2 - R = C_0 + \ldots + C_n$. Chaque C_j étant un continu qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ (cf. § 41, III, 5), on peut le séparer de tous les C_l avec $l \neq j$ à l'aide d'une courbe simple fermée (cf. § 54, II, 6). En raisonnant, comme auparavant, on a le théorème suivant:

4. *Soit $f \in \mathfrak{P}^R$. Si la courbe simple fermée $K \subset \mathcal{E}^2$ sépare le continu C_j de tous les C_l avec $l \neq j$, et si D désigne la composante de $\mathcal{S}_2 - K$ qui contient C_j, on a*

$$\mu_{C_j} f = \Delta_\zeta f^* = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0 \quad \text{où} \quad f^* = f|K,$$

ζ étant un parcours positif ou négatif de K suivant que D est borné ou non-borné.

Le th. 3 permet aussi de calculer $\mu_R f$ dans le cas où f est défini sur un ensemble fermé:

5. *Soient: $F = \overline{F} \subset \mathcal{S}_2$, R une composante de $\mathcal{S}_2 - F$, $p \in R$ et $f \in \mathfrak{P}^F$. Soit f_1 une extension de f sur l'espace $\mathcal{S}_2$ privé d'un ensemble fini Z de points tel que $ZR = p$ (f_1 est, par exemple, le membre droit de la formule* III (6)). *On a alors $\mu_R f = \mu_p f_1$.*

C'est une conséquence directe de IX (3), en y remplaçant G^* par R, F^* par F, F par p, f par f_1 et G par $\mathcal{S}_2 - Z$.

Définition. Soit A un continu élémentaire $\subset \mathcal{E}^2$. Posons

(2) $$\mathcal{S}_2 - A = D_0 + \ldots + D_n,$$

[1] On voit ainsi qu'étant donnés: une fonction $g \in (\mathcal{E}^2)^G$ et un zéro isolé p de cette fonction, et f désignant la fonction g réduite aux x tels que $g(x) \neq 0$, la multiplicité $\mu_p f$ coïncide avec „*l'indice*" du point p dans le sens employé par Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 470 („Index" oder „Vielfachheit einer 0-Stelle").

Si l'ensemble F des zéros de la fonction g est fini, $\mu_F f$ coïncide donc avec le ***nombre algébrique des zéros*** de g.

où D_j est une composante de $\mathcal{S}_2 - A$ ($j = 0, \ldots, n$). Le parcours ζ_j de Fr (D_j) étant négatif ou positif suivant que D_j est borné ou non-borné ($j = 0, \ldots, n$), on appelle *caractéristique de Kronecker de la fonction* $f \in \mathfrak{P}^{\mathrm{Fr}(A)}$ le nombre

(3) $$\operatorname{car}_A f = \operatorname{ind}_{f\zeta_0} 0 + \ldots + \operatorname{ind}_{f\zeta_n} 0.$$

De façon plus générale, si A est un ensemble élémentaire fermé:

(4) $$A = A_1 + \ldots + A_m$$

où A_k est une composante de A, on pose

(5) $$\operatorname{car}_A f = \operatorname{car}_{A_1} f_1 + \ldots + \operatorname{car}_{A_m} f_m \quad \text{où} \quad f_k = f|\mathrm{Fr}(A_k).$$

6. *Soient A un ensemble élémentaire fermé et $f \in \mathfrak{P}^{\mathrm{Fr}(A)}$. En posant $I = \mathrm{Int}(A)$, on a*

(6) $$\mu_I f = \operatorname{car}_A f.$$

Envisageons d'abord le cas où A est un continu élémentaire. On a, d'après (2)

$$\mathcal{S}_2 - \mathrm{Fr}(A) = I + D_0 + \ldots + D_n;$$

il vient donc (cf. VIII, 1 et 2):

(7) $$\mu_I f + \mu_{D_0} f + \ldots + \mu_{D_n} f = 0.$$

Posons $f_j = f|\mathrm{Fr}(D_j)$. Donc (cf. VIII, 8):

(8) $$\mu_{D_j} f = \mu_{D_j} f_j \quad \text{et} \quad \mu_{D_j} f_j = -\operatorname{ind}_{f\zeta_j} 0$$

d'après 2 et 2'.

Les formules (7), (8) et (3) impliquent (6).

Passons, à présent, au cas où A est un ensemble élémentaire fermé, satisfaisant à la formule (4). Posons $I_k = \mathrm{Int}(A_k)$. D'après § 54, III, 4, I_k est une composante de l'ensemble $\mathcal{S}_2 - \mathrm{Fr}(A_k)$ ainsi que de $\mathcal{S}_2 - \mathrm{Fr}(A)$. En posant $f_k = f|\mathrm{Fr}(A_k)$, on a donc (cf. VIII, 8) $\mu_{I_k} f = \mu_{I_k} f_k$. Comme (cf. § 54, III, 4) $I = I_1 + \ldots + I_m$, il vient (cf. VIII, 2)

$$\mu_I f = \mu_{I_1} f + \ldots + \mu_{I_m} f = \mu_{I_1} f_1 + \ldots + \mu_{I_m} f_m$$
$$= \operatorname{car}_{A_1} f_1 + \ldots + \operatorname{car}_{A_m} f_m = \operatorname{car}_A f.$$

7. *Soient: G un ensemble ouvert, $f \in \mathfrak{P}^G$, F un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$ et A un ensemble élémentaire fermé tel que*

$$F \subset \operatorname{Int}(A) \quad et \quad A \subset G + F. \tag{9}$$

On a alors

$$\mu_F f = \operatorname{car}_A [f|\operatorname{Fr}(A)]. \tag{10}$$

En effet, d'après (9),

$$F \cdot \operatorname{Fr}(A) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Fr}(A) \subset G + F, \text{ donc } \operatorname{Fr}(A) \subset G.$$

La fonction f est donc définie sur $\operatorname{Fr}(A)$. L'ensemble $I = \operatorname{Int}(A)$ étant fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - \operatorname{Fr}(A)$, on a d'après IX (3) (en remplaçant F^* par $\operatorname{Fr}(A)$ et G^* par I):

$$\mu_F f = \mu_I [f|\operatorname{Fr}(A)],$$

d'où la formule (10) en vertu de (6).

Le th. 6 rapproché de VIII, 7 (en y substituant $\operatorname{Fr}(A)$ à F et I à R_j) implique les deux suivants:

8. *Si $f \in \mathfrak{P}^A$, on a* $\operatorname{car}_A [f|\operatorname{Fr}(A)] = 0$.

9. *Si $f \in \mathfrak{P}^{\operatorname{Fr}(A)}$ et $\operatorname{car}_A f = 0$, on a $f \subset f^* \in \mathfrak{P}^A$.*

Remarques. 1° Dans des hypothèses de régularité faites sur f et sur A, le th. 8 résulte du théorème classique de Cauchy de la Théorie des fonctions analytiques.

2° Le th. 7 ramène la définition de multiplicité à celle de la caractéristique (donc à celle de l'indice), car l'existence d'un ensemble élémentaire fermé A assujetti aux conditions (9) résulte du § 54, III, 10 (l'ensemble $\mathcal{S}_2 - G - F$ étant fermé, $G + F$ est un entourage ouvert de F).

10. *Soient A un ensemble élémentaire et $g \in (\mathcal{E}^2)^A$. Admettons que $g(x) \neq 0$ pour $x \in \operatorname{Fr}(A)$ et posons $f = g|\operatorname{Fr}(A)$. Si $\operatorname{car}_A f \neq 0$, il existe un x_0 tel que $g(x_0) = 0$* [1].

C'est une conséquence directe de 8.

Plus précisément: *si l'ensemble des zéros de la fonction g est fini, leur nombre algébrique coïncide avec $\operatorname{car}_A f$, donc avec $\mu_I f$* [2].

[1] Cf. le „théorème d'existence" de Kronecker (cas $n = 2$) chez Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 467 et 470.

[2] Cf. ibidem, p. 472, th. II.

Le dernier énoncé est un cas particulier du théorème suivant [1]:

Soient $M = \overline{M} \subset \mathcal{S}_2$ et $h \in \mathcal{S}_2^M$. Désignons par F l'ensemble des x tels que $h(x) = 0$ ou ∞. Admettons que $F \cdot \operatorname{Fr}(M) = 0$. Alors, en posant $h|\operatorname{Fr}(M) = f$, $I = \operatorname{Int}(M)$ et $G = I - F$, on a $\mu_I f = \mu_F(h|G)$.

Applications au calcul du nombre algébrique des points invariants [2]. Soient E un sous-ensemble compact de $\mathcal{E}^2$ et $g \in E^E$. Admettons que

$$g(x) \neq x \quad \text{pour} \quad x \in \operatorname{Fr}(E),$$

donc qu'en posant

$$f(x) = g(x) - x \quad \text{et} \quad f^* = f|[\operatorname{Fr}(E)],$$

on a $f \in \mathfrak{P}^{\operatorname{Fr}(E)}$.

Autrement dit, Z désignant l'ensemble des points invariants de la fonction g, on a $Z \subset I$, où $I = \operatorname{Int}(E)$.

Dans le cas où p est un point isolé de l'ensemble Z, on appelle *ordre du point invariant p*, l'indice $\operatorname{ind}_{f\zeta} 0$ où ζ est un parcours positif du contour C d'un disque D tel que

$$p \in D, \quad D \subset \operatorname{Int}(E) \quad \text{et} \quad p = DZ.$$

On montre que [3]:

Dans le cas où Z est fini, le nombre algébrique des points invariants (somme des ordres des points invariants) est égal à $\mu_I f^*$.

Si E est un continu, rétracte absolu de voisinage, la trace de l'automomorphie du groupe $\mathfrak{B}_1(E)$ induite par la fonction g est égale à $1 - \mu_I f^*$.

En d'autres termes, *$p_1, \dots, p_n$ étant un système de points extraits de (différentes) composantes bornées de $\mathcal{E}^2 - E$ et en posant*

$$g(x) - p \sim (x - p_1)^{k_{j1}} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_{jn}} \ \textit{sur}\ E,$$

on a

$$\mu_I f^* = 1 - (k_{11} + \dots + k_{nn}).$$

[1] Cf. mon mémoire cité, p. 358.

[2] Cf. ma note de Fund. Math. **34** (1947), p. 261—271.

[3] Op. cit. p. 264 et 267. Cf. aussi S. Lefschetz, *Topology*, p. 358.

XIII. Homéomorphies positives et négatives. Topologie orientée.

1. *Soient: $C\subset\mathcal{E}^2$ une courbe simple fermée, D une composante de $\mathcal{S}_2-C$ et $f\in\mathcal{P}^C$ une homéomorphie. Si le point 0 appartient à la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2-f(C)$, on a $\mu_D f=0$.*

S'il appartient à la composante bornée, on a $\mu_D f=\pm1$, suivant que le parcours $f\zeta$ de $f(C)$ est positif ou négatif (ζ désignant un parcours positif ou négatif de C suivant que D est borné ou non-borné).

Par conséquent, *si D est borné, on a $f(x)\sim(x-p)^{\pm1}$ pour $p\in D$.*

Comme $\mu_{\mathcal{S}_2-\bar{D}}f=-\mu_D f$, il suffit de considérer le cas où D est borné.

En posant $\eta(t)=f\zeta(t)$, la transformation $\eta^0(z)$ (cf. XI (5)), où $z\in\mathcal{S}$, est une homéomorphie. Car $2\pi t$ étant l'argument de z, on a d'après la définition de η^0 l'identité $\eta^0(z)=\eta(t)=f\zeta(t)$; l'hypothèse $\eta^0(z)=\eta^0(z')$ entraîne donc

$$f\zeta(t)=f\zeta(t'),\text{ d'où }\zeta(t)=\zeta(t'),\text{ donc }t=t'\text{ ou }|t-t'|=1.$$

D'après XI, 2, η^0 est une homéomorphie.

Si le point 0 appartient à la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2-f(C)$, on a d'après XII, 2′ et XI, 3: $\mu_D f=\mathrm{ind}_{f\zeta}0=0$. S'il appartient à la composante bornée, il vient (en substituant dans XI, 6, $f\zeta$ à ζ et 0 à p) $\mathrm{ind}_{f\zeta}0=\pm1$, suivant que le parcours $f\zeta$ de $f(C)$ est positif ou négatif; on a donc d'après XII, 2, $\mu_D f=1$ ou $\mu_D f=-1$ respectivement.

2. *$G\subset\mathcal{S}_2$ étant un ensemble ouvert et $g\in(\mathcal{E}^2)^G$ étant une homéomorphie, on a*

$$\mu_p[g(x)-g(p)]=\pm1 \text{ quel que soit } p\in G\text{ [1]}. \tag{1}$$

De plus, si G est une région, la valeur de $\mu_p[g(x)-g(p)]$ est constante [2].

Soit, en effet, p un point donné de G. Posons $h(x)=g(x)-g(p)$. La fonction h ne s'annule qu'au point p. En posant $H=G-p$ et $h^*=h|H$, on a donc $h^*\in\mathcal{P}^H$ et p est un point isolé de $\mathcal{S}_2-H$. Soient: D un cercle (ouvert) tel que $p\in D$ et $\bar{D}\subset G$. Posons $C=\mathrm{Fr}\,(D)$. La fonction h étant une homéomorphie, l'ensemble $h(D)$ est borné, $h(C)$ est une courbe simple fermée et le disque $h(D)$ est (en vertu de l'invariance de la notion de point intérieur, cf. § 53, IV, 10) la composante bornée de $\mathcal{S}_2-h(C)$. Comme $0=h(p)\in h(D)$, on a d'après 1 $\mu_D(h|C)=\pm1$, d'où l'égalité (1) (cf. IX (3)).

[1] Bien entendu, la variabilité de x est restreinte dans cette formule à $G-p$.

[2] Voir Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 475.

Admettons à présent que G est une région. Soient: $p_0\in G$, $p_1\in G$, D un disque tel que $p_0,p_1\in D$, $\bar{D}\subset G$ et $C=\mathrm{Fr}\,(D)$. Posons $h_j(x)=g(x)-g(p_j)$ pour $j=0,1$. Il vient, comme auparavant, $\mu_{p_j}h_j=\mu_D(h_j|C)$. Comme $g(p_0)$ et $g(p_1)$ appartiennent à $g(D)$, qui est une composante de $\mathcal{S}_2-g(C)$, on a d'après II, 8,

$$g(x)-g(p_0)\sim g(x)-g(p_1)\text{ sur }C,\text{ c'est-à-dire }(h_0|C)\sim(h_1|C),$$

d'où (cf. VIII, 4) $\mu_D(h_0|C)=\mu_D(h_1|C)$, donc $\mu_{p_0}h_0=\mu_{p_1}h_1$.

Définition. $R\subset\mathcal{S}_2$ étant une région et g une transformation homéomorphe de R en sous-ensemble de $\mathcal{S}_2$, g est dite une *homéomorphie positive* si l'on a $\mu_p[g(x)-g(p)]=1$ pour tout point p tel que $g(p)\neq\infty$.

Si l'on a $\mu_p[g(x)-g(p)]=-1$, l'homéomorphie g est dite *négative*.

L'ensemble R privé d'un seul point étant une région, *toute transformation homéomorphe $g\in\mathcal{S}_2^R$ est* — en vertu du th. 2 — *une homéomorphie soit positive, soit négative.*

On voit aussi que, pour démontrer que l'homéomorphie g est positive ou qu'elle est négative, il suffit de connaître la valeur de $\mu_p[g(x)-g(p)]$ pour un seul point p (tel que $g(p)\neq\infty$).

Il en résulte en vertu du th. XII, 3 et XI (4) que

3. *D étant un cercle (ouvert borné) de centre p tel que $\bar{D}\subset R$ et que $\mathrm{ind}_{g\zeta}\,g(p)=1$ (où ζ est un parcours positif du contour de D), l'homéomorphie g est positive.*

Les homéomorphies positives sont donc bien les transformations qui n'altèrent pas *l'orientation* de la région considérée.

Envisageons à présent quelques cas particuliers.

4. *$R\subset\mathcal{E}^2$ étant une région telle que $\mathcal{E}^2-R$ est connexe et $g\in(\mathcal{E}^2)^R$ étant une homéomorphie, la condition nécessaire et suffisante pour que g soit une homéomorphie positive est que l'on ait pour chaque $p\in R$*

$$g(x)-g(p)\sim x-p\quad\textit{sur}\quad R-p. \tag{2}$$

On a, en effet, d'après VII, 1 (en posant $p_0=\infty$) la relation $g(x)-g(p)\sim(x-p)^k$, et comme $\mu_p[g(x)-g(p)]=k$, il vient $k=\pm1$, suivant que l'homéomorphie est positive ou négative.

On démontre d'une façon analogue que

5. *Une transformation homéomorphe de $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{S}_2$ est* positive *dans le cas où l'on a*

$$g(x)-g(p)\sim\frac{x-p}{x-p_0}\quad \textit{sur}\quad \mathcal{S}_2-p-p_0,\quad \textit{où}\quad g(p_0)=\infty,$$

et dans ce cas seulement.

En particulier, *si* $p_0=\infty$, *on a la relation* (2).

Il en résulte que *toute homographie est une homéomorphie positive.* Car

$$\frac{ax-b}{cx-d}-\frac{ap-b}{cp-d}=\lambda\cdot\frac{x-p}{x-p_0},\quad \text{où}\quad p_0=\frac{d}{c}$$

et où λ est une constante (on suppose que $ad-bc\neq 0$).

Remarque. Comme exemple d'une *homéomorphie* négative de $\mathcal{S}_2$, considérons la fonction $g(\alpha+i\beta)=\alpha-i\beta$, c. à d. $g(x)=|x|^2:x$. On constate aussitôt que, pour $\zeta(t)=e^{\pi i t}$, on a $\operatorname{ind}_{g\zeta}0=-1$, d'où la conclusion demandée en raison du th. 3.

Le th. 3 implique aussitôt le suivant:

6. *Étant données deux régions $R_1\subset R$ et une homéomorphie $g\in\mathcal{S}_2^R$, si la transformation partielle $g|R_1$ est une homéomorphie positive, la transformation g l'est également.*

7. *La transformation inverse à une homéomorphie positive est une homéomorphie positive.*

Autrement dit: *soient R une région et $y=g(x)$ une homéomorphie positive transformant R en Q; alors, la transformation inverse $x=h(y)$ est une homéomorphie positive.*

Soit, en effet, D un cercle (ouvert borné) de centre $p\neq 0$ tel que $\overline{D}\subset R$ et $\infty\in\mathcal{S}_2-g(D)$. Posons $q=g(p)$ et $H=g(D)$. On a par hypothèse $\mu_p[g(x)-g(p)]=1$. La même égalité a lieu en restreignant la variabilité de x à D (cf. 6). On a donc d'après 4

$$g(x)-g(p)\sim x-p$$

sur $D-p$, c'est-à-dire $g(x)-g(p)=(x-p)e^{u(x)}$.

En substituant $h(y)$ à x, il vient $y-q\sim h(y)-h(q)$ sur $H-q$, donc $\mu_q[h(y)-h(q)]=1$ en vertu de 4. D'où la conclusion demandée.

8. *Soient: $G\subset\mathcal{S}_2$ un ensemble ouvert ou fermé, F un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-G$ et $f\in\mathcal{P}^G$. La multiplicité $\mu_F f$ est invariante par rapport aux homéomorphies g positives transformant $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{S}_2$;* en d'autres termes:

$$\mu_{g^{-1}(F)}fg(x)=\mu_F f(y). \tag{3}$$

En particulier, *la multiplicité est un invariant de l'homographie.*

Considérons d'abord le cas où $f(y)$ est une fonction rationnelle:

$$f(y)=\lambda(y-q_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(y-q_n)^{k_n},\quad y\in G,\tag{4}$$
$$k_1+\ldots+k_n=0.\tag{5}$$

En désignant par $p_0,p_1,\ldots,p_n$ les points tels que

$$g(p_0)=\infty,\; g(p_1)=q_1,\; g(p_2)=q_2,\;\ldots,\; g(p_n)=q_n,$$

il vient en vertu du th. 5 (l'homéomorphie g étant positive):

$$fg(x)=\lambda[g(x)-g(p_1)]^{k_1}\cdot\ldots\cdot[g(x)-g(p_n)]^{k_n}\sim \tag{6}$$
$$\sim(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\cdot(x-p_0)^{-(k_1+\ldots+k_n)}=(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n},$$

d'après (5).

Soit $q_{j_1},\ldots,q_{j_m}$ le système des points q_j qui appartiennent à F. On a donc d'après la définition de la multiplicité:

$$\mu_F f=k_{j_1}+\ldots+k_{j_m}.\tag{7}$$

Or, les conditions $q_j\in F$ et $p_j\in g^{-1}(F)$ étant équivalentes, il vient

$$\mu_{g^{-1}(F)}[(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}]=k_{j_1}+\ldots+k_{j_m}.\tag{8}$$

Comme, d'autre part, d'après (6), VIII, 4 et IX, 4,

$$\mu_{g^{-1}(F)}fg(x)=\mu_{g^{-1}(F)}[(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}],$$

on en déduit l'égalité (3) en vertu de (7) et (8).

Le cas où f est une fonction rationnelle étant établi, passons au cas général. En supposant que G est fermé, il existe d'après III, 1 une fonction rationnelle $r(y)$ telle que $f(y)\sim r(y)$, d'où $fg(x)\sim rg(x)$. Par conséquent (cf. VIII, 4):

$$\mu_F f(y)=\mu_F r(y)\quad\text{et}\quad \mu_{g^{-1}(F)}fg(x)=\mu_{g^{-1}(F)}rg(x),$$

de sorte que l'on est ramené au cas précédent.

Enfin, si G est ouvert, il existe un ensemble fermé F^* qui sépare les ensembles F et $\mathcal{S}_2-G-F$. Son complémentaire se compose donc de deux ensembles ouverts disjoints dont l'un — désignons-le par G^* — contient F et l'autre contient $\mathcal{S}_2-G-F$. Par conséquent, l'ensemble $g^{-1}(G^*)$ contient $g^{-1}(F)$ et il est fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-g^{-1}(F^*)$. D'après IX (3):

$$\mu_F f=\mu_{G^*}(f|F^*)\quad\text{et}\quad \mu_{g^{-1}(F)}fg=\mu_{g^{-1}(G^*)}[fg|g^{-1}(F^*)].$$

Les membres droits de ces égalités étant — comme nous venons de montrer — égaux, on parvient à la formule (3).

Nous en déduirons que

9. *L'indice est un invariant des homéomorphies **positives** g transformant $\mathcal{E}^2$ en $\mathcal{E}^2$*; c'est-à-dire que $\mathrm{ind}_{g\xi}\, g(p) = \mathrm{ind}_{\xi}\, p$ [1]).

En effet, d'après XII, 1,

(9) $\quad \mathrm{ind}_{\xi}\, p = \mu_Q[\zeta^0(x) - p] \quad$ et $\quad \mathrm{ind}_{g\xi}\, g(p) = \mu_Q[g\zeta^0(x) - g(p)]$.

Par hypothèse (cf. th. 4), $g(y) - g(p) \sim y - p$ sur $\mathcal{E}^2 - p$. Par conséquent, $g\zeta^0(x) - g(p) \sim \zeta^0(x) - p$ sur $\mathcal{S}$ (la courbe $\zeta^0(\mathcal{S})$ étant située dans $\mathcal{E}^2 - p$). Cette homotopie implique en vertu du th. VIII, 4 que les membres droits des égalités (6) sont identiques; d'où la conclusion demandée.

Les invariants des homéomorphies positives (de $\mathcal{S}_2$ ou de $\mathcal{E}^2$) peuvent être nommés *invariants de la Topologie orientée*. Tels sont, comme nous venons de voir, la multiplicité d'un ensemble, l'indice d'un point.

Par suite, les valeurs absolues de ces invariants sont des invariants des homéomorphies arbitraires; elles sont donc des notions topologiques (bien que leurs définitions fassent usage des notions non topologiques).

Tel est aussi l'accroissement du logarithme. On a, en effet, d'après XI (3) (l'homéomorphie étant positive ou négative):

$$\Delta_{g\xi} fg^{-1} = \mathrm{ind}_{fg^{-1}g\xi}\, 0 = \mathrm{ind}_{f\xi}\, 0 = \Delta_{\xi} f.$$

---

[1]) Voir **Alexandroff-Hopf**, op. cit., p. 476.