7. *Corollaire. Tout sous-ensemble connexe d'une dendrite est un rétracte absolu.*

Soit E un sous-ensemble connexe d'une dendrite $\mathcal{X}$. En tenant compte de l'équivalence $(1')\equiv(4')$, il suffit de montrer que E est l. c. 2 et i. c. 2. Nous allons démontrer d'abord que E est intégralement connexe en dimension 1.

Posons $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1$. Soit $f\in E^{\mathcal{S}}$. Il s'agit de définir une extension $f^*\in E^{\mathfrak{Q}_2}$ de f.

Représentons $\mathfrak{Q}_2-\mathcal{S}$ comme polygone infini P. Soit A_0 l'ensemble de ses sommets. Soit $f_0\in f(\mathcal{S})^{\mathcal{S}+A_0}$ une extension de f (cf. § 48, IV (3')). Soit A_1 la somme des arêtes du polygone P, augmentée de l'ensemble A_0. Soit $f_1\in f(\mathcal{S})^{\mathcal{S}+A_1}$ une extension de f_0 que l'on obtient en transformant la fermeture de toute arête pq en l'arc $f_0(p)\,f_0(q)$ par homéomorphie (rappelons qu'il n'existe qu'un seul arc ab dans la dendrite $f(\mathcal{S})$, cf. § 46, VI, 2). Il reste à étendre la fonction f_1 sur tout simplexe pqr à deux dimensions (du polygone P).

Or, en désignant respectivement par L, M et N les arcs $f(p)f(q)$, $f(q)f(r)$ et $f(r)f(p)$, le produit LM est connexe (d'après § 46, VI, 1) et l'on a $N\subset L+M$. Par conséquent $L+M$ (en tant que triode ou arc) est un rétracte absolu (cf. § 48, III, 1), et il existe une extension de la fonction f_1 sur le simplexe pqr, dont les valeurs appartiennent à $L+M$. Ce procédé détermine une extension $f^*\in E^{\mathfrak{Q}_2}$ de la fonction f.

Il est ainsi établi que E est i. c. 2. En vue de démontrer que E est l. c. 2, il suffit de remarquer que $f^*(\mathfrak{Q}_2)=f(\mathcal{S})$ et que E est localement connexe par arcs (cf. § 47, IV, 3 et § 46, VI, 2).

HUITIÈME CHAPITRE.

Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$.

§ 50. Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$.

I. Généralités sur les groupes commutatifs. Nous réunirons d'abord plusieurs propriétés élémentaires des groupes commutatifs qui interviendront dans la suite.

Un ensemble d'éléments arbitraires $\mathcal{X}$ est dit *groupe commutatif* (ou *abelien*) par rapport à l'opération $a+b$ qui fait correspondre à tout couple $a,b\in\mathcal{X}$ un élément de $\mathcal{X}$, lorsque cette opération satisfait aux conditions suivantes:

1º $(a+b)+c=a+(b+c)$,

2º $a+b=b+a$,

3º il existe un (et un seul) élément 0 tel que $a+0=a$ [1]),

4º à tout $a\in\mathcal{X}$ correspond un (et un seul) élément $-a$ tel que $a+(-a)=0$ [2]).

m étant un entier, on définit $m\cdot a$ en convenant que

$$0\cdot a=0,\quad m\cdot a=(m-1)\cdot a+a\quad\text{et}\quad(-m)\cdot a=m\cdot(-a)\quad\text{pour}\quad m>0.$$

Un élément $a\neq 0$ est dit *d'ordre fini* (d'ordre m) s'il existe un $m\neq 0$ tel que $m\cdot a=0$.

Un sous-ensemble du groupe $\mathcal{X}$ est dit un *sous-groupe* s'il contient $a+b$ dès qu'il contient a et b, et s'il contient $-a$ dès qu'il contient a. Un sous-groupe contient donc l'élément 0; en particulier, il peut se réduire à cet élément.

[1]) Cet élément est dit l'élément *neutre* du groupe $\mathcal{X}$. Le zéro désignera dans le § 50, I—VIII, exclusivement l'élément neutre.

[2]) L'opération du groupe (dite *composition*) est désignée ici par le signe $+$. Il est parfois plus commode de la considérer comme une multiplication; on remplacera alors 0 par 1 et $-a$ par $1:a$ (donc $a-b$ par $a:b$).

Le terme groupe sera entendu ici comme *groupe commutatif*.

II. Homomorphie. Isomorphie. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux groupes. Faisons correspondre à tout élément x de $\mathfrak{X}$ un élément $h(x)$ de $\mathfrak{Y}$. La correspondance h est dite une *homomorphie* (ou une opération additive) lorsque

$$h(a+b)=h(a)+h(b).$$

On a alors

$$h(0)=0 \quad \text{et} \quad h(-a)=-h(a),$$

car $h(0)=h(0+0)=h(0)+h(0)$ et $0=h(0)=h(a-a)=h(a)+h(-a)$.

En outre, *$h(\mathfrak{X})$ est un sous-groupe de $\mathfrak{Y}$* et *G étant un sous-groupe de $\mathfrak{Y}$, $h^{-1}(G)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{X}$*. Le groupe $h^{-1}(0)$ est dit *noyau de l'homomorphie h*.

Une homomorphie h telle que la condition $h(a)+h(b)=h(c)$ entraîne $a+b=c$, autrement dit, telle que

$$[a+b=c]\equiv[h(a)+h(b)=h(c)]$$

est dite une *isomorphie* entre $\mathfrak{X}$ et $h(\mathfrak{X})$.

Pour qu'une homomorphie soit une isomorphie, il faut et il suffit qu'elle soit *biunivoque* — ou encore — que son noyau se réduise à l'élément 0 (donc que l'égalité $h(x)=0$ entraîne $x=0$).

Deux groupes isomorphes sont indiscernables au point de vue de la théorie des groupes (comme deux espaces homéomorphes sont indiscernables au point de vue topologique). Nous écrirons dans ce cas

$$\mathfrak{X}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{Y}.$$

III. Groupes-facteurs. G étant un sous-groupe du groupe $\mathfrak{X}$, la relation „$a\sim b \bmod G$" signifie que $(a-b)\in G$. En particulier:

$$(a\sim 0 \bmod G)\equiv(a\in G).$$

On constate aussitôt que la relation $a\sim b \bmod G$ est *réflexive*, *symétrique* et *transitive*.

Par conséquent, en rangeant dans un même ensemble deux éléments a et b lorsque $a\sim b \bmod G$ et dans ce cas seulement, on décompose le groupe $\mathfrak{X}$ en sous-ensembles disjoints. La famille de ces ensembles est dite *groupe-facteur* $\mathfrak{X}/G$ et la composition des ensembles-éléments de ce groupe-facteur est définie comme suit: C est la somme de A et B, en symbole $C=A\dotplus B$, lorsqu'on a $c\sim a+b \bmod G$ quels que soient $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$. Il est aisé de voir qu'avec cette définition, $\mathfrak{X}/G$ est un groupe commutatif. G est

son élément neutre; nous le désignerons aussi par le symbole 0. Évidemment:

(1) $$\mathfrak{X}/\mathfrak{X}\underset{\mathrm{gr}}{=}(0),$$ (2) $$\mathfrak{X}/(0)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{X}.$$

1. *La fonction F qui fait correspondre à tout élément x de $\mathfrak{X}$ l'élément $F(x)$ de $\mathfrak{X}/G$ tel que $x\in F(x)$, est une homomorphie entre $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}/G$.*

On a, en outre:

(3) $$[x\sim x' \bmod G]\equiv[F(x)=F(x')],$$

(4) $$F^{-1}(0)=G,$$ (5) $$[x\sim 0 \bmod G]\equiv[F(x)=0].$$

2. *A étant un groupe tel que $G\subset A\subset\mathfrak{X}$, on a $A=F^{-1}(A/G)$, d'où $F(A)=A/G$.*

Le théorème suivant est réciproque au théorème 1:

3. *Étant donnée une transformation homomorphe h de $\mathfrak{X}$, on a l'isomorphie*

(6) $$h(\mathfrak{X})\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{X}/h^{-1}(0),$$

et le groupe-facteur $\mathfrak{X}/h^{-1}(0)$ coïncide avec la famille des tranches de la fonction h (c'est-à-dire avec la famille des ensembles $h^{-1}(y)$ où y parcourt le groupe $h(\mathfrak{X})$).

La transformation $X=h^{-1}(y)$ est bien l'isomorphie (6). Elle est, en effet, biunivoque et elle est une homomorphie, car les conditions $x_1\in h^{-1}(y_1)$ et $x_2\in h^{-1}(y_2)$ impliquent que $(x_1+x_2)\in h^{-1}(y_1+y_2)$.

4. *h étant une transformation homomorphe de $\mathfrak{X}$ et A étant un groupe tel que $h^{-1}(0)\subset A\subset\mathfrak{X}$, on a $A=h^{-1}h(A)$.*

En effet, en posant $F(x)=h^{-1}h(x)$ et $G=h^{-1}(0)$ on a d'après 2: $F(A)=A/G$, d'où $F(a)\subset A$ pour $a\in A$ et par conséquent

$$h^{-1}h(A)=\sum_{a\in A}h^{-1}h(a)=\sum_{a\in A}F(a)=A.$$

5. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux groupes et A et B deux sous-groupes de $\mathfrak{X}$ et de $\mathfrak{Y}$ respectivement. Soit h une transformation de $\mathfrak{X}$ en sous-ensemble de $\mathfrak{Y}$ telle que*

1º $x\sim 0 \bmod A$ *entraîne* $h(x)\sim 0 \bmod B$ (c. à d. $h(A)\subset B$),

2º $h(x_1+x_2)\sim h(x_1)+h(x_2) \bmod B$,

3º *à tout $y\in\mathfrak{Y}$ correspond un $x\in\mathfrak{X}$ tel que* $y\sim h(x) \bmod B$.

Faisons correspondre à tout $X \in \mathfrak{X}/A$ *un élément* $e(X) \in X$, *ainsi que l'élément* $H(X)$ *du groupe-facteur* $\mathfrak{Y}/B$ *qui contient* $h[e(X)]$. *La transformation* H *(„induite" par* h*) ne dépend pas de la façon dont on a défini l'opération* $e(X)$ *et elle est une transformation homomorphe de* $\mathfrak{X}/A$ *en* $\mathfrak{Y}/B$.

Elle est une isomorphie si l'on a en outre:

4⁰ $h(x) \sim 0 \bmod B$ *entraîne* $x \sim 0 \bmod A$ (c. à d. $h^{-1}(B) \subset A$).

Posons conformément à 1

$$y \in F(y) \in \mathfrak{Y}/B \quad \text{et} \quad [y \sim y'] \equiv [F(y) = F(y')]\,^{1)}.$$

Il vient $H(X) = F\{h[e(X)]\}$.

Pour démontrer que l'opération H ne dépend pas de e, posons $e'(X) \in X$. Il s'agit de prouver que

$$F\{h[e(X)]\} = F\{h[e'(X)]\}.$$

Or, comme $e(X) \sim e'(X)$, on a

$$e(X) - e'(X) \sim 0, \quad \text{d'où} \quad h[e(X) - e'(X)] \sim 0$$

d'après 1⁰. Comme $h[e(X) - e'(X)] \sim h[e(X)] - h[e'(X)]$ d'après 2⁰, il vient

$$F\{h[e(X)] - h[e'(X)]\} = F(0) = 0.$$

H est une homomorphie. En effet,

$$e(X_1 \dot{+} X_2) \sim e(X_1) + e(X_2), \quad \text{d'où} \quad he(X_1 \dot{+} X_2) \sim he(X_1) + he(X_2),$$

donc

$$F\{h[e(X_1 \dot{+} X_2)]\} = F\{h[e(X_1)] + h[e(X_2)]\} = F\{h[e(X_1)]\} \dot{+} F\{h[e(X_2)]\}.$$

Puis, à chaque $Y \in \mathfrak{Y}/B$ correspond un $X \in \mathfrak{X}/A$ tel que $Y = H(X)$. Soit, en effet, $y \in Y$, donc $Y = F(y)$. Soit (cf. 3⁰) $y \sim h(x)$, où $x \in X$. Donc $x \sim e(X)$, d'où (cf. 1⁰ et 2⁰): $h(x) \sim he(X)$ et parsuite $y \sim he(X)$, d'où

$$Y = F(y) = F\{h[e(X)]\} = H(X).$$

Enfin, 4⁰ implique que la fonction H est biunivoque. Soit, en effet, $F\{h[e(X_1)]\} = F\{h[e(X_2)]\}$. Donc

$h[e(X_1)] \sim h[e(X_2)]$, d'où $h[e(X_1)] - h[e(X_2)] \sim 0$, donc $h[e(X_1) - e(X_2)] \sim 0$ et d'après 4⁰:

$e(X_1) - e(X_2) \sim 0$, c'est-à-dire que $e(X_1) \sim e(X_2)$, d'où $X_1 = X_2$.

---

[1] Nous omettons les termes „mod A" et „mod B".

Les th. 4 et 5 impliquent (pour $\mathfrak{Y} = h(\mathfrak{X})$ et $B = h(A)$) que:

6. *Dans les hypothèses du th. 4, on a l'isomorphie*

$$\mathfrak{X}/A \underset{\text{gr}}{=} h(\mathfrak{X})/h(A).$$

7. A, G *et* $\mathfrak{X}$ *étant trois groupes tels que* $G \subset A \subset \mathfrak{X}$, *on a*

$$\mathfrak{X}/A \underset{\text{gr}}{=} [\mathfrak{X}/G]/[A/G]. \tag{7}$$

Car, F étant l'homomorphie définie dans le th. 1, on a d'après 2,

$$F(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}/G \quad \text{et} \quad F(A) = A/G,$$

d'où (7) en vertu de 6.

IV. Opération $\widehat{A}$. A étant un sous-ensemble du groupe $\mathfrak{X}$, désignons par $\widehat{A}$ le plus petit sous-groupe de $\mathfrak{X}$ contenant A. Les éléments de A sont dits des *générateurs* du groupe $\widehat{A}$. Le groupe $\widehat{A}$ existe toujours, puisque le produit d'une famille arbitraire de groupes (dans le cas considéré: de la famille des groupes contenant A) est un groupe. On constate aussitôt que

1. $A \subset \widehat{A}$. 2. $\widehat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$. 3. $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$.
4. $A \subset B$ *entraîne* $\widehat{A} \subset \widehat{B}$, d'où $\widehat{A} + \widehat{B} \subset \widehat{A+B}$ et $\widehat{AB} \subset \widehat{A} \cdot \widehat{B}$.
5. $(A = \widehat{A}) \equiv (A$ *est un groupe*$)$.
6. $[(x) = \widehat{(x)}] \equiv [x = 0]$.
7. $\widehat{A}$ *est l'ensemble de tous les éléments de la forme*

$$m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n, \quad \text{où} \quad a_1, \ldots, a_n \in A$$

et $m_1, \ldots, m_n$ *sont des nombres entiers.*

Car, d'une part, l'ensemble de ces éléments est un groupe et, d'autre part, tout groupe qui contient A contient tous ces éléments.

Il en résulte que:

8. A *et* B *étant deux sous-groupes de* $\mathfrak{X}$, $\widehat{A+B}$ *est l'ensemble de tous les* x *de la forme*

$$x = a + b, \quad \text{où} \quad a \in A \quad \text{et} \quad b \in B. \tag{1}$$

Si, en outre, $A \cdot B = (0)$, *c'est-à-dire que les groupes* A *et* B *n'ont que l'élément neutre en commun, tout* $x \in \widehat{A+B}$ *n'admet qu'une seule représentation* $x = a + b$ *de la forme* (1).

Dans le dernier cas, $\widehat{A+B}$ est dit la *somme directe* de A et B; a et b, considérés comme fonctions de x, sont alors des *homomorphies* transformant $\widehat{A+B}$ en A et en B respectivement.

9. *h étant une transformation homomorphe de $\mathfrak{X}$, on a*

$$h(\widehat{A})=\widehat{h(A)}, \quad \textit{quel que soit} \quad A\subset\mathfrak{X}.$$

C'est une conséquence directe de 7 en vertu de la formule:

$$h(m_1a_1+\ldots+m_na_n)=h(m_1a_1)+\ldots+h(m_na_n)=m_1h(a_1)+\ldots+m_nh(a_n).$$

10. *A et B étant deux groupes, on a*

$$\widehat{A+B}/AB=\widehat{A/AB+B/AB}.$$

Soit, conformément à III, 1, F la transformation homomorphe de $\widehat{A+B}$ en $\widehat{A+B}/AB$. Donc (cf. 9 et III, 1):

$$\widehat{A+B}/AB=F(\widehat{A+B})=\widehat{F(A+B)}=\widehat{F(A)+F(B)}=\widehat{A/AB+B/AB}.$$

11. *Si $\widehat{A+B}$ est la somme directe des groupes A et B, on a*

(2) $$\widehat{A+B}/A\underset{\mathrm{gr}}{=}B.$$

Il existe, en effet (cf. 8), deux fonctions g et h telles qu'on a

$$x=g(x)+h(x), \quad g(x)\in A \quad \text{et} \quad h(x)\in B \quad \text{pour tout} \quad x\in\widehat{A+B}.$$

Comme h est une transformation homomorphe de $\widehat{A+B}$ en B et comme $h^{-1}(0)=A$, on déduit la formule (2) du th. III, 3 (en remplaçant $\mathfrak{X}$ par $\widehat{A+B}$).

V. Indépendance linéaire, rang, base. Un sous-ensemble A du groupe $\mathfrak{X}$ est dit *linéairement indépendant* lorsque, pour tout système fini d'éléments $a_1,\ldots,a_n$ de A, une relation de la forme

$$m_1a_1+\ldots+m_na_n=0,$$

où les coefficients $m_1,\ldots,m_n$ sont des entiers, ne peut se présenter qu'à condition que

$$m_1=\ldots=m_n=0.$$

Le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{X}$ — s'il existe — est dit le *rang* de $\mathfrak{X}$; s'il n'existe pas, $\mathfrak{X}$ est dit de rang infini.

Ainsi, par exemple, le groupe $\mathcal{G}$ des nombres entiers a le rang 1, le groupe $\mathcal{G}^2$ des nombres complexes entiers a le rang 2, le groupe $\mathcal{G}^{\omega}$ des suites infinies de nombres entiers dont chacune ne contient qu'un nombre fini de termes différents de 0, a le rang infini. Tel est aussi le rang du groupe $\mathcal{G}^{\aleph_0}$ de toutes les suites infinies de nombres entiers.

Si A est linéairement indépendant et $\widehat{A}=\mathfrak{X}$, A est dit une *base* (au sens de la Théorie des groupes) de $\mathfrak{X}$. Tout $x\in\mathfrak{X}$ se laisse représenter alors d'une seule façon sous la forme

$$x=m_1a_1+\ldots+m_na_n \quad \text{où} \quad a_1,\ldots,a_n\in A.$$

1. *Si $\mathfrak{X}$ admet une base composée de n éléments, on a $\mathfrak{X}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{G}^n$. Si $\mathfrak{X}$ admet une base dénombrable infinie, on a $\mathfrak{X}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{G}^{\omega}$.*

Soit, en effet, $A=a_1,a_2,\ldots$ la base (finie ou infinie) de $\mathfrak{X}$. Posons

$$x=m_1a_1+m_2a_2+\ldots \quad \text{et} \quad f(x)=[m_1,m_2,\ldots].$$

f est l'isomorphie demandée.

2. *h étant une transformation homomorphe de $\mathfrak{X}$, on a l'identité*

$$\text{rang}\,\mathfrak{X}=\text{rang}\,h^{-1}(0)+\text{rang}\,h(\mathfrak{X})\,[1].$$

Soient $a_1,\ldots,a_k$ un système d'éléments linéairement indépendants de $h^{-1}(0)$, et $h(a_{k+1}),\ldots,h(a_n)$ — un système d'éléments linéairement indépendants de $h(\mathfrak{X})$. Nous allons démontrer que les éléments $a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n$ sont linéairement indépendants. Posons

(1) $$m_1a_1+\ldots+m_ka_k+\ldots+m_na_n=0.$$

Comme $(m_1a_1+\ldots+m_ka_k)\in h^{-1}(0)$, il vient

$$h(m_1a_1+\ldots+m_ka_k)=0, \quad \text{d'où (cf. (1))} \quad m_{k+1}h(a_{k+1})+\ldots+m_nh(a_n)=0,$$

ce qui entraîne $m_{k+1}=\ldots=m_n=0$. Par conséquent (cf. (1))

$$m_1a_1+\ldots+m_ka_k=0, \quad \text{d'où} \quad m_1=\ldots=m_k=0.$$

L'indépendance linéaire du système $(a_1,\ldots,a_n)$ se trouve ainsi établie. Il en résulte que

$$\text{rang}\,\mathfrak{X}\geqslant\text{rang}\,h^{-1}(0)+\text{rang}\,h(\mathfrak{X}).$$

[1] Cf. Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, p. 573, et Alexandroff, *Kombinatornaïa Topologia*, p. 634.

Pour établir l'inégalité inverse, il est donc légitime d'admettre que les rangs des groupes $h^{-1}(0)$ et $h(\mathfrak{X})$ sont finis. Posons

(2) $\quad$ rang $h^{-1}(0)=k$, $\qquad$ (3) $\quad$ rang $h(\mathfrak{X})=n-k$.

Il s'agit de démontrer que rang $\mathfrak{X}\leqslant n$, c'est-à-dire que, $p_1,\dots,p_{n+1}$ étant un système d'éléments de $\mathfrak{X}$, il existe un système d'entiers $r_1,\dots,r_{n+1}$, non tous nuls, tel que

(4) $$r_1p_1+\dots+r_np_{n+1}=0.$$

Nous allons démontrer d'abord que tout $x\in\mathfrak{X}$ est de la forme:

(5) $$mx=m_1a_1+\dots+m_na_n \quad \text{où} \quad m\neq 0.$$

Les éléments $h(a_{k+1}),\dots,h(a_n)$ étant linéairement indépendants, l'égalité (3) implique l'existence d'un système d'entiers $s,s_{k+1},s_{k+2},\dots,s_n$ tel que
$$sh(x)-s_{k+1}h(a_{k+1})-\dots-s_nh(a_n)=0 \quad \text{et} \quad s\neq 0.$$

Il en résulte que $sx-s_{k+1}a_{k+1}-\dots-s_na_n$ appartient à $h^{-1}(0)$, donc, d'après (2), qu'il existe un système d'entiers $m_0,m_1,\dots,m_n$ tel que
$$m_0(sx-s_{k+1}a_{k+1}-\dots-s_na_n)=m_1a_1+\dots+m_ka_k.$$

De plus $m_0\neq 0$, puisque les éléments $a_1,\dots,a_k$ sont linéairement indépendants. En posant
$$m=m_0s,\quad m_{k+1}=m_0s_{k+1},\quad \dots,\quad m_n=m_0s_n,$$
on satisfait à la formule (5).

Il en résulte qu'à tout p_j (où $j=1,\dots,n+1$) correspond un système d'entiers $m_j,m_{j1},\dots,m_{jn}$ tel que

(6) $$m_jp_j=m_{j1}a_1+\dots+m_{jn}a_n$$

et

(7) $$m_j\neq 0.$$

Soit $c_1,\dots,c_{n+1}$ un système de solutions entières, non toutes nulles, du système des n équations homogènes:
$$m_{1i}x_1+\dots+m_{n+1,i}x_{n+1}=0,\quad i=1,\dots,n,$$
c'est-à-dire que

(8) $$\sum_{j=1}^{n+1}m_{ji}c_j=0,\quad \text{où} \quad i=1,\dots,n.$$

Posons $r_j=c_jm_j$, $j=1,\dots,n+1$. Il vient (cf. (6) et (8)):
$$\sum_{j=1}^{n+1}r_jp_j=\sum_{j=1}^{n+1}c_jm_jp_j=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}c_jm_{ji}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n+1}m_{ji}c_j=0.$$

De plus, l'un au moins des r_j ne s'annule pas, d'après (7).

3. *G étant un sous-groupe du groupe $\mathfrak{X}$, on a*
$$\text{rang}\,\mathfrak{X}=\text{rang}\,G+\text{rang}\,(\mathfrak{X}/G).$$

C'est une conséquence du th. 2, rapproché de III (4).

4. *Si $\widehat{A+B}$ est la somme directe des groupes A et B, on a*
$$\text{rang}\,\widehat{A+B}=\text{rang}\,A+\text{rang}\,B.$$

C'est une conséquence des théorèmes 3 et IV, 11.

VI. Indépendance linéaire mod G. Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{X}$. Un sous-ensemble A de $\mathfrak{X}$ est dit *linéairement indépendant mod G* lorsque, pour tout système fini d'éléments $a_1,\dots,a_n$ de A,
$$m_1a_1+\dots+m_na_n\sim 0 \bmod G \quad \textit{entraîne} \quad m_1=\dots=m_n=0.$$

Si, pour tout x de $\mathfrak{X}$, on a
$$x\sim m_1a_1+\dots+m_na_n,\quad \text{où}\quad a_1,\dots,a_n\in A,$$
A est dit un ensemble de *générateurs mod G* de $\mathfrak{X}$.

Si, en outre, l'ensemble A est linéairement indépendant mod G, il est dit une *base mod G* de $\mathfrak{X}$.

Soit F la fonction envisagée dans III, 1.

Il résulte de III (5) que, pour que A soit linéairement indépendant mod G, il faut et il suffit que la famille $F(A)$ (c'est-à-dire la famille des ensembles-éléments $F(a)$ du groupe-facteur $\mathfrak{X}/G$, où $a\in A$), soit linéairement indépendante. On a par conséquent les équivalences:

$\{A$ est une base de $\mathfrak{X}$ mod $G\}\equiv\{F(A)$ est une base de $\mathfrak{X}/G\}$,

$\{A$ est un ensemble de générateurs mod G de $\mathfrak{X}\}\equiv$
$\equiv\{F(A)$ est un ensemble de générateurs de $\mathfrak{X}/G\}$.

Le rang du groupe $\mathfrak{X}/G$ est le nombre maximum d'éléments de $\mathfrak{X}$ qui sont linéairement indépendants mod G.

VII. Produits cartésiens. $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux groupes, leur produit cartésien $\mathcal{Z}=\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ devient un groupe, en définissant la composition de ses éléments comme suit:

$$(1)\qquad (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y').$$

$(0,0)$ est donc l'élément neutre du groupe $\mathcal{Z}$. En outre:

$$(2)\qquad -(x,y)=(-x,-y),\quad m\cdot(x,y)=(mx,my).$$

La *projection* $h(x,y)=x$ de $\mathcal{Z}$ sur $\mathfrak{X}$ est une homomorphie. On a évidemment

$$(3)\quad \mathfrak{X}\times(0)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{X},\quad (0)\times\mathcal{Y}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{Y},\qquad (4)\quad \mathfrak{X}\times\mathcal{Y}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{X}\times(0)\dotplus(0)\times\mathcal{Y}.$$

Le groupe $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ est donc la somme directe des groupes $\mathfrak{X}\times(0)$ et $(0)\times\mathcal{Y}$, et il vient d'après V, 4,

$$(5)\qquad \operatorname{rang}(\mathfrak{X}\times\mathcal{Y})=\operatorname{rang}\mathfrak{X}+\operatorname{rang}\mathcal{Y}.$$

f et g étant deux transformations homomorphes de $\mathfrak{X}$ et de $\mathcal{Y}$ respectivement, la transformation h définie par la condition $h(x,y)=[f(x),g(y)]$ est une transformation homomorphe de $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ en $f(\mathfrak{X})\times g(\mathcal{Y})$.

A et B étant deux sous-groupes de $\mathfrak{X}$ et de $\mathcal{Y}$ respectivement, on a

$$(6)\qquad (\mathfrak{X}\times\mathcal{Y})/(A\times B)\underset{\mathrm{gr}}{=}(\mathfrak{X}/A)\times(\mathcal{Y}/B).$$

En effet, F étant l'homomorphie qui fait correspondre à tout $x\in\mathfrak{X}$ l'élément $F(x)$ de $\mathfrak{X}/A$ tel que $x\in F(x)$, et G étant — de façon analogue — l'homomorphie telle que $y\in G(y)\in\mathcal{Y}/B$, posons $H(x,y)=[F(x),G(y)]$. H est donc une transformation homomorphe de $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ en $(\mathfrak{X}/A)\times(\mathcal{Y}/B)$, et dont le noyau est $A\times B$. L'isomorphie (6) en résulte d'après III, 3.

En particulier, il en résulte (cf. (3) et III (1) et (2)) que

$$(7)\qquad (\mathfrak{X}\times\mathcal{Y})/\mathfrak{X}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{Y},$$

en identifiant le groupe $\mathfrak{X}\times(0)$ avec $\mathfrak{X}$.

VIII. Groupe $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces métriques (ou, plus généralement, deux espaces $\mathcal{L}^*$). Admettons que $\mathcal{Y}$ est un *groupe topologique*, c'est-à-dire que les opérations y_1+y_2 et $-y$ sont continues. La famille $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ des transformations continues de $\mathfrak{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$ devient un groupe, en définissant la composition des éléments f_1,f_2 de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ par l'équivalence

$$(1)\qquad \{f_3=f_1+f_2\}\equiv\{f_3(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \text{quel que soit } x\in\mathfrak{X}\}.$$

Le groupe $\mathcal{Y}$ étant commutatif, $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ l'est également. L'élément neutre du groupe $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ est la fonction identiquement égale à 0.

Les fonctions *constantes* constituent un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, isomorphe à $\mathcal{Y}$. Il sera souvent utile de désigner ce sous-groupe par le même symbole $\mathcal{Y}$.

Le groupe $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, conçu comme espace $\mathcal{L}^*$ (cf. § 14, IX), est topologique.

Posons, en effet,

$$h_n=f_n+g_n,\quad \lim_{n=\infty}f_n=f,\quad \lim_{n=\infty}g_n=g\quad\text{et}\quad h=f+g.$$

Soit $\lim_{n=\infty}x_n=x$. Il vient

$$\lim_{n=\infty}h_n(x_n)=\lim_{n=\infty}[f_n(x_n)+g_n(x_n)]=\lim_{n=\infty}f_n(x_n)+\lim_{n=\infty}g_n(x_n)=$$
$$=f(x)+g(x)=h(x),\quad\text{d'où}\ \lim_{n=\infty}h_n=h.$$

A étant un sous-ensemble fixe de $\mathfrak{X}$, posons

$$(2)\qquad \zeta(f)=f|A.$$

L'opération ζ fait correspondre ainsi à tout élément $f\in\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ un élément du groupe $\mathcal{Y}^{A}$, à savoir, la fonction partielle $f|A$. Φ étant un sous-ensemble de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, on a donc (cf. § 48, I)

$$(3)\qquad \zeta(\Phi)=\Phi|A.$$

1. *L'opération ζ est une homomorphie*:

$$(4)\qquad \zeta(f_1+f_2)=\zeta(f_1)+\zeta(f_2).$$

Par conséquent:

2. *Φ étant un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, $\Phi|A$ est un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{A}$.*

En particulier, *les fonctions $g\in\mathcal{Y}^{A}$ qui admettent une extension sur $\mathfrak{X}$ constituent un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{A}$* (à savoir le sous-groupe $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}|A$).

Posons

$$(5)\qquad \Delta(A)=\zeta^{-1}(0),\quad\text{c'est-à-dire}\quad \Delta(A)=\underset{f}{E}\,[f\in\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}]\,[f(A)=(0)].$$

Il résulte de (3) et III, 3 que:

3. *Φ désignant un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, on a*

$$\Phi/\Delta(A)\underset{\mathrm{gr}}{=}\Phi|A.$$

4. *Φ_1 et Φ_2 étant deux sous-groupes de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ tels que $\Delta(A)\subset\Phi_1\subset\Phi_2$, on a*

$$\Phi_2/\Phi_1 \underset{\mathrm{gr}}{=} (\Phi_2|A)/(\Phi_1|A).$$

C'est une conséquence du th. 3, rapproché de III, 7 (où l'on substitue $\Delta(A)$ à A).

5. *Soit $f\in Z^{\mathfrak{X}}$ où $Z=f(\mathfrak{X})$. En désignant par Φ le sous-groupe de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ composé des fonctions superposées gf où $g\in\mathcal{Y}^Z$, on a:*

$$\text{(6)}\qquad \mathcal{Y}^Z \underset{\mathrm{gr}}{=} \Phi, \qquad\qquad \text{(7)}\qquad \mathcal{Y}^Z/\mathcal{Y} \underset{\mathrm{gr}}{=} \Phi/\mathcal{Y}.$$

En posant $h_g(x)=gf(x)$, où $g\in\mathcal{Y}^Z$ et $x\in\mathfrak{X}$, h est une isomorphie entre $\mathcal{Y}^Z$ et Φ. On a, en effet,

$$h_{g_1+g_2}(x)=g_1f(x)+g_2f(x)=h_{g_1}(x)+h_{g_2}(x)$$

et

$$h_g=0 \quad\text{entraîne}\quad g=0,$$

car en supposant que $h_g=0$, on a $gf(x)=0$ quel que soit x, donc $g(z)=0$ quel que soit $z\in Z$.

La formule (7) se déduit de (6) en vertu de l'équivalence $(h_g=\mathrm{const.})\equiv(g=\mathrm{const.})$ (cf. III, 5).

IX. Groupe $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$. Désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{G}$ le groupe des nombres entiers. Posons

$$\mathfrak{B}_0(\mathfrak{X})=\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}/\mathcal{G} \quad\text{et}\quad b_0(\mathfrak{X})=\mathrm{rang}\,\mathfrak{B}_0(\mathfrak{X}).$$

Les éléments de ce groupe-facteur s'obtiennent donc en „identifiant“ les fonctions-éléments de $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ dont la différence est constante.

Convenons en outre que, si $\mathfrak{X}$ est vide, $b_0(\mathfrak{X})=0$.

1. *Si $\mathfrak{X}$ est connexe, on a $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}=\mathcal{G}$, d'où $b_0(\mathfrak{X})=0$.*

Car toute fonction $d\in\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ est une constante.

Le théorème 3 qui va suivre est une généralisation du th. 1.

2. *Soit $F_0,\dots,F_n$ un système d'ensembles fermés, disjoints et non vides, tel que $\mathfrak{X}=F_0+\dots+F_n$. Les fonctions caractéristiques $d_1,\dots,d_n$ des ensembles $F_1,\dots,F_n$ constituent un système linéairement indépendant* mod $\mathcal{G}$.

Posons, en effet, $(a_{kl})=d_k(F_l)$. On a donc $a_{ll}=1$ et $a_{kl}=0$ pour $k\neq l$. Le déterminant du système de $n+1$ équations homogènes

$$\text{(i)}\qquad m_0+a_{1l}m_1+\dots+a_{nl}m_n=0 \qquad (l=0,\dots,n)$$

étant égal à 1, il vient $m_0=m_1=\dots=m_n=0$.

3. *Si l'espace (non vide) $\mathfrak{X}$ se décompose en un nombre fini, soit $n+1$, de composantes $F_0,\dots,F_n$, on a*

$$\mathfrak{B}_0(\mathfrak{X})=\mathcal{G}^n \quad\textit{et}\quad b_0(\mathfrak{X})=n.$$

Les fonctions caractéristiques $d_1,\dots,d_n$ des ensembles $F_1,\dots,F_n$ sont les générateurs mod $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$. En effet, d étant un élément arbitraire de $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$, soit $(m_l)=d(F_l)$. Il vient

$$d=m_0+(m_1-m_0)d_1+\dots+(m_n-m_0)d_n.$$

4. *Soit $d_1,\dots,d_n$ un système d'éléments de $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$. Si l'on a $\mathfrak{X}=F_1+\dots+F_n$ où, pour tout couple k, l, la fonction partielle $d_k|F_l$ est constante, les fonctions $d_1,\dots,d_n$ sont linéairement dépendantes* mod $\mathcal{G}$.

Posons, en effet, $d_k(F_l)=(a_{kl})$. Les entiers $m_0,\dots,m_n$, dont les n derniers ne s'annulent pas simultanément, sont déterminés par le système de n équations (i), où $l=1,\dots,n$.

Nous déduirons de là l'énoncé suivant:

5. *Si les fonctions $d_1,\dots,d_n\in\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ sont linéairement indépendantes* mod $\mathcal{G}$, *il existe une décomposition $\mathfrak{X}=F_0+\dots+F_n$ en $n+1$ ensembles fermés-ouverts, non vides et tels qu'à tout couple d'indices $l\neq r$ correspond un k tel que $d_k(F_l)\cdot d_k(F_r)=0$.*

Nous établirons à ce but le lemme suivant (de la Théorie des Ensembles):

Soit $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_m$ un système de $m+1$ points différents situés dans le produit cartésien $A=A^{(1)}\times\dots\times A^{(n)}$. Il existe une décomposition $A=B_0+\dots+B_m$ telle que:

1° $\mathfrak{z}_i\in B_i$ pour $i=0,\dots,m$,

2° à tout couple $l\neq r$ correspond un k tel que $B_l^{(k)}\cdot B_r^{(k)}=0$, où, de façon générale, $X^{(k)}$ désigne la projection de X sur l'axe $A^{(k)}$.

Procédons par induction. Pour $m=0$, posons $B_0=A$. Pour $n=1$ et $m>0$, posons $B_i=\mathfrak{z}_i$ si $i<m$, et $B_m=A-(B_0+\dots+B_{m-1})$.

Admettons que le lemme soit vrai pour les indices $j<m$ (et pour chaque n). Soit $n>1$. Les points $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_m$ étant différents, il est légitime d'admettre qu'il existe un indice $j<m$ tel que $\mathfrak{z}_i^{(1)}=\mathfrak{z}_0^{(1)}$ pour $i\leqslant j$ et $\mathfrak{z}_i^{(1)}\neq\mathfrak{z}_0^{(1)}$ pour $i>j$.

Comme $j<m$, il existe par hypothèse une décomposition $\mathfrak{z}_0^{(1)}\times A^{(2)}\times\dots\times A^{(n)}=B_0+\dots+B_j$ satisfaisant à 1° et 2° (en remplaçant m par j). La même hypothèse implique une décomposition $A=C_{j+1}+\dots+C_m$ telle que $\mathfrak{z}_i\in C_i$ pour $i>j$ et que 2° est vérifié (en y remplaçant B par C).

Posons $B_i = C_i - \mathfrak{z}_0^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(n)}$ pour $i>j$. Les ensembles B_i sont les ensembles demandés. En effet, si $l,r\leqslant j$ ou bien si $l,r>j$, la condition 2⁰ est satisfaite d'après la définition des B_i ($i\leqslant j$) et des C_i ($i>j$). Si $l\leqslant j<r$, on a $B_l^{(1)}=\mathfrak{z}_0^{(1)}$ et $B_r^{(1)} = C_r^{(1)} - \mathfrak{z}_0^{(1)}$.

Le lemme établi, désignons par $\delta(x)$ le point de $\mathcal{G}^n$ tel que $\delta^{(k)}(x)=d_k(x)$, $k=1,\dots,n$ (c'est-à-dire le point de l'espace euclidien n-dimensionnel à coordonnées $d_1(x),\dots,d_n(x)$). On a la décomposition $\mathfrak{X}=\sum\delta^{-1}(\mathfrak{z})$ en ensembles fermés-ouverts, où $\mathfrak{z}$ parcourt $\mathcal{G}^n$. Chacune des fonctions partielles $d_k|\delta^{-1}(\mathfrak{z})$ étant constante ($=\mathfrak{z}^{(k)}$), il existe, d'après 4, $n+1$ éléments différents $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_n$ dans $\mathcal{G}^n$ tels que

$$\delta^{-1}(\mathfrak{z}_i)\neq 0 \qquad i=0,\dots,n.$$

Posons dans le lemme: $A^{(1)}=\dots=A^{(n)}=\mathcal{G}$ et $m=n$, et considérons les ensembles $F_i=\delta^{-1}(B_i)$, $i=0,\dots,n$. Comme $\mathcal{G}^n=B_0+\dots+B_n$, on a $\mathfrak{X}=F_0+\dots+F_n$. Comme $\mathfrak{z}_i\in B_i$, il vient $\delta^{-1}(\mathfrak{z}_i)\subset\delta^{-1}(B_i)$, d'où $F_i\neq0$. Enfin, en vertu de l'identité $d_k(F_i)=d_k[\delta^{-1}(B_i)]=B_i^{(k)}$, la condition $B_l^{(k)}\cdot B_r^{(k)}=0$ entraîne $d_k(F_l)\cdot d_k(F_r)=0$.

En vertu du théorème qui suit, l'étude du groupe $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ pour $\mathfrak{X}$ compact se réduit au cas de $\mathfrak{X}$ de dimension 0.

6. *$\mathfrak{X}$ étant compact et Z désignant l'espace de la décomposition de $\mathfrak{X}$ en composantes, on a $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}} \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}^Z$.*

Soit f une transformation continue de $\mathfrak{X}$ en Z ayant pour tranches les composantes de $\mathfrak{X}$ (cf. § 42, VI, 1). En tenant compte de VIII, 5 (6), il s'agit de démontrer qu'à tout $d\in\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ correspond une fonction $g\in\mathcal{G}^Z$ telle que $d(x)=gf(x)$.

Soient $n_1,\dots,n_k$ les valeurs de la fonction d. Posons $F_i=d^{-1}(n_i)$, où $i=1,\dots,k$. Les ensembles F_i sont donc disjoints, fermés-ouverts et on a $\mathfrak{X}=F_1+\dots+F_k$.

Étant donné un $z\in Z$, la composante $f^{-1}(z)$ de $\mathfrak{X}$ est donc contenue dans un seul F_i. Posons $g(z)=n_i$. Il vient $gf(x)=d(x)$, et $f(F_i)$ étant fermé, l'égalité $g^{-1}(n_i)=f(F_i)$ implique que la fonction g est continue.

X. Théorèmes d'addition. Soit $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ une décomposition de $\mathfrak{X}$ en deux ensembles fermés ou en deux ensembles ouverts. Posons

$$\Theta_0(A_0,A_1)=\mathcal{G}^{A_0}|A_0\cdot A_1+\mathcal{G}^{A_1}|A_0\cdot A_1,$$

c'est-à-dire (cf. IV, 8) que $d\in\Theta_0(A_0,A_1)$ lorsqu'il existe deux fonctions $d_j\in\mathcal{G}^{A_j}$, où $j=0,1$, telles que $d(x)=d_0(x)-d_1(x)$ quel que soit $x\in A_0\cdot A_1$ [1]).

$\Theta_0(A_0,A_1)$ est donc un sous-groupe de $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ et $\mathcal{G}\subset\Theta_0(A_0,A_1)$. Posons

$$\mathfrak{D}_0(A_0,A_1)=\Theta_0(A_0,A_1)/\mathcal{G} \quad\text{et}\quad d_0(A_0,A_1)=\text{rang}\,\mathfrak{D}_0(A_0,A_1).$$

1. *Si A_0 est connexe, on a $\Theta_0(A_0,A_1)=\mathcal{G}^{A_1}|A_0\cdot A_1$.*

Car, A_0 étant connexe, on a $\mathcal{G}^{A_0}|A_0\cdot A_1=\mathcal{G}|A_0\cdot A_1=\mathcal{G}$.

2. *Corollaire. Si A_0 et A_1 est connexe, on a $\Theta_0(A_0,A_1)=\mathcal{G}$, donc $\mathfrak{D}_0(A_0,A_1)$ se réduit à l'élément neutre.*

3. *Soit $p_j\in A_0\cdot A_1$, où $j=0,1$. Si les ensembles A_0 et A_1 sont connexes entre les points p_0 et p_1, tandis que $A_0\cdot A_1$ ne l'est pas, on a*

$$\Theta_0(A_0,A_1)\neq\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}.$$

En effet, il existe par hypothèse un ensemble F fermé-ouvert dans $A_0\cdot A_1$ et tel que

$$p_0\in F \quad\text{et}\quad p_1\in A_0\cdot A_1-F. \tag{1}$$

Soit $d\in\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ la fonction définie par les conditions:

$$d(F)=0 \quad\text{et}\quad d(A_0\cdot A_1-F)=1. \tag{2}$$

En admettant que $d\in\Theta_0(A_0,A_1)$, on a

$$d=d_0|A_0\cdot A_1-d_1|A_0\cdot A_1 \quad\text{et}\quad d_j\in\mathcal{G}^{A_j}.$$

Donc, en particulier,

$$d(p_0)=d_0(p_0)-d_1(p_0) \quad\text{et}\quad d(p_1)=d_0(p_1)-d_1(p_1),$$

d'où en vertu de (1) et (2):

$$d_0(p_0)-d_1(p_0)=0 \quad\text{et}\quad d_0(p_1)-d_1(p_1)=1,$$

donc

$$d_0(p_0)\neq d_0(p_1) \quad\text{ou bien}\quad d_1(p_0)\neq d_1(p_1),$$

et par conséquent A_0 ou A_1 n'est pas connexe entre p_0 et p_1.

Définitions. $\Pi_0(A_0,A_1)$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{G}^{A_0+A_1}$ composé des fonctions constantes sur A_0 ainsi que sur A_1.

$$\mathfrak{P}_0(A_0,A_1)=\Pi_0(A_0,A_1)/\mathcal{G} \quad\text{et}\quad p_0(A_0,A_1)=\text{rang}\,\mathfrak{P}_0(A_0,A_1).$$

[1]) Cf. la note de S. Eilenberg et de moi-même, Fund. Math. **32** (1939), p. 193.

On constate aussitôt que

4. *Si l'on a: soit* $A_0\cdot A_1 \neq 0$, *soit* $A_0=0$, *soit* $A_1=0$, *on a*

$$\Pi_0(A_0,A_1)=\mathcal{G}, \quad \textit{donc} \quad p_0(A_0,A_1)=0.$$

5. *Si* $A_0\cdot A_1=0$ *et* $A_0\neq 0\neq A_1$, *on a* $\Pi_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathcal{G}^2$, *d'où* (cf. VII (7))

$$\mathfrak{P}_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathcal{G}, \quad \textit{donc} \quad p_0(A_0,A_1)=1.$$

Définitions. $\Lambda_0(A_0,A_1)$ désigne le sous-groupe du produit cartésien $\mathcal{G}^{A_0}\times\mathcal{G}^{A_1}$ composé des couples d_0,d_1 tels que

$$d_0|A_0\cdot A_1 - d_1|A_0\cdot A_1=\text{const}.$$

$$\mathfrak{L}_0(A_0,A_1)=\Lambda_0(A_0,A_1)/\mathcal{G}^2 \quad \text{et} \quad l_0(A_0,A_1)=\text{rang}\,\mathfrak{L}_0(A_0,A_1).$$

6. $\mathcal{G}^{A_0}\times\mathcal{G}^{A_1}/\Lambda_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{D}_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{B}_0(A_0)\times\mathfrak{B}_0(A_1)/\mathfrak{L}_0(A_0,A_1)$.

7. $\mathcal{G}^{A_0+A_1}/\Pi_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{L}_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{B}_0(A_0+A_1)/\mathfrak{P}_0(A_0,A_1)$.

En effet, pour démontrer les premières isomorphies des th. 6 et 7, posons respectivement:

$$h_{d_0,d_1}=(d_0|A_0\cdot A_1)-(d_1|A_0\cdot A_1) \quad \text{où} \quad d_j\in\mathcal{G}^{A_j},$$
$$h_d=(d|A_0,d|A_1) \quad \text{où} \quad d\in\mathcal{G}^{A_0+A_1}.$$

Dans le premier cas, on parvient à la première isomorphie 6, en remplaçant dans le th. III, 5: $\mathfrak{X}$ par $\mathcal{G}^{A_0}\times\mathcal{G}^{A_1}$, $\mathcal{Y}$ par $\Theta_0(A_0,A_1)$, A par $\Lambda_0(A_0,A_1)$ et B par $\mathcal{G}$. Dans le second cas, on remplace $\mathfrak{X}$ par $\mathcal{G}^{A_0+A_1}$, $\mathcal{Y}$ par $\Lambda_0(A_0,A_1)$, A par $\Pi_0(A_0,A_1)$ et B par $\mathcal{G}^2$, et on tient compte du fait que, si $(d_0,d_1)\in\Lambda_0(A_0,A_1)$, donc si $d_0(x)-d_1(x)=c$ pour $x\in A_0\cdot A_1$, la fonction d définie par les conditions $d(x)=d_0(x)$ sur A_0 et $d(x)=d_1(x)+c$ sur A_1, satisfait à la formule $[h_d-(d_0,d_1)]\in\mathcal{G}^2$ (d'où la condition 3° du th. III, 5).

Le reste des th. 6 et 7 résulte de III, 7 et VII (6).

8. $b_0(A_0+A_1)+d_0(A_0,A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)+p_0(A_0,A_1)$.

Car 6 et 7 entraînent d'après V, 3 et VII (5):

$$b_0(A_0)+b_0(A_1)=d_0(A_0,A_1)+l_0(A_0,A_1),$$
$$b_0(A_0+A_1)=l_0(A_0,A_1)+p_0(A_0,A_1),$$

et en ajoutant ces deux égalités, on en déduit 8 (pour $l_0(A_0,A_1)\leqslant\infty$).

Rapprochée de 4 et 5, la formule 8 donne les suivantes:

9. *Si l'on a: soit* $A_0\cdot A_1\neq 0$, *soit* $A_0=0$, *soit* $A_1=0$, *on a*

$$b_0(A_0+A_1)+d_0(A_0,A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1).$$

10. *Si* $A_0\cdot A_1=0$ *et* $A_0\neq 0\neq A_1$, *on a*

$$b_0(A_0+A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)+1.$$

Car dans le dernier cas, on a $d_0(A_0,A_1)=0$ et $p_0(A_0,A_1)=1$.

Ces formules permettent de calculer le nombre des composantes de la somme de deux ensembles fermés ou ouverts.

XI. Rapports à la connexité entre ensembles[1]. Posons

$$\Xi(Z,\mathfrak{X})=\Pi\,\mathcal{G}^{Z+F}|Z,$$

la multiplication étant étendue à tous les $F=\bar{F}\neq\mathfrak{X}$.

Autrement dit: la fonction $f\in\mathcal{G}^Z$ appartient à $\Xi(Z,\mathfrak{X})$ lorsqu'elle admet une extension $f_F\in\mathcal{G}^{Z+F}$ quel que soit $F=\bar{F}\neq\mathfrak{X}$.

1. *Si* $\mathfrak{X}$ *est irréductiblement connexe entre les ensembles fermés et disjoints* A *et* B, *et si* f *désigne la fonction définie sur* $A+B$ *et égale à* 0 *sur* A *et à* 1 *sur* B, *on a* $f\in\Xi(A+B,\mathfrak{X})$.

Car, F étant fermé et différent de $\mathfrak{X}$, l'ensemble $F+A+B$ n'est pas connexe entre A et B. Il existe donc d'après § 41, IV, 5 une extension $f_F\in\mathcal{G}^{F+A+B}$.

2. *Si* $\mathfrak{X}$ *est connexe entre* $A=\bar{A}$ *et* $B=\bar{B}$, *et si* $f\in\Xi(A+B,\mathfrak{X})$ *et* $f(A)\cdot f(B)=0$, $\mathfrak{X}$ *est irréductiblement connexe entre* A *et* B.

Admettons, en effet, que $F=\bar{F}\neq\mathfrak{X}$ et que $f\subset f^*\in\mathcal{G}^{F+A+B}$. Comme $f^*(A)\cdot f^*(B)=f(A)\cdot f(B)=0$, l'ensemble $F+A+B$ n'est pas connexe entre A et B, d'après § 41, IV, 5.

3. *Soit* $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ *une décomposition en deux ensembles connexes et fermés. Posons*

$$\Xi_j=\Xi(A_0\cdot A_1,\,A_j). \tag{1}$$

Pour qu'il existe un système $F_0,\dots,F_n$ $(n\geqslant 1)$ *d'ensembles tels que:*

(i) $A_0\cdot A_1=F_0+\dots+F_n$, $F_k=\bar{F}_k$, $F_l\cdot F_r=0$ *pour* $l\neq r$,

(ii) A_j $(j=0,1)$ *est irréductiblement connexe entre* F_k *et* $H_k=A_0\cdot A_1-F_k$ *pour* $k=0,1,\dots,n$,

il faut et il suffit que l'on ait:

$$\text{rang}\,[(\Xi_0\cdot\Xi_1)/\mathcal{G}]\geqslant n. \tag{2}$$

[1] Cf. ma note de Fund. Math. **31** (1938), p. 231.

Soit d'abord $F_0,\dots,F_n$ un système d'ensembles satisfaisant aux conditions (i) et (ii). D'après § 41, IV, 1a, on a $F_k \neq 0$. Soit d_k la fonction-élément de $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ telle que $d_k(F_k)=1$ et $d_k(H_k)=0$. D'après 1, $d_k \in \Xi_0\cdot\Xi_1$, et d'après IX, 2, les fonctions $d_1,\dots,d_n$ sont linéairement indépendantes mod $\mathcal{G}$; d'où l'inégalité (2).

Réciproquement, en admettant l'inégalité (2), soit $d_1,\dots,d_n$ un système d'éléments de $\Xi_0\cdot\Xi_1$ linéairement indépendants mod $\mathcal{G}$. Conformément au th. IX, 5, il existe un système d'ensembles non vides $F_0,\dots,F_n$ satisfaisant à (i) et tels qu'à tout couple d'indices $l \neq r$ correspond un k tel que $d_k(F_l)\cdot d_k(F_r)=0$. Comme $d_k \in \Xi_j$ et $F_l+F_r \subset A_0\cdot A_1$, il vient

$$(d_k|F_l+F_r) \in \Xi(F_l+F_r, A_j).$$

Il en résulte en vertu de 2 que l'ensemble (connexe) A_j est irréductiblement connexe entre F_l et F_r pour tout $r \neq l$ (on remplacera $\mathfrak{X}$ par A_j, A par F_l et B par F_r). En vertu du th. 4 du § 43, VIII, A_j est donc irréductiblement connexe entre les ensembles F_l et

$$F_1+\dots+F_{l-1}+F_{l+1}+\dots+F_n=H_l.$$

§ 51[1]). Les groupes $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{P}^{\mathfrak{X}}$.

I. Généralités. Soit $\mathcal{E}$ le groupe des nombres réels avec l'addition comme l'opération du groupe. Soit $\mathcal{S}$ la circonférence $|z|=1$ du plan complexe, considérée comme groupe avec la multiplication des nombres complexes comme l'opération du groupe („groupe des rotations"). Posons

$$e(t)=e^{2\pi i t} \quad \text{pour} \quad t \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

La fonction e est une homomorphie continue transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{S}$, et le groupe $\mathcal{G}$ des nombres entiers en est le noyau:

$$e(t+t')=e(t)\cdot e(t') \quad \text{et} \quad [e(t)=1]\equiv[t \in \mathcal{G}]. \tag{2}$$

[1]) Les théorèmes fondamentaux du § 51 se trouvent dans la Thèse de S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), p. 61.

$\mathfrak{X}$ étant un espace arbitraire et φ étant une fonction-élément du groupe $\mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ (cf. § 50, VIII), désignons par e_φ la fonction-élément du groupe $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ définie par la condition

$$e_\varphi(x)=e[\varphi(x)]=e^{2\pi i\varphi(x)}. \tag{3}$$

L'opération e est une homomorphie transformant $\mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ en un sous-groupe de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$, que nous désignerons par $\Psi(\mathfrak{X})$. Le groupe $\Psi(\mathfrak{X})$ se compose donc des éléments f de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ qui sont de la forme $f=e_\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$, c'est-à-dire que l'on a

$$f(x)=e^{2\pi i\varphi(x)} \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{4}$$

Le noyau de cette homomorphie est $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$.

On constate facilement que:

1. *Si $f(x)=e_\varphi(x)=e_\psi(x)$ et $|\varphi(x)-\psi(x)|<1$, on a $\varphi(x)=\psi(x)$.*

2. *Si $\mathfrak{X}$ est connexe, $\varphi,\psi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ et $e_\varphi=e_\psi$, la fonction $\varphi-\psi$ est une constante.*

De façon plus générale:

3. *Si $\mathfrak{X}$ est connexe entre a et b, et si $e_\varphi=e_\psi$, où $\varphi,\psi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$, on a $\varphi(a)-\psi(a)=\varphi(b)-\psi(b)$.*

Car, en posant $d=\varphi-\psi$, on a $d \in \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ et l'ensemble des x tels que $d(x)=d(a)$ est fermé-ouvert et contient a, donc b.

4. *Étant donnés: une fonction $f \in \Psi(\mathfrak{X})$ et un point $x_0 \in \mathfrak{X}$, on peut assujettir la fonction φ de la formule* (4) *à la condition („initiale"): $\varphi(x_0)=c_0$, où $2\pi i c_0$ est une valeur du $\log f(x_0)$ donnée en avance.*

Par conséquent (cf. 2), *si $\mathfrak{X}$ est connexe, cette condition détermine la fonction φ de façon univoque.*

En effet, on a par hypothèse $f(x)=e^{2\pi i\psi(x)}$ où $\psi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$. Soit $k=\psi(x_0)-c_0$; k est donc un entier. Il suffit de poser $\varphi(x)=\psi(x)-k$.

Remarque. $\mathcal{P}$ désignant le plan $\mathcal{E}^2$ privé du point 0, l'opération $e(t)$, définie par (1) avec $t \in \mathcal{E}^2$, est une homomorphie continue transformant le groupe (additif) $\mathcal{E}^2$ en le groupe (multiplicatif) $\mathcal{P}$. De façon analogue, l'opération e_φ définie par la formule (3) est une homomorphie transformant le groupe $(\mathcal{E}^2)^{\mathfrak{X}}$ en le sous-groupe de $\mathcal{P}^{\mathfrak{X}}$ composé des éléments de $\mathcal{P}^{\mathfrak{X}}$ de la forme (4). Ce sous-groupe se compose donc des fonctions dont le *logarithme admet une branche continue et univoque*; $2\pi i\varphi(x)$ est bien cette branche du logarithme.

Les théorèmes des §§ 51 et 52 sont formulés pour les groupes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$, mais — comme on constate facilement — *ils sont applicables aussi aux groupes $\mathcal{E}^2$ et $\mathcal{P}$* [1]).

II. Groupe $\Gamma(A)$. Soit $A\subset\mathfrak{X}$. Conformément aux notations du § 50, III, „$f\sim 1 \bmod \Psi(A)$" veut dire que $f\in\Psi(A)$. Nous convenons d'omettre les termes „mod $\Psi(A)$"; le symbole $f\sim 1$ [2]), où $f\in\mathcal{S}^A$, veut donc dire que f est de la forme

(1) $$f=e_\varphi \text{ où } \varphi\in\mathcal{E}^A.$$

Posons

(2) $$\Gamma(A)=\underset{f}{E}\,(f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}})\,(f|A\sim 1).$$

On constate aussitôt que (cf. § 50, VIII, 2):

1. $\Gamma(A)=\zeta^{-1}[\Psi(A)]$, 2. $\Gamma(\mathfrak{X})=\Psi(\mathfrak{X})$,

3. *$\Gamma(A)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$,*

4. *$A\subset B$ entraîne $\Gamma(B)\subset\Gamma(A)$,*

5. *Si $A=(p)$, on a $\Gamma(A)=\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$.*

6. *Soit R un rayon issu du point 0. Si $f\in(\mathcal{E}^2-R)^{\mathfrak{X}}$, on a $f\sim 1$.*

Car $\log z$ se laisse définir évidemment de façon continue sur $\mathcal{E}^2-R$.

7. *À toute fonction $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ (et à toute fonction $f\in\mathcal{P}^{\mathfrak{X}}$) correspond une décomposition $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ en deux ensembles ouverts tels que $f|A_j\sim 1$ pour $j=0,1$.*

Il suffit, en effet, de désigner par R_0 et R_1 les demi-arcs des abscisses, positif et négatif, et de poser $A_j=f^{-1}(\mathcal{S}-R_j)$ (ou bien $A_j=f^{-1}(\mathcal{P}-R_j)$).

8. *Si $F=\overline{F}$, on a $\Psi(F)=\Gamma(\mathfrak{X})|F$.*

Autrement dit, *si $f\in\mathcal{S}^F$ et $f\sim 1$, il existe une fonction f^* telle que $f\subset f^*\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ et $f^*\sim 1$.*

On a, en effet, par hypothèse (cf. (1))

(3) $$f=e_\varphi \quad\text{et}\quad \varphi\in\mathcal{E}^F, \quad\text{d'où}\quad \varphi\subset\varphi^*\in\mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$$

d'après le théorème de Tietze (§ 15, XI, 3).

[1]) Pour des généralisations aux groupes topologiques, voir ma note *Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens*, Fund. Math. **31** (1938), p. 231.

[2]) Comme on verra au Nº IX, la relation $f\sim 1$ équivaut à $f\simeq 1$.

Il ne reste qu'à poser $f^*=e_{\varphi^*}$.

9. *$\Gamma(A)=\Sigma\Gamma(G)$, G parcourant les sur-ensembles ouverts de A.*

Autrement dit, *à tout $f\in\Gamma(A)$ correspond un ensemble ouvert G tel que*

(4) $$A\subset G \quad\text{et}\quad f\in\Gamma(G).$$

Envisageons d'abord le cas où A se réduit à un seul point a. En d'autres termes, nous établirons d'abord l'énoncé suivant:

10. *Soit $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. À tout point $a\in\mathfrak{X}$ correspond un ensemble ouvert G_a tel que $a\in G_a$ et $f|G_a\sim 1$.*

En effet, H désignant le plan $\mathcal{E}^2$ privé d'un rayon issu du point 0 et ne passant pas par le point $f(a)$, il suffira (cf. 6) de poser $G=f^{-1}(H)$.

Ceci établi, soient:

(5) $$A\subset\mathfrak{X},\ f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}},\ f|A=e_\varphi \text{ et } \varphi\in\mathcal{E}^A.$$

On peut donc faire correspondre à tout point a de A un ensemble ouvert G_a et une fonction $\psi_a\in\mathcal{E}^{G_a}$ tels que

(6) $$a\in G_a,\ f(x)=e_{\psi_a}(x) \quad\text{pour}\quad x\in G_a,$$

et (cf. (5) et **I**, 4)

(7) $$\psi_a(a)=\varphi(a).$$

En réduisant, au besoin, l'ensemble G_a, on peut admettre que

(8) $$|\psi_a(x)-\psi_a(a)|<1/3 \quad\text{si}\quad x\in G_a,$$

(9) $$|\varphi(x)-\varphi(a)|<1/3 \quad\text{si}\quad x\in A \quad\text{et}\quad |x-a|<2\delta(G_a).$$

Nous allons démontrer que

(10) les conditions $x\in G_a\cdot G_b$, $a\in A$ et $b\in A$ entraînent $\psi_a(x)=\psi_b(x)$.

On a, en effet, d'après (7) et (8)

(11) $$|\psi_a(x)-\varphi(a)|<1/3 \quad\text{et}\quad |\psi_b(x)-\varphi(b)|<1/3,$$

et en admettant (par raison de symétrie) que $\delta(G_b)\leqslant\delta(G_a)$, il vient en vertu de (9): $|\varphi(b)-\varphi(a)|<1/3$. Cette inégalité, rapprochée des inégalités (11), donne $|\psi_a(x)-\psi_b(x)|<1$, d'où $\psi_a(x)=\psi_b(x)$ en vertu de (6) et **I**, 1.

Soit G la somme des ensembles G_a pour a parcourant A. Soit, conformément à (10), ψ la fonction identique à $\psi_a(x)$ pour $x\in G_a$. Il vient $\psi\in\mathcal{E}^G$ et $f=e_\psi$ d'après (6). Donc $f|G\sim 1$.

III. Groupe $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$. $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$ désigne le groupe-facteur $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}/\Psi(\mathfrak{X})$ et $b_1(\mathfrak{X})$ désigne son rang [1]). Nous convenons que $b_1(0)=0$.

1. *Le groupe $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$ ne contient aucun élément d'ordre fini* (n'admet pas de „torsion").

Autrement dit, *si $f^n\sim 1$ et $n\neq 0$, on a $f\sim 1$.*

Posons, en effet,

$$f^n(x)=e^{2\pi i\varphi(x)},\quad \varphi_k(x)=\frac{1}{n}[\varphi(x)+k]\quad \text{où}\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

et

$$F_k=\underset{x}{E}\,[f(x)=e^{2\pi i\varphi_k(x)}].$$

Nous allons démontrer que $\mathfrak{X}=F_0+\ldots+F_{n-1}$.

Soit $x\in\mathfrak{X}$. Il s'agit de définir un k tel que $x\in F_k$. Soient:

$$t\in\mathcal{E}\quad\text{tel que}\quad f(x)=e^{2\pi it},$$

$$q\in\mathcal{G}\quad\text{tel que}\quad -q\leqslant\frac{1}{n}[nt-\varphi(x)]<-q+1.$$

Comme $e^{2\pi i\varphi(x)}=f^n(x)=e^{2\pi int}$, on a $[nt-\varphi(x)]\in\mathcal{G}$. L'entier $k=nt-\varphi(x)+qn$ satisfait donc aux conditions

$$0\leqslant k\leqslant n-1\quad\text{et}\quad \varphi_k(x)=t+q,\quad\text{d'où}\quad f(x)=e^{2\pi i\varphi_k(x)},\quad\text{donc } x\in F_k.$$

Les ensembles $F_0,\ldots,F_{n-1}$ étant fermés et disjoints, la fonction ψ, définie par la condition $\psi(x)=\varphi_k(x)$ pour $x\in F_k$, est continue et on a $f=e_\psi$.

2. *Les conditions*: $b_1(\mathfrak{X})=0$, $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}=\Psi(\mathfrak{X})$ *et* $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})=(0)$, *sont équivalentes (pour $\mathfrak{X}\neq 0$).*

C'est une conséquence directe du § 50, III (1).

3. $\mathfrak{B}_1(\mathcal{J})=(0)$, *donc* $b_1(\mathcal{J})=0$.

Autrement dit, *si $f\in\mathcal{S}^{\mathcal{J}}$, on a $f\sim 1$.*

[1]) Si $\mathfrak{X}$ est un polytope, le groupe $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$ est isomorphe au premier groupe réduit de Betti de $\mathfrak{X}$. Voir N. Bruschlinsky, *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. **109** (1934), p. 525, où le cas plus général de $\mathfrak{X}$ compact est considéré. Comme on verra au § 55, III, 5, si $\mathfrak{X}$ est un sous-ensemble compact du plan, $b_1(\mathfrak{X})+1$ est le nombre des composantes de son complémentaire.

En effet, faisons correspondre, conformément à 10, à tout point a de $\mathcal{J}$ un ensemble ouvert G_a tel que $a\in G_a$ et $f|G_a\sim 1$. En vertu du théorème de Borel-Lebesgue, la famille $\{G_a\}$ peut être remplacée par une famille finie. En d'autres termes: il existe un système fini $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n$, où $a_0=0$ et $a_n=1$, tel que l'on a, pour $k=1,2,\ldots,n$:

$$f|a_{k-1}a_k\sim 1,\quad\text{donc}\quad f(x)=e^{2\pi i\varphi_k(x)}\quad\text{pour}\quad a_{k-1}\leqslant x\leqslant a_k,$$

où φ_k est continue. On peut admettre en outre, conformément à I, 4, que $\varphi_{k+1}(a_k)=\varphi_k(a_k)$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$.

Les fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ définissent donc une seule fonction $\varphi\in\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ telle que $\varphi|a_{k-1}a_k=\varphi_k$. Il vient

$$f(x)=e^{2\pi i\varphi(x)}\quad\text{pour}\quad x\in\mathcal{J},\quad\text{d'où } f\sim 1.$$

4. $\mathfrak{B}_1(\mathcal{S})\underset{\text{gr}}{=}\mathcal{G}$, *donc* $b_1(\mathcal{S})=1$.

Plus précisément, *la transformation identique constitue une base* mod $\Psi(\mathcal{S})$.

En d'autres termes:

1⁰ *on a x non ~ 1 sur $\mathcal{S}$,*

2⁰ *à toute fonction $f\in\mathcal{S}^{\mathcal{S}}$ correspond un entier n (à savoir, l'accroissement du* log $f(x)$) *et une fonction $\varphi\in\mathcal{E}^{\mathcal{S}}$ tels que*

$$f(x)=x^ne^{2\pi i\varphi(x)}.\tag{1}$$

En vue d'établir 1⁰, désignons par A la circonférence $\mathcal{S}$ privée du point $(1,0)$ et désignons par $\alpha(x)$ l'argument de x, contenu entre 0 et 2π. On a donc sur A: $x=e^{i\alpha(x)}$, $\alpha\in\mathcal{E}^A$; de plus, la fonction ne se laisse pas prolonger de façon continue sur le point $(1,0)$.

En supposant, par impossible, que $x\sim 1$ sur $\mathcal{S}$, on aurait $x=e^{i\beta(x)}$, où $\beta\in\mathcal{E}^{\mathcal{S}}$. Mais alors — l'ensemble A étant connexe — on aurait en vertu de I, 2,

$$\alpha(x)=\beta(x)+2k\pi\quad\text{pour}\quad x\in A,$$

et la fonction $\beta(x)+2k\pi$ serait une extension continue de $\alpha(x)$ sur la circonférence $\mathcal{S}$ toute entière.

Passons à 2⁰. La fonction $f(e^{2\pi it})$ étant définie sur l'intervalle $\mathcal{J}$, on a d'après 3

$$f(e^{2\pi it})=e^{2\pi i\psi(t)},\quad\text{où}\quad \psi\in\mathcal{E}^{\mathcal{J}}.\tag{2}$$

Il en résulte que la différence $\psi(1)-\psi(0)$ est un entier; soit

(3) $$n=\psi(1)-\psi(0).$$

Faisons correspondre à tout $x \in \mathcal{S}$ le point

(4) $$y=\psi(t)-nt,$$

$2\pi t$ étant l'argument du point x. Bien qu'au point $(1,0)$ correspondent deux valeurs de t, à savoir 0 et 1, la valeur de y est définie en vertu de (3) et (4) de façon univoque. En posant $y=\varphi(x)$, on constate aussitôt que la fonction φ est continue: $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{S}}$, et en posant $x=e^{2\pi i t}$, on a d'après (2)

$$f(x)=e^{2\pi i \psi(t)} \quad \text{et} \quad x^n=e^{2n\pi i t},$$

d'où

$$f(x)=x^n e^{2\pi i[\psi(t)-nt]}=x^n e^{2\pi i \varphi(x)}.$$

IV. Théorèmes d'addition[1]**.** Soient A_0 et A_1 deux ensembles *fermés* ou deux ensembles *ouverts* tels que $\mathfrak{X}=A_0+A_1$. Posons

(0) $$\Theta_1(A_0,A_1)=\widehat{\mathcal{S}^{A_0}|A_0\cdot A_1+\mathcal{S}^{A_1}|A_0\cdot A_1}.$$

1. *À toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}^{A_0\cdot A_1}$ correspondent deux fonctions $\varphi_j \in \mathcal{E}^{A_j}$, où $j=0,1$, telles que $\varphi_1(x)-\varphi_0(x)=\varphi(x)$ pour $x \in A_0\cdot A_1$.*

En symbole

$$\mathcal{E}^{A_0 A_1}=\widehat{\mathcal{E}^{A_0}|A_0\cdot A_1+\mathcal{E}^{A_1}|A_0\cdot A_1}.$$

À savoir, A_0^* et A_1^* étant, conformément au § 16, II, 2, deux ensembles fermés tels que $\mathfrak{X}=A_0^*+A_1^*$ et $A_j^*\subset A_j$ (et que $A_j^*=A_j$ si $A_0=\bar{A}_0$ et $A_1=\bar{A}_1$) et φ^* étant une extension de $\varphi|A_0^*\cdot A_1^*$ sur $\mathfrak{X}$ (conformément au théorème de Tietze, § 15, XI, 3), on posera:

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x \in A_0^* \\ \varphi^*(x)-\varphi(x) \text{ si } x \in A_0\cdot A_1^*,\end{cases} \qquad \varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi^*(x) \text{ si } x \in A_1^* \\ \varphi(x) \text{ si } x \in A_1\cdot A_0^*.\end{cases}$$

Remarquons que l'on a, pour A_j fermés, $\varphi_0=0$ et $\varphi_1=\varphi^*|A_1$.

2. *À toute fonction $f \in \Gamma(A_0\cdot A_1)$ correspondent deux fonctions $f_j \in \Gamma(A_j)$, où $j=0,1$, telles que $f_1:f_0=f$.*

[1] Pour les N° IV et V, voir la note de S. Eilenberg et de moi-même, *Théorèmes d'addition concernant le groupe des transformations en circonférence*, Fund. Math. **32** (1939), p. 193.

En symbole

$$\Gamma(A_0\cdot A_1)=\widehat{\Gamma(A_0)+\Gamma(A_1)}.$$

Soit $f|A_0\cdot A_1=e_\varphi$, où $\varphi \in \mathcal{E}^{A_0\cdot A_1}$. En notations du th. 1, posons

$$f_0(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x \in A_0^* \\ e_{\varphi^*}(x):f(x) \text{ si } x \in A_1^*,\end{cases} \qquad f_1(x)=\begin{cases}f(x) \text{ si } x \in A_0^* \\ e_{\varphi^*}(x) \text{ si } x \in A_1^*.\end{cases}$$

Il vient $f_j(x)=e_{\varphi_j}(x)$ pour $x \in A_j$, d'où la conclusion demandée.

3. *À tout couple de fonctions $f_j \in \mathcal{S}^{A_j}$, où $j=0,1$, liées par la relation $f_0|A_0\cdot A_1\sim f_1|A_0\cdot A_1$, correspond une fonction $f \in \mathcal{S}^{A_0+A_1}$ telle que $f|A_j\sim f_j$ pour $j=0,1$.*

On a par hypothèse (pour $x \in A_0\cdot A_1$):

$$f_0(x):f_1(x)=e_\varphi(x), \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{E}^{A_0\cdot A_1},$$

et d'après 1:

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_0(x) \quad \text{où} \quad \varphi_j \in \mathcal{E}^{A_j}.$$

En tenant compte de l'identité (sur $A_0\cdot A_1$)

$$[f_0(x)\cdot e_{\varphi_0}(x)]:[f_1(x)\cdot e_{\varphi_1}(x)]=e_\varphi(x)\cdot e_{\varphi_0}(x):e_{\varphi_1}(x)=1,$$

on définit la fonction f en posant $f|A_j=f_j\cdot e_{\varphi_j}$ pour $j=0,1$.

4. $\Psi(A_0\cdot A_1)\subset\Theta_1(A_0,A_1)$,

c'est-à-dire que toute fonction $f \in \mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}$ telle que $f\sim 1$ est de la forme $f(x)=f_1(x):f_0(x)$, où $f_j \in \mathcal{S}^{A_j}$, $j=0,1$.

On a par hypothèse et d'après 1:

$$f=e_\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{E}^{A_0\cdot A_1}, \quad \varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \varphi_j \in \mathcal{E}^{A_j}.$$

Il suffit de poser $f_j=e_{\varphi_j}$.

5. *Soient $\varphi_j \in \mathcal{E}^{A_j}$ pour $j=0,1$, et $(\varphi_1-\varphi_0) \in \mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$. Il existe alors une fonction $f \in \mathcal{S}^{A_0+A_1}$ telle que $f|A_j=e_{\varphi_j}$.*

De plus, si $\varphi_j' \in \mathcal{E}^{A_j}$, $\varphi_1'-\varphi_0'=\varphi_1-\varphi_0$, $f' \in \mathcal{S}^{A_0+A_1}$ et $f'|A_j=e_{\varphi_j'}$, on a $f'\sim f$.

En effet, la condition $(\varphi_1-\varphi_0) \in \mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ implique que $e_{\varphi_1-\varphi_0}=1$, donc, en posant $f(x)=e^{2\pi i\varphi_j(x)}$ pour $x \in A_j$ et $j=0,1$, il vient $f \in \mathcal{S}^{A_0+A_1}$.

Pour établir la relation $f'\sim f$, posons $\psi_j=\varphi_j'-\varphi_j$. Comme $(\psi_1-\psi_0)|A_0\cdot A_1=0$, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ telle que $\psi_j=\psi|A_j$. Il vient

$$e_{\varphi_j'}:e_{\varphi_j}=e_{\varphi_j'-\varphi_j}=e_{\psi_j}, \quad \text{d'où} \quad f':f=e_\psi, \quad \text{donc} \quad f'\sim f.$$

6. *Faisons correspondre, conformément à* 1, *à tout* $d \in \mathcal{G}^{A_1 \cdot A_0}$ *deux fonctions* $\varphi_{d,j}$, *où* $j=0,1$, *telles que*

(1) $\qquad \varphi_{d,j} \in \mathcal{E}^{A_j}$ *et* $\varphi_{d,1}(x)-\varphi_{d,0}(x)=d(x)$ *pour* $x \in A_0 \cdot A_1$.

Désignons par h_d *la fonction telle que* (cf. 5)

(2) $$h_d \in \mathcal{S}^{A_0+A_1} \quad \text{et} \quad h_d|A_j=e_{\varphi_{d,j}}, \quad j=0,1.$$

On a alors:

(i) $$\Theta_0(A_0,A_1)=h^{-1}[\Psi(A_0+A_1)]$$

(c'est-à-dire que, pour que $h_d \sim 1$, *il faut et il suffit que l'on ait*

(3) $\qquad d(x)=d_1(x)-d_0(x)$ *pour* $x \in A_0 \cdot A_1$ *et* $d_j \in \mathcal{G}^{A_j}$*),*

(ii) $$h_{d+d'} \sim h_d \cdot h_{d'},$$

(iii) *à tout* $f \in \Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)$ *correspond un* d *tel que* $f \sim h_d$.

Soit $h_d \sim 1$. On a donc $h_d=e_\psi$ et $\psi \in \mathcal{E}^{A_0+A_1}$. Les fonctions $d_j=\varphi_{d,j}-\psi$, où $j=0,1$, satisfont à (3), car

$$e_{\varphi_{d,j}-\psi}=e_{\varphi_{d,j}}:e_\psi=1.$$

Réciproquement, admettons que les formules (3) sont satisfaites et que (conformément à 5),

$$h'_d \in \mathcal{S}^{A_0+A_1} \quad \text{et} \quad h'_d|A_j=e_{d_j}.$$

Comme $e_{d_j}=1$ et $h_d \sim h'_d$ (d'après 5), il vient $h_d \sim 1$.

La condition (i) se trouve ainsi établie.

Posons $\varphi'_{(d+d'),j}=\varphi_{d,j}+\varphi_{d',j}$. Il vient d'après (1)

$$\varphi'_{(d+d'),1}-\varphi'_{(d+d'),0}=d+d'=\varphi_{(d+d'),1}-\varphi_{(d+d'),0}.$$

Il existe donc d'après 5 une fonction $h'_{d+d'} \in \mathcal{S}^{A_0+A_1}$ telle que:

(4) $\qquad h'_{d+d'}|A_j=e_{\varphi'_{(d+d'),j}}, \qquad$ (5) $\; h'_{d+d'} \sim h_{d+d'}$.

Comme

$$e_{\varphi'_{(d+d'),j}}=e_{\varphi_{d,j}}\cdot e_{\varphi_{d',j}}=(h_d|A_j)\,(h_{d'}|A_j),$$

la formule (4) donne $h'_{d+d'}=h_d\cdot h_{d'}$, d'où (ii) d'après (5).

Soit $f \in \Gamma(A_j)$. Posons $f|A_j=e_{\psi_j}$, $\psi_j \in \mathcal{E}^{A_j}$ et $d=\psi_1-\psi_0$. Il vient $d \in \mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1}$. Les égalités (1) et (2) entraînent donc la formule $f \sim h_d$ en vertu de 5.

V. Relations entre les groupes-facteurs. A_0 et A_1 étant — comme dans le N° IV — deux ensembles fermés ou ouverts tels que $\mathfrak{X}=A_0+A_1$, considérons les groupes suivants (qui correspondent aux groupes étudiés dans le § 50, X):

(1) $$\Pi_1(A_0,A_1)=\underset{f}{E}\,(f \in \mathcal{S}^{A_0+A_1})\,(f|A_j \sim 1,\ j=0,1)=\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1),$$

(2) $$\Lambda_1(A_0,A_1)=\underset{f_0 f_1}{E}\,(f_j \in \mathcal{S}^{A_j}, j=0,1)\,(f_0|A_0A_1 \sim f_1|A_0A_1),$$

(3) $$\mathfrak{D}_1(A_0,A_1)=\Theta_1(A_0,A_1)/\Psi(A_0\cdot A_1),$$

(4) $$\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)=\Pi_1(A_0,A_1)/\Psi(A_0+A_1).$$

(5) $$\mathfrak{L}_1(A_0,A_1)=\Lambda_1(A_0,A_1)/[\Psi(A_0)\times\Psi(A_1)].$$

On a les trois théorèmes d'isomorphie suivants [1]):

1. $\mathcal{S}^{A_0}\times\mathcal{S}^{A_1}/\Lambda_1(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{D}_1(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{B}_1(A_0)\times\mathfrak{B}_1(A_1)/\mathfrak{L}_1(A_0,A_1)$,
2. $\mathcal{S}^{A_0+A_1}/\Pi_1(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{L}_1(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{B}_1(A_0+A_1)/\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)$,
3. $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}/\Theta_0(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)\underset{\text{gr}}{=}\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)/\mathfrak{D}_0(A_0,A_1)$.

La démonstration des th. 1 et 2 est tout à fait analogue à celle des th. 6 et 7 du § 50, X. On pose respectivement:

$$h_{f_0,f_1}=(f_0|A_0A_1):(f_1|A_0A_1) \quad \text{où} \quad f_j \in \mathcal{S}^{A_j},$$
$$h_f=(f|A_0,f|A_1) \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{S}^{A_0+A_1},$$

et l'on tient compte des théorèmes III, 5, 7 et VII (6) du § 50.

Le th. 3 est une conséquence immédiate des th. IV, 6 et § 50, III, 5, où l'on remplace $\mathfrak{X}$ par $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$, $\mathfrak{Y}$ par $\Pi_1(A_0,A_1)$, A par $\Theta_0(A_0,A_1)$ et B par $\Psi(A_0+A_1)$.

Soient $d_1(A_0,A_1)$ et $p_1(A_0,A_1)$ les *rangs* des groupes $\mathfrak{D}_1(A_0,A_1)$ et $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)$. Ils sont liés par les relations suivantes:

4. $p_1(A_0,A_1)\leqslant b_1(A_0+A_1)$,
5. $b_1(A_0+A_1)+d_1(A_0,A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1)+p_1(A_0,A_1)$ [2]),
6. $p_1(A_0,A_1)+d_0(A_0,A_1)=b_0(A_0\cdot A_1)$.

[1]) Pour 1 et 2, voir la note de S. Eilenberg et de moi-même, Fund. Math. **32** (1939), p. 197; pour 3, voir ma note de Fund. Math. **31** (1938), p. 239. Ces trois théorèmes correspondent aux formules de L. Vietoris, Mon. f. Math. u. Phys. **37** (1930), p. 162. Cf. Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, Ch. VII, § 2; les groupes $N^j(A_0\cdot A_1)$ et $S^j(A_0+A_1)$ („Nahtzyklen" et „Summenzyklen") réduits sont isomorphes respectivement aux groupes $\mathfrak{B}_j(A_0\cdot A_1)/\mathfrak{D}_j(A_0,A_1)$ et $\mathfrak{B}_j(A_0+A_1)/\mathfrak{P}_j(A_0,A_1)$. Cf. aussi E. Čech, Fund. Math. **19** (1932), p. 149.

[2]) Cf. une formule analogue de W. Mayer concernant les nombres de Betti, Mon. f. Math. u. Phys. **36** (1929), p. 40.

En effet, 4 résulte de l'inclusion $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)\subset\mathfrak{B}_1(A_0+A_1)$, 5 résulte de 1 et 2 (cf. l'implication $6,7\to 8$ du § 50, X) et 6 est une conséquence du th. V, 3 du § 50.

7. *Si* $A_0\cdot A_1\neq 0$, *on a*:

(7.1) $\quad b_0(A_0)+b_0(A_1)+p_1(A_0,A_1)=b_0(A_0+A_1)+b_0(A_0\cdot A_1)$,

(7.2) $\quad b_1(A_0+A_1)+b_0(A_0)+b_0(A_1)+d_1(A_0,A_1)=$
$$=b_0(A_0+A_1)+b_1(A_0)+b_1(A_1)+b_0(A_0\cdot A_1).$$

En effet, (7.1) résulte de 6 et du th. X, 9 du § 50; (7.2) se déduit en ajoutant 5 à (7.1).

Dans le cas où les rangs considérés sont finis, on pose

(*) $\quad \operatorname{ind}(A)=b_0(A)-b_1(A)$ [1]

et on déduit de (7.2) que

(7.3) $\quad$ *si* $A_0\cdot A_1\neq 0$, *on a* $\operatorname{ind}(A_0+A_1)+\operatorname{ind}(A_0\cdot A_1)=$
$$=\operatorname{ind}(A_0)+\operatorname{ind}(A_1)-b_1(A_0\cdot A_1)+d_1(A_0,A_1).$$

8. *Si* $A_0\cdot A_1=0$, *on a* $\mathfrak{B}_1(A_0+A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_1(A_0)\times\mathfrak{B}_1(A_1)$, *d'où*
$$b_1(A_0+A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1).$$

En effet, en faisant correspondre à tout $f\in\mathcal{S}^{A_0+A_1}$ le couple $(f|A_0,f|A_1)$, on établit une isomorphie entre $\mathcal{S}^{A_0+A_1}$ et $\mathcal{S}^{A_0}\times\mathcal{S}^{A_1}$. Dans cette isomorphie, $\Psi(A_0+A_1)$ se transforme en $\Psi(A_0)\times\Psi(A_1)$. Donc (cf. § 50, III, 5 et VII (6)):
$$\mathcal{S}^{A_0+A_1}/\Psi(A_0+A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}[\mathcal{S}^{A_0}\times\mathcal{S}^{A_1}]/[\Psi(A_0)\times\Psi(A_1)]$$
$$\underset{\mathrm{gr}}{=}[\mathcal{S}^{A_0}/\Psi(A_0)]\times[\mathcal{S}^{A_1}/\Psi(A_1)].$$

VI. Rapports à la connexité. Soient, comme auparavant, A_0 et A_1 deux ensembles fermés ou deux ensembles ouverts tels que
$$\mathfrak{X}=A_0+A_1.$$

1. *Si* A_0 *est connexe, on a*

(1) $$\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}/(\mathcal{G}^{A_1}|A_0\cdot A_1).$$

2. *Si les deux ensembles* A_0 *et* A_1 *sont connexes, on a*

(2) $\quad\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)$, *donc* $p_1(A_0,A_1)=b_0(A_0\cdot A_1)\leqslant b_1(A_0+A_1)$.

3. *Si* $A_0\cdot A_1$ *est connexe, on a* $\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)=\Gamma(A_0+A_1)$, *c'est-à-dire que les conditions* $f|A_j\sim 1$, $j=0,1$, *entraînent* $f\sim 1$.

4. *Si les ensembles* A_0 *et* A_1 *sont connexes tandis que* $A_0\cdot A_1$ *ne l'est pas, on a* $\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)\neq\Gamma(A_0+A_1)$.

[1] Pour un polytope, cet indice coïncide avec *la caractéristique d'Euler-Poincaré* si tous ses nombres de Betti, à partir du deuxième, s'annulent.

De façon plus générale, *si* $A_0\cdot A_1$ *n'est pas connexe entre les points* p_0 *et* p_1 *tandis que* A_0 *et* A_1 *le sont, on a* $\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)\neq\Gamma(A_0+A_1)$.

Le th. 1 résulte de V, 3 et § 50, X, 1; le th. 2 — de V, 3 et 4 et de § 50, X, 2. Pour établir le th. 3, remarquons que si $A_0\cdot A_1$ est connexe, on a $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}=\mathcal{G}=\Theta_0(A_0,A_1)$, donc d'après la première isomorphie V, 3, on a $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)=(0)$, d'où $\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)=$ $=\Gamma(A_0+A_1)$. La même isomorphie entraîne le th. 4 en raison du th. 3 du § 50, X.

Remarques. 1) Les isomorphies (1) et (2) sont déterminées par la transformation h considérée dans le th. IV, 6.

2) La première partie du th. 3 peut être établie plus directement, comme suit.

Posons $f|A_j=e_{\varphi_j}$, $\varphi_j\in\mathcal{E}^{A_j}$. On a $e_{\varphi_0}=e_{\varphi_1}$ sur $A_0\cdot A_1$. Il existe donc d'après I, 2 un $k\in\mathcal{G}$ tel que $(\varphi_0-\varphi_1)|A_0\cdot A_1=k$. Les fonctions φ_0 et φ_1+k étant concordantes, il existe une fonction $\psi\in\mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ telle que $\psi|A_0=\varphi_0$ et $\psi|A_1=\varphi_1+k$. Comme $k\in\mathcal{G}$, il vient
$$e_{\varphi_1+k}=e_{\varphi_1}\cdot e_k=e_{\varphi_1},\quad\text{donc}\quad f=e_\psi,\quad\text{d'où}\quad f\sim 1.$$

3) Dans le cas où $\bar{A}_j=A_j$, le th. 4 se laisse démontrer plus directement en posant:
$$A_0\cdot A_1=P_0+P_1,\quad \bar{P}_j=P_j,\quad P_0\cdot P_1=0,\quad P_0\neq 0\neq P_1,$$
$$\varphi(x)=\frac{\varrho(x,P_0)}{\varrho(x,P_0)+\varrho(x,P_1)}\quad\text{et}\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in A_0\\ e^{2\pi i\varphi(x)} & \text{si } x\in A_1.\end{cases}$$

Il vient f *non* ~ 1.

5. C_0, C_1 *et* C_2 *étant trois ensembles connexes tels que* $C_0\cdot C_1\cdot C_2\neq 0$ *et* $\mathfrak{X}=C_0+C_1+C_2$, *on a*
$$\Gamma(C_0+C_1)\cdot\Gamma(C_1+C_2)\cdot\Gamma(C_2+C_0)=\Gamma(C_0+C_1+C_2),$$
c'est-à-dire que les conditions $f|C_k+C_{k+1}\sim 1$, *où* $k=0,1,2$ *(les indices étant réduits* mod 3*), entraînent* $f\sim 1$.

Soit, en effet, $x_0\in C_0\cdot C_1\cdot C_2$. Posons $f|C_k+C_{k+1}=e_{\varphi_{k-1}}$ où $\varphi_{k-1}\in\mathcal{E}^{C_k+C_{k+1}}$. On peut admettre que $\varphi_0(x_0)=\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$. On en conclut en vertu de I, 2 (en remplaçant $\mathfrak{X}$ par C_k) que, pour $x\in C_k$, on a $\varphi_{k-1}(x)-\varphi_{k+1}(x)=0$. Les fonctions φ_0, φ_1 et φ_2 sont donc concordantes et déterminent par conséquent une fonction $\varphi\in\mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ telle que $\varphi|C_k+C_{k+1}=\varphi_{k-1}$. Il vient $f=e_\varphi$, d'où $f\sim 1$.

6. *C_0, C_1 et C_2 étant trois ensembles connexes tels que $\mathcal{X}=C_0+C_1+C_2$, on a*

$$\text{rang}\,[\Gamma(C_0+C_1)\cdot\Gamma(C_1+C_2)\cdot\Gamma(C_2+C_0)/\Gamma(C_0+C_1+C_2)]\leqslant 1.$$

Autrement dit, *étant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ telles que*

$$f|C_k+C_{k+1}\sim 1 \quad \textit{et} \quad g|C_k+C_{k+1}\sim 1 \quad (k=0,1,2),$$

il existe deux entiers m et n qui ne s'annulent pas tous les deux et que $f^m\cdot g^n\sim 1$.

On a par hypothèse

$$f|C_k+C_{k+1}=e_{\varphi_{k-1}} \quad \text{et} \quad g|C_k+C_{k+1}=e_{\psi_{k-1}}. \tag{3}$$

L'ensemble C_k étant connexe, il existe deux entiers a_k et b_k tels que

$$\varphi_{k+1}(x)-\varphi_{k-1}(x)=a_k \quad \text{et} \quad \psi_{k+1}(x)-\psi_{k-1}(x)=b_k, \quad \text{où } x\in C_k. \tag{4}$$

Posons:

$$a=a_0+a_1+a_2 \quad \text{et} \quad b=b_0+b_1+b_2$$

et définissons les entiers m et j de façon que

$$ma+jb=0 \quad \text{et} \quad |m|+|j|\neq 0. \tag{5}$$

Posons

$$\begin{cases} \chi_0(x)=m\varphi_0(x)+j\psi_0(x), & x\in C_1+C_2, \\ \chi_1(x)=m[\varphi_1(x)+a_2]+j[\psi_1(x)+b_2)], & x\in C_2+C_0, \\ \chi_2(x)=m[\varphi_2(x)+a_2+a_0]+j[\psi_2(x)+b_2+b_0], & x\in C_0+C_1. \end{cases} \tag{6}$$

On constate aussitôt en vertu de (4) et (5) que

$$\chi_{k-1}(x)-\chi_{k+1}(x)=0 \quad \text{pour} \quad x\in C_k.$$

Il existe par conséquent une fonction $\chi\in\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$ telle que

$$\chi|C_k+C_{k+1}=\chi_{k-1}. \tag{7}$$

Il en résulte que $f^m\cdot g^j\sim 1$, à savoir que

$$f^m\cdot g^j=e_\chi.$$

En effet, soit $x\in C_k+C_{k+1}$. Il vient d'après (6) et (7)

$$f^m(x)\cdot g^j(x)=e^{2\pi i[m\varphi_{k-1}(x)+j\psi_{k+1}(x)]}=e^{2\pi i\chi_{k-1}(x)}=e^{2\pi i\chi(x)}.$$

Remarque. Les théorèmes 5 et 6 admettent les généralisations suivantes [1]:

Soit $\mathcal{X}=A_0+\ldots+A_{n-1}$. Posons $C_k=A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-2}$ (les indices étant réduits mod n).

Les ensembles $C_0,\ldots,C_{n-1}$ étant supposés *connexes*, on a:

5'. *Soit $f\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$. Si $C_0\cdot\ldots\cdot C_{n-1}\neq 0$ et si $f\sim 1$ sur $A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-1}$ pour $k=0,1,\ldots,n-1$, on a $f\sim 1$ sur $\mathcal{X}$.*

6'. *Soit $f, g\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$. Si $f\sim 1$ et $g\sim 1$ sur $A_{k+1}+\ldots+A_{k+n-1}$, il existe deux entiers m et j qui ne s'annulent pas tous les deux et tels que $f^m\cdot g^j\sim 1$ sur $\mathcal{X}$.*

7. *Si C est connexe, on a*

$$\prod_x \Gamma(C+x)=\Gamma(\bar{C});$$

c'est-à-dire (en posant $\bar{C}=\mathcal{X}$), *si $f\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, $f|C\sim 1$ et f non~ 1, il existe un point p tel que $(f|C+p)$ non~ 1*; plus précisément: *en posant $f|C=e_\varphi$, p est un point où l'oscillation de la fonction φ ne s'annule pas* [2].

D'abord, il existe un point p où l'oscillation de la fonction φ ne s'annule pas. Car, dans le cas contraire, il existerait une extension $\psi\in\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$ de φ (cf. § 31, I, 1); mais alors $f=e_\psi$, car les conditions $\lim\limits_{n=\infty} x^n=x$ et $x_n\in C$ entraînent $\lim\limits_{n=\infty}\varphi(x_n)=\psi(x)$, d'où

$$f(x)=\lim_{n=\infty} f(x_n)=\lim_{n=\infty} e_\varphi(x_n)=e_\psi(x), \text{ donc } f\sim 1.$$

Supposons, d'autre part, que $(f|C+p)\sim 1$, donc que $f|C+p=e_\chi$, où $\chi\in\mathcal{E}^{C+p}$. Cette égalité, rapprochée de l'égalité $f|C=e_\varphi$, implique en vertu de la connexité de C que $\chi|C=\varphi+k$, où $k\in\mathcal{G}$. La fonction $\chi-k$ est donc une extension continue de φ sur $C+p$, et par conséquent l'oscillation de la fonction φ s'annule au point p, contrairement à l'hypothèse.

8. *Soit $C_0, C_1,\ldots$ une suite d'ensembles connexes tels que*

$$\mathcal{X}=C_0+C_1+\ldots \quad \textit{et} \quad C_n\subset\mathrm{Int}\,(C_{n+1}).$$

Si $f\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ et $f|C_n\sim 1$ pour chaque n, alors $f\sim 1$.

---

[1] Pour la démonstration, voir ma note de Fund. Math. **36** (1949), p. 277.
[2] Voir S. Eilenberg, Fund. Math. **24** (1935), p. 171.

On peut admettre que $C_0 \neq 0$. Soit $a \in C_0$. Posons

$$f|C_n = e_{\varphi_n}, \ \varphi_n \in \mathcal{E}^{C_n} \quad \text{et} \quad \varphi_n(a) = \varphi_0(a).$$

C_n étant connexe, la condition $\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a)$ entraîne $\varphi_n = \varphi_{n+1}|C_n$. Les fonctions φ_n sont par conséquent concordantes et définissent une seule fonction $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$ telle que $\varphi|C_n = \varphi_n$. Il vient ainsi $f = e_\varphi$, d'où $f \sim 1$.

VII. Relation f *irr non*~ 1. La fonction $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ est dite *irréductiblement non*~ 1, en symbole, f *irr non*~ 1, lorsque f *non*~ 1, tandis que $f|F \sim 1$ pour tout vrai sous-ensemble fermé F de $\mathfrak{X}$.

En posant

(1) $$\Omega(\mathfrak{X}) = \prod_F \Gamma(F) \quad \text{où} \quad F = \overline{F} \neq \mathfrak{X},$$

les conditions f *irr non*~ 1 et $f \in \Omega(\mathfrak{X}) - \Gamma(\mathfrak{X})$ sont donc équivalentes.

1. *Si f irr non~ 1, $\mathfrak{X}$ est un espace connexe discohérent.*

Car, en supposant que $\mathfrak{X}$ n'est pas discohérent, il existerait un ensemble C connexe et fermé (vide ou non) qui sépare $\mathfrak{X}$ (cf. § 41, X, 1):

(2) $$\mathfrak{X} = A_0 + A_1, \ A_0 \cdot A_1 = C, \ A_j = \overline{A}_j \neq \mathfrak{X}, \quad \text{où} \quad j = 0, 1.$$

Mais alors $f|A_j \sim 1$, d'où $f \sim 1$ d'après VI, 3.

2. *Si f irr non~ 1 et $\mathfrak{X}$ est localement connexe, $\mathfrak{X}$ est une courbe simple fermée.*

C'est une conséquence du th. 1, rapproché du th. 6 du § 44, IV.

Le th. 1 entraîne en vertu des th. 2 du § 41, X et 2 du § 43, V:

3. *Si f irr non~ 1 et $\mathfrak{X}$ est décomposable, $\mathfrak{X}$ se décompose en deux ensembles connexes A_0 et A_1 tels que*

(3) $$A_0 = \overline{\mathfrak{X} - A_1} \neq \mathfrak{X} \quad \textit{et} \quad A_1 = \overline{\mathfrak{X} - A_0} \neq \mathfrak{X}.$$

En particulier (cf. § 43, VII, 7), *si $\mathfrak{X}$ est irréductible entre deux points, les ensembles A_0 et A_1 sont indécomposables.*

4. *A_0 et A_1 étant deux ensembles connexes, fermés et tels que $\mathfrak{X} = A_0 + A_1$, on a* (cf. § 50, XI (1)):

(4) $$(\Xi_0 \cdot \Xi_1)/\mathcal{G} \underset{\text{gr}}{\equiv} [\prod_{K_0, K_1} \Gamma(A_0 + K_1) \cdot \Gamma(A_1 + K_0)]/\Gamma(\mathfrak{X}) \subset \Omega(\mathfrak{X})/\Gamma(\mathfrak{X}),$$

K_j parcourant la famille des vrais sous-ensembles fermés de A_j.

De plus, *si la formule* (3) *est vérifiée, on peut remplacer l'inclusion par l'identité.*

En effet, soit $K = \overline{K} \subset A_1$. Posons, en notations du th. IV, 6.

(5) $$k_d = (h_d | A_0 + K).$$

Comme

$$A_0 + (A_0 \cdot A_1 + K) = A_0 + K \quad \text{et} \quad A_0 \cdot (A_0 \cdot A_1 + K) = A_0 \cdot A_1,$$

on conclut de III, 6 (i) (en y remplaçant $\mathfrak{X}$ par $A_0 + K$) que

(6) $$\Theta_0(A_0, A_0 \cdot A_1 + K) = k^{-1}[\Psi(A_0 + K)].$$

Or, A_0 étant connexe, on déduit du § 50, X, 1 que

(7) $$\Theta_0(A_0, A_0 \cdot A_1 + K) = \mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1 + K} | A_0 \cdot A_1.$$

D'autre part, on a d'après (5): $(k_d \sim 1) \equiv (h_d | A_0 + K \sim 1)$, d'où

$$[k_d \in \Psi(A_0 + K)] \equiv [h_d \in \Gamma(A_0 + K)],$$

donc

(8) $$k^{-1}[\Psi(A_0 + K)] = h^{-1}[\Gamma(A_0 + K)].$$

Il vient ainsi d'après (6)—(8):

$$\mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1 + K} | A_0 \cdot A_1 = h^{-1}[\Gamma(A_0 + K)].$$

En étendant la multiplication à tous les $K \neq A_1$, on en tire

$$\Xi_1 = \prod_K (\mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1 + K} | A_0 \cdot A_1) = h^{-1}[\prod_K \Gamma(A_0 + K)],$$

donc

$$\Xi_0 \cdot \Xi_1 = h^{-1}[\prod_{K_0, K_1} \Gamma(A_0 + K_1) \cdot \Gamma(A_1 + K_0)], \quad \text{où} \quad K_j \subset A_j \neq K_j.$$

L'isomorphie (4) en résulte en vertu du § 50, III, 5 et de la double égalité (cf. IV, 6 (i) et § 50, X, 2): $\mathcal{G} = \Theta_0(A_0, A_1) = h^{-1}[\Gamma(\mathfrak{X})]$.

La démonstration de l'inclusion (4) se réduit à démontrer que

(9) $$\prod_{K_0, K_1} \Gamma(A_0 + K_1) \cdot \Gamma(A_1 + K_0) \subset \prod_F \Gamma(F), \quad \text{où} \quad F = \overline{F} \neq \mathfrak{X}.$$

Or, l'inégalité $F \neq \mathfrak{X}$ implique que soit $FA_0 \neq A_0$, soit $FA_1 \neq A_1$. Admettons que $K_1 = FA_1 \neq A_1$. Comme $F \subset A_0 + K_1$, on a (cf. II, 4) $\Gamma(A_0 + K_1) \subset \Gamma(F)$, d'où l'inclusion (9).

Admettons à présent la formule (3) et soit $K_1 \neq A_1$. Il vient $A_0+K_1 \neq \mathfrak{X}$, car autrement, on aurait $\mathfrak{X}-A_0 \subset K_1$, d'où $A_1=\overline{\mathfrak{X}-A_0} \subset K_1$ et $K_1=A_1$. Soit $f \in \Omega(\mathfrak{X})$. Posons $F=A_0+K_1$. Donc $f \in \Gamma(A_0+K_1)$. On en conclut que

$$\Omega(\mathfrak{X}) \subset \prod_{K_0, K_1} \Gamma(A_0+K_1) \cdot \Gamma(A_1+K_0),$$

d'où l'égalité demandée en vertu de (9).

5. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace décomposable. Pour qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ telle que f irr non~ 1, il faut et il suffit qu'il existe une décomposition de $\mathfrak{X}$ en deux ensembles connexes et fermés A_0 et A_1, ainsi qu'une décomposition de $A_0 \cdot A_1$ en deux ensembles fermés F_0 et F_1 entre lesquels A_j $(j=0,1)$ est irréductiblement connexe.*

De façon plus précise, *pour $n \geqslant 1$ l'inégalité*

$$\text{rang}\,[\Omega(\mathfrak{X})/\Gamma(\mathfrak{X})] \geqslant n \tag{10}$$

équivaut à l'existence d'une décomposition de $\mathfrak{X}$ en deux ensembles connexes et fermés A_0 et A_1 (qui peuvent être assujettis à la condition (3)) et d'une décomposition de $A_0 \cdot A_1$ en $n+1$ ensembles fermés et disjoints $F_0, \ldots, F_n$ tels que A_j est irréductiblement connexe entre F_k et $H_k=A_0 \cdot A_1-F_k$ pour $j=0,1$ et $k=0,1,\ldots,n$.

En effet, si f *irr non*~ 1, il existe d'après 3 deux ensembles connexes A_0 et A_1 satisfaisant à (3), et il vient d'après 4

$$\Omega(\mathfrak{X})/\Gamma(\mathfrak{X}) \underset{\text{gr}}{=} (\Xi_0 \cdot \Xi_1)/\mathcal{G}. \tag{11}$$

Les formules (10), (11) et § 50, XI (2) entraînent l'existence d'un système d'ensembles $F_0, \ldots, F_n$ satisfaisant aux conditions demandées.

Réciproquement, en admettant l'existence d'un système d'ensembles $F_0, \ldots, F_n$ satisfaisant auxdites conditions, l'inégalité § 50, XI (2), rapprochée des formules (4), implique l'inégalité (10).

6. *Si $\mathfrak{X}$ est décomposable et le rang du groupe $\Omega(\mathfrak{X})/\Gamma(\mathfrak{X})$ est $\geqslant 2$, $\mathfrak{X}$ est somme de deux ensembles fermés indécomposables.*

Si $\mathfrak{X}$ est, en outre, compact, $\mathfrak{X}$ est un continu irréductible entre deux points[1]).

En effet, en posant $n=2$ dans 5 et en extrayant un point p_k de F_k $(k=0,1,2)$, A_j est irréductible entre p_0 et p_1, entre p_1 et p_2 et entre p_0 et p_2. Donc A_j est indécomposable.

[1]) Cf. un théorème analogue de P. Alexandroff, Math. Ann. **96** (1926), p. 534.

La deuxième partie du th. 6 résulte directement du § 43, IX, 4.

Remarque. Dans la théorie des espaces irréductibles on est conduit d'une façon très naturelle à une stratification linéaire des espaces irréductibles entre deux points (et non „monostratiques") en „tranches" fermées (§ 43, IV). Cette stratification linéaire implique à son tour — en vertu du th. 5 une stratification cyclique de tout espace (non „monostratique") qui admet une transformation f *irr non*~ 1[1]). Dans le cas où l'espace est un continu, ses tranches sont des continus (cf. § 43, IV, 2); dans le cas particulier où l'espace est une courbe simple fermée, les tranches se réduisent à des points individuels.

VIII. Ensembles compacts. Soit $\mathfrak{X}$ un espace compact.

1. *Soit $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. Les ensembles fermés F tels que $f|F \sim 1$ constituent une famille ouverte (dans l'espace $2^{\mathfrak{X}}$).*

Conformément à II, 9, on a

$$\underset{F}{E}(f|F\sim 1)=\sum_{G} \underset{F}{E}(F \subset G),$$

G étant un ensemble ouvert variable, tel que $f|G \sim 1$.

Les familles $\underset{F}{E}(F \subset G)$ étant ouvertes (d'après § 38, II (6)), leur somme l'est également.

Le théorème suivant en résulte directement (cf. § 38, II, 2):

2. *Si les ensembles $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ sont fermés, on a*

$$\Gamma(\prod_n F_n)=\sum_n \Gamma(F_n),$$

c'est-à-dire, si $(f|F_n)$ non~ 1 pour $n=1,2,\ldots$, on a $(f|\prod_n F_n)$ non~ 1.

3. *Si f non~ 1, $\mathfrak{X}$ contient un continu C tel que $f|C$ irr non~ 1.*

L'existence d'un ensemble fermé C tel que $f|C$ *irr non*~ 1 résulte du th. 1 en vertu du th. 2 du § 38, V. D'après VII, 1, C est un continu.

Il en résulte directement que

4. *Si $f|Q \sim 1$ pour chaque composante Q de $\mathfrak{X}$, on a $f \sim 1$.*

Remarque. Le th. 3 implique aussitôt que $\mathfrak{X}$ étant un arc, on a $f \sim 1$ pour tout $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ (cf. III, 3). Car en supposant que f *non*~ 1, $\mathfrak{X}$ contiendrait d'après 3 et VII, 1 un continu discohérent.

[1]) Voir dans cet ordre d'idées ma note *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fund. Math. **12** (1928), p. 20.

IX. Produits cartésiens. Rapports à l'homotopie.

1. *Lemme. Soient: $\mathfrak{X}$ un espace connexe, $\mathcal{Y}$ un espace arbitraire, $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}}$ et $f\sim 1$. Toute fonction ψ de deux variables $x \in \mathfrak{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$, continue par rapport à x pour tout y, continue par rapport à y pour un point a de $\mathfrak{X}$ et telle que $e_\psi = f$, est continue (sur $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$).*

Posons, en effet, $f=e_\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}}$. La différence $\psi(x,y)-\varphi(x,y)$ étant d'après I, 2, constante pour y fixe, posons $\psi(x,y)-\varphi(x,y)=k(y)$. Il vient en particulier

$$\psi(a,y)-\varphi(a,y)=k(y), \quad \text{donc} \quad \psi(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(a,y)-\varphi(a,y),$$

d'où la conclusion demandée.

2. *Lemme. Soient: $\mathfrak{X}$ un continu, $\mathcal{Y}$ un espace arbitraire, $a \in \mathfrak{X}$ et $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}}$. Si $(f|a\times\mathcal{Y})\sim 1$ et si $(f|\mathfrak{X}\times y)\sim 1$ pour tout $y \in \mathcal{Y}$, on a $f\sim 1$.*

Il existe, par hypothèse, une fonction $\chi \in \mathcal{E}^{\mathcal{Y}}$ et, pour tout y, une fonction $\psi_y \in \mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$, telles que

$$f(a,y)=e_\chi(y) \quad \text{et} \quad f(x,y)=e_{\psi_y}(x), \text{ quels que soient } x \text{ et } y.$$

Posons

$$(1)\qquad \psi(x,y)=\psi_y(x)-\psi_y(a)+\chi(y).$$

Il vient

$$e_\psi(x,y)=e_{\psi_y}(x):e_{\psi_y}(a)\cdot e_\chi(y)=f(x,y).$$

Il s'agit de prouver que la fonction ψ est continue. Cela se réduit à démontrer, qu'étant donnée une suite $y_1,y_2,\ldots$ convergente vers y_0 et en posant $\mathcal{Y}^*=(y_0,y_1,y_2,\ldots)$, la fonction partielle $\psi|\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}^*$ est continue.

Or, $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}^*$ étant compact et ayant pour composantes les ensembles $\mathfrak{X}\times y_n$, on conclut de VIII, 4 que $(f|\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}^*)\sim 1$. Comme $f=e_\psi$, la fonction $\psi|\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}^*$ est continue en vertu de 1.

Nous déduirons des lemmes 1 et 2 l'énoncé important suivant:

3. *Théorème d'Eilenberg*[1]). *Soient $\mathcal{Y}$ un espace arbitraire et $g \in \mathcal{S}^{\mathcal{Y}}$. Pour que $g\sim 1$, il faut et il suffit que $g\simeq 1$, c'est-à-dire que g soit homotope à 1.*

Par conséquent, *les conditions: $\mathcal{S}^{\mathcal{Y}}=\Psi(\mathcal{Y})$, $b_1(\mathcal{Y})=0$ et la contractilité de $\mathcal{Y}$ relative à $\mathcal{S}$ sont équivalentes.*

[1]) Fund. Math. **26** (1936), p. 68.

Soit, en effet, $g\sim 1$, donc $g=e_\varphi$, où $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{Y}}$. Posons

$$f(x,y)=e^{2\pi i x\varphi(y)} \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{J} \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{Y}.$$

Il vient

$$(2)\qquad f \in \mathcal{S}^{\mathcal{J}\times\mathcal{Y}}, \quad f(0,y)=1 \quad \text{et} \quad f(1,y)=g(y).$$

Donc g est homotope à 1.

Réciproquement, admettons que $g\simeq 1$, donc que les conditions (2) sont vérifiées. En posant dans 2: $\mathfrak{X}=\mathcal{J}$ et $a=$ le point 0, on en déduit (en vertu de III, 3) que $f\sim 1$, d'où $g\sim 1$.

De façon plus générale:

4. *Les conditions $f\sim g$ et $f\simeq g$ sont équivalentes.*

En effet, la relation $f\sim g$ équivaut à $f:g\sim 1$, donc (d'après 3) à $f:g\simeq 1$, c'est-à-dire à l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{J}}$ telle que $h(x,0)=f(x):g(x)$ et $h(x,1)=1$.

En posant $u(x,t)=g(x)\cdot h(x,t)$, on a $u(x,0)=f(x)$ et $u(x,1)=g(x)$.

5. *Si $\mathfrak{X}$ est compact, le groupe $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$ coïncide avec la famille des composantes de l'espace $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. Son élément neutre coïncide avec la composante qui contient les fonctions constantes.*

Car $\mathcal{S}$ étant un rétracte absolu de voisinage, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $f\simeq g$, donc $f\sim g$ (où $f,g \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$), est que f et g appartiennent à la même composante de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ (cf. § 49, III, 10).

6. *Soient: $\mathfrak{X}$ un continu, $\mathcal{Y}$ un espace connexe, $x_0 \in \mathfrak{X}$, $y_0 \in \mathcal{Y}$ et $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}}$. Si $f|x_0\times\mathcal{Y}\sim 1$ et $f|\mathfrak{X}\times y_0\sim 1$, on a $f\sim 1$.*

Posons, en effet, $g_y(x)=f(x,y)$. D'après § 14, X, 3′, la fonction g, qui fait correspondre à y l'élément g_y de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$, est continue. Elle transforme donc l'espace connexe $\mathcal{Y}$ en un sous-ensemble connexe Φ de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$.

Par hypothèse, $g_{y_0}\sim 1$, donc $g_{y_0}\simeq 1$. Cela prouve que Φ est un sous-ensemble de la composante de $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ qui contient les constantes. D'après 5, on a $h\sim 1$, quel que soit $h \in \Phi$. Il vient donc $g_y\sim 1$, d'où $f|\mathfrak{X}\times y\sim 1$, quel que soit y. D'après 2, $f\sim 1$.

7. *Si $\mathfrak{X}$ est un continu et $\mathcal{Y}$ est un espace connexe, on a*

$$(3)\qquad \mathfrak{B}_1(\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}) \underset{\text{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})\times\mathfrak{B}_1(\mathcal{Y}), \quad \textit{d'où} \quad b_1(\mathfrak{X}\times\mathcal{Y})=b_1(\mathfrak{X})+b_1(\mathcal{Y}).$$

Cette isomorphie est déterminée en faisant correspondre à tout couple $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$, $g \in \mathcal{S}^{\mathcal{Y}}$ la fonction $h=f\cdot g$ définie par l'égalité

$$h(x,y)=f(x)\cdot g(y).$$

Posons, en effet, $f^*(x,y)=f(x)$, $g^*(x,y)=g(y)$, $x_0 \in \mathfrak{X}$ et $y_0 \in \mathcal{Y}$.

D'abord, les conditions $f\sim 1$ et $g\sim 1$ entraînent $f^*\sim 1$ et $g^*\sim 1$, d'où $h\sim 1$.

Réciproquement, si $h\sim 1$, on a $(f^*\cdot g^*)|(\mathfrak{X}\times y_0)\sim 1$ et comme $g^*|(\mathfrak{X}\times y_0)\sim 1$, il vient $f^*|(\mathfrak{X}\times y_0)\sim 1$, d'où $f\sim 1$. De même, $g\sim 1$.

Enfin, à toute fonction $l\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}}$ correspond un couple $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$, $g\in\mathcal{S}^{\mathcal{Y}}$ tel que $l\sim f\cdot g$, à savoir

$$f(x)=l(x,y_0) \quad \text{et} \quad g(y)=l(x_0,y).$$

On a, en effet,

$$(l:fg)|(\mathfrak{X}\times y_0)\sim 1 \quad \text{et} \quad (l:fg)|(x_0\times\mathcal{Y})\sim 1,$$

d'où $l:fg\sim 1$, d'après 6.

Ceci étant établi, (3) résulte du § 50, III, 5 et de VII (4).

X. Ensembles localement connexes. 1. *Si l'on a $f|Q\sim 1$ pour toute composante Q d'un espace localement connexe $\mathfrak{X}$, on a $f\sim 1$.*

C'est une conséquence du § 49, I, 5, Q étant fermé et ouvert (cf. § 44, II, 4).

2. *Soient: $\mathfrak{X}$ un espace connexe et localement connexe, $\mathcal{Y}$ un espace arbitraire, $a\in\mathfrak{X}$ et $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}}$. Si $(f|a\times\mathcal{Y})\sim 1$ et si $(f|\mathfrak{X}\times y)\sim 1$ pour tout $y\in\mathcal{Y}$, on a $f\sim 1$.*

ψ et $\mathcal{Y}^*$ étant définis comme dans la démonstration de IX, 2, il s'agit de démontrer que la fonction partielle $\psi_0=\psi|\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}^*$ est continue. Soit C l'ensemble des x tels que ψ_0 est continue au point x,y_0. $\mathfrak{X}$ étant connexe, il suffit de démontrer que C est fermé, ouvert et non vide.

Soit $x_1\in\mathfrak{X}$. D'après II, 10, il existe deux ensembles ouverts: G dans $\mathfrak{X}$ et H dans $\mathcal{Y}^*$, tels que $x_1\in G$ et $y_0\in H$ et que $f|G\times H\sim 1$ (on substituera dans II, 10 le point x_1,y_0 à a). De plus, $\mathfrak{X}$ étant supposé localement connexe, on peut admettre que G est connexe.

Deux cas sont à distinguer. S'il existe un $x_0\in G$ tel que, pour $x=x_0$, la fonction ψ_0 est continue relativement à la variable y, elle est continue sur $G\times H$, d'après IX, 1 (en y remplaçant $\mathfrak{X}$ par G, $\mathcal{Y}$ par H et a par x_0), et il vient $G\subset C$. En particulier, $a\in C$, car, pour $x=a$, la fonction ψ_0 est continue relativement à y en vertu de l'identité $\psi(a,y)=\chi(y)$ (cf. IX (1)).

Dans le cas où G ne contient aucun x_0 de ce genre, la fonction ψ_0, considérée comme fonction de la variable y, est discontinue, quel que soit $x\in G$; elle est donc discontinue au point y_0 (puisque y_0 est le seul point d'accumulation de $\mathcal{Y}^*$) et il vient x *non*-$\in C$, d'où $x_1\in G\subset\mathfrak{X}-C$.

L'ensemble C est donc ouvert, non vide et fermé.

3. *Soient $A\subset B\subset A+L(A)$ et $g\in\mathcal{S}^B$. Si $g|A\sim 1$, on a $g\sim 1$.*

Posons $g|A=e_\varphi$ où $\varphi\in\mathcal{E}^A$. Soit $p\in B-A$. Nous allons montrer que l'oscillation $\omega_\varphi(p)$ est nulle.

Soit (cf. p. 168) $p\in G$, où G est un ensemble ouvert dans B tel que GA est connexe et $g(G)\neq\mathcal{S}$. On a donc $g|G\sim 1$ (cf. II, 6). Soit $g|G=e_\psi$ où $\psi\in\mathcal{E}^G$. L'ensemble GA, étant connexe, l'identité $e_\varphi(x)=e_\psi(x)$ pour $x\in GA$ implique que la différence $\varphi(x)-\psi(x)$ est constante sur GA (cf. I, 2). La fonction ψ étant continue au point p, on a $\omega_\psi(p)=0$, d'où $\omega_\varphi(p)=0$ (puisque G est un entourage de p dans B).

Ceci établi, il existe (d'après § 31, I, 1) une extension $\varphi^*\in\mathcal{E}^B$ de φ. Comme $B\subset\bar{A}$ et $g|A=e_\varphi$, il vient $g=e_{\varphi^*}$.

4. *Soient $\mathfrak{X}$ un espace localement connexe par arcs et $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. Si l'on a $f|C\sim 1$ pour toute courbe simple fermée C, on a alors $f\sim 1$.*

Il est légitime d'admettre en vertu de 1 que $\mathfrak{X}$ est connexe. On peut aussi admettre qu'il existe un point a tel que $f(a)=1$.

Faisons correspondre à tout x un arc $A_x=ax$ et une fonction ψ_x telle que

(1) $$\psi_x\in\mathcal{E}^{A_x}, \quad f|A_x=e_{\psi_x} \quad \text{et} \quad \psi_x(a)=0,$$

conformément à III, 3 et I, 4.

Posons $\varphi(x)=\psi_x(x)$. Il vient $e_\varphi=f$.

Il s'agit de démontrer que la fonction φ est continue.

Soient $p\in\mathfrak{X}$ et $\varepsilon>0$. D'après II, 10, $p\in G$ où G est un ensemble ouvert tel que $f|G=e_\lambda$ où $\lambda\in\mathcal{E}^G$. On peut admettre en outre (en réduisant au besoin G) que $\delta[\lambda(G)]<\varepsilon$.

L'espace étant localement connexe, il existe un $\eta>0$ tel qu'à tout point q avec $|q-p|<\eta$ correspond un arc $Q=pq\subset G$. Il vient

(2) $$f|Q=e_\lambda \quad \text{et} \quad |\lambda(q)-\lambda(p)|<\varepsilon.$$

Il s'agit de prouver que $|\varphi(q)-\varphi(p)|<\varepsilon$.

En tant que composé de trois arcs, le continu $K=A_p+A_q+Q$ est héréditairement localement connexe (cf. § 46, 2 et 8). Il en résulte que

(3) $$f|K\sim 1.$$

En effet, dans le cas contraire, K contiendrait (d'après VIII, 3) un sous-continu, donc un sous-continu localement connexe, C tel que $f|C$ *irr non*~ 1. D'après VII, 2, C est une courbe simple fermée, contrairement à l'hypothèse.

Posons conformément à (3):

$$f|K = e_\chi, \quad \chi \in \mathcal{E}^K \quad \text{et} \quad \chi(a) = 0. \tag{4}$$

Les formules (1) et (4) impliquent que $\psi_p(a) = \psi_q(a) = \chi(a)$, d'où en vertu de I, 2:

$$\chi(x) = \begin{cases} \lambda(x) + k & \text{pour} \quad x \in Q \\ \psi_p(x) & \quad \text{,,} \quad\quad x \in A_p \\ \psi_q(x) & \quad \text{,,} \quad\quad x \in A_q. \end{cases}$$

Il vient

$$\varphi(q) - \varphi(p) = \psi_q(q) - \psi_p(p) = \chi(q) - \chi(p) = \lambda(q) - \lambda(p)$$

et par conséquent $|\varphi(q) - \varphi(p)| < \varepsilon$, d'après (2).

5. *Soient $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe et $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. Si l'on a $f|E \sim 1$ pour tout élément cyclique E de $\mathfrak{X}$, on a alors $f \sim 1$.*

En effet, si f *non* ~ 1, $\mathfrak{X}$ contient une courbe simple fermée C telle que $f|C$ *non* ~ 1. En désignant par E l'élément cyclique de $\mathfrak{X}$ qui contient C (cf. § 47, II, 10), on a $f|E$ *non* ~ 1.

6. *Soient: $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe, $F = \overline{F} \subset \mathfrak{X}$, $f_k \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ et $f_k|F \sim 1$ pour $k = 1, \ldots, n$. Il existe un continu localement connexe C tel que $F \subset C$ et que $f_k|C \sim 1$ pour $k = 1, \ldots, n$* [1].

F étant le produit d'une suite d'ensembles dont chacun se compose d'un nombre fini de continus localement connexes (§ 45, III, 1, 1^0 et § 44, II, 7), le théorème se ramène (d'après II, 9) au cas où $F = C_1 + \ldots + C_m$, les sommandes $C_1, \ldots, C_m$ étant des continus disjoints et localement connexes.

Procédons par induction. Le théorème étant évident pour $m = 1$, admettons qu'il soit vrai pour $m - 1$. Soit L un arc ab tel que LF se réduit aux points a et b, ces points étant situés sur deux sommandes différents, par exemple sur C_{m-1} et C_m.

Les conditions (cf. III, 3):

$$f_k|C_1 + \ldots + C_{m-1} \sim 1, \quad f_k|L \sim 1 \quad \text{et} \quad (C_1 + \ldots + C_{m-1})L = a$$

entraînent d'après VI, 3,

$$f_k|C_1 + \ldots + C_{m-1} + L \sim 1, \quad \text{d'où} \quad f_k|C_1 + \ldots + C_{m-1} + L + C_m \sim 1,$$

puisque $(C_1 + \ldots + C_{m-1} + L)C_m = b$ et $f|C_m \sim 1$.

$C_{m-1} + L + C_m$ étant un continu localement connexe, la démonstration se trouve réduite au cas $m - 1$.

[1]) S. Eilenberg, Fund. Math. **27** (1936), p. 172.

7. *Soient $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe et $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. Il existe deux continus localement connexes C_0 et C_1 tels que $\mathfrak{X} = C_0 + C_1$ et $f|C_j \sim 1$ pour $j = 0, 1$.*

Soient A_0 et A_1 les moitiés de $\mathcal{S}$ aux ordonnées $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$ respectivement. Posons $F_j = f^{-1}(A_j)$. Il vient $\mathfrak{X} = F_0 + F_1$ et $f|F_j \sim 1$ d'après II, 6, d'où la conclusion demandée en vertu de 6 (cas où $n = 1$).

8. *Soient: $\mathfrak{X}$ un espace localement connexe par arcs, $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ et $G_1, G_2, \ldots$ une suite d'ensembles ouverts tels que*

$$\mathfrak{X} = G_1 + G_2 + \ldots \quad \textit{et} \quad G_n \subset G_{n+1}.$$

Si l'on a $f|G_n \sim 1$ pour tout n, on a alors $f \sim 1$.

C'est une conséquence du th. 4, rapproché du th. de Borel.

XI. Transformations. 1. *Si A est un rétracte de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}_1(A)$ est une image homomorphe de $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$, donc $b_1(A) \leqslant b_1(\mathfrak{X})$.*

2. *Si $\mathfrak{X}$ est déformable en A, on a*

$$\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X}) \underset{\mathrm{gr}}{=} (\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}|A)/\Psi(A), \quad \textit{d'où} \quad b_1(\mathfrak{X}) \leqslant b_1(A).$$

3. *Si A est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$, on a*

$$\mathfrak{B}_1(A) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(\mathfrak{X}), \quad \textit{d'où} \quad b_1(A) = b_1(\mathfrak{X}).$$

En effet, l'opération ζ qui fait correspondre à toute fonction $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ l'élément $\zeta(f) = f|A$ de $\mathcal{S}^A$ est une homomorphie (cf. § 50, VIII, 1) entre $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}|A$, et la condition $f \sim 1$ implique $f|A \sim 1$. Il en résulte 1, car A étant un rétracte de $\mathfrak{X}$, on a $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}|A = \mathcal{S}^A$ (§ 13, V, 4).

D'autre part, si $\mathfrak{X}$ est déformable en A, la condition $f|A \sim 1$ entraîne $f \sim 1$ (d'après § 49, IV, 1), d'où le th. 2.

Le th. 3 résulte du th. 2 en vertu de l'égalité $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}|A = \mathcal{S}^A$.

4 [1]). *Soient: $\mathfrak{X}$ un espace compact, g une transformation continue de $\mathfrak{X}$ et $f \in \mathcal{S}^{g(\mathfrak{X})}$. Dans les deux cas suivants la condition $fg \sim 1$ entraîne $f \sim 1$:*

1^0 la transformation g est monotone, c'est-à-dire que les tranches $g^{-1}(y)$ sont connexes,

2^0 la transformation g est intérieure.

Dans ces deux cas, le groupe $\mathfrak{B}_1[g(\mathfrak{X})]$ est donc isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{X})$, et l'on a $b_1[g(\mathfrak{X})] \leqslant b_1(\mathfrak{X})$.

[1]) Cf. S. Eilenberg, Fund. Math. **24** (1935), p. 165 et 174.

Posons $fg(x)=e_{\psi}(x)$ où $\psi\in\mathcal{E}^{\mathfrak{X}}$.

Cas 1°. Soient $y_0\in g(\mathfrak{X})$ et $x_0\in g^{-1}(y_0)$.

Il vient pour tout $x\in g^{-1}(y_0)$

$$e_{\psi}(x)=fg(x)=f(y_0)=fg(x_0)=e_{\psi}(x_0).$$

La fonction $\psi(x)-\psi(x_0)$ est donc à valeurs entières (sur $g^{-1}(y_0)$), donc constante, puisque $g^{-1}(y)$ est connexe; d'où

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi(x_0)-\psi(x_0)=0.$$

Ainsi, en définissant $\varphi(y)$ comme identique à $\psi(x)$ pour $x\in g^{-1}(y)$, la fonction φ se trouve définie de façon univoque. Cette fonction est continue, puisque (cf. § 24, XI, 4):

$$[t=\varphi(y)]\equiv\sum_{x}[y=g(x)]\,[t=\psi(x)].$$

En outre $e_{\varphi}(y)=e_{\psi}(x)=fg(x)=f(y)$, d'où $f\sim 1$.

Cas 2°. Si g est une transformation intérieure, g^{-1} est une fonction continue de y; en symbole: $g^{-1}\in(2^{\mathfrak{X}})^{\mathcal{Y}}$ (cf. § 39, VI, 2). La fonction ψg^{-1} est donc continue elle aussi. Par conséquent, en posant

$$\varphi(y)=\text{borne inférieure de l'ensemble }\psi[g^{-1}(y)],$$

la fonction φ est continue (cf. § 38, III, 3); x étant un point de $g^{-1}(y)$ tel que $\varphi(y)=\psi(x)$, il vient, comme auparavant, $e_{\varphi}=f$.

§ 52. Espaces contractiles relativement à $\mathcal{S}$. Espaces unicohérents.

I. Contractilité relative à $\mathcal{S}$. Par définition (§ 49, V), l'espace $\mathfrak{X}$ est contractile relativement à $\mathcal{S}$ (tout brièvement: est c. r. $\mathcal{S}$) lorsque toute fonction $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ est homotope à une constante.

Il résulte directement des théorèmes: § 49, V, 2, § 51, IX, 3 et § 45, II, 1, que:

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1° $\mathfrak{X}$ *est c. r.* $\mathcal{S}$,

2° *l'espace* $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ *est connexe par arcs*,

3° *pour tout* $f\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$, *on a* $f\sim 1$,

4° $b_1(\mathfrak{X})=0$.

De plus, *si l'espace $\mathfrak{X}$ est compact, la connexité par arcs peut être remplacée (dans 2°) par la connexité.*

Les théorèmes: 3 du § 49, V, et 4 du § 51, XI, impliquent que:

2. *Si $\mathfrak{X}$ est c. r. $\mathcal{S}$, il en est de même de tout ensemble qui s'en déduit*:

1° *par une rétraction*,

2° *par une transformation continue monotone*,

3° *par une transformation intérieure.*

Les théorèmes 4 et 5 du § 49, V entraînent:

3. *La non-contractilité de $\mathfrak{X}$ relative à $\mathcal{S}$ est invariante par rapport aux déformations de $\mathfrak{X}$, ainsi que par rapport aux transformations à petites tranches.*

Les théorèmes IX, 2 et X, 2 du § 51 impliquent que:

4. *Si $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont c. r. $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{X}$ est en outre un continu ou un espace connexe et localement connexe, $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ est c. r. $\mathcal{S}$.*

En vertu des théorèmes VI, 3 et 8 du § 51, on a deux théorèmes d'addition:

5. *A_0 et A_1 étant deux ensembles fermés (ou ouverts) dont la partie commune $A_0\cdot A_1$ est connexe, si A_0 et A_1 sont c. r. $\mathcal{S}$, A_0+A_1 l'est également.*

6. *Soit $C_0, C_1, \dots$ une suite d'ensembles connexes tels que*

$$\mathfrak{X}=C_0+C_1+\dots\quad\text{et}\quad C_n\subset\operatorname{Int}(C_{n+1}).$$

Si tout C_n est c. r. $\mathcal{S}$, $\mathfrak{X}$ l'est également.

7. *Si chacun des ensembles compacts $A_0\supset A_1\supset\dots$ est c. r. $\mathcal{S}$, leur produit $A_0\cdot A_1\cdot\dots$ l'est également.*

C'est une conséquence du th. 9 du § 49, V.

8. *Si $\mathfrak{X}$ est compact ou localement connexe et si toute composante de $\mathfrak{X}$ est c. r. $\mathcal{S}$, $\mathfrak{X}$ l'est également.*

C'est une conséquence directe des th. VIII, 4 et X, 1 du § 51.

9. *Les espaces suivants sont c. r. $\mathcal{S}$*:

1° *tout espace contractile dans soi, donc tout rétracte absolu; en particulier, $\mathcal{J}^n$ et $\mathcal{E}^n$ pour tout $n\leqslant\aleph_0$*,

2° *la sphère $\mathcal{S}_n$ pour $n\neq 1$*,

3° *l'espace projectif pour $n\neq 1$*,

4° *tout sous-ensemble A de $\mathcal{J}$.*

En effet, 1° est une conséquence directe de 3 et du § 49, VI, 2 (2) (cf. aussi § 51, III, 3).

2° resulte du th. 5 (ainsi que du th. 2, 2°).

3^0 résulte de 2, 3^0, car l'espace projectif se déduit de la sphère par une transformation intérieure (voir § 39, V, 2^0, p. 46).

Passons à 4^0. Posons $f \in \mathcal{S}^A$. Toute composante C de A étant c. r. $\mathcal{S}$ (cf. 1^0), on a $f|C \sim 1$. C est donc (cf. § 51, II, 9) contenu dans un intervalle ouvert $p_C q_C$ tel qu'en posant $F_C = A \cdot p_C q_C$, on a $f|F_C \sim 1$. On peut admettre évidemment que les points p_C et q_C n'appartiennent pas à A. L'ensemble F_C est donc fermé-ouvert dans A, et les formules

$$A = \sum_C F_C \quad \text{et} \quad f|F_C \sim 1$$

impliquent d'après le th. 5 du § 49, I que $f \sim 1$.

II. Propriétés des espaces c. r. $\mathcal{S}$[1]. Soit $\mathfrak{X}$ un espace c. r. $\mathcal{S}$. Soient A_0 et A_1 deux ensembles *fermés* ou deux ensembles *ouverts* tels que $\mathfrak{X} = A_0 + A_1$.

1. *On a* $\mathcal{S}^{\mathfrak{X}} = \Gamma(A_0) = \Gamma(A_1) = \Gamma(\mathfrak{X})$, *donc* $\mathfrak{P}_1(A_0, A_1) = (0)$ *et* $p_1(A_0, A_1) = 0$.

C'est une conséquence directe de I, 1, 3^0 (voir aussi § 51, V (1) et (4)).

2. *Si les ensembles* A_0 *et* A_1 *sont connexes, leur produit* $A_0 \cdot A_1$ *l'est également.*

Autrement dit (en posant $B_j = \mathfrak{X} - A_j$), B_0 *et* B_1 *étant deux ensembles ouverts, ou deux ensembles fermés, disjoints et dont aucun ne sépare l'espace, leur somme* $B_0 + B_1$ *ne le sépare non plus.*

En conséquence, *tout espace c. r. $\mathcal{S}$ connexe est unicohérent.*

C'est une conséquence directe de l'inégalité $b_0(A_0 \cdot A_1) \leqslant b_1(A_0 + A_1)$ (cf. § 51, VI, 2) et de I, 1, 4^0.

Le th. 2 admet deux généralisations:

3. *Le th.* 2 *reste vrai en remplaçant la connexité des ensembles* A_0, A_1 *et* $A_0 \cdot A_1$ *par leur connexité entre deux points* p_0 *et* p_1 *(ainsi que la propriété de séparer l'espace par celle de le séparer entre* p_0 *et* p_1*).*

Car, dans le cas contraire, on aurait d'après § 51, VI, 4, $\Gamma(A_0) \cdot \Gamma(A_1) \neq \Gamma(\mathfrak{X})$, contrairement à 1.

4. $b_0(A_0) + b_0(A_1) = b_0(A_0 + A_1) + b_0(A_0 \cdot A_1)$, *si* $A_0 \cdot A_1 \neq 0$.

C'est une conséquence de 1 et de § 51, V (7. 1).

[1]) Cf. S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), I, § 3. Cf. aussi (pour les continus localement connexes) mes notes de Fund. Math. **13** (1929), § 1 et de Fund. Math. **8** (1925), § 3.

5. *Tout ensemble fermé* F *qui sépare* $\mathfrak{X}$ *irréductiblement entre deux points* p_0 *et* p_1 *est connexe.*

Supposons par contre que

$$F = B_0 + B_1, \quad B_0 \cdot B_1 = 0 \quad \text{et} \quad B_j = \overline{B}_j \neq F.$$

Il en résulte par hypothèse que B_j ne sépare pas l'espace entre p_0 et p_1 (pour $j = 0, 1$); $B_0 + B_1$ ne le sépare donc non plus entre ces points (d'après 3).

6. A *et* $\mathfrak{X}$ *étant connexes et* C *étant une composante de* $\mathfrak{X} - A$, *la frontière* Fr (C) *est connexe.*

D'après § 41, III, 5, $\mathfrak{X} - C$ est connexe. En posant $A_0 = \overline{C}$ et $A_1 = \overline{\mathfrak{X} - C}$, on conclut de 2 que l'ensemble $\mathrm{Fr}(C) = \overline{C} \cdot \overline{\mathfrak{X} - C}$ est connexe.

7. R *étant une région contenue dans* $\mathfrak{X}$, *aucune quasi-composante de* $\mathfrak{X} - R$ *ne contient deux quasi-composantes différentes de* Fr (R).

Si $\mathfrak{X}$ *est un continu, on a*

$$b_0[\mathrm{Fr}(R)] = b_0(\mathfrak{X} - R). \tag{1}$$

Soient, en effet, p_0 et p_1 deux points de Fr (R) qui appartiennent à une quasi-composante de $\mathfrak{X} - R$. Posons $A_0 = \mathfrak{X} - R$ et $A_1 = \overline{R}$. On conclut de 3 que Fr (R) est connexe entre p_0 et p_1, donc que ces points appartiennent à une seule quasi-composante de l'ensemble Fr (R).

Si $\mathfrak{X}$ est un continu, on a $C \cdot \mathrm{Fr}(R) \neq 0$, quelle que soit la composante C de $\mathfrak{X} - R$ (d'après § 42, III, 1). C contient donc une — et comme nous venons de démontrer — une seule composante de Fr (R) (les quasi-composantes d'un ensemble compact étant identiques avec ses composantes, cf. § 42, II, 2). L'égalité (1) en résulte.

III. Connexité locale et unicohérence.

1. *Soit* $\mathfrak{X}$ *un espace connexe, localement connexe et c. r.* $\mathcal{S}$. *Tout séparateur* E *entre* a *et* b *contient un ensemble connexe et fermé qui sépare ces points.*

En effet, E contient un ensemble fermé F qui sépare a et b (cf. § 16, VI), et celui-ci contient un ensemble fermé C qui sépare $\mathfrak{X}$ irréductiblement entre a et b (d'après § 44, V, 3). C est connexe d'après II, 5.

2. *Dans les mêmes hypothèses sur $\mathfrak{X}$, soient*

$$p_j \in F_j = \overline{F}_j \quad \text{et} \quad F_0 \cdot F_1 = 0.$$

Il existe un séparateur C entre p_0 et p_1, connexe, fermé et disjoint de $F_0 + F_1$.

Si, en outre, $\mathfrak{X}$ est compact, C peut être supposé un continu localement connexe.

C'est une conséquence directe du th. 4 du § 44, V, rapproché du th. II, 5, ainsi que du § 45, III, 1.

3. *Pour qu'un continu localement connexe soit c. r. $\mathcal{S}$, il faut et il suffit qu'il soit unicohérent.*

La condition est nécessaire en vertu du th. II, 2.

Admettons, d'autre part, que le continu localement connexe $\mathfrak{X}$ est unicohérent et que $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$. Soient, conformément au th. X, 7 du § 51, C_0 et C_1 deux continus tels que $\mathfrak{X} = C_0 + C_1$ et que $f|C_j \sim 1$ pour $j = 0, 1$. Par hypothèse, $C_0 \cdot C_1$ est connexe. On en conclut d'après le th. VI, 3 du § 51 que $f \sim 1$.

Remarque. Le th. 3 peut être généralisé en remplaçant le terme *continu* par *espace connexe* [1]).

4. *Tout continu localement connexe $\mathfrak{X}$ qui n'est pas unicohérent contient une courbe simple fermée qui en est un rétracte* [2]).

Il existe par hypothèse une fonction $f \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ et (cf. § 51, X, 7) deux continus localement connexes C_0 et C_1 tels que

$$f \text{ non} \sim 1, \quad \mathfrak{X} = C_0 + C_1 \quad \text{et} \quad f|C_j \sim 1 \text{ pour } j = 0, 1.$$

D'après § 51, VI, 3, $C_0 \cdot C_1$ n'est pas connexe:

$$C_0 \cdot C_1 = F_0 + F_1, \quad F_0 \cdot F_1 = 0, \quad \overline{F}_j = F_j \neq 0 \text{ pour } j = 0, 1. \tag{1}$$

Soit A_0 un arc contenu dans C_0 et irréductible entre F_0 et F_1. Posons $A_0 \cdot F_j = p_j$. Soit A_1 un arc $p_0 p_1$ contenu dans C_1. Il vient

$$A_0 \cdot A_1 \subset A_0 \cdot C_0 \cdot C_1 = A_0 \cdot F_0 + A_0 \cdot F_1 = (p_0, p_1).$$

$A_0 + A_1$ est donc une courbe simple fermée.

---

[1]) Pour la démonstration, voir S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 70. Pour une généralisation partielle, voir K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 190. Pour l'équivalence entre l'unicohérence et le fait que le premier nombre de Betti s'annule, voir K. Borsuk, Fund. Math. **20** (1933), p. 230 et E. Čech, ibid., p. 233.

[2]) K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 184.

Soit f_0 une rétraction de $F_0 + A_0 + F_1$ en A_0 telle que

$$f_0(F_0) = p_0 \quad \text{et} \quad f_0(F_1) = p_1. \tag{2}$$

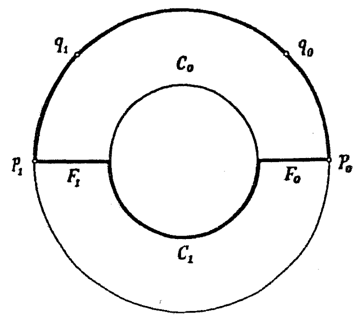
Soit, conformément au théorème de Tietze (§ 15, XI, 3):

$$f_0 \subset g_0 \in A_0^{C_0}. \tag{3}$$

Soient q_0 et q_1 deux points distincts appartenant à $A_0 - (p_0, p_1)$ et $q_0 q_1$ et $q_1 q_0$ les deux sous-arcs de $A_0 + A_1$, où $q_0 q_1 \subset A_0$. Soient:

$$D_0 = g_0^{-1}(q_0 q_1), \tag{4}$$

$$D_1 = g_0^{-1}(p_0 q_0 + q_1 p_1) + C_1. \tag{5}$$



Il vient:

$$\mathfrak{X} = D_0 + D_1, \tag{6}$$

$$D_0 \cdot D_1 = g_0^{-1}(q_0) + g_0^{-1}(q_1), \tag{7}$$

$$g_0^{-1}(q_0) \cdot g_0^{-1}(q_1) = 0. \tag{8}$$

Car la formule (cf. (1)—(3)):

$$C_0 \cdot C_1 = F_0 + F_1 \subset g_0^{-1} g_0(F_0 + F_1) = g_0^{-1}(p_0, p_1)$$

donne

$$g_0^{-1}(q_0 q_1) \cdot C_1 \subset g_0^{-1}[q_0 q_1 \cdot (p_0, p_1)] = 0.$$

On a d'autre part

$$q_1 q_0 \cdot g_0^{-1}(q_j) = q_j. \tag{9}$$

Car g_0 étant une rétraction, les formules (cf. (1) et (2)):

$$q_1 q_0 \subset q_1 p_1 + C_1 + p_0 q_0 \quad \text{et} \quad C_1 \cdot g_0^{-1}(q_j) = C_1 \cdot C_0 \cdot g_0^{-1}(q_j) = 0$$

donnent

$$q_1 q_0 \cdot g_0^{-1}(q_j) = (q_1 p_1 + p_0 q_0) \cdot g_0^{-1}(q_j) = g_0[(q_1 p_1 + p_0 q_0) \cdot g_0^{-1}(q_j)] \subset$$
$$\subset g_0(q_1 p_1 + p_0 q_0) \cdot g_0 g_0^{-1}(q_j) = (q_1 p_1 + p_0 q_0) \cdot q_j = q_j.$$

Les formules (8) et (9) impliquent aussitôt l'existence d'une rétraction f_1 de $g_0^{-1}(q_0) + q_1 q_0 + g_0^{-1}(q_1)$ en $q_1 q_0$ telle que

$$f_1 g_0^{-1}(q_j) = q_j \quad \text{pour} \quad j = 0, 1. \tag{10}$$

Soit

$$f_1 \subset g_1 \in (q_1 q_0)^{D_1}. \tag{11}$$

Il vient

(12) $$g_0(x)=g_1(x) \quad \text{pour} \quad x \in g_0^{-1}(q_j).$$

Car la condition $x \in g_0^{-1}(q_j)$ implique, d'une part, que $g_0(x)=q_j$, et d'autre part, d'après (10), que $f_1(x)=q_j$, d'où (cf. (11)) $g_1(x)=q_j$.

Les formules (6), (7) et (12) impliquent que la fonction g_0+g_1 est une rétraction de $\mathfrak{X}$ en A_0+A_1.

5. *Corollaire. Pour tout continu localement connexe $\mathfrak{X}$ qui n'est pas unicohérent, il existe une transformation $f \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ qui n'admet aucun point invariant* [1]).

Remarque. Les th. 4 et 5 peuvent être généralisés en remplaçant le terme *continu localement connexe* par *espace localement et intégralement connexe par arcs* [2]).

6. *Soit $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe, unicohérent, qui n'est séparé par aucun point. Si R est une région et si* dim $E=0$, *l'ensemble $R-E$ est connexe* [3]).

Supposons par impossible que l'ensemble $R-E$ ne soit pas connexe entre p et q. Il existe par conséquent (d'après 1) un continu $C \subset E+(\mathfrak{X}-R)$ qui sépare p et q. Comme dim $E=0$, il vient $C \subset \mathfrak{X}-R$ (rappelons que C ne se réduit pas à un seul point, par hypothèse). Mais ceci est impossible, puisque $\mathfrak{X}-R$ ne sépare pas les points p et q.

7. *Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, on a* dim $\mathfrak{X} \geqslant 2$ *(à condition que $\mathfrak{X}$ contienne plus d'un point).*

Plus précisément: *on a* dc $\mathfrak{X} \geqslant 2$ (cf. § 41, XI).

8. *Corollaire. Tout continu localement connexe, unicohérent et de dimension* 1 *est une dendrite* [4]).

Car, dans le cas contraire, il contiendrait un élément cyclique C (ne se réduisant pas à un seul point). C étant unicohérent (d'après § 47, III, 5), on aurait dim $C \geqslant 2$.

[1]) Voir ma note *Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'Analysis situs*, Fund. Math. **14** (1929), p. 307.

[2]) Voir K. Borsuk, l. cit. p. 184 et 188.

[3]) Cf. R. L. Wilder, Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), p. 349. Pour le cas où $\mathfrak{X}=\mathcal{S}_2$, cf. E. Phragmèn, Acta Math. **7** (1885), p. 43 et L. E. J. Brouwer, Math. Ann. **69** (1910), p. 169.

[4]) Cf. L. Vietoris, Proc. Akad. Amsterdam 1926, p. 446.

NEUVIÈME CHAPITRE.

Topologie du plan.

§ 53. Généralités sur l'espace $\mathcal{E}^n$.

I. Arcs polygonaux dans $\mathcal{E}^n$. Tout arc composé d'un nombre fini de segments rectilignes est dit *arc polygonal.*

1. *Tout couple de points d'une région $R \subset \mathcal{E}^n$ se laisse unir dans R par un arc polygonal.*

Soit, en effet, p un point fixe de R. Il s'agit de démontrer que l'ensemble P des points qui se laissent unir à p par un arc polygonal contenu dans R est fermé-ouvert dans R (donc identique à R). Or, cela résulte facilement du fait, que x et y étant deux points appartenant à une sphère (à n dimensions) contenue dans R, si l'un d'eux appartient à P, l'autre lui appartient également.

2. *Lemme. Soit c une constante telle que $0<c<1$. Soient:*

$$R_1 \textit{ le rectangle } c-1 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1-c,$$
$$R_c \textit{ le rectangle } c(c-1) \leqslant x \leqslant c,\ |y| \leqslant c(1-c),$$

L le segment $0 \leqslant x \leqslant c$ de l'axe X, M et N les segments unissant le point $(0,0)$ respectivement au contour F_c de R_c et au contour F_1 de R_1 et formant avec l'axe X l'angle θ, respectivement l'angle $\theta+\pi$, où θ est donné d'avance et où $0<\theta<\pi$. Il existe alors une homéomorphie h telle que

$$h(R_1)=R_1, \quad h(L)=M \quad \textit{et} \quad h(x,y)=(x,y) \quad \textit{pour} \quad (x,y) \in F_1+N.$$

Soit φ une fonction continue croissante telle que

(1) $$\varphi(0)=\theta, \quad \varphi(\theta+\pi)=\theta+\pi, \quad \varphi(2\pi)=\theta+2\pi.$$

Considérons la fonction $g(a,u)$ définie comme suit:

(2) $$g(a,u)=\begin{cases} \varphi(a) & \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant c \\ \dfrac{1}{1-c}\,[a(u-c)+\varphi(a)\,(1-u)], & c \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$