SEPTIÈME CHAPITRE.

Rétractes absolus. Espaces connexes en dimension n. Espaces contractiles.

§ 48. Prolongement des fonctions continues. Rétraction.

I. Relations τ et τ_v. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces métriques. Étant donnés deux ensembles $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et $A \subset \mathcal{X}$, désignons par $\Phi|A$ l'ensemble des fonctions partielles $f|A$ où f parcourt Φ. En particulier, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|A$ est donc l'ensemble des fonctions-éléments de $\mathcal{Y}^A$ qui admettent une extension sur $\mathcal{X}$.

Le symbole, $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$ veut dire par définition que

$$\mathcal{Y}^F = \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|F, \text{ quel que soit } F = \overline{F} \subset \mathcal{X},$$

donc, que toute fonction $f \in \mathcal{Y}^F$ admet une extension $f^* \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ [1].

Posons

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|_v A = \sum_E (\mathcal{Y}^E|A),$$

la variable E parcourant les entourages de A.

La condition $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|_v A)$ veut donc dire que la fonction f admet une extension f^* sur un entourage E de A:

$$f \subset f^* \in \mathcal{Y}^E, \quad \text{où} \quad A \cdot \overline{\mathcal{X} - E} = 0.$$

Nous écrirons $\mathcal{X} \tau_v \mathcal{Y}$ lorsqu'on a $\mathcal{Y}^E = (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|_v F)$, quel que soit $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$; autrement dit, lorsque toute fonction-élément de $\mathcal{Y}^F$ admet une extension sur un entourage de F.

Exemples et remarques. 1°. D'après le théorème de Tietze (§ 15, XI, 3), l'intervalle $\mathcal{J}$ jouit de la propriété suivante:

$\mathcal{X} \tau \mathcal{J}$ *quel que soit l'espace métrique* $\mathcal{X}$.

Les espaces $\mathcal{Y}$ jouissant de la propriété précitée de l'intervalle sont nommés *rétractes absolus* (voir N° III).

[1] Cf. A. D. Wallace, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), p. 679.

2°. *$\mathcal{Y}$ étant un polytope, on a $\mathcal{X} \tau_v \mathcal{Y}$ quel que soit $\mathcal{X}$* (voir N° III).

Les espaces $\mathcal{Y}$ jouissant de cette propriété sont nommés *rétractes absolus de voisinage*.

3°. $\mathcal{Q}_n$ désignant la sphère (massive) à n dimensions et $\mathcal{S}_{n-1}$ — sa surface, *la relation $\mathcal{Q}_n \tau \mathcal{S}_{n-1}$ est en défaut* (§ 23, III, 2).

4°. La condition $\mathcal{J} \tau \mathcal{X}$ implique la connexité par arcs de $\mathcal{X}$ (cf. aussi N° IV). La condition $\mathcal{J}^n \tau_v \mathcal{X}$ caractérise les espaces dits *connexes en dimensions* $<n$ (ils seront étudiés au N° IV).

5°. La condition $\mathcal{X} \tau \mathcal{S}_n$ équivaut à $\dim \mathcal{X} \leqslant n$ (voir N° VI).

6°. *La condition* $\dim \mathcal{X} \leqslant 0$ *équivaut à l'hypothèse que* $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$ *quel que soit* $\mathcal{Y} \neq 0$.

Cette condition implique en effet l'hypothèse considérée d'après IV, 1°. L'implication inverse résulte de l'énoncé suivant:

7°. *Si* $\dim \mathcal{X} > 0$ *et* $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ *est connexe.*

Supposons, en effet, que

$$A_0 + A_1 \subset \mathcal{X}, \quad A_0 \cdot A_1 = 0, \quad A_j = \overline{A}_j \quad (j = 0, 1),$$
$$\mathcal{Y} = B_0 + B_1, \quad B_0 \cdot B_1 = 0, \quad b_j \in B_j = \overline{B}_j.$$

En admettant que $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$, la transformation $f \in \mathcal{Y}^{A_0 + A_1}$ définie par l'identité $f(A_j) = b_j$ a une extension $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. En posant $F_j = g^{-1}(B_j)$, il vient

$$\mathcal{X} = F_0 + F_1, \quad F_0 \cdot F_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_j \subset F_j = \overline{F}_j.$$

On en conclut que $\dim \mathcal{X} = 0$.

8°. *La relation τ n'est pas transitive.*

On a, en effet, $\mathcal{J}^2 \tau \mathcal{J} \tau \mathcal{S}$ (d'après 1° et 5°), tandis que la relation $\mathcal{J}^2 \tau \mathcal{S}$ est en défaut (cf. 3°).

9°. *La relation τ n'est pas réflexive.*

D'après 7, aucun espace $\mathcal{X}$ non connexe de dimension positive ne satisfait à la relation $\mathcal{X} \tau \mathcal{X}$.

II. Opérations. Par définition, la fonction g est une extension de la fonction f lorsque

$$\underset{xy}{E}[y = f(x)] \subset \underset{xy}{E}[y = g(x)].$$

Nous écrivons dans ce cas tout brièvement

$$f \subset g.$$

De façon analogue, étant données deux fonctions $f \in \mathcal{Y}^A$ et $g \in \mathcal{Y}^B$, nous posons

$$f+g=\underset{xy}{E}[y=f(x)]+\underset{xy}{E}[y=g(x)]\ ^{1)}.$$

Rappelons que (cf. § 13, V, 3), lorsque les ensembles A et B sont fermés et les fonctions f et g sont *concordantes*, c'est-à-dire que $f(x)=g(x)$ pour $x \in AB$, on a $(f+g) \in \mathcal{Y}^{A+B}$.

1. *Soit* $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$. *La condition* $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ *implique* $F\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ *et la condition* $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}$ *implique* $F\,\tau\,\mathcal{Y}$.

La démonstration est immédiate.

2. *Soit* $\mathcal{Y}=A_0+A_1$, $A_0=\overline{A}_0$ *et* $A_1=\overline{A}_1$.
Si $\mathcal{X}\,\tau_v\,A_0$, $\mathcal{X}\,\tau_v\,A_1$ *et* $\mathcal{X}\,\tau_v\,A_0\cdot A_1$, *on a* $\mathcal{X}\,\tau_v\,(A_0+A_1)$.
Si $\mathcal{X}\,\tau\,A_0$, $\mathcal{X}\,\tau\,A_1$ *et* $\mathcal{X}\,\tau\,A_0\cdot A_1$, *on a* $\mathcal{X}\,\tau\,(A_0+A_1)$.

Nous allons déduire l'énoncé 2 du lemme suivant, dont nous nous servirons dans la suite.

2'. *Lemme. Soient (pour* $j=0,1$*)*:

(1) $\mathcal{Y}=A_0+A_1,\quad \overline{A}_j=A_j,$ (2) $\mathcal{X}=B_0+B_1,\quad \overline{B}_j=B_j,$

(3) $F=\overline{F}\subset\mathcal{X},\quad f\in\mathcal{Y}^F,$ (4) $FB_j=f^{-1}(A_j),$

(5) $B_j\,\tau_v\,A_j,$ (6) $(f|FB_0\cdot B_1)\in[(A_0\cdot A_1)^{B_0\cdot B_1}|_v FB_0\cdot B_1]$.

Sous ces hypothèses, on a

$$f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|_v F. \tag{7}$$

En outre, *en omettant l'indice* v *dans les formules* (5) *et* (6), *on peut l'omettre dans* (7).

On a d'après (6)

$$(f|FB_0\cdot B_1)\subset g\in(A_0\cdot A_1)^H, \tag{8}$$

où H est un entourage fermé de $FB_0\cdot B_1$ relatif à $B_0\cdot B_1$; donc

$$F\cdot\overline{B_0\cdot B_1-H}=0. \tag{9}$$

Posons $f_j=f|FB_j$. Il vient d'après (8)

$$f_j(x)=f(x)=g(x)\quad\text{pour}\quad x\in FB_0\cdot B_1. \tag{10}$$

---

[1]) Dans le cas où l'addition est définie dans l'espace $\mathcal{Y}$, nous écrivons $f\overset{\circ}{+}g$ au lieu de $f+g$, afin d'éviter toute ambiguïté.

Comme $FB_j\cdot H\subset FB_0\cdot B_1$, on a d'après (10)

$$(f_j+g)\in A_j^{FB_j+H}. \tag{11}$$

FB_j+H étant un sous-ensemble fermé de B_j, on a en vertu de (5)

$$f_j+g\subset g_j\in A_j^{V_j}, \tag{12}$$

où V_j est un entourage fermé de FB_j+H relatif à B_j; donc

$$F\cdot\overline{B_j-V_j}=0. \tag{13}$$

Posons $E=(V_0+V_1)-V_0\cdot V_1+H$ et $h_j=g_j|EV_j$.
Comme $EV_0\cdot V_1=H$, on a d'après (8), (11) et (12)

$$h_j(x)=g_j(x)=g(x)\quad\text{pour}\quad x\in EV_0\cdot V_1,$$

et comme $EV_0+EV_1=E$, il vient $(h_0+h_1)\in\mathcal{Y}^E$.

Il reste à démontrer que E est un entourage de F, c'est-à-dire que

$$F\cdot\overline{\mathcal{X}-E}=0 \tag{14}$$

et que

$$f\subset h_0+h_1. \tag{15}$$

Or l'identité (14) résulte du calcul suivant:

$$\mathcal{X}-E\subset[\mathcal{X}-(V_0+V_1)]+(V_0\cdot V_1-H),$$

$$F\cdot\overline{\mathcal{X}-(V_0+V_1)}=F\cdot\overline{B_0-(V_0+V_1)}+F\cdot\overline{B_1-(V_0+V_1)}\subset$$

$$\subset F\cdot\overline{B_0-V_0}+F\cdot\overline{B_1-V_1}=0\quad\text{(cf. (13))},$$

$$F\cdot\overline{V_0\cdot V_1-H}\subset F\cdot\overline{B_0\cdot B_1-H}=0\quad\text{(cf. (9))}.$$

Enfin, comme $FB_j\subset EV_j$, on a d'après (12) $f_j\subset h_j$, d'où l'inclusion (15).

Pour établir la deuxième partie du lemme, on posera dans le raisonnement qui précède: $H=B_0\cdot B_1$ et $V_j=B_j$. Il vient alors $E=\mathcal{X}$.

Le lemme établi, passons à la démonstration du th. 2. Les formules (3) supposées satisfaites, posons

$$C_j=f^{-1}(A_j)\quad\text{et}\quad B_j=\underset{x}{E}[\varrho(x,C_j)\leqslant\varrho(x,C_{1-j})].$$

Les formules (2) et (4) en résultent aussitôt. La formule $\mathcal{X}\,\tau_v\,A_j$ entraîne (5) d'après 1. Enfin $\mathcal{X}\,\tau_v\,A_0\cdot A_1$ entraîne (6). Le lemme implique donc (7), d'où $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$.

En omettant l'indice v dans les hypothèses, on peut l'omettre dans la thèse; d'où la deuxième partie du th. 2.

3. *Soit* $\mathcal{Y}=A_0+A_1$, $A_0=\bar{A}_0$ *et* $A_1=\bar{A}_1$.
Si $\mathcal{X}\,\tau_v\,(A_0+A_1)$ *et* $\mathcal{X}\,\tau_v\,(A_0\cdot A_1)$ *on a* $\mathcal{X}\,\tau_v\,A_j$ *pour* $j=0,1$.
Si $\mathcal{X}\,\tau\,(A_0+A_1)$ *et* $\mathcal{X}\,\tau\,(A_0\cdot A_1)$, *on a* $\mathcal{X}\,\tau\,A_j$ *pour* $j=0,1$.

Soit, en effet, $F=\bar{F}\subset\mathcal{X}$ et $f\in A^F$. Il s'agit de définir un entourage V de F tel que $f\in A_0^V|F$. L'hypothèse $\mathcal{X}\,\tau_v\,(A_0+A_1)$ implique l'existence d'une extension $h\in(A_0+A_1)^E$ de f, où E est un entourage fermé de F. Posons $E_j=h^{-1}(A_j)$. Il vient

(16) $$E=E_0+E_1,\quad F\subset E_0\quad \text{et}\quad h(E_0\cdot E_1)\subset A_0\cdot A_1.$$

La dernière inclusion implique, en vertu de la formule $\mathcal{X}\,\tau_v\,(A_0\cdot A_1)$, l'existence d'une extension $g\in(A_0\cdot A_1)^Q$ de la fonction $h|E_0\cdot E_1$, où Q est un entourage fermé de $E_0\cdot E_1$ dans E_1:

(17) $$\overline{E_1-Q}\cdot E_0=0.$$

Posons

(18) $$V=E_0+Q\quad \text{et}\quad f^*=(h|E_0)+g.$$

Il vient $f\subset f^*\in A_0^V$, car (cf. (16) et (18)) $F\subset V$ et $E_0\cdot Q\subset E_0\cdot E_1$.

Enfin, V est un entourage de F. On a en effet, d'après (16) et (17),

$$\overline{E-V}\cdot F=\overline{E_1-(E_0+Q)}\cdot F\subset\overline{E_1-Q}\cdot FE_0=0,$$

ce qui prouve que V est un entourage de F dans E, donc dans $\mathcal{X}$ (puisque E est un entourage de F dans $\mathcal{X}$).

Pour démontrer la deuxième partie du th. 3, on posera $E=\mathcal{X}$ et $Q=E_1$, d'où $V=\mathcal{X}$ d'après (16) et (18).

4. *Étant donnée une suite (finie ou infinie) d'espaces* $\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2,\dots$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{X}\,\tau\,(\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2\times\dots)$ *est qu'on ait* $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}_k$ *pour chaque* k.

Si la suite est finie, on peut remplacer τ *par* τ_v.

Posons $\mathcal{Z}=\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2\times\dots$ Admettons que $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Z}$. Il s'agit de prouver que $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}_1$. Soit p_k un point fixe de $\mathcal{Y}_k$ pour $k=2,3,\dots$ Soient $F=\bar{F}\subset\mathcal{X}$ et $f\in\mathcal{Y}_1^F$. Désignons par g la fonction qui fait correspondre au point x de F le point $[f(x),p_2,p_3,\dots]$ de $\mathcal{Z}$. Par hypothèse, il existe une extension $h\in\mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$ de g. En posant

$$h(x)=[h^1(x),h^2(x),\dots],$$

on a $f\subset h^1\in\mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}}$. Donc $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}_1$.

Réciproquement, admettons que $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}_k$ pour $k=1,2,\dots$ Soient $F=\bar{F}\subset\mathcal{X}$ et $f\in\mathcal{Z}^F$. Posons $f=[f^1,f^2,\dots]$. Pour tout k, il existe par hypothèse une fonction g^k telle que

$$f^k\subset g^k\in\mathcal{Y}_k^{\mathcal{X}},\quad \text{d'où}\quad f\subset g=[g^1,g^2,\dots]\in\mathcal{Z}^{\mathcal{X}}.$$

Donc $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Z}$.

Pour passer à la relation τ_v, on n'a qu'à introduire dans le raisonnement qui précède les modifications suivantes:

1° au lieu de $h\in\mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$, on pose $h\in\mathcal{Z}^E$ où E est un entourage de F,

2° au lieu de $g^k\in\mathcal{Y}_k^{\mathcal{X}}$, on pose $g^k\in\mathcal{Y}_k^{E_k}$ où E_k est entourage de F; l'ensemble $E=E_1\cdot\ldots\cdot E_n$ est alors un entourage de F, et on a $f\subset g=[g^1,\dots,g^n]\in\mathcal{Z}^E$.

5. *La condition* $\mathcal{T}\times\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}$ *entraîne* $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$.
Si $\mathcal{T}$ *est compact*, $\mathcal{T}\times\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ *entraîne* $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$.

Soient $F=\bar{F}\subset\mathcal{X}$ et $f\in(\mathcal{Y}^{\mathcal{T}})^F$. La fonction f fait donc correspondre à tout $x\in F$ une fonction $f_x\in\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$. Posons

$$f_x(t)=g(t,x),\quad \text{d'où}\quad g\in\mathcal{Y}^{\mathcal{T}\times F}$$

d'après § 14, X, 3'. En supposant que $\mathcal{T}\times\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}$, il existe une extension $g^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{T}\times\mathcal{X}}$ de g. La fonction f^*, définie par la condition

$$f_x^*(t)=g^*(t,x),$$

satisfait donc à la formule $f\subset f^*\in(\mathcal{Y}^{\mathcal{T}})^{\mathcal{X}}$.

Si $\mathcal{T}$ est compact et $\mathcal{T}\times\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$, il existe (cf. § 37, III, 7) un entourage E de F et une extension $g^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{T}\times E}$ de g (g étant définie comme auparavant). Il vient alors $f\subset f^*\in(\mathcal{Y}^{\mathcal{T}})^E$.

Remarque. Rappelons que $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est un espace $\mathcal{L}^*$, la convergence dans cet espace étant entendue dans le sens de convergence continue, c'est-à-dire (cf. § 14, IX) que la condition $\lim\limits_{n=\infty}f_n=f$ équivaut à l'implication:

$$\lim_{n=\infty}x_n=x\quad \text{implique}\quad \lim_{n=\infty}f_n(x_n)=f(x).$$

L'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ peut être non métrisable bien que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ soient métriques. Cependant, si $\mathcal{X}$ est compact, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ devient métrique en posant (cf. § 15, VIII, 5):

$$|f-g|=\sup|f(x)-g(x)|.$$

De façon plus générale, si $\mathcal{X}$ est localement compact et $\mathcal{Y}$ borné (ce qui ne restreint point la généralité de l'espace $\mathcal{Y}$), on représentera $\mathcal{X}$ sous la forme (cf. § 39, VII, 4):

$$\mathcal{X}=F_1+F_2+\dots, \quad F_n\subset \mathrm{Int}\,(F_{n+1}),$$

où F_n est compact, et on posera

$$|f-g|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f-g|_n, \quad \text{où} \quad |f-g|_n=\sup_{x\in F_n}|f(x)-g(x)|.$$

Rappelons (cf. § 13, V) qu'un sous-ensemble A de $\mathcal{X}$ est dit un *rétracte* de $\mathcal{X}$ lorsqu'il existe une transformation continue, dite *rétraction*, f de $\mathcal{X}$ en A telle que $f(x)=x$ pour $x\in A$.

Nous dirons que A est un *rétracte de voisinage* de $\mathcal{X}$ lorsqu'il existe une rétraction d'un entourage E de A en A.

6. *Si $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ est un rétracte de voisinage de $\mathcal{Y}$, on a $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Z}$. Si $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ est un rétracte de $\mathcal{Y}$, on a $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Z}$.*

Soient, en effet, $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$ et $f\in\mathcal{Z}^F$. On a, par hypothèse:

$$f\subset g\in\mathcal{Y}^E \quad \text{et} \quad r\in\mathcal{Z}^G,$$

où E est un entourage de F, G un entourage de $\mathcal{Z}$ et r une rétraction de G en $\mathcal{Z}$.

L'ensemble $H=E\cdot g^{-1}(G)$ est donc un entourage de F, et il vient $f\subset rg\in\mathcal{Z}^H$. Donc $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Z}$.

Pour établir la deuxième partie du théorème, on pose dans le raisonnement qui précède: $E=\mathcal{X}$ et $G=\mathcal{Y}$. On a alors $H=\mathcal{X}$, d'où $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Z}$.

7. *$\mathcal{Y}$ est un rétracte de $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ (si $\mathcal{T}\neq 0$). En conséquence* (cf. 6), *la condition $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ entraîne $\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$, et $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ entraîne $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}$.*

Soit $t_0\in\mathcal{T}$. En identifiant $\mathcal{Y}$ avec la famille des fonctions constantes appartenant à $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$, faisons correspondre à toute fonction $f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ la fonction constante $f(t_0)$. Cette correspondance est une rétraction de $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ en $\mathcal{Y}$. Elle est, en effet, continue, car

$$\lim_{n=\infty} f_n=f \quad \text{entraîne} \quad \lim_{n=\infty} f_n(t_0)=f(t_0),$$

et elle est l'identité sur $\mathcal{Y}$.

III. Rétractes absolus. $\mathcal{Y}$ est dit un *rétracte absolu* (r. a.), respectivement un *rétracte absolu de voisinage* (r. a. v.), lorsqu'on a

$$\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y} \quad \text{respectivement} \quad \mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y},$$

quel que soit l'espace (métrique séparable) $\mathcal{X}$ [1]).

Exemples et remarques. 1⁰ D'après le théorème de Tietze (§ 15, XI, 3), *l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$ et le cube $\mathcal{I}^n$ sont des r. a.*

2⁰ De façon plus générale, *tout sous-ensemble convexe de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ est un r. a.* (voir § 23, IX, 1, remarque).

3⁰ Les formules évidentes:

$$0^{\mathcal{X}}=0 \quad \text{pour} \quad \mathcal{X}\neq 0 \quad \text{et} \quad 0^0=(0)$$

impliquent aussitôt que l'ensemble vide n'est pas un r. a. Il est cependant un r. a. v.

4⁰ *Tout polytope est un r. a. v.* [2])

Cela résulte aussitôt (par induction finie) du th. 1 ci-dessous.

5⁰ Les *groupes de Betti* des r. a. v. (compacts) possèdent un nombre fini de générateurs et, pour les dimensions suffisamment grandes, ils se réduisent à zéro [3]).

6⁰ Il existe (dans l'espace $\mathcal{E}^3$) des r. a. qui ne se laissent pas représenter comme *sommes finies* de r. a. (plus petits) [4]).

Plus encore, il existe un r. a. à deux dimensions dont aucun vrai sous-ensemble fermé à deux dimensions n'est un r. a. [5]).

7⁰ Si $\mathcal{Y}$ est de dimension finie, la condition $\mathcal{Y}\times\mathcal{I}\,\tau\,\mathcal{Y}$ implique que $\mathcal{Y}$ est un r. a., et la condition $\mathcal{Y}\times\mathcal{I}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ implique que $\mathcal{Y}$ est un r. a. v. (cf. § 49, VII, 6).

Les théorèmes 2, 3 et 4 du N⁰ II impliquent directement les énoncés suivants [6]):

---

[1]) Ces notions sont dues à K. Borsuk. Voir *Sur les rétractes*, Fund. Math. **17** (1931), p. 152. La terminologie se rattache au théorème du N⁰ IV.

[2]) K. Borsuk, Fund. Math. **19** (1932). p. 227.

[3]) cf. K. Borsuk, Fund. Math. **21** (1933), p. 97, et S. Lefschetz, Ann. of Math. **35** (1934), p. 129.

[4]) K. Borsuk et S. Mazurkiewicz, *Sur les rétractes absolus indécomposables*, C. R. Paris **199** (1934), p. 110.

[5]) K. Borsuk, Acta Szeged, 1950.

[6]) Cf. N. Aronszajn et K. Borsuk, *Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus*, Fund. Math. **18** (1932), p. 193.

1. *Soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés; si A_0, A_1 et $A_0 \cdot A_1$ sont des r. a. (respectivement des r. a. v.), $A_0 + A_1$ l'est également; si $A_0 + A_1$ et $A_0 \cdot A_1$ sont des r. a. (respectivement des r. a. v.), A_0 et A_1 le sont également.*

Remarque. Cependant, l'hypothèse que A_0, A_1 et $A_0 + A_1$ sont des r. a. n'implique pas que $A_0 \cdot A_1$ est un r. a. (même pour les polyèdres) [1].

2. *Pour que le produit cartésien $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots$ (respectivement le produit fini $\mathcal{Y}_1 \times \ldots \times \mathcal{Y}_n$) soit un r. a. (respectivement un r. a. v.), il faut et il suffit que chaque $\mathcal{Y}_k$ le soit.*

Remarque. La partie du th. 2 qui concerne les r. a. v. ne se laisse pas étendre aux suites *infinies*: tous les $\mathcal{Y}_k$ étant supposés identiques et composés de deux éléments, l'espace $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots$, comme homéomorphe à l'espace $\mathcal{C}$ de Cantor, n'est pas un r. a. v. tandis que chaque $\mathcal{Y}_k$ en est un.

3. *La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ soit un r. a. (respectivement un r. a. v., si $\mathcal{T}$ est compact) est que $\mathcal{Y}$ le soit.*

En conséquence, *$\mathcal{I}^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ sont des r. a. et, $\mathcal{Y}$ étant un polytope fermé et $\mathcal{T}$ étant compact, $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ est un r. a. v.*

En effet, si $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ est un r. a. (r. a. v.), il en est de même de $\mathcal{Y}$ d'après II, 7.

Réciproquement, si $\mathcal{Y}$ est un r. a., on a pour tout $\mathcal{X}$, $\mathcal{T} \times \mathcal{X} \, \tau \, \mathcal{Y}$, d'où $\mathcal{X} \, \tau \, \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ d'après II, 5. Cela veut dire que $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ est un r. a.

De façon analogue: si $\mathcal{Y}$ est un r. a. v. et $\mathcal{T}$ est compact, $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ est un r. a. v.

Citons sans démonstration l'énoncé suivant:

4. *Si $\mathcal{X}$ est un continu localement connexe, l'espace $2^{\mathcal{X}}$ est un r. a.* [2].

5. *Pour qu'un espace (métrique séparable) $\mathcal{Y}$ soit un rétracte absolu (respectivement un rétracte absolu de voisinage), il faut et il suffit que, $\mathcal{Z}$ étant un sur-espace de $\mathcal{Y}$ dans lequel $\mathcal{Y}$ est fermé, $\mathcal{Y}$ soit un rétracte de $\mathcal{Z}$ (respectivement un rétracte de voisinage de $\mathcal{Z}$).*

[1]) Voir E. G. Begle, *Intersections of contractible polyhedra*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), p. 386.

[2]) Pour la démonstration, voir M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math. **32** (1939), p. 184.

En effet, si $\mathcal{Y}$ est un r. a., on a $\mathcal{Z} \, \tau \, \mathcal{Y}$. Donc, f désignant l'identité définie sur $\mathcal{Y}$, on a $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{Z}} | \mathcal{Y}$, ce qui prouve que $\mathcal{Y}$ est un rétracte de $\mathcal{Z}$. Si $\mathcal{Y}$ est un r. a. v., on a $f \in \mathcal{Y}^{E} | \mathcal{Y}$, où E est un entourage de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$.

Pour démontrer que la condition est suffisante, posons $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ et $f \in \mathcal{Y}^{F}$. Conformément au § 23, IX, 3, $\mathcal{Y}$ peut être considéré comme sous-ensemble fermé d'un espace $\mathcal{Z}$ tel que $f \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}} | F$. Il existe donc une fonction $g \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour $x \in F$. En supposant que r est une rétraction de $\mathcal{Z}$ en $\mathcal{Y}$ (respectivement, d'un ensemble ouvert E en $\mathcal{Y}$), il vient $f \subset rg$, d'où $\mathcal{X} \, \tau \, \mathcal{Y}$ (respectivement $\mathcal{X} \, \tau_v \, \mathcal{Y}$).

6. *Un rétracte d'un r. a. est un r. a. Un rétracte de voisinage d'un r. a. v. est un r. a. v.*

Soient: $\mathcal{Y}$ un r. a. v., G un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{Y}$, r une rétraction de G en A, $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ et $f \in A^{F}$. $\mathcal{Y}$ étant un r. a. v., on a $f \subset f^* \in \mathcal{Y}^{E}$, où E est un entourage de F. Posons $H = f^{*-1}(G)$. Il vient $F \subset H$; l'ensemble H est donc un entourage de F et $f \subset rf^* \in A^{H}$. A est donc un r. a. v.

Si $\mathcal{Y}$ est un r. a., on procédera de façon analogue en posant $G = \mathcal{Y}$ et $E = \mathcal{X}$. Il vient alors $H = \mathcal{X}$ et $f \subset rf^* \in A^{\mathcal{X}}$. A est donc un r. a.

7. *Les r. a. compacts coïncident (topologiquement) avec les rétractes du cube $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ de Hilbert. Les r. a. v. compacts coïncident avec les rétractes des sous-ensembles ouverts de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$* [1]).

Car, d'une part, $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ étant un r. a., tout rétracte de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ est un r. a. et tout rétracte d'un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ est un r. a. v. d'après 6.

D'autre part, si un sous-ensemble fermé $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ est un r. a., il est un rétracte de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ (d'après 5), et s'il est un r. a. v., il est un rétracte d'un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$.

8. *Soit $\mathcal{Y}$ un espace compact. Si $\mathcal{I}^{\aleph_0} \, \tau \, \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ est un r. a. Si $\mathcal{I}^{\aleph_0} \, \tau_v \, \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ est un r. a. v.*

$\mathcal{Y}$ étant considéré comme sous-ensemble de l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$, soit $f(y) = y$ pour $y \in \mathcal{Y}$. Si $\mathcal{I}^{\aleph_0} \, \tau \, \mathcal{Y}$, on a $f \subset r \in \mathcal{Y}^{\mathcal{I}^{\aleph_0}}$, c'est-à-dire que $\mathcal{Y}$ est un rétracte de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$, donc un r. a. d'après 7.

[1]) K. Borsuk, l. c. Fund. Math. **19** (1932), p. 223.

De façon analogue, si $\mathcal{J}^{\aleph_0}\tau_v\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ est un rétracte d'un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, donc un r. a. v.

9. *Lemme. Soit* $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$. *Posons*

$$F^0=F\times\mathcal{J}+\mathcal{X}\times 0. \tag{0}$$

On a alors

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}|_v F^0=\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}|F^0;$$

autrement dit, *toute fonction* $h\in\mathcal{Y}^{F^0}$ *qui admet une extension sur un entourage* E *de* F^0 *admet aussi une extension sur l'espace* $\mathcal{X}\times\mathcal{J}$ *tout entier.*

$\mathcal{J}$ étant compact, il existe un ensemble ouvert G tel que $F\subset G$ et $G\times\mathcal{J}\subset E$.

Soit [1]) $\varphi\in\mathcal{J}^{\mathcal{X}}$ une fonction telle que

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in F,\\ 0 \text{ si } x\in\mathcal{X}-G,\end{cases}\qquad\text{par exemple,}\quad \varphi(x)=\frac{\varrho(x,\mathcal{X}-G)}{\varrho(x,\mathcal{X}-G)+\varrho(x,F)}.$$

Soit, conformément à l'hypothèse, h_0 une extension de la fonction h sur $G\times\mathcal{J}+\mathcal{X}\times 0$.

Posons

$$h^*(x,t)=h_0(x,t\varphi(x)).$$

Il vient

$$h^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}\quad\text{et}\quad h^*(x,t)=h(x,t)\quad\text{pour}\quad(x,t)\in F^0.$$

10. *Soit* $\mathcal{Y}$ *un r. a. v. Si l'espace* $\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}}$ *est connexe par arcs,* $\mathcal{Y}$ *est un r. a.* [2]).

Soit, en effet, $\mathcal{X}$ un sur-espace de $\mathcal{Y}$ dans lequel $\mathcal{Y}$ est fermé. Il s'agit de montrer (conformément à 5) que $\mathcal{Y}$ est un rétracte de $\mathcal{X}$.

Soient $f_0(y)\equiv c$ et $f_1(y)\equiv y$, où $y\in\mathcal{Y}$. Il existe par hypothèse un arc unissant f_0 à f_1 dans l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}}$. Soient donc $g\in(\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}})^{\mathcal{J}}$, $g_0=f_0$ et $g_1=f_1$. Posons:

$$h(x,t)=g_t(x)\quad\text{pour}\quad x\in\mathcal{Y}\quad\text{et}\quad h(x,0)=c\quad\text{pour}\quad x\in\mathcal{X}.$$

Il vient $h\in\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}^0}$ d'après § 14, X, 3'. $\mathcal{Y}$ étant un r. a. v., on déduit du lemme que $h\subset h^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$. En posant $r(x)=h^*(x,1)$, on en conclut que $f_1\subset r\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, donc que r est une rétraction de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$.

---

[1]) Cf. le raisonnement de C. H. Dowker, Amer. Journ. Math. **69** (1947), p. 232.

[2]) Pour $\mathcal{Y}$ compact, voir K. Borsuk, Fund. Math. **19** (1932), p. 229.

11. *Tout r. a. compact admet un point invariant* [1]).

Le th. 11 résulte de 7 et des énoncés 12 et 14 qui suivent.

12. $\mathcal{Y}$ *étant un rétracte d'un espace* $\mathcal{X}$ *qui admet un point invariant,* $\mathcal{Y}$ *en admet un également.*

Soit, en effet, f une rétraction de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$: $f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}$ et $f(x)=x$ pour $x\in\mathcal{Y}$. Soit $g\in\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}}$. Comme $gf\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, donc $gf\in\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$, il existe par hypothèse un x_0 tel que $gf(x_0)=x_0$. Comme $gf(x_0)\in\mathcal{Y}$, il vient $x_0\in\mathcal{Y}$, d'où $f(x_0)=x_0$, donc $g(x_0)=x_0$.

13. *Lemme. Soit* $\mathcal{X}$ *un espace compact. Si à tout* $\varepsilon>0$ *correspond une fonction* $f\in\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ *telle que*

$$|f(x)-x|<\varepsilon \tag{1}$$

et que l'ensemble $f(\mathcal{X})$ *admet un point invariant, l'espace* $\mathcal{X}$ *en admet un également.*

Supposons, par contre, que la fonction $g\in\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ n'admette pas de point invariant. $\mathcal{X}$ étant compact, il existe alors un $\varepsilon>0$ tel que

$$|g(x)-x|>\varepsilon, \tag{2}$$

quel que soit x. La fonction f satisfaisant à l'hypothèse du lemme, posons $h(x)=fg(x)$ et $F=f(\mathcal{X})$. Comme $h\in F^{\mathcal{X}}$, donc $(h|F)\in F^F$, il existe un $x_0\in F$ tel que $h(x_0)=x_0$, c'est-à-dire que $fg(x_0)=x_0$. D'après (1), $|fg(x_0)-g(x_0)|<\varepsilon$, donc $|x_0-g(x_0)|<\varepsilon$, contrairement à (2).

14. *L'espace* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *admet un point invariant* [2]).

En écrivant les points $\mathfrak{z}\in\mathcal{J}^{\aleph_0}$ sous la forme $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots]$ où $0\leqslant\mathfrak{z}^n\leqslant 1$, posons

$$f_n(\mathfrak{z})=[\mathfrak{z}^1,\ldots,\mathfrak{z}^n,0,0,\ldots].$$

Il vient $|f_n(\mathfrak{z})-\mathfrak{z}|\leqslant 1/2^n$ et l'ensemble $f_n(\mathcal{J}^{\aleph_0})$, en tant qu'homéomorphe à la fermeture d'un simplexe à n dimensions, admet un point invariant (d'après § 23, III, 1).

D'après 10, l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ admet également un point invariant.

15. *Tout élément cyclique (et, plus généralement, tout sous-ensemble fermé complètement connexe par arcs) d'un r. a. est un r. a.*

---

[1]) c'est-à-dire qu'il existe pour tout $f\in\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ un x tel que $f(x)=x$. Cf. ib. p. 230.

[2]) Cf. J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. **2** (1930), p. 173. Cf. aussi G. D. Birkhoff et O. D. Kellog, *Invariant point in function space*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), p. 96.

Plus précisément: *$\mathcal{X}$ étant un continu localement connexe, tout élément cyclique (et plus généralement, tout ensemble fermé complètement connexe par arcs) en est un rétracte.*

Soit, en effet, F un ensemble fermé complètement connexe par arcs. Soit $R_1, R_2, \ldots$, la suite des composantes de $\mathcal{X}-F$. D'après § 47, I, 4, $\operatorname{Fr}(R_n)$ se réduit à un seul point p_n. Posons $f(x)=p_n$ pour $x \in R_n$ et $f(x)=x$ pour $x \in F$. Comme $\lim\limits_{n=\infty} \delta(R_n)=0$ (cf. § 47, I, 7), la fonction f est continue. F est donc un rétracte de $\mathcal{X}$.

Réciproquement, on démontre que[1]):

16. *Si tout élément cyclique d'un continu localement connexe est un r. a., le continu tout entier est un r. a.*

En particulier, *toute dendrite est un r. a.* (cf. § 49, VII, 7).

Ajoutons sans démonstration le théorème suivant:

17. *Théorème de plongement. $\mathcal{Y}$ étant un espace compact ($\subset \mathcal{J}^{\aleph_0}$), il existe un polytope infini P tel que $\mathcal{Y}+P$ est un rétracte absolu*[2]).

Ce théorème présente une généralisation du th. 1 du § 23, IX.

18. *Soient: $\mathcal{X}$ un espace compact, $F=\overline{F}$ et $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ où $f|\mathcal{X}-F$ est une transformation homéomorphe de $\mathcal{X}-F$ en $\mathcal{Y}-f(F)$. Si $\mathcal{X}$, F et $f(F)$ sont des r. a. v., $\mathcal{Y}$ l'est également*[3]).

IV. Connexité en dimension n. Cas où $\mathcal{J}^n \tau \mathcal{Y}$. L'espace $\mathcal{Y}$ est dit *intégralement connexe en dimension n* lorsqu'on a

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n}=\mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}}|\mathcal{S}_n,$$

c'est-à-dire, lorsque toute fonction $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n}$ admet une extension $f^* \in \mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}}$[4]).

---

[1]) Voir K. Borsuk, *Einige Sätze über stetige Streckenbilder*, Fund. Math. **18** (1932), p. 211.

[2]) Pour la démonstration, voir K. Borsuk, *Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus*, Fund. Math. **27** (1936), p. 240.

[3]) Voir J. H. C. Whitehead, *Note on a theorem of Borsuk*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), p. 1125, et (pour le cas de dimension finie) K. Borsuk, Fund. Math. **24** (1935), p. 250.

[4]) Rappelons que

$$\mathcal{Q}_{n+1}=\underset{p}{E}\,[(|p|\leqslant 1)\,(p \in \mathcal{E}^{n+1})] \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_n=\underset{p}{E}\,[(|p|=1)\,(p \in \mathcal{E}^{n+1})].$$

$\mathcal{Y}$ est dit *localement connexe en dimension n au point p*, lorsqu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que toute fonction $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n}$ pour laquelle on a $\delta[p+f(\mathcal{S}_n)]<\eta$ admet une extension $f^* \in \mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}}$ telle que $f^*(0)=p$ et $\delta[p+f^*(\mathcal{Q}_{n+1})]<\varepsilon$[1]).

$\mathcal{Y}$ est dit localement connexe en dimension n lorsqu'il jouit de cette propriété en chaque point.

Nous appellerons — pour abréger — espaces l. c. n (respectivement i. c. n) les espaces localement (respectivement intégralement) connexes en dimensions $<n$.

Afin d'établir quelques conditions qui caractérisent les espaces l. c. n, nous envisagerons au préalable une notion auxiliaire.

Soit $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}}|\mathcal{S}_n$. Posons

$$\chi(f)=\inf \delta[f^*(\mathcal{Q}_{n+1})],$$

où f^* est un élément variable de $\mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}}$ tel que $f \subset f^*$.

Évidemment, si la fonction f est constante, on a $\chi(f)=0$.

On démontre facilement le lemme suivant:

Lemme. Pour que $\mathcal{Y}$ soit localement connexe en dimension n au point p, il faut et il suffit que la fonctionnelle χ soit définie dans un entourage (relatif à $\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n}$) de la fonction constante $f(x)\equiv p$, et que f en soit un élément de continuité.

Autrement dit: *que la condition* $\lim\limits_{j=\infty} \delta[p+f_j(\mathcal{S}_n)]=0$ (qui exprime la convergence uniforme de la suite $f_1, f_2, \ldots$ vers la constante f), *entraîne* $\lim\limits_{j=\infty} \chi(f_j)=0$.

Théorème 1. Les conditions suivantes sont équivalentes (pour $\mathcal{Y}\neq 0$):

(1) *$\mathcal{Y}$ est l. c. n,*

(2) *$\mathcal{Y}$ est un rétracte de voisinage de chaque sur-espace $\mathcal{Z}$ tel que $\overline{\mathcal{Y}}=\mathcal{Y}$ et* $\dim(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\leqslant n$,

(3) *si $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$ et* $\dim(\mathcal{X}-F)\leqslant n$, *on a $\mathcal{Y}^F=\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|_v F$,*

(4) *si* $\dim \mathcal{X}\leqslant n$, *$\mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$,*

(5) *$\mathcal{J}^n\,\tau_v\,\mathcal{Y}$,*

(6) *en posant*

$$T_k=\sum_{j=1}^{\infty} \underset{p}{E}\,[(|p|=1/j)\,(p \in \mathcal{Q}_k)]+\textit{le point } 0,$$

on a $\mathcal{Y}^{T_k}=\mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{k+1}}|_v T_k$ pour $k<n$.

---

[1]) Notion due à J. W. Alexander et S. Lefschetz. Voir S. Lefschetz, Ann. of Math. **35** (1934), p. 119. Voir aussi ma note *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. **24** (1935), p. 269.

Théorème 1'. La condition suivante

(1') $\mathcal{Y}$ *est l. c. n et i. c. n*

équivaut à chacune des conditions (désignons les par (2')—(6')) *que l'on obtient respectivement de* (2)—(6) *en remplaçant le terme „rétracte de voisinage“ par „rétracte“ et en omettant l'indice v.*

Nous donnerons la démonstration du th. 1. Celle du th. 1' s'en déduit facilement (en remplaçant E et G par $\mathcal{X}$ et V par $\mathcal{Z}$).

(1)→(2). $\mathcal{Y}$ étant un sous-ensemble fermé de l'espace $\mathcal{Z}$, tel que $\dim(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\leqslant n$, il existe d'après le § 23, IX, 3, un sur-espace $\mathcal{X}$ de $\mathcal{Y}$, tel que $\mathcal{X}-\mathcal{Y}$ est un polytope infini de dimension $\leqslant n$, et une fonction $g\in\mathcal{X}^{\mathcal{Z}}$ telle que $g(y)=y$ pour $y\in\mathcal{Y}$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{Y}$ est un rétracte de l'un de ses entourages E dans $\mathcal{X}$ (puisque $g^{-1}(E)$ est un entourage de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$). La dernière proposition sera établie par induction; nous allons démontrer:

1°: qu'elle est vraie lorsque $\dim(\mathcal{X}-\mathcal{Y})=0$,

2°: que si elle est vraie pour $\dim(\mathcal{X}-\mathcal{Y})\leqslant k$, elle l'est encore pour $\dim(\mathcal{X}-\mathcal{Y})=k+1$.

Or, dans le cas où $\mathcal{X}-\mathcal{Y}$ est un polytope (infini) de dimension 0, il est un ensemble isolé composé d'une suite (finie ou infinie) de points $p_1,p_2,\dots$ En désignant par $f_0(p_i)$ un point de l'ensemble $\mathcal{Y}$ (qui, par hypothèse, n'est pas vide), tel que

$$|f_0(p_i)-p_i|<2\varrho(p_i,\mathcal{Y}),$$

on définit évidemment une rétraction de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$.

Passons à présent à 2°. Le polytope infini $\mathcal{X}-\mathcal{Y}$ (à $k+1$ dimensions) étant représenté comme somme des simplexes d'un complexe infini, désignons par R la somme de tous les simplexes de dimension $\leqslant k$ et par $D_1,D_2,\dots$ les simplexes de dimension $k+1$. Les simplexes D_i sont donc disjoints et le bord $\overline{D}_i-D_i$ est contenu dans R. On peut postuler en outre que $\lim\limits_{i=\infty}\delta(D_i)=0$.

Comme $\dim R\leqslant k$, il existe par hypothèse, un entourage G de $\mathcal{Y}$ (dans $\mathcal{X}$) et une fonction $f\in\mathcal{Y}^{RG+\mathcal{Y}}$ qui est l'identité sur $\mathcal{Y}$. Pour $\overline{D}_i\subset G$, posons $f_i=f|\overline{D}_i-D_i$. Soit E l'ensemble-somme de $\mathcal{Y}+RG$ et de tous les D_i (contenus dans G) tels que la fonction f_i admet une extension $f_i^*\in\mathcal{Y}^{\overline{D}_i}$. Choisissons la fonction f_i^* de façon que

$$\delta[f_i^*(\overline{D}_i)]<2\chi(f_i). \tag{7}$$

Les simplexes D_i étant mutuellement disjoints et disjoints de $\mathcal{Y}$, posons $f^*=f+f_1^*+f_2^*+\dots$ Il s'agit de démontrer que E est un entourage de $\mathcal{Y}$ et que la fonction f^* est continue.

Soient $p\in\mathcal{Y}$ et $p=\lim\limits_{j=\infty}p_j$, où $p_j\in\mathcal{X}-(\mathcal{Y}+R)$. Comme $\overline{D}_i\cdot\mathcal{Y}=0$, on peut admettre, en posant $p_j\in D_{i_j}$, que tous les indices i_j sont différents. Par conséquent,

$$\lim_{j=\infty}\delta(D_{i_j})=0 \tag{8}$$ et $$\lim_{j=\infty}\delta[p+D_{i_j}]=0. \tag{9}$$

Comme $p\in G$, il en résulte pour j suffisamment grand

$$\overline{D}_{i_j}\subset G,\quad \text{d'où}\quad \overline{D}_{i_j}-D_{i_j}\subset RG,$$

de sorte que la fonction f est définie sur l'ensemble $\overline{D}_{i_j}-D_{i_j}$, homéomorphe à la sphère $\mathcal{S}_k$. La fonction f étant continue au point p, l'égalité (9) entraîne

$$\lim_{j=\infty}\delta[f(p)+f(\overline{D}_{i_j}-D_{i_j})]=0. \tag{10}$$

L'espace $\mathcal{Y}$ étant localement connexe en dimension k au point p, la formule (10), qui équivaut évidemment à

$$\lim_{j=\infty}\delta[p+f_{i_j}(\overline{D}_{i_j}-D_{i_j})]=0, \tag{11}$$

implique que $\lim\limits_{j=\infty}\chi(f_{i_j})=0$ (cf. le lemme).

Par conséquent, à partir d'un j suffisamment grand, chaque fonction f_{i_j} admet une extension sur $\overline{D}_{i_j}$. Cela prouve que $D_{i_j}\subset E$, donc que $p_{i_j}\in E$. Le point p est ainsi un point intérieur de E.

En outre, (7) implique que

$$\lim_{j=\infty}\delta[f_{i_j}^*(\overline{D}_{i_j})]=0.$$

En tenant compte de (11) et de la formule

$$0\neq f_{i_j}(\overline{D}_{i_j}-D_{i_j})\subset f_{i_j}^*(\overline{D}_{i_j}),$$

on en conclut que

$$\lim_{j=\infty}\delta[p+f_{i_j}^*(\overline{D}_{i_j})]=0,\quad \text{d'où}\quad \lim_{j=\infty}f^*(p_{i_j})=p.$$

La fonction f^* est donc continue.

(2)→(3). En effet, si $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$, $\dim(\mathcal{X}-F)\leqslant n$ et $f\in\mathcal{Y}^F$, il existe (d'après le théorème précité, § 23, IX, 3) un sur-espace $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{Y}$, tel que $\dim(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\leqslant n$ et que $\mathcal{Y}$ est fermé dans $\mathcal{Z}$, et une extension $f_0\in\mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$ de f. En admettant la condition (2), il existe un entourage V de $\mathcal{Y}$ (dans $\mathcal{Z}$) et une rétraction g de V en $\mathcal{Y}$. La fonction superposée $f^*=gf_0$ est la fonction demandée: elle est une extension de f et est définie sur l'ensemble $E=f_0^{-1}(V)$, qui est un entourage de F (dans $\mathcal{X}$).

Les implications (3)→(4)→(5)→(6) sont évidentes.

(6)→(1). Conformément au lemme, il s'agit de démontrer, sous l'hypothèse (6), que: étant donnés un entier $k<n$, un point $p\in\mathcal{Y}$ et une suite $f_1,f_2,\dots$ de fonctions-éléments de $\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$, convergente vers la fonction constante $g(x)\equiv p$, on a $\lim\limits_{j=\infty}\chi(f_j)=0$.

Posons $f(x)=f_j(jx)$ pour $|x|=1/j$ et $f(0)=p$.

Évidemment $f\in\mathcal{Y}^{T_k}$. On a donc d'après (6) $f\subset f^*\in\mathcal{Y}^{E_k}$ où E_k est un entourage de T_k. Comme $0\in T_k$, il existe par conséquent un indice j_0 tel que $x\in E_k$ pour $|x|\leqslant 1/j_0$. Posons

$$f_j^*(x)=f^*\left(\frac{x}{j}\right)\quad\text{pour}\quad x\in\mathcal{Q}_{k+1}\quad\text{et}\quad j\geqslant j_0.$$

Il vient pour $x\in\mathcal{S}_k$

$$f_j(x)=f\left(\frac{x}{j}\right)=f^*\left(\frac{x}{j}\right)=f_j^*(x),\quad\text{d'où}\quad f_j\subset f_j^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{k+1}},$$

et comme $f^*(0)=f(0)=p$, on a

$$\lim_{x=0}f^*(x)=p,\quad\text{d'où}\quad\lim_{j=\infty}\delta[f_j^*(\mathcal{Q}_k)]=0,\quad\text{donc}\quad\lim_{j=\infty}\chi(f_j)=0.$$

Corollaires 2 *et* 2'. *Chacune des conditions suivantes équivaut à la condition* (1) *(pour* $\mathcal{Y}\neq 0$*)*:

(12) *si* $\mathcal{C}$ *est compact et* $\dim\mathcal{C}=k<n$, *on a* $\mathcal{J}^{n-k}\,\tau_v\,\mathcal{Y}^{\mathcal{C}}$,

(13) *si* $k<n$, *on a* $\mathcal{J}\,\tau_v\,\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$.

La condition (1') *équivaut aux conditions* (12') *et* (13') *que l'on obtient de* (12) *et de* (13) *en omettant l'indice* v; *on peut omettre aussi, dans ce cas, l'hypothèse de la compacité de l'espace* $\mathcal{C}$.

En effet, (4) implique (12), car en supposant que $\dim\mathcal{C}=k<n$, on a (cf. § 24, IX, (7))

$$\dim(\mathcal{C}\times\mathcal{J}^{n-k})\leqslant n,\quad\text{d'où}\quad(\mathcal{C}\times\mathcal{J}^{n-k})\,\tau_v\,\mathcal{Y},\quad\text{donc}\quad\mathcal{J}^{n-k}\,\tau_v\,\mathcal{Y}^{\mathcal{C}}$$

d'après II, 5.

Comme (12) entraîne (13), il reste à démontrer que (13) implique (1).

Soient $k<n$, $p\in\mathcal{Y}$ et $\varepsilon>0$. L'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$ étant par hypothèse localement connexe en dimension 0 au point p, il existe un $\eta>0$ tel qu'à toute fonction $h\in\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$ pour laquelle $\delta[p+h(\mathcal{S}_k)]<\eta$ correspond une fonction $f\in(\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k})^{\mathcal{J}}$ telle que $f_0=p$, $f_1=h$ et que

$$|f_x-p|<\varepsilon/2,\quad\text{donc que}\quad\delta[p+f_x(\mathcal{S}_k)]<\varepsilon/2\quad\text{pour tout}\quad x\in\mathcal{J}.$$

Posons $h^*(t\cdot x)=f_x(t)$ pour $t\in\mathcal{S}_k$. Il vient:

$$h^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{k+1}},\quad h^*(t)=f_1(t)=h(t),\quad h^*(0)=f_0(t)=p,$$
$$|h^*(t\cdot x)-h^*(0)|=|f_x(t)-p|<\varepsilon/2,\quad\text{d'où}\quad\delta[p+h^*(\mathcal{Q}_{k+1})]<\varepsilon.$$

Enfin, pour établir l'implication (13')→(1'), on omet dans le raisonnement qui précède les conditions $\varepsilon>0$ et $\eta>0$. On fait correspondre ainsi à toute fonction $h\in\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$ une fonction $h^*\in\mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{k+1}}$ telle que $h\subset h^*$ (p étant un point arbitraire).

Exemples et remarques[1]. 1°. Si $\mathcal{Y}\neq 0$, on a évidemment $\mathcal{J}^0\,\tau\,\mathcal{Y}$ ($\mathcal{J}^0$ se réduit à un seul point et $\mathcal{S}_{-1}=0$). Donc (cf. (2')), $\mathcal{Y}$ *étant un sous-ensemble fermé d'un espace* $\mathcal{Z}$ *tel que* $\dim(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})=0$, $\mathcal{Y}$ *en est un rétracte.*

Si $\dim\mathcal{X}=0$, *on a* $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}$ *quel que soit* $\mathcal{Y}\neq 0$ (cf. (4')).

2°. La condition $\mathcal{J}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ signifie que $\mathcal{Y}$ est localement connexe par arcs, et $\mathcal{J}\,\tau\,\mathcal{Y}$ — que $\mathcal{Y}$ est, en outre, intégralement connexe par arcs.

La connexité locale en dimension 0 *équivaut donc à la connexité locale par arcs.*

3°. L'espace suivant est l. c. n pour tout n et n'est pas cependant un r. a. v.

$\mathcal{Y}$ est la réunion d'une suite infinie des sphères $S_0,S_1,\dots$ placées de manière que $S_n\cdot S_{n+1}$ se réduise à un seul point, que $S_n\cdot S_{n+i}=0$ pour $i>1$, que $\dim S_n=n$ et que la suite converge vers un point $p\in\mathcal{Y}-(S_0+S_1+\dots)$.

4°. L'ensemble $\mathcal{Y}$ de l'exemple précédent peut être imaginé situé dans l'espace de Hilbert de façon que les abscisses de ses points s'annulent. Soit q le point $(1,0,0,0,\dots)$. Unissons q à chaque point de $\mathcal{Y}$ par un segment rectiligne. L'ensemble ainsi obtenu est l. c. n et i. c. n pour tout n, sans être un r. a.

[1]) C. aussi § 49, VII, 6,

V. Opérations. 1. *La somme de deux ensembles fermés l. c. n dont le produit est l. c. n—1 est l. c. n.*

Le théorème reste vrai en remplaçant le terme „l. c." par „l. c. et i. c.".

Posons, en effet,

$$\mathcal{Y}=A_0+A_1,\quad \bar{A}_j=A_j,\quad F=\bar{F}\subset\mathcal{I}^n,\quad f\in\mathcal{Y}^F \quad \text{et} \quad C_j=f^{-1}(A_j).$$

Posons, conformément au § 22, II, 4:

$$\mathcal{I}^n=B_0+B_1,\quad \bar{B}_j=B_j,\quad FB_j=C_j$$

et

$$\dim(B_0\cdot B_1-C_0\cdot C_1)\leqslant n-1.$$

La dernière inégalité, rapprochée des conditions $\mathcal{I}^{n-1}\,\tau_v\,(A_0\cdot A_1)$ et IV (3), implique la condition II (6). En supposant que $\mathcal{I}^n\,\tau_v\,A_0$ et $\mathcal{I}^n\,\tau_v\,A_1$, le lemme 2′ du N° II entraîne aussitôt les conclusions demandées (cf. IV (5)).

2. *Corollaire. La sphère $\mathcal{S}_n$ est i. c. n* (mais elle n'est pas i. c. $n+1$, cf. I, 3°).

Procédons par induction. Le cas $n=0$ est évident: on a $\mathcal{I}^0\,\tau\,\mathcal{S}_0$ puisque $\mathcal{I}^0$ se réduit à un seul point et $\mathcal{S}_0$ à deux.

Soit $n>0$. Admettons que $\mathcal{I}^{n-1}\,\tau\,\mathcal{S}_{n-1}$ et décomposons $\mathcal{S}_n$ en deux moitiés (fermées) $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^-$, où $\mathcal{S}_n^+\cdot\mathcal{S}_n^-=\mathcal{S}_{n-1}$. On a donc $\mathcal{I}^{n-1}\,\tau\,\mathcal{S}_n^+\cdot\mathcal{S}_n^-$; $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^-$ étant des rétractes absolus, on a

$$\mathcal{I}^n\,\tau\,\mathcal{S}_n^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^n\,\tau\,\mathcal{S}_n^-, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{I}^n\,\tau\,(\mathcal{S}_n^++\mathcal{S}_n^-)=\mathcal{S}_n$$

d'après 1.

Les théorèmes 3—6 du N° II impliquent aussitôt les suivants:

3. *Si la somme et le produit de deux ensembles fermés sont l. c. n, ces ensembles le sont également.*

Le théorème reste vrai en remplaçant le terme „l. c. n" par „l. c. n et i. c. n".

4. *Pour que le produit cartésien d'une suite (finie ou infinie) de facteurs soit l. c. n et i. c. n, il faut et il suffit que chaque facteur le soit.*

Pour les suites finies le terme „i. c. n" peut être omis.

5. *Soit* $\dim\mathcal{T}=k$. *Si $\mathcal{Y}$ est l. c. $n+k$ et i. c. $n+k$, l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ est l. c. n et i. c. n. Si $\mathcal{T}$ est compact et $\mathcal{Y}$ est l. c. $n+k$, $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ est l. c. n.*

Car la condition $\mathcal{I}^{n+k}\,\tau\,\mathcal{Y}$ entraîne $\mathcal{T}\times\mathcal{I}^n\,\tau\,\mathcal{Y}$ (d'après IV, 1′ (4′) et (5′)), d'où $\mathcal{I}^n\,\tau\,\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ d'après II, 5.

6. *Un rétracte de voisinage d'un espace l. c. n est l. c. n.*

Un rétracte d'un espace l. c. n et i. c. n est l. c. n et i. c. n.

En conséquence (cf. II, 7):

7. *Si $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ (où $\mathcal{T}$ est compact et non vide) est l. c. n (respectivement l. c. n et i. c. n), $\mathcal{Y}$ l'est également.*

VI. Caractérisation de la dimension[1]**.**

1. *Théorème. $\mathcal{X}$ étant un espace métrique séparable, les conditions* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$ *et $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ sont équivalentes.*

Nous déduirons ce théorème des énoncés 2 et 5.

2. *La condition* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$ *implique $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$.*

En effet, $\mathcal{S}_n$ étant l. c. n et i. c. n d'après V, 2, on a en vertu de IV, 1′ (4′) $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ dès que $\dim\mathcal{X}\leqslant n$.

3. *La condition $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ implique $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_l$ pour $l>n$.*

Cela revient à démontrer que $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ implique $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{n+1}$. Or, désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{S}_{n+1}^+$ et $\mathcal{S}_{n+1}^-$ les deux moitiés (fermées) de $\mathcal{S}_{n+1}$ telles que $\mathcal{S}_{n+1}^+\cdot\mathcal{S}_{n+1}^-=\mathcal{S}_n$. Il vient

$$\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{n+1}^+,\quad \mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{n+1}^- \quad \text{et} \quad \mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{n+1}^+\cdot\mathcal{S}_{n+1}^-,$$

d'où $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{n+1}$ d'après II, 2.

Soit S un simplexe simple à m dimensions $p_0\ldots p_m$. Désignons par A_n le polytope-somme de toutes les faces de S de dimension $\leqslant n$. On a le lemme suivant:

4. *Lemme. La condition $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ implique $\mathcal{X}\,\tau\,A_n$, quel que soit $n<m$.*

Plus précisément: *en admettant que $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$, à toute fonction $f\in\bar{S}^{\mathcal{X}}$ correspond une fonction $f^*\in A_n^{\mathcal{X}}$ telle que:*

$$(1) \qquad f(x)\in A_n \quad \text{implique} \quad f^*(x)=f(x),$$

$$(2) \qquad f(x)\in p_{i_0}\ldots p_{i_k} \quad \text{implique} \quad f^*(x)\in\overline{p_{i_0}\ldots p_{i_k}}.$$

Posons $d=m-n$ et procédons par induction relativement à d.

[1]) Voir P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932), p. 161—238, § 1. Cf. W. Hurewicz, *Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math. **24** (1935), p. 144.

Pour $d=1$, on a $A_n=A_{m-1}\underset{\text{top}}{=}\mathcal{S}_{m-1}$. En désignant donc par $f^*\epsilon A_n^{\mathfrak{X}}$ un prolongement arbitraire de la fonction partielle $f|f^{-1}(A_n)$, on satisfait aux conditions (1) et (2).

Admettons que le lemme est vrai pour $d-1$. Nous l'établirons pour d.

Soit $f\epsilon\bar{S}^{\mathfrak{X}}$. D'après 3, la condition $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ implique $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{n+1}$. Il existe donc par hypothèse une fonction $g\epsilon A_{n+1}^{\mathfrak{X}}$ telle que:

(3) $\quad f(x)\epsilon A_{n+1}$ implique $g(x)=f(x)$,

(4) $\quad f(x)\epsilon p_{i_0}\dots p_{i_k}$ implique $g(x)\epsilon\overline{p_{i_0}\dots p_{i_k}}$.

Désignons, conformément à la définition de A_{n+1}, par $T_1,\dots,T_r$ les faces à $n+1$ dimensions de S, telles que

(5) $$A_{n+1}=\bar{T}_1+\dots+\bar{T}_r.$$

Soit B_i le bord de T_i (c'est-à-dire la somme de toutes ses faces de dimension $\leqslant n$). Posons:

(6) $\quad U_i=g^{-1}(\bar{T}_i),\qquad$ (7) $\quad C_i=g^{-1}(B_i).$

Il vient $U_i\,\tau\,B_i$, car $B_i\underset{\text{top}}{=}\mathcal{S}_n$ et $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ par hypothèse. La fonction partielle $g|C_i$ admet donc une extension $g_i\epsilon B_i^{U_i}$. Posons

(8) $$f^*=g_1+\dots+g_r,$$

c'est-à-dire que $f^*(x)=g_i(x)$ pour $x\epsilon U_i$ où $1\leqslant i\leqslant r$.

Il vient pour $i\neq j$:

$$U_i\cdot U_j=g^{-1}(\bar{T}_i\cdot\bar{T}_j)=g^{-1}(B_i\cdot B_j)=C_i\cdot C_j,$$

d'où

$$(g_i|U_i\cdot U_j)=(g_i|C_i\cdot C_j)=(g|C_i\cdot C_j)=(g_j|C_i\cdot C_j)=(g_j|U_i\cdot U_j).$$

Donc $f^*\epsilon A_n^{\mathfrak{X}}$, puisque $B_1+\dots+B_r=A_n$.

Soit $f(x)\epsilon A_n$. Donc $f(x)=g(x)$. Posons $g(x)\epsilon B_i$, d'où $x\epsilon C_i$, et il vient $g(x)=g_i(x)=f^*(x)$. La condition (1) est donc vérifiée.

Afin d'établir (2), posons $f(x)\epsilon p_{i_0}\dots p_{i_k}$. On a donc d'après (4) $g(x)\epsilon\overline{p_{i_0}\dots p_{i_k}}$.

On peut poser par conséquent $g(x)\epsilon p_{i_0}\dots p_{i_j}$ où $j\leqslant k$. Si $j\leqslant n$, il vient $g(x)\epsilon A_n$, donc $f^*(x)=g(x)$, d'où la condition (2).

Posons donc $j>n$, c'est-à-dire $j=n+1$ (puisque $g(x)\epsilon A_{n+1}$). Il vient $p_{i_0}\dots p_{i_{n+1}}=T_s$ pour s convenablement choisi. Parsuite $x\epsilon U_s$ d'après (6) et on a d'après (8)

$$f^*(x)=g_s(x)\epsilon B_s\subset\bar{T}_s\subset\overline{p_{i_0}\dots p_{i_k}}.$$

5. *La condition* $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$ *implique* $\dim\mathfrak{X}\leqslant n$.

Soit $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$. Soit $G_0,\dots,G_m$ un système d'ensembles ouverts tel que $\mathfrak{X}=G_0+\dots+G_m$ et dont le nerf est de dimension $l>n$. D'après § 23, VI, 7 et § 40, VII, 3, tout revient à définir une fonction $f\epsilon A_{l-1}^{\mathfrak{X}}$ telle que

(9) $$f^{-1}(P_i)\subset G_i\quad\text{pour}\quad i=0,1,\dots,m,$$

P_i désignant la somme des faces du simplexe S qui ont p_i pour sommet.

Envisageons la transformation $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_0,\dots,G_m\}$ et $\{p_0,\dots,p_m\}$ (cf. § 23, VI), c'est-à-dire

$$\varkappa(x)=\lambda_0(x)\cdot p_0+\dots+\lambda_m(x)\cdot p_m$$

où

$$\lambda_i(x)=\frac{\varrho(x,F_i)}{\varrho(x,F_0)+\dots+\varrho(x,F_m)}\quad\text{et}\quad F_i=\mathfrak{X}-G_i.$$

Le nerf du système $\{G_0,\dots,G_m\}$ étant de dimension l, il vient $\varkappa\epsilon A_l^{\mathfrak{X}}$. Comme $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_{l-1}$ (d'après 3), il existe (en vertu de 4) une fonction $f\epsilon A_{l-1}^{\mathfrak{X}}$ telle que

(10) $\quad\varkappa(x)\epsilon p_{i_0}\dots p_{i_k}$ implique $f(x)\epsilon\overline{p_{i_0}\dots p_{i_k}}$.

Nous en déduirons l'inclusion (9).

Soit $x\epsilon f^{-1}(P_i)$. Donc $f(x)\epsilon P_i$. Soit d'autre part,

$$\varkappa(x)\epsilon p_{i_0}\dots p_{i_k},\quad\text{d'où}\quad f(x)\epsilon\overline{p_{i_0}\dots p_{i_k}}$$

d'après (10). Il en résulte aussitôt que i est l'un des indices $i_0,\dots,i_k$:

$$\varkappa(x)\epsilon P_i,\quad\text{d'où}\quad x\epsilon\varkappa^{-1}(P_i),\ \text{donc}\ x\epsilon G_i,$$

car $\varkappa^{-1}(P_i)\subset G_i$ d'après § 23, VI (10).

6. *Corollaire*[1]. *Pour que* $\dim\mathfrak{X}\leqslant n$, *il faut et il suffit qu'à toute fonction* $f\epsilon\mathcal{Q}_{n+1}^{\mathfrak{X}}$ *corresponde une fonction* $g\epsilon(\mathcal{Q}_{n+1}-0)^{\mathfrak{X}}$ (0 *désignant l'origine*) *telle que*

(11) $\quad f(x)\epsilon\mathcal{S}_n$ *implique* $g(x)=f(x)$.

Soient, en effet, $f\epsilon\mathcal{Q}_{n+1}^{\mathfrak{X}}$ et $F=f^{-1}(\mathcal{S}_n)$. En admettant que $\dim\mathfrak{X}\leqslant n$, on a $\mathfrak{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$, donc $(f|F)\subset g\epsilon\mathcal{S}_n^{\mathfrak{X}}$, d'où la condition (11).

[1]) Voir P. Alexandroff, *Analyse géométrique de la dimension des ensembles fermés*, C. R. Paris **190** (1930), p. 475.

Réciproquement: soient $F=\bar{F}\subset\mathcal{X}$ et $h\in\mathcal{S}_n^F$. $\mathcal{Q}_{n+1}$ étant un rétracte absolu, soit $h\subset f\in\mathcal{Q}_{n+1}^{\mathcal{X}}$. La fonction $g\in(\mathcal{Q}_{n+1}-0)^{\mathcal{X}}$ étant supposée assujettie à la condition (11), posons

$$f^*(x)=\frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Il vient $h\subset f^*\in\mathcal{S}_n^{\mathcal{X}}$. Donc $\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{S}_n$, d'où $\dim\mathcal{X}\leqslant n$ d'après 5.

L'énoncé 2 peut être précisé comme suit.

7. *Théorème de dualité*[1]. *Soient* $F=\bar{F}\subset\mathcal{X}$ *et* $\dim(\mathcal{X}-F)=m$. *À toute fonction* $f\in\mathcal{S}_n^F$ *(où* $n\leqslant m$*) correspondent: un ensemble* Z *tel que*

$$Z=\bar{Z}\subset\mathcal{X}-F\quad\text{et}\quad\dim Z\leqslant m-n-1,$$

et une extension $f^*\in\mathcal{S}_n^{\mathcal{X}-Z}$ *de* f.

Le théorème étant évident pour $m=-1$ ainsi que pour $n=-1$, il est légitime d'admettre qu'il est vrai pour $m-1$ et que $n\geqslant 0$. Désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^-$ les moitiés (fermées) en lesquelles $\mathcal{S}_n$ est partagé par $\mathcal{S}_{n-1}$. Soient:

$$f\in\mathcal{S}_n^F,\quad C_0=f^{-1}(\mathcal{S}_n^+),\quad C_1=f^{-1}(\mathcal{S}_n^-)$$

et conformément au § 22, II, 4,

$$\mathcal{X}=B_0+B_1,\quad \bar{B}_j=B_j,\quad FB_j=C_j,\quad \dim(B_0\cdot B_1-C_0\cdot C_1)\leqslant m-1.$$

Le théorème étant supposé vrai pour $m-1$, on a

$$(f|C_0\cdot C_1)\subset g\in\mathcal{S}_{n-1}^{B_0\cdot B_1-Z}\quad\text{où}\quad Z=\bar{Z}\subset B_0\cdot B_1-C_0\cdot C_1$$

et

$$\dim Z\leqslant\dim(B_0\cdot B_1-C_0\cdot C_1)-(n-1)-1,$$

d'où $\dim Z\leqslant m-n-1$.

Il vient

$$B_0\cdot B_1\cdot F=C_0\cdot C_1\quad\text{et}\quad B_0\cdot B_1-C_0\cdot C_1=B_0\cdot B_1-F,\quad\text{d'où}\quad Z\subset\mathcal{X}-F.$$

En substituant dans le lemme 2' du N° II: $\mathcal{S}_n^+$ à A_0, $\mathcal{S}_n^-$ à A_1, $\mathcal{X}-Z$ à $\mathcal{X}$ et en y omettant l'indice v, on en déduit l'existence d'une extension $f^*\in\mathcal{S}_n^{\mathcal{X}-Z}$ de f.

---

[1]) S. Eilenberg, *Un théorème de dualité*, Fund. Math. **26** (1936), p. 280, cf. aussi W. Hurewicz, *Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume*, Sgb. Preuss. Akad. **34** (1933), p. 765.

Remarques. 1° Si l'ensemble $\mathcal{X}-F$ est un polytope infini, l'ensemble Z peut être supposé un *polytope*[1]).

2° Le théorème 7 (complété par la remarque 1°) peut être généralisé en remplaçant $\mathcal{S}_n$ par un espace arbitraire *l. c. m et i. c. n*[2]).

§ 49. Homotopie. Contractilité.

I. Homotopie des fonctions. Deux fonctions $f_0\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et $f_1\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ sont dites *homotopes* (par rapport à $\mathcal{Y}$), en symbole: $f_0\simeq f_1$, lorsqu'il existe une fonction de deux variables $h\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$ telle que

$$(1)\qquad h(x,0)=f_0(x)\quad\text{et}\quad h(x,1)=f_1(x).$$

Autrement dit: lorsque, en désignant par F le sous-ensemble du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{J}$ composé des ensembles $\mathcal{X}\times 0$ et $\mathcal{X}\times 1$, la fonction g, définie sur F, identique à f_0 sur $\mathcal{X}\times 0$ et identique à f_1 sur $\mathcal{X}\times 1$, admet une extension $h\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$.

Exemples et remarques. 1° De deux fonctions homotopes f_0 et f_1 ont dit aussi que l'une s'obtient de l'autre par une *déformation (continue)*. Cette terminologie s'impose en considérant le paramètre $t\in\mathcal{J}$ comme représentant le temps.

2° Si $\mathcal{X}\times\mathcal{J}\,\tau\,\mathcal{Y}$ (en particulier, si $\mathcal{Y}$ est un r. a.), on a $f_0\simeq f_1$ pour tout couple $f_0,f_1\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Deux fonctions continues à valeurs réelles (complexes, etc.) sont donc toujours homotopes.

3° Désignons par $\mathcal{P}$ le plan euclidien $\mathcal{E}^2$ diminué du point 0. Soit $f\in\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$. Pour que la fonction f soit homotope à une constante, il faut et il suffit que l'on ait $f(x)=e^{g(x)}$, où $g\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{X}}$.

La condition est évidemment suffisante: il suffit de poser $h(x,t)=e^{(1-t)g(x)}$. On verra au § 51, IX, 3, qu'elle est nécessaire.

4° Pour qu'un continu localement connexe $\mathcal{X}$ soit unicohérent, il faut et il suffit que toute fonction $f\in\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ soit homotope à une constante (voir § 52, III, 3).

5° Dans le cas où $\mathcal{Y}=\mathcal{S}_n$, la notion d'homotopie conduit de façon naturelle à celle de *groupe d'homotopie* au sens de Hurewicz[3]).

---

[1]) S. Eilenberg, ibid. p. 281.

[2]) K. Borsuk, *Un théorème sur les prolongements des transformations*, Fund. Math. **29** (1937), p. 162.

[3]) Voir de cet auteur *Beiträge zur Topologie der Deformationen II, Homotopie- und Homologiegruppen*, Proc. Akad. Amsterdam **39** (1935), p. 521.

L'homotopie est une relation *réflexive*, *symétrique* et *transitive*:

1. $f \simeq f$, 2. *si* $f \simeq g$, *on a* $g \simeq f$, 3. *si* $f \simeq g$ *et* $g \simeq h$, *on a* $f \simeq h$.

Pour établir 3, on pose $u \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}}$ où $u(x,0) = f(x)$, $u(x,{}^1/_2) = g(x)$ et $u(x,1) = h(x)$.

4. *Si* $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, $g_j \in \mathcal{Z}^{\mathcal{Y}}$ $(j=0,1)$ *et* $g_0 \simeq g_j$, *on a* $g_0 f \simeq g_1 f$.

Soit, en effet, $h \in \mathcal{Z}^{\mathcal{Y} \times \mathcal{J}}$ où $h(y,j) = g_j(y)$. Posons $u(x,t) = h[f(x),t]$. Il vient

$$u \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}} \quad \text{et} \quad u(x,j) = h[f(x),j] = g_j f(x), \quad \text{d'où} \quad g_0 f \simeq g_1 f.$$

5. *Soient* $f_0, f_1 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ *et* $\{F_\iota\}$ *une famille d'ensembles fermés-ouverts tels que* $\mathcal{X} = \sum_\iota F_\iota$. *Si* $f_0|F_\iota \simeq f_1|F_\iota$ *pour tout* ι, *on a alors* $f_0 \simeq f_1$.

Il est légitime de poser, en vertu du théorème de Lindelöf (§ 17, I):

$$\mathcal{X} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\iota_n} = F_{\iota_1} + (F_{\iota_2} - F_{\iota_1}) + (F_{\iota_3} - F_{\iota_1} - F_{\iota_2}) + \ldots$$

Désignons les sommandes de cette dernière somme par $G_{\iota_1}, G_{\iota_2}, \ldots$

Il existe par hypothèse, pour $n = 1, 2, \ldots$, une fonction $h_n \in \mathcal{Y}^{G_{\iota_n} \times \mathcal{J}}$ telle que $h_n(x,j) = f_j(x)$ pour $x \in G_{\iota_n}$ et $j = 0,1$.

En définissant la fonction h comme égale à h_n sur $G_{\iota_n} \times \mathcal{J}$, et en tenant compte du fait que les ensembles G_{ι_n} sont ouverts et disjoints, il vient

$$h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}} \quad \text{et} \quad h(x,j) = f_j(x), \quad \text{d'où} \quad f_0 \simeq f_1.$$

6. *La condition* $f_0 \simeq f_1$ *équivaut à l'existence d'un arc (ou, ce qui revient au même, d'un continu localement connexe) unissant* f_0 *à* f_1 *dans l'espace* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ [1]).

Car, d'une part, si la fonction $h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}}$ satisfait à (1), et si l'on fait correspondre à tout $t \in \mathcal{J}$ la fonction $g_t \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ définie par la condition

$$(2) \qquad g_t(x) = h(x,t),$$

la fonction $g \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{J}}$ (cf. § 14, X, 3') transforme $\mathcal{J}$ en un continu localement connexe $g(\mathcal{J}) \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ unissant les éléments $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$ de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (cf. p. 11, renvoi 1).

[1]) En ce qui concerne la topologie de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, cf. la remarque du § 48, II.

D'autre part, si $g \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{J}}$, $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$, la fonction h définie par la condition (2) appartient à $\mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}}$ et satisfait à (1).

7. *Si les fonctions* f_j $(j=0,1)$ *sont constantes*: $f_j(x) = c_j$, *l'homotopie* $f_0 \simeq f_1$ *équivaut à l'existence d'un arc unissant les points* c_0 *et* c_1 *dans* $\mathcal{Y}$.

En effet, si $h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}}$ et $h(x,j) = c_j$, la fonction $g(t) = h(x_0,t)$, où x_0 est un point fixe de $\mathcal{X}$, est continue et par conséquent $g(\mathcal{J})$ est un continu localement connexe. Il contient donc un arc unissant $g(0) = c_0$ à $g(1) = c_1$.

Réciproquement, si les points c_0 et c_1 se laissent unir par un arc dans $\mathcal{Y}$, les fonctions f_0 et f_1 se laissent unir par un arc dans $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, puisque $\mathcal{Y} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Soit $\mathcal{E}_{-1}^{\aleph_0}$ l'ensemble des suites $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ telles que $\mathfrak{z}^1 = -1$ et $\mathfrak{z}^n \in \mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}_{-1}^{\aleph_0}$. $\Lambda(\mathcal{X})$ désigne l'ensemble obtenu en unissant le point 0 (l'origine des axes) à chacun des points x de $\mathcal{X}$ par un segment rectiligne [1]), c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme tx où $x \in \mathcal{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. Si $\mathcal{X}$ est vide, nous admettons que $\Lambda(\mathcal{X})$ est l'origine des axes.

8. *Soit* $\mathcal{X}$ *un espace compact. Pour que* f *soit homotope à une constante* c, *il faut et il suffit que* f *admette une extension* $f^* \in \mathcal{Y}^{\Lambda(\mathcal{X})}$ *où* $f^*(0) = c$.

En effet, la fonction tx est continue sur $\mathcal{X} \times \mathcal{J}$ et, abstraction faite des points où $t = 0$, elle est bicontinue. Par conséquent, si $f \subset f^* \in \mathcal{Y}^{\Lambda(\mathcal{X})}$ et si l'on pose $h(x,t) = f^*(tx)$, il vient

$$h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}}, \quad h(x,0) = f^*(0) \quad \text{et} \quad h(x,1) = f^*(x) = f(x),$$

d'où $f \simeq f^*(0)$.

Réciproquement, si $h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{J}}$, $h(x,1) = f(x)$ et $h(x,0) = c$, on posera $f^*(0) = c$ et $f^*(z) = h(x,t)$ pour $z = tx \neq 0$. Il vient $f \subset f^* \in \mathcal{Y}^{\Lambda(\mathcal{X})}$.

9. $(x|\mathcal{S}_n)$ *non* $\simeq 1$ *relativement à* $\mathcal{S}_n$.

C'est une conséquence du th. 8, rapproché du th. 2 du § 23, III.

Ajoutons les formules évidentes

$$(3) \quad \Lambda(A+B) = \Lambda(A) + \Lambda(B), \qquad (4) \quad \Lambda(AB) = \Lambda(A) \cdot \Lambda(B),$$

$$(5) \quad \dim \Lambda(A) \leqslant \dim A + 1, \qquad (6) \quad \Lambda(\mathcal{S}_n) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Q}_{n+1}.$$

[1]) Cf. S. Lefschetz, *Introduction to Topology*, Princeton 1949, p. 94 (Joins).

II. Homotopie relative aux espaces l. c. n.

Nous allons considérer le cas où l'espace $\mathcal{Y}$ est l. c. n. Bien entendu, tous les théorèmes seront applicables en particulier aux rétractes absolus de voisinage; plus encore, dans le dernier cas, les hypothèses concernant la dimension (par exemple, $\dim(\mathcal{X}-F)\leqslant n-1$) pourront être omises.

1. *Soient: $\mathcal{Y}$ un espace l. c. n, $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$,* $\dim(\mathcal{X}-F)\leqslant n-1$ *et $f_0,f_1\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Si $(f_0|F)\simeq(f_1|F)$, il existe un ensemble ouvert $G\supset F$ tel que $(f_0|G)\simeq(f_1|G)$.*

Si $\mathcal{Y}$ est en outre, i. c. n. on a $f_0\simeq f_1$.

Posons, en effet,

$$\mathcal{X}_1=\mathcal{X}\times\mathcal{I},\ F_1=F\times\mathcal{I}+\mathcal{X}\times 0+\mathcal{X}\times 1 \quad \text{et} \quad g\in\mathcal{Y}^{F_1} \text{ où } g(x,j)=f_j(x).$$

Comme $\dim(\mathcal{X}_1-F_1)\leqslant\dim[(\mathcal{X}-F)\times\mathcal{I})]\leqslant n$ et $\mathcal{Y}$ est l. c. n, il existe d'après § 48, IV, 1 (3), un ensemble ouvert $G_1\supset F_1$ et une extension $g^*\in\mathcal{Y}^{G_1}$ de g. Soit G un ensemble ouvert tel que $F\subset G$ et $G\times\mathcal{I}\subset G_1$ (cf. § 37, III, 7). Il vient $(f_0|G)\simeq(f_1|G)$.

Si $\mathcal{Y}$ est i. c. n, on posera $G_1=\mathcal{X}_1$.

De là résulte que

2. *Étant donnés: un espace compact $\mathcal{X}$ de dimension $\leqslant n-1$, un espace $\mathcal{Y}$ l. c. n et deux fonctions $f_0,f_1\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, la famille des sous-ensembles fermés F de $\mathcal{X}$ tels que $f_0|F\simeq f_1|F$ est ouverte dans l'espace $2^{\mathcal{X}}$.*

Car elle est la somme des familles $\mathfrak{A}_G=\underset{F}{E}(F\subset G)$ où G est un ensemble ouvert variable tel que $f_0|G\simeq f_1|G$ (la famille $\mathfrak{A}_G$ est ouverte d'après § 38, II (6)).

Dans les mêmes hypothèses, on en conclut que

2a. *Si $F_1\supset F_2\supset\ldots$, $F_n=\overline{F}_n$ et $(f_0|F_n)$ non $\simeq(f_1|F_n)$ pour tout n, on a*

$$(f_0|\prod_n F_n) \text{ non } \simeq(f_1|\prod_n F_n).$$

3 [1]. *Soient $\mathcal{Y}$ un espace l. c. n, $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$,* $\dim(\mathcal{X}-F)\leqslant n-1$ *et $f_0,f_1\in\mathcal{Y}^F$. Soit $f_0\simeq f_1$. Si f_0 admet une extension f_0^* sur $\mathcal{X}$, f_1 admet aussi une extension f_1^* sur $\mathcal{X}$. De plus $f_0^*\simeq f_1^*$.*

Posons $F^0=F\times\mathcal{I}+\mathcal{X}\times 0$. Comme $f_0\simeq f_1$, il existe une fonction $h\in\mathcal{Y}^{F^0}$ telle que

$$h(x,0)=f_0^*(x) \text{ pour } x\in\mathcal{X},\quad h(x,1)=f_1(x) \text{ pour } x\in F.$$

[1]) K. Borsuk, Ann. Soc. Pol. Math. **16** (1937), p. 218.

$\mathcal{Y}$ étant l. c. n, l'inégalité $\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{I}-F^0)\leqslant n$ implique (cf. § 48, IV, 1 (3)) que la fonction h admet une extension sur un entourage de l'ensemble F^0, donc — d'après le lemme 9 du § 48, III — une extension h^* sur l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{I}$.

Il ne reste qu'à poser $f_1^*(x)=h^*(x,1)$.

4. *Soient: $\mathcal{X}$ compact, $\mathcal{Y}$ l. c. n et $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$. Si* $\dim\mathcal{X}\leqslant n-1$, *l'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|F$ (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{Y}^F$ prolongeables sur $\mathcal{X}$) est fermé-ouvert dans $\mathcal{Y}^F$* [1]).

En effet, l'espace $\mathcal{Y}^F$ étant localement connexe par arcs d'après § 48, IV (12), toute composante Φ de $\mathcal{Y}^F$ est connexe par arcs (§ 45, I, 2). Par conséquent (cf. I, 6), si $f_0,f_1\in\Phi$, on a $f_0\simeq f_1$; donc, si $f_0\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|F$, on a, d'après 3, $\Phi\subset\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|F$. Autrement dit, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|F$ est somme d'une famille de composantes de l'espace $\mathcal{Y}^F$. Cet espace étant localement connexe, toute composante est fermée-ouverte (cf. § 44, II, 4); $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|F$ l'est donc également.

Remarque. Dans le cas où $\mathcal{Y}$ est la surface d'une sphère, on a l'énoncé plus précis suivant:

4 a. *Soient $\mathcal{X}$ compact et $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$. Si $f_0\in\mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}|F$ et $|f_1-f_0|<2$, on a $f_1\in\mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}|F$.*

En vertu du th. 3, il suffit de démontrer que

(1) *Si $f_0\in\mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}$, $f_1\in\mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}$ et $|f_0-f_1|<2$, f_0 et f_1 sont homotopes.*

Posons

$$p(x,t)=f_0(x)+tf_1(x)-tf_0(x) \quad \text{et} \quad h(x,t)=\frac{p(x,t)}{|p(x,t)|} \quad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Il vient $p(x,t)\neq 0$. Car

$$|p(x,t)|\geqslant|f_0(x)|-t\,|f_1(x)-f_0(x)|>1-2t,$$

et

$$|p(x,t)|\geqslant|f_1(x)|-(1-t)|f_1(x)-f_0(x)|>1-2(1-t).$$

En outre, $h(x,0)=f_0(x)$ et $h(x,1)=f_1(x)$.

5. *Soient: $\mathcal{Y}$ un espace l. c. n et i. c. m (où $m\leqslant n$), F,F_0 et F_1 trois sous-ensembles fermés de $\mathcal{X}$ tels que:*

(2) $F\subset F_0\cdot F_1$, (3) $\dim(F_j-F)\leqslant n-1$, (4) $\dim(F_0\cdot F_1-F)\leqslant m-1$.

On a alors $(\mathcal{Y}^{F_0}|F)\cdot(\mathcal{Y}^{F_1}|F)=(\mathcal{Y}^{F_0+F_1}|F)$, c'est-à-dire que toute fonction $f\in\mathcal{Y}^F$ prolongeable sur F_0 et sur F_1 est prolongeable sur F_0+F_1.

[1]) K. Borsuk, *Sur les prolongements des transformations continues*, Fund. Math. **28** (1937), p. 106.

Posons $f \subset f_j \in \mathcal{Y}^{F_j}$, $j=0,1$. $\mathcal{Y}$ étant l. c. m et i. c. m, les formules (3) et $f_0|F=f=f_1|F$ impliquent d'après 1 (en substituant m à n et $F_0 \cdot F_1$ à $\mathcal{X}$) que $(f_0|F_0\cdot F_1) \simeq (f_1|F_0\cdot F_1)$. Il en résulte d'après 3 (en substituant F_0 à $\mathcal{X}$, $F_0\cdot F_1$ à F et $f_j|F_0\cdot F_1$ à f_j) que la fonction $f_1|F_0\cdot F_1$ admet une extension $f_2 \in \mathcal{Y}^{F_0}$. On a donc $f \subset (f_2+f_1) \in \mathcal{Y}^{F_0+F_1}$.

6. *Soient: $\mathcal{Y}$ un espace l. c. n et i. c. m (où $m \leqslant n$),* $\dim \mathcal{X} \leqslant n-2$, $\mathcal{X}=F_0+F_1$, $\overline{F}_j=F_j$ *et* $\dim F_0\cdot F_1 \leqslant m-2$.

Si $f_j \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et $(f_0|F_j) \simeq (f_1|F_j)$ pour $j=0,1$, on a $f_0 \simeq f_1$.

Posons: $\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \times \mathcal{J}$, $F^* = \mathcal{X} \times (0) + \mathcal{X} \times (1)$, $F_j^* = F^* + F_j \times \mathcal{J}$. Définissons sur F^* la fonction f en posant $f(x,j)=f_j(x)$. Donc $f \in \mathcal{Y}^{F^*}$. Comme $(f_0|F_j) \simeq (f_1|F_j)$, on a $f \in (\mathcal{Y}^{F_0^*}|F^*)\cdot(\mathcal{Y}^{F_1^*}|F^*)$. Les hypothèses du th. 5 étant réalisées, il vient

$$f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}^*}|F^*, \quad \text{puisque} \quad \mathcal{X}^* = F_0^* + F_1^*, \quad \text{d'où} \quad f_0 \simeq f_1.$$

Les théorèmes 3, 5 et 6 impliquent aussitôt (cf. § 48, III, 4° et V, 2) les trois corollaires suivants:

7. *Si $F=\overline{F} \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est un r. a. v., toute fonction $f \in \mathcal{Y}^F$ homotope à une constante admet une extension $f^* \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

8. *Si $F=\overline{F}$, $F_j=\overline{F}_j$, $F \subset F_0\cdot F_1$ et $\dim(F_0\cdot F_1 - F) \leqslant m-1$, on a*

$$(\mathcal{S}_m^{F_0}|F)\cdot(\mathcal{S}_m^{F_1}|F) = (\mathcal{S}_m^{F_0+F_1}|F).$$

9. *Si $F_j=\overline{F}_j$, $\dim F_0\cdot F_1 \leqslant m-2$, $f \in \mathcal{S}_m^{F_0+F_1}$ et $f|F_j \simeq 1$ pour $j=0,1$, on a alors $f \simeq 1$.*

10. *Soient $\mathcal{Y}$ un espace complet l. c. n et $\mathcal{X}$ un espace compact de dimension $<n$. Soit $f,g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Pour que l'on ait $f \simeq g$, il faut et il suffit que f et g appartiennent à la même composante de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

En effet, d'après le corollaire 2 du § 48, IV, l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est localement connexe. D'après § 38, VI, 6, il est complet. Par conséquent, toute composante de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est un ensemble connexe, localement connexe et complet, donc (cf. § 45, II, 1 et I, 2) connexe par arcs. On en déduit le th. 10 en tenant compte de I, 6.

III. Relation f_0 *irr non* $\simeq f_1$. Ce symbole signifie que l'espace $\mathcal{X}$ est irréductible par rapport à la non-homotopie des fonctions f_0 et f_1, c'est-à-dire que

(1) f_0 *non* $\simeq f_1$, (2) $F=\overline{F} \neq \mathcal{X}$ entraîne $f_0|F \simeq f_1|F$.

Comme $\mathcal{S}_n - p$ est un r. a., on a (cf. I, 9 et I, 2°):

(3) $(x|\mathcal{S}_n)$ *irr non* $\simeq 1$ *relativement à* $\mathcal{S}_n$.

1. *Soient: $\mathcal{X}$ compact,* $\dim \mathcal{X} \leqslant n-1$, *$\mathcal{Y}$ l. c. n et $f_0, f_1 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Si f_0 non $\simeq f_1$, $\mathcal{X}$ contient un ensemble fermé F tel que $f_0|F$ irr non $\simeq f_1|F$.*

C'est une conséquence directe des théorèmes II, 2a et § 38, V, 2.

1'. *Corollaire. Si $\mathcal{X}$ est compact, $f \in \mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}$ et f non $\simeq 1$, $\mathcal{X}$ contient un ensemble fermé F tel que $f|F$ irr non $\simeq 1$.*

2. *Soient: $\mathcal{Y}$ un espace l. c. n et i. c. m,* $\dim \mathcal{X} \leqslant n-2$ *et $f_0, f_1 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Si f_0 irr non $\simeq f_1$, aucun ensemble fermé de dimension $\leqslant m-2$ ne sépare l'espace $\mathcal{X}$;* autrement dit: *$\mathcal{X}$ ne se laisse pas représenter sous la forme $\mathcal{X}=F_0+F_1$, $F_j=\overline{F}_j$ et* $\dim F_0\cdot F_1 \leqslant m-2$.

C'est une conséquence directe du th. II, 6.

2'. *Corollaire. Si $f \in \mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}$ et f irr non $\simeq 1$, aucun ensemble fermé de dimension $\leqslant m-2$ ne sépare $\mathcal{X}$.*

En conséquence (cf. (3)): $\mathcal{S}_n$ est une multiplicité cantorienne (cf p. 105).

3. *Si $\mathcal{X}$ est un continu localement connexe, $f \in \mathcal{S}_m^{\mathcal{X}}$, $m \geqslant 2$* [1]) *et $f|E \simeq 1$ pour tout élément cyclique E de $\mathcal{X}$, on a alors $f \simeq 1$.*

Car, dans le cas contraire, il existe d'après 1' un ensemble fermé F tel que $f|F$ *irr non* $\simeq 1$. D'après 2', F est connexe et n'est séparé par aucun point. Donc (cf. § 47, II, 10) F est contenu dans un seul élément cyclique E. Comme $f|E \simeq 1$, il vient $f|F \simeq 1$, contrairement à la définition de F.

IV. Déformation. Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. Si la fonction $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est homotope à l'identité, c'est-à-dire, s'il existe une fonction $h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$ telle que

(1) $$h(x,0)=x \quad \text{et} \quad h(x,1)=f(x),$$

on dit que l'ensemble $f(\mathcal{X})$ s'obtient de $\mathcal{X}$ par une *déformation* dans $\mathcal{Y}$ (à savoir, h est cette déformation).

Si la fonction $f \in \mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ est une *rétraction* homotope à l'identité, l'ensemble $f(\mathcal{X})$ est dit un *rétracte par déformation* de $\mathcal{X}$ et la fonction h est dite une *déformation rétractante* [2]).

1. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^*$ deux sous-ensembles de $\mathcal{Y}$ dont le deuxième s'obtient du premier par une déformation. Soit $g_0, g_1 \in \mathcal{Z}^{\mathcal{Y}}$. Si $g_0|\mathcal{X}^* \simeq g_1|\mathcal{X}^*$, on a $g_0|\mathcal{X} \simeq g_1|\mathcal{X}$.*

[1]) Le th. 3 est vrai aussi pour $m=1$. Voir § 51, X, 5.

[2]) Voir K. Borsuk, Fund. Math. **21** (1933), p. 91.

Conformément à l'hypothèse, soient $f \in (\mathcal{X}^*)^{\mathcal{X}}$ et $h \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$ deux fonctions satisfaisant à (1) et telles que $f(\mathcal{X})=\mathcal{X}^*$. Il vient

$$g_j h \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}, \quad g_j h(x,0)=g_j(x) \quad \text{et} \quad g_j h(x,1)=g_j f(x),$$

d'où $g_j|\mathcal{X} \simeq g_j f$. Posons $g_j^* = g_j|\mathcal{X}^*$. On a par hypothèse $g_0^* \simeq g_1^*$, donc $g_0^* f \simeq g_1^* f$ d'après I, 4. Comme $g_j^* f = g_j f \simeq g_j|\mathcal{X}$, il vient $g_0|\mathcal{X} \simeq g_1|\mathcal{X}$.

2. *$\Lambda(\mathcal{X})$ se laisse déformer dans soi en son sommet (le point 0).*

En effet, les points z de $\Lambda(\mathcal{X})$ étant de la forme $z=tx$, où $x \in \mathcal{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, posons $h(z,u)=utx$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1$. Il vient

$$h \in \Lambda(\mathcal{X})^{\Lambda(\mathcal{X})\times\mathcal{J}}, \quad h(z,0)=0 \quad \text{et} \quad h(z,1)=z.$$

3. *Tout rétracte de $\mathcal{X}$ qui s'obtient de $\mathcal{X}$ par une déformation est un rétracte par déformation de $\mathcal{X}$.*

Soient, conformément aux hypothèses:

$$r \in R^{\mathcal{X}}, \quad r(x)=x \quad \text{pour} \quad x \in R,$$
$$f \in R^{\mathcal{X}}, \quad h \in R^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}, \quad h(x,0)=x, \quad h(x,1)=f(x).$$

Posons

$$g(x,t)=\begin{cases} h(x,2t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ r[h(x,2-2t)] & \text{pour} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Il vient

$$g(x,0)=x, \quad g(x,1)=r(x) \quad \text{et} \quad g \in R^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$$

puisque $h(x,1)=r[h(x,1)]$.

4. *Si $\mathcal{X}\times\mathcal{J}\,\tau\,\mathcal{Y}$ (donc, si $\mathcal{Y}$ est un rétracte absolu) et $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ est déformable en $f(\mathcal{X})$.*

Car f est homotope à l'identité (cf. I, 2°).

Exemples. 1°. Si $\mathcal{Y}=\mathcal{E}^n$ ou bien $\mathcal{Y}=\mathcal{J}^n (n \leqslant \aleph_0)$, la déformation de $\mathcal{X}$ en $f(\mathcal{X})$ dans $\mathcal{Y}$ peut être définie comme suit:

$$h(x,t)=(1-t)\cdot x + t\cdot f(x).$$

2°. Posons $f(x)=x:|x|$. La fonction $h(x,t)$ est alors une déformation rétractante de l'espace $(\mathcal{E}^n - 0)$ en $\mathcal{S}_{n-1}$.

V. Contractilité. $\mathcal{X}$ est dit *contractile relativement à* $\mathcal{Y}$ lorsque toute fonction $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est homotope à une constante [1]).

[1]) K. Borsuk, Fund. Math. **24** (1935), p. 250. Cf. L. Lusternik et L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Actual. Scient. **188**, p. 25.

1. *Si $\mathcal{Y}$ est connexe par arcs, la contractilité de $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{Y}$ signifie que chaque couple $f_0, f_1 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est homotope (dans $\mathcal{Y}$).*

Car, dans un espace connexe par arcs, toutes les fonctions constantes sont homotopes (cf. I, 7).

2. *La contractilité de $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{Y}$, rapprochée de la connexité par arcs de $\mathcal{Y}$, équivaut à la connexité par arcs de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

En effet, la contractilité de $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{Y}$, rapprochée de la connexité par arcs de $\mathcal{Y}$, implique (cf. th. 1) que $f_0 \simeq f_1$ pour chaque couple $f_0, f_1 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. L'homotopie $f_0 \simeq f_1$ entraîne (cf. I, 6) l'existence d'un arc unissant f_0 à f_1 dans $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Réciproquement, si $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est connexe par arcs, on a $f_0 \simeq f_1$ pour tout couple $f_0, f_1 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (d'après I, 6). $\mathcal{X}$ est donc contractile relativement à $\mathcal{Y}$ et, d'après I, 7, $\mathcal{Y}$ est connexe par arcs.

3. *La contractilité de $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{Y}$ est invariante par rapport à la rétraction de $\mathcal{X}$.*

Soient, en effet, r une rétraction de $\mathcal{X}$ et $f \in \mathcal{Y}^{r(\mathcal{X})}$. Donc $fr \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et, $\mathcal{X}$ étant contractile relativement à $\mathcal{Y}$, on a $fr \simeq const.$ Il vient $f \simeq const.$, puisque $f(x)=fr(x)$ pour $x \in r(\mathcal{X})$.

4. *La non-contractilité de $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{Y}$ est invariante par rapport à la déformation de $\mathcal{X}$ en sous-ensemble.*

C'est une conséquence directe du th. IV, 1.

Les énoncés 3 et 4 impliquent aussitôt le suivant:

4'. *Soit $\mathcal{X}^*$ un rétracte par déformation de $\mathcal{X}$. Pour que $\mathcal{X}^*$ soit contractile relativement à $\mathcal{Y}$, il faut et il suffit que $\mathcal{X}$ le soit.*

5. *$\mathcal{Y}$ étant un rétracte absolu de voisinage, la non-contractilité d'un espace compact $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{Y}$ est invariante par rapport aux transformations à petites tranches [1]).*

En vertu du § 37, VIII, 3, il s'agit de démontrer que, si $\mathcal{X}=\overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{J}^{\aleph_0}$ et si la fonction $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ n'est pas homotope à une constante, il existe un $\alpha > 0$ tel que, quelle que soit la fonction $g \in (\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$ satisfaisant à l'inégalité $|g(x)-x| < \alpha$ pour chaque x, l'ensemble $g(\mathcal{X})$ n'est pas contractile relativement à $\mathcal{Y}$.

[1]) Théorème de K. Borsuk et S. Ulam, *Über gewisse Invarianten der ε-Abbildungen*, Math. Ann. **108** (1933), p. 311. Pour la démonstration, voir S. Eilenberg, C. R. Paris, **200** (1935), p. 1005. Voir aussi P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932), p. 226.

Or, $\mathcal{Y}$ étant un r. a. v., il existe un entourage ouvert G de $\mathfrak{X}$ et une extension $f^* \in \mathcal{Y}^G$ de f. Posons $\alpha = \varrho(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{\aleph_0} - G)$. Les conditions $x \in \mathfrak{X}$, $x' \in \mathcal{J}^{\aleph_0}$ et $|x-x'|<\alpha$ impliquent donc que le segment xx' est contenu dans G. Par conséquent, si $g \in (\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ et $|g(x)-x|<\alpha$, l'ensemble $\mathfrak{X}^* = g(\mathfrak{X})$ s'obtient de $\mathfrak{X}$ par la déformation dans G, définie comme suit:

$$h(x,t) = (1-t)x + t\cdot g(x).$$

Il vient $f^*|\mathfrak{X}^*$ *non* $\simeq$ *const.* Car, autrement, on déduirait de IV, 1 (en y remplaçant $\mathcal{Y}$ par G, $\mathcal{Z}$ par $\mathcal{Y}$ et g_0 par f^*) que $f^*|\mathfrak{X} \simeq$ *const.*, c'est-à-dire que $f \simeq$ *const.*, contrairement à l'hypothèse.

Remarque. Dans le cas où $\mathcal{Y} = \mathcal{S}_n$ on a l'énoncé plus précis suivant [1]):

Soient: $\mathfrak{X}$ un espace compact, $g \in \mathcal{S}_n^{\mathfrak{X}}$ une fonction non homotope à une constante, η un nombre positif tel que

$$|x-x'|<\eta \quad \textit{entraîne} \quad |g(x)-g(x')| < \sqrt{2(n+2)/(n+1)} \text{ [2])}.$$

f étant une fonction continue à tranches $<\eta$, l'espace $f(\mathfrak{X})$ est non-contractile relativement à $\mathcal{S}_n$.

6. *$\mathcal{Y}$ étant un rétracte absolu de voisinage et A_0 et A_1 étant deux ensembles fermés tels que $A_0 \cdot A_1$ et $A_0 + A_1$ sont contractiles relativement à $\mathcal{Y}$, A_0 et A_1 le sont également.*

Soit, en effet, $f_0 \in \mathcal{Y}^{A_0}$. Par hypothèse, la fonction partielle $f_0|A_0\cdot A_1$ est homotope à une constante. Elle admet donc (cf. II, 7) une extension $f_1 \in \mathcal{Y}^{A_1}$. Posons $f = f_0 + f_1$. Comme $(f_0|A_0\cdot A_1) = (f_1|A_0\cdot A_1)$, on a $f \in \mathcal{Y}^{A_0+A_1}$. Par hypothèse, f est homotope à une constante; il en est donc de même de f_0.

Les théorèmes II, 9 et III, 2′ entraînent les énoncés 7 et 8 suivants:

7. *Soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés tels que* $\dim A_0\cdot A_1 \leqslant m-2$. *Si A_0 et A_1 sont contractiles relativement à $\mathcal{S}_m$ $(m \geqslant 1)$, $A_0 + A_1$ l'est également* [3]).

[1]) Voir ma note de Fund. Math. **20** (1933), p. 208.

[2]) C'est la longueur de l'arête d'un simplexe régulier à $n+1$ dimensions inscrit dans $\mathcal{S}_n$.

[3]) Comme on verra au § 52, I, 5, la condition $\dim A_0\cdot A_1 \leqslant m-2$ peut être remplacée dans le cas $m=1$ par la condition moins restrictive de contractilité de $A_0\cdot A_1$ relative à $\mathcal{S}_{m-1}$ (qui équivaut alors à la connexité de $A_0\cdot A_1$). Le cas $m=2$ est différent: en décomposant $\mathcal{S}_3$ en demi-sphères, leur produit $\mathcal{S}_2$ est contractile relativement à $\mathcal{S}_1$, bien que $\mathcal{S}_3$ ne l'est pas relativement à $\mathcal{S}_2$. Voir la remarque p. 285.

8. *Si $\mathfrak{X}$ est irréductible par rapport à la non-contractilité relative à $\mathcal{S}_m$ (de sorte que tout vrai sous-ensemble fermé de $\mathfrak{X}$ est contractile relativement à $\mathcal{S}_m$), aucun ensemble fermé de dimension $\leqslant m-2$ ne sépare cet espace* [1]).

9. *Soit $\mathcal{Y}$ un rétracte absolu de voisinage. Si chacun des ensembles compacts $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$ est contractile relativement à $\mathcal{Y}$, le produit $P = A_0\cdot A_1 \cdot \ldots$ l'est également.*

Soient, en effet, $f \in \mathcal{Y}^P$ et f^* une extension de f sur un entourage E de P. Les ensembles A_i étant compacts, on a $A_i \subset E$ pour i suffisamment grand. Par hypothèse, la fonction $f^*|A_i$ est homotope à une constante; il en est donc de même de f, puisque $f = f^*|P \subset f^*|A_i$.

10. *Pour qu'un continu localement connexe soit contractile relativement à $\mathcal{S}_m$ $(m \geqslant 2)$* [2]), *il faut et il suffit que tous ses éléments cycliques le soient* [3]).

La condition est nécessaire d'après les théorèmes 3 et § 48, III, 15. Elle est suffisante en vertu de III, 3.

11. *Pour que $\mathcal{Y}$ soit intégralement connexe en dimension n, il faut et il suffit que $\mathcal{S}_n$ soit contractile relativement à $\mathcal{Y}$.*

Car la connexité intégrale en dimension n veut dire que

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n} = \mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}}|\mathcal{S}_n, \quad \text{donc que} \quad \mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n} = \mathcal{Y}^{\Lambda(\mathcal{S}_n)}|\mathcal{S}_n,$$

puisque $\mathcal{Q}_{n+1} \underset{\text{top}}{=} \Lambda(\mathcal{S}_n)$, donc que $\mathcal{S}_n$ soit contractile relativement à $\mathcal{Y}$ (cf. I, 8).

Remarque. Le problème s'impose de déterminer les indices m et n tels que la sphère $\mathcal{S}_m$ soit contractile relativement à la sphère $\mathcal{S}_n$.

Citons, à titre d'exemple, que $\mathcal{S}_5$ est contractile relativement à $\mathcal{S}_2$, tandis que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ ne le sont pas. $\mathcal{S}_{n+2}$ est contractile relativement à $\mathcal{S}_n$ pour $n \geqslant 3$, $\mathcal{S}_{2n-1}$ ne l'est pas pour n pair [4]).

La contractilité des espaces (arbitraires) relative à $\mathcal{S}_1$ sera étudiée au § 52.

[1]) Voir P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932), p. 161.

[2]) Le th. 10 est vrai aussi pour $m=1$. Voir § 51, X, 5.

[3]) Borsuk, Fund. Math. **18** (1932), p. 206.

[4]) La non-contractilité de $\mathcal{S}_3$ relativement à $\mathcal{S}_2$ et de $\mathcal{S}_{2n-1}$ relativement à $\mathcal{S}_n$ (pour n pair) a été établie par H. Hopf. Voir de cet auteur, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. **104** (1931), p. 639, et *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension*, Fund. Math. **25** (1935), p. 427.

Pour les autres résultats et pour plus de détail, voir: S. Eilenberg, *Lectures in Topology* edited by Wilder and Ayres, Ann. Arbor 1941, p. 57, et

VI. Espaces contractiles dans soi. Nous appelons ainsi tout espace qui est contractile relativement à lui-même.

1. *Tout espace contractile dans soi est connexe par arcs*[1].

L'identité étant homotope, par hypothèse, à une constante, posons:

$$h \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{J}}, \quad h(x,0)=x, \quad h(x,1)=c. \tag{0}$$

Soit $p \in \mathfrak{X}$. Posons $f(t)=h(p,t)$. Il vient

$$f \in \mathfrak{X}^{\mathcal{J}}, \quad f(0)=p \quad \text{et} \quad f(1)=c.$$

Le point c peut donc être uni à tout point p de $\mathfrak{X}$ par un continu localement connexe, donc par un arc.

2. *Les cinq conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\mathfrak{X}$ *est contractile dans soi,*

(2) $\mathfrak{X}$ *est déformable en un seul point,*

(3) $\mathfrak{X}$ *est contractile relativement à tout* $\mathcal{Y}$,

(4) *tout* $\mathcal{T}$ *est contractile relativement à* $\mathfrak{X}$,

(5) $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ *est connexe par arcs.*

(1) entraîne (2), car la condition (1) implique que l'identité (sur $\mathfrak{X}$) est homotope à une constante.

(2) entraîne (3). Soit, en effet, $f \in \mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$. La fonction h étant assujettie aux conditions (0), il vient $f \simeq f(c)$, car

$$fh \in \mathcal{Y}^{\mathfrak{X}\times\mathcal{J}}, \quad fh(x,0)=f(x) \quad \text{et} \quad fh(x,1)=f(c).$$

(2) entraîne (4). Soit, en effet, $f \in \mathfrak{X}^{\mathcal{T}}$. La fonction h étant assujettie aux conditions (0), posons

$$g(t,u)=h[f(t),u], \quad \text{où} \quad u \in \mathcal{J}.$$

Il vient $f \simeq c$. Car

$$g \in \mathfrak{X}^{\mathcal{T}\times\mathcal{J}}, \quad g(t,0)=f(t) \quad \text{et} \quad g(t,1)=c.$$

Les implications (3)→(1) et (4)→(1) sont évidentes. Enfin l'équivalence (5)≡(1) est une conséquence directe de V, 2 et de 1.

Ann. of Math. **41** (1940), p, 662, H. Freudenthal, Comp. Math. **5** (1937), p. 299, et Proc. Akad. Amsterdam **42** (1939), p. 139, W. Hurewicz, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), p. 112, L. Pontrjagin, C. R. Acad. Sc. U. R. S. S. **19** (1938), p. 147 et 361, et Matem. Sbornik **9** (1941), p. 331.

[1]) C'est un cas particulier de l'énoncé 4.

3. *Tout rétracte absolu et tout ensemble* $\Lambda(\mathfrak{X})$ *est contractile dans soi.*

C'est une conséquence de (2) en vertu des énoncés 4 et 2 du N° IV.

4. *Tout espace* $\mathfrak{X}$ *contractile dans soi est intégralement connexe en toute dimension* $n=0,1,2,\ldots$

D'après 2 (4), $\mathcal{S}_n$ est contractile dans $\mathfrak{X}$, d'où la conclusion demandée en vertu de V, 11.

VII. Contractilité locale. $\mathcal{Y}$ est dit *contractile dans soi au point* y_0 lorsqu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que chaque ensemble A, pour lequel $\delta(y_0+A)<\eta$, se laisse déformer en y_0 dans la sphère S de centre y_0 et de rayon ε, c'est-à-dire, si l'identité, considérée comme définie sur A, est homotope à y_0 relativement à S[1]).

$\mathcal{Y}$ est dit *localement contractile dans soi* lorsqu'il est contractile dans soi en chaque point.

1. *Si* $\mathcal{Y}$ *est contractile dans soi au point* y_0, *à tout* $\varepsilon>0$ *correspond un* $\eta>0$ *tel que, quel que soit l'espace compact* $\mathfrak{X}$, *toute fonction* $f \in \mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, *pour laquelle on a* $\delta[y_0+f(\mathfrak{X})]<\eta$ *admet une extension* $f^* \in \mathcal{Y}^{\Lambda(\mathfrak{X})}$ *telle que*

$$f^*(0)=y \quad \text{et} \quad \delta\{y_0+f^*[\Lambda(\mathfrak{X})]\}<\varepsilon. \tag{i}$$

En effet, l'identité étant homotope sur $f(\mathfrak{X})$ à y_0 relativement à la sphère S de centre y_0 et de rayon ε, on a $f\simeq y_0$ relativement à S. Les formules (i) en résultent d'après I, 8 (pour $\mathcal{Y}=S$).

2. *La contractilité dans soi au point* y_0 *entraîne la connexité locale en ce point en toute dimension* $n=0,1,2,\ldots$

On n'a, en effet, qu'à substituer $\mathcal{S}_n$ à $\mathfrak{X}$ dans 1, en tenant compte de l'homéomorphie $\Lambda(\mathcal{S}_n) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Q}_{n+1}$.

3. *Tout espace localement contractile dans soi est l. c. n, et tout espace localement et intégralement contractile dans soi est l. c. n et i. c. n, pour tout* $n=0,1,2,\ldots$

C'est une conséquence du th. 2, rapproché de VI, 4.

---

[1]) Cette notion est due à K. Borsuk. Voir Fund. Math. **19** (1932), p. 236.

4. *La condition* $(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ *implique que* $\mathcal{Y}$ *est localement contractile dans soi.*

La condition $(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\,\tau\,\mathcal{Y}$ *implique que* $\mathcal{Y}$ *est intégralement et localement contractile dans soi.*

Soient, en effet, $y_0\in\mathcal{Y}$ et $F_1,F_2,\dots$ une suite d'entourages fermés de y_0 tels que

$$\text{(ii)}\qquad \lim_{n=\infty}\delta(F_n)=0.$$

Soit $\varepsilon>0$. Il s'agit de démontrer, qu'il existe pour n fixe et suffisamment grand, une déformation continue $h\in\mathcal{Y}^{F_n\times\mathcal{J}}$ de F_n en y_0 telle que $\delta[h(F_n\times\mathcal{J})]<\varepsilon$. Soit

$$F=F_1\times(0)+F_2\times\left(\frac{1}{2}\right)+\dots+F_n\times\left(\frac{n-1}{n}\right)+\dots+\mathcal{Y}\times(1).$$

On a donc $F=\overline{F}\subset\mathcal{Y}\times\mathcal{J}$. Posons

$$f\left(y,\frac{n-1}{n}\right)=y\quad\text{pour}\quad y\in F_n,\quad\text{et}\quad f(y,1)=y_0\quad\text{pour}\quad y\in\mathcal{Y}.$$

Il vient $f\in\mathcal{Y}^F$ en vertu de (ii).

Comme $(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\,\tau_v\,\mathcal{Y}$, il existe un entourage ouvert G de F et une extension $f^*\in\mathcal{Y}^G$ de f. G étant ouvert, il existe (cf. § 24, IV, 3) un entourage ouvert H de y_0 (dans $\mathcal{Y}$) et un intervalle fermé $J=\langle t_0,1\rangle$ tels que $H\times J\subset G$. On peut supposer, en outre (la fonction f^* étant continue) que ces ensembles sont suffisamment petits pour que l'on ait $\delta[f^*(H\times J)]<\varepsilon$.

Considérons un n tel que $(n-1)/n>t_0$ et que $F_n\subset H$ (cf. (ii)). En posant $J_n=\left\langle\frac{n-1}{n},1\right\rangle$, on a donc

$$F_n\times J_n\subset H\times J,\quad\text{d'où}\quad \delta[f^*(F_n\times J_n)]<\varepsilon.$$

Posons

$$h(y,t)=f^*\left(y,\frac{t+n-1}{n}\right)\quad\text{où}\quad y\in F_n\quad\text{et}\quad t\in\mathcal{J}.$$

Il vient

$$h(y,0)=f^*\left(y,\frac{n-1}{n}\right)=f\left(y,\frac{n-1}{n}\right)=y,\qquad h(y,1)=f^*(y,1)=y_0,$$

$$h\in\mathcal{Y}^{F_n\times\mathcal{J}}\quad\text{et}\quad \delta[h(F_n\times\mathcal{J})]=\delta[f^*(F_n\times J_n)]<\varepsilon.$$

La contractilité locale de $\mathcal{Y}$ se trouve ainsi établie.

Enfin, la condition $(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\,\tau\,\mathcal{Y}$ implique l'existence d'une fonction $f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}\times\mathcal{J}}$ telle que $f(y,0)=y$ et $f(y,1)=y_0$, d'où la contractilité intégrale de $\mathcal{Y}$ (cf. VI (2)).

De là résulte directement que

5. *Tout rétracte absolu de voisinage est localement contractile dans soi et tout rétracte absolu l'est localement et intégralement* [1]).

Pour les espaces de dimension finie, on a le théorème suivant, réciproque des théorèmes 3 et 5:

6. *Soit* $\dim\mathcal{Y}=n$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\mathcal{Y}$ *est l. c.* $n+1$,

(2) $(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\,\tau_v\,\mathcal{Y}$.

(3) $\mathcal{Y}$ *est localement contractile dans soi,*

(4) $\mathcal{Y}$ *est un rétracte absolu de voisinage.*

De façon analogue, *les conditions*:

(1′) $\mathcal{Y}$ *est l. c.* $n+1$ *et i. c.* $n+1$,

(2′) $(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\,\tau\,\mathcal{Y}$,

(3′) $\mathcal{Y}$ *est localement et intégralement contractile dans soi,*

(4′) $\mathcal{Y}$ *est un rétracte absolu,*

sont équivalentes.

(1)→(2). En effet, la condition (1), rapprochée de l'inégalité $\dim(\mathcal{Y}\times\mathcal{J})\leqslant n+1$, entraîne (2) d'après § 48, IV, 1 (4).

L'implication (2)→(3) résulte du th. 4.

(3)→(4). Posons, conformément au th. 1. du § 40, VII,

$$\mathcal{Y}\subset\mathcal{S}_{2n+1}\quad\text{et}\quad R=\mathcal{Y}+(\mathcal{Q}_{2n+2}-\mathcal{S}_{2n+1}).$$

En tant que localement connexe en dimensions $<2n+2$ (cf. 2), $\mathcal{Y}$ est un rétracte de voisinage de l'espace R (cf. § 48, IV, 1 (2)). Celui-ci étant un rétracte absolu (cf. § 48, III, 2⁰), $\mathcal{Y}$ est un r. a. v. (d'après § 48, III, 6).

L'implication (4)→(1) étant évidente, la première partie du th. 6 se trouve établie. La démonstration de sa deuxième partie est analogue.

Remarque. Le théorème 6 est en défaut pour les espaces de dimension infinie. Il existe, en effet, un espace (compact) localement et intégralement contractile dans soi qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage [2]).

---

[1]) Voir K. Borsuk, Fund. Math. **19** (1932), p. 237 et S. Lefschetz, *Topics in Topology*, Princeton 1942, p. 93.

[2]) Voir K. Borsuk, *Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage*, Fund. Math. **35** (1948), p. 175.

7. *Corollaire. Tout sous-ensemble connexe d'une dendrite est un rétracte absolu.*

Soit E un sous-ensemble connexe d'une dendrite $\mathcal{X}$. En tenant compte de l'équivalence $(1')\equiv(4')$, il suffit de montrer que E est l. c. 2 et i. c. 2. Nous allons démontrer d'abord que E est intégralement connexe en dimension 1.

Posons $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1$. Soit $f\in E^{\mathcal{S}}$. Il s'agit de définir une extension $f^*\in E^{\mathfrak{Q}_2}$ de f.

Représentons $\mathfrak{Q}_2-\mathcal{S}$ comme polygone infini P. Soit A_0 l'ensemble de ses sommets. Soit $f_0\in f(\mathcal{S})^{\mathcal{S}+A_0}$ une extension de f (cf. § 48, IV (3')). Soit A_1 la somme des arêtes du polygone P, augmentée de l'ensemble A_0. Soit $f_1\in f(\mathcal{S})^{\mathcal{S}+A_1}$ une extension de f_0 que l'on obtient en transformant la fermeture de toute arête pq en l'arc $f_0(p)\,f_0(q)$ par homéomorphie (rappelons qu'il n'existe qu'un seul arc ab dans la dendrite $f(\mathcal{S})$, cf. § 46, VI, 2). Il reste à étendre la fonction f_1 sur tout simplexe pqr à deux dimensions (du polygone P).

Or, en désignant respectivement par L, M et N les arcs $f(p)f(q)$, $f(q)f(r)$ et $f(r)f(p)$, le produit LM est connexe (d'après § 46, VI, 1) et l'on a $N\subset L+M$. Par conséquent $L+M$ (en tant que triode ou arc) est un rétracte absolu (cf. § 48, III, 1), et il existe une extension de la fonction f_1 sur le simplexe pqr, dont les valeurs appartiennent à $L+M$. Ce procédé détermine une extension $f^*\in E^{\mathfrak{Q}_2}$ de la fonction f.

Il est ainsi établi que E est i. c. 2. En vue de démontrer que E est l. c. 2, il suffit de remarquer que $f^*(\mathfrak{Q}_2)=f(\mathcal{S})$ et que E est localement connexe par arcs (cf. § 47, IV, 3 et § 46, VI, 2).

HUITIÈME CHAPITRE.

Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$.

§ 50. Groupes $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ et $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$.

I. Généralités sur les groupes commutatifs. Nous réunirons d'abord plusieurs propriétés élémentaires des groupes commutatifs qui interviendront dans la suite.

Un ensemble d'éléments arbitraires $\mathcal{X}$ est dit *groupe commutatif* (ou *abelien*) par rapport à l'opération $a+b$ qui fait correspondre à tout couple $a,b\in\mathcal{X}$ un élément de $\mathcal{X}$, lorsque cette opération satisfait aux conditions suivantes:

1⁰ $(a+b)+c=a+(b+c)$,

2⁰ $a+b=b+a$,

3⁰ il existe un (et un seul) élément 0 tel que $a+0=a$ [1]),

4⁰ à tout $a\in\mathcal{X}$ correspond un (et un seul) élément $-a$ tel que $a+(-a)=0$ [2]).

m étant un entier, on définit $m\cdot a$ en convenant que

$$0\cdot a=0,\quad m\cdot a=(m-1)\cdot a+a \quad\text{et}\quad (-m)\cdot a=m\cdot(-a) \quad\text{pour}\quad m>0.$$

Un élément $a\neq 0$ est dit *d'ordre fini* (d'ordre m) s'il existe un $m\neq 0$ tel que $m\cdot a=0$.

Un sous-ensemble du groupe $\mathcal{X}$ est dit un *sous-groupe* s'il contient $a+b$ dès qu'il contient a et b, et s'il contient $-a$ dès qu'il contient a. Un sous-groupe contient donc l'élément 0; en particulier, il peut se réduire à cet élément.

[1]) Cet élément est dit l'élément *neutre* du groupe $\mathcal{X}$. Le zéro désignera dans le § 50, I—VIII, exclusivement l'élément neutre.

[2]) L'opération du groupe (dite *composition*) est désignée ici par le signe $+$. Il est parfois plus commode de la considérer comme une multiplication; on remplacera alors 0 par 1 et $-a$ par $1:a$ (donc $a-b$ par $a:b$).

Le terme groupe sera entendu ici comme *groupe commutatif*.