En effet, d'après 3, il existe un composant $C$ de $E_j$, où $j=0,1$, tel que

$$C_j\cdot(A_0+A_1)=0, \quad \text{donc que} \quad C_j\cdot E_0\cdot E_1=0.$$

Soit $a_j \in C_j$. Le continu $E_j$ est donc irréductible entre $a_j$ et tout point de $E_0\cdot E_1$ et il est, par conséquent (th. 2), irréductiblement connexe entre $a_j$ et $E_0\cdot E_1$.

Il en résulte d'après VIII, 6, que $E_0+E_1$ est irréductible entre $a_0$ et $a_1$.

SIXIÈME CHAPITRE.

# Espaces localement connexes.

## § 44. Notion de connexité locale.

L'espace 1 est supposé métrique.

**I. Points de connexité locale.** L'espace est dit *localement connexe au point $p$ (l. c. au point $p$)*[1]) lorsque, dans tout entourage $G$ de $p$, il existe un entourage connexe de $p$; c'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un entourage connexe $E$ de $p$ tel que $\delta(E)<\varepsilon$. Autrement dit: qu'en désignant par $C$ la composante de $p$ dans $G$, on a $p \in \mathrm{Int}(C)$.

L'entourage $G$ peut, bien entendu, être supposé ouvert (ou fermé).

Par définition, la connexité locale est une propriété *topologique*. Elle est une propriété *locale*, c'est-à-dire que, $H$ étant un entourage d'un point $p$ donné, $H$ est l. c. au point $p$ dans le cas où l'espace y est l. c. et dans ce cas seulement.

1. *L'ensemble des points de connexité locale d'un espace est un* $\boldsymbol{G_\delta}$.

Car cet ensemble est le produit infini $G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ où $G_n$ est la somme des ensembles $\mathrm{Int}(E)$, $E$ parcourant la famille des ensembles connexes tels que $\delta(E)<1/n$.

2. *Pour que l'espace soit l. c. au point $p$, il faut et il suffit qu'à tout $\varepsilon>0$ corresponde un $\eta>0$ tel que l'inégalité $|x-p|<\eta$ implique l'existence d'un $C$ connexe tel que $x,p \in C$ et $\delta(C)<\varepsilon$.*

En effet, si l'espace est l. c. au point $p$ et si $E$ est un entourage connexe de $p$ tel que $\delta(E)<\varepsilon$, on posera $C=E$ et on désignera par $\eta$ le rayon d'une sphère contenue dans $E$ et de centre $p$.

[1]) Cf. Pia Nalli, Rend. di Palermo **32** (1911), p. 392, S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. des Sc. de Varsovie **6** (1913), H. Hahn, Wiener Ber. **123** (1914), p. 2433.

Réciproquement, si la condition du théorème est remplie, on faira correspondre à tout $x$ tel que $|x-p|<\eta$, un ensemble connexe $C_x$ tel que $x,p \epsilon C_x$ et $\delta(C_x)<\varepsilon$, et on posera $E=\sum_x C_x$. Il vient $p \epsilon \mathrm{Int}(E)$ et $\delta(E) \leqslant 2\varepsilon$.

3. *Si $p \epsilon A_0 \cdot A_1$ et $p$ est un point de connexité locale de $A_j$, où $j=0,1$, $p$ en est un de $A_0+A_1$.*

Soit, en effet, $E_j$ un entourage connexe de $p$ relatif à $A_j$. Donc

$$p \text{ non-}\epsilon\ \overline{A_j-E_j}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad p \text{ non-}\epsilon\ \overline{(A_0-E_0)+(A_1-E_1)}.$$

Comme

$$(A_0-E_0)+(A_1-E_1) \supset [A_0-(E_0+E_1)]+[A_1-(E_0+E_1)] = \\ =(A_0+A_1)-(E_0+E_1),$$

il vient $p$ *non-*$\epsilon\ \overline{(A_0+A_1)-(E_0+E_1)}$, ce qui prouve que $E_0+E_1$ est un entourage (connexe) de $p$ relatif à $A_0+A_1$.

4. *Si $A_j$ est l. c. au point $a_j$ $(j=0,1)$, le produit cartésien $A_0 \times A_1$ est l. c. au point $(a_0,a_1)$.*

Soit, en effet, $G$ un sous-ensemble ouvert de $A_0 \times A_1$ contenant le point $(a_0,a_1)$. Soit (cf. § 24, IV, 3) $H_j$ un ensemble ouvert (dans $A_j$) tel que

$$a_j \epsilon H_j \subset A_j \quad \text{et} \quad H_0 \times H_1 \subset G.$$

Soit $C_j$ la composante de $a_j$ dans $H_j$. Par hypothèse $a_j \epsilon \mathrm{Int}(C_j)$, d'où (cf. § 24, I (2)):

$$(a_0,a_1) \epsilon \mathrm{Int}(C_0) \times \mathrm{Int}(C_1) = \mathrm{Int}(C_0 \times C_1) \quad \text{et} \quad C_0 \times C_1 \subset H_0 \times H_1 \subset G.$$

$C_0 \times C_1$ est donc un entourage de $(a_0,a_1)$ contenu dans $G$ et connexe (en tant que produit cartésien de deux ensembles connexes, cf. § 41, II, 11).

*Exemples.* 1°. La ligne droite $\mathcal{E}$, le plan $\mathcal{E}^2$, le cube $\mathcal{I}^n$ sont localement connexes en chaque point.

2°. Tout point isolé est un point de connexité locale.

3°. La courbe $\sin 1/x$, définie par les conditions:

$$y=\sin 1/x \quad \text{pour} \quad 0<|x|\leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1\leqslant y \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x=0,$$

n'est pas l. c. aux points de l'axe des $y$.

4°. Le continu obtenu en joignant par des segments le point $(0,1)$ aux points $0$ et $1/n$, $n=1,2,\ldots$, de l'axe des $x$ n'est pas l. c. aux points $0\leqslant y<1$ de l'axe des $y$.



5°. De façon analogue, si l'on unit le point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ à tous les points de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (voir § 41, II p. 85), on obtient un continu qui n'est l. c. qu'au point $(0,1)$.

6°. Comme on verra au N° VII, un continu indécomposable n'est l. c. en *aucun* point.

7°. Les segments unissant les points $1/(n-1)$, $n=2,3,\ldots$, de l'axe des $x$ aux points $(1/nk, 1/n)$, où $k=1,2,\ldots$, ajoutés au segment 01 de l'axe des $x$, constituent un continu l. c. à l'origine. Cependant, il n'existe pas des petits entourages de ce point qui soient connexes et ouverts.

8°. Il existe des espaces connexes et localement connexes *dépourvus d'arcs* [1]) ou même *totalement imparfaits* [2]).

**II. Espaces localement connexes.** Un espace l. c. en chaque point est dit l. c. (tout court).

L'espace 1 du N° II est supposé localement connexe.

Les théorèmes 3 et 4 du N° I entraînent les deux suivants:

1. *La somme d'un nombre fini d'ensembles l. c. fermés est l. c.*

2. *Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces l. c. est l. c.*

3. *Tout sous-ensemble ouvert d'un espace l. c. est l. c.*

Car la connexité locale est une propriété locale (cf. N° I).

4. *Toute composante d'un sous-ensemble ouvert $G$ de l'espace* 1 *est un ensemble ouvert* [3]), *donc une région* [4]).

En particulier, *toute composante de l'espace* 1 *est fermée-ouverte.*

Car $C$ étant la composante du point $p$ dans $G$, on a, par hypothèse, $p \epsilon \mathrm{Int}(C)$.

5. *Soient $A$ et $B$ deux ensembles séparés. Si $A$ est connexe, il existe une région $R$ telle que*

$$A \subset R \quad \text{et} \quad \bar{R} \cdot B = 0. \tag{1}$$

*Si les deux ensembles $A$ et $B$ sont connexes, il existe deux régions $R$ et $S$ telles que*

$$A \subset R, \quad B \subset S \quad \text{et} \quad RS=0. \tag{2}$$

[1]) Voir R. L. Moore, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), p. 331.

[2]) Voir la note de M. Knaster et de moi-même, *A connected and connected im kleinen point set which contains no perfect subset*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), p. 106. Cf. aussi § 46, I, 7.

[3]) Cette condition caractérise les espaces l. c. Voir H. Hahn, *Über die Komponenten offener Mengen*, Fund. Math. **2** (1921), p. 189—192.

[4]) Rappelons qu'on entend par *région* un ensemble connexe ouvert.

Il existe, en effet, d'après le th. 6 du § 16, V un ensemble ouvert $G$ tel que $A\subset G$ et $\overline{G}\cdot B=0$. Soient: $R$ la composante de $G$ qui contient $A$ et — dans le cas où $B$ est connexe — $S$ celle de $1-\overline{G}$ qui contient $B$. D'après 4, $R$ et $S$ sont des régions.

6. *La famille des composantes d'un sous-ensemble ouvert d'un espace l. c. séparable est dénombrable.*

Car toute famille d'ensembles ouverts disjoints est dénombrable (cf § 19, I, 2).

7. *La famille des composantes d'un espace l. c. compact est fini.*

Par conséquent, *tout espace l. c. compact est somme d'un nombre fini de continus l. c.*

C'est une conséquence directe du théorème de Borel (cf. § 37, V, 2).

8. *Tout espace l. c. séparable contient une base formée de régions.*

Plus précisément: *à tout $\varepsilon>0$ correspond une suite de régions $R_1, R_2, \ldots$ telles que:*

1° $\delta(R_n)<\varepsilon$ *pour* $n=1,2,\ldots,$

2° *tout ensemble ouvert $G$ est de la forme*

$$G=\sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n} \quad \text{où} \quad \overline{R}_{k_n}\subset G.$$

Soit, en effet, $G_1, G_2, \ldots$ une suite d'ensembles ouverts satisfaisant aux conditions 1° et 2° en y remplaçant la lettre $R$ par $G$ (cf. § 17, II). La famille des composantes des ensembles $G_1, G_2, \ldots$ constitue alors la base $R_1, R_2, \ldots$ demandée.

9. *Toute région $C$ relative à $E$ est de la forme $C=EH$, où $H$ est une région.*

En effet, $G$ désignant un ensemble ouvert tel que $C=EG$, $H$ est la composante de $G$ qui contient $C$.

10. *$A$ et $B$ étant deux ensembles fermés tels que les ensembles $A+B$ et $AB$ sont l. c., les ensembles $A$ et $B$ sont l. c.*

Il est légitime d'admettre que $A+B=1$. L'ensemble $A-B=1-B$ étant ouvert, $A$ est l. c. en chaque point de $A-B$. Il s'agit donc de prouver que $A$ est l. c. en chaque point $p\in AB$.



Soit $G$ un entourage ouvert de $p$. Par hypothèse, la composante $C$ de l'ensemble $ABG$ qui contient $p$ est ouverte dans cet ensemble. D'après 9 (en y posant $1=G$ et $E=ABG$), il existe une région $H$ telle que $H\subset G$ et $C=ABH$. La somme et le produit des ensembles $HA$ et $HB$, fermés dans $H$, étant connexes puisque

$$HA+HB=H\cdot(A+B)=H \quad \text{et} \quad (HA)\cdot(HB)=HAB=C,$$

ces ensembles sont connexes (§ 41, II, 5). L'ensemble $HA$ étant un entourage connexe de $p$ relatif à $A$ et contenu dans $G$, $A$ est l. c. au point $p$.

Le th. 10 se généralise comme suit:

10 a. *Si $1=F_1+\ldots+F_n$, $\overline{F}_j=F_j$ et $F_j\cdot F_k$ est l. c. (pour $j\neq k$), les ensembles $F_j$ sont l. c.*

Posons, en effet,

$$A=F_j \quad \text{et} \quad B=F_1+\ldots+F_{j-1}+F_{j+1}+\ldots+F_n.$$

$F_j\cdot F_k$ étant l. c., $AB$ est l. c. d'après 1. Donc, d'après 10, $A$ est l. c.

11. *$F$ étant fermé et l. c., et $C$ étant une composante de $1-F$, les ensembles $1-C$ et $C+F$ sont l. c.*

De façon plus générale, *$S$ étant une somme quelconque de composantes de $1-F$, les ensembles $1-S$ et $S+F$ sont l. c.*

C'est une conséquence du th. 10 en vertu des formules

$$1=(1-S)+(S+F) \quad \text{et} \quad (1-S)\cdot(S+F)=F,$$

l'ensemble $S$ étant fermé-ouvert.

12. *Si l'espace 1 est connexe, toute composante $C$ de $1-S$ contient une composante de l'ensemble $F$ (supposé non vide).*

En conséquence, *le nombre des composantes de $1-S$ ne dépasse pas celui des composantes de $F$* (si $F$ est connexe, $1-S$ l'est également).

Comme $F\subset 1-S$, il s'agit de montrer que $CF\neq 0$.

Supposons par impossible que $CF=0$, c.-à-d. que $C\subset 1-F$. Soit $R$ la composante de $1-F$ contenant $C$. D'après la définition de $S$, toute composante de $1-F$ qui n'est pas contenue dans $S$ est disjointe de $S$. Donc

$$RS=0, \quad \text{c.-à-d.} \quad R\subset 1-S, \quad \text{d'où} \quad R\subset C$$

puisque $RC\neq 0$ et $C$ est une composante de $1-S$.

On parvient ainsi à l'égalité $C=R$, qui montre que $C$ est fermé-ouvert, en tant que composante de l'ensemble fermé $1-S$ et de l'ensemble ouvert $1-F$. Mais cela est incompatible avec la connexité de l'espace.

13 [1]. *$\{A_\iota\}$ désignant la famille des composantes de $A$, on a*

$$\operatorname{Int}(A)=\sum_\iota \operatorname{Int}(A_\iota).$$

D'une part, on a évidemment $\operatorname{Int}(A_\iota)\subset\operatorname{Int}(A)$.

Soient, d'autre part, $p\in\operatorname{Int}(A)$, $A_\iota$ la composante de $p$ dans $A$ et $G$ la composante de $p$ dans $\operatorname{Int}(A)$. L'ensemble $G$ étant connexe, on a $G\subset A_\iota$. L'espace étant l. c., $G$ est ouvert, donc $G\subset\operatorname{Int}(A_\iota)$ et finalement $p\in\operatorname{Int}(A_\iota)$.

14 [2]. *$R$ étant une région, il existe une suite de régions $R_1, R_2, \ldots$ telle que*

$$R=R_1+R_2+\ldots \quad \textit{et} \quad \bar{R}_n\subset R_{n+1}. \tag{3}$$

Il existe, en effet, d'après 8, une suite de régions $Q_1, Q_2, \ldots$ telles que:

$$R=Q_1+Q_2+\ldots, \tag{4}$$ $$\bar{Q}_n\subset R. \tag{5}$$

$R$ étant connexe, il est légitime d'admettre (cf. § 41, II, 10) que

$$(Q_1+\ldots+Q_n)\cdot Q_{n+1}\neq 0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots \tag{6}$$

Les ensembles $\bar{Q}_1$ et $1-R$ étant fermés et disjoints (cf. (5)), donc séparés, il existe d'après 5 une région $R_1$ telle que

$$\bar{Q}_1\subset R_1 \quad \text{et} \quad \bar{R}_1\subset R.$$

Procédons par induction. En supposant que

$$\overline{Q_1+\ldots+Q_n}\subset R_n \quad \text{et} \quad \bar{R}_n\subset R, \tag{7}$$

l'ensemble $\overline{R_n+Q_{n+1}}$ est connexe (d'après (6)) et séparé de $1-R$ (d'après (5) et (7)). Il existe donc selon 5, une région $R_{n+1}$ telle que

$$\overline{R_n+Q_{n+1}}\subset R_{n+1} \quad \text{et} \quad \bar{R}_{n+1}\subset R.$$

Les formules (7) sont donc vérifiées pour $n=1,2,\ldots$ Rapprochées de (4), elles impliquent (3).

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 331.

[2]) Cf. R. L. Wilder, Bull. Amer. Math. Soc. **34** (1928), p. 650.



On déduit de 14 en vertu du th. de Borel que

15. *$F$ étant un sous-ensemble compact d'une région $R$, il existe une région $Q$ telle que $F\subset Q$ et $\bar{Q}\subset R$.*

16 [1]. *Si $F$ est un sous-ensemble compact d'un ensemble ouvert $G$, $F$ n'a des points communs qu'avec un nombre fini de composantes de $G$. Si, en outre, l'espace est compact, toutes les composantes de $1-F$, abstraction faite d'un nombre fini, sont contenues dans $G$.*

En effet, les composantes de $G$ étant ouvertes, il en existe un nombre fini $R_1,\ldots,R_n$ tel que $F\subset R_1+\ldots+R_n$. Donc, $R$ étant une composante de $G$ distincte de $R_1,\ldots,R_n$, on a $FR_n=0$.

Pour prouver la deuxième partie du théorème, posons $1-F=G^*$ et $1-G=F^*$. Comme $F\subset G$, on a $F^*\subset G^*$. Parsuite, $F^*$ n'a des points communs qu'avec un nombre fini de composantes de $G^*$, c'est-à-dire que, abstraction faite d'un nombre fini, toutes ces composantes sont disjointes de $F^*$ donc contenues dans $G$.

17 *Si l'espace 1 est connexe entre $M$ et $N$, il contient une composante $C$ telle que $CM\neq 0\neq CN$.*

Car autrement, en désignant par $S$ la somme des composantes non disjointes de $M$, on aurait $M\subset S$ et $NS=0$. L'ensemble $S$ étant fermé ouvert, l'espace ne serait donc pas connexe entre $M$ et $N$.

Le th. 17 implique que tout espace l. c. jouit de la propriété $M$ (cf. § 42, II, 1). Il en résulte (cf. § 42, II, 2) que

18. *Les quasi-composantes d'un espace l. c. coïncident avec ses composantes.*

19. *Si l'espace l. c. 1 est connexe et $C$ est une composante d'un ensemble arbitraire $X\neq 1$, on a $\bar{C}\cdot\overline{1-X}\neq 0$.*

Soit $p\in C$. Il est légitime d'admettre que $p\in 1-\overline{1-X}=\operatorname{Int}(X)$. Soit $C_0$ la composante de $\operatorname{Int}(X)$ contenant $p$. L'ensemble $\operatorname{Int}(X)$ étant ouvert, $\operatorname{Int}(X)-C_0$ l'est également, en tant que somme des composantes de $\operatorname{Int}(X)$ distinctes de $C_0$. On a $\bar{C}_0\cdot\overline{1-X}\neq 0$, car autrement la formule

$$1=\{\overline{1-X}+[\operatorname{Int}(X)-C_0]\}+C_0$$

fournirait une décomposition de l'espace (connexe) en deux ensembles séparés non vides. Comme $C_0\subset C$, il vient $\bar{C}\cdot\overline{1-X}\neq 0$.

[1]) Cf. K. Borsuk, *Über eine Bedingung die dem lokalen Zusammenhange äquivalent ist*, Mathematica **7** (1933), p. 144.

*L'ensemble* $L(A)$[1]. $\mathfrak{X}$ étant un espace arbitraire (l. c. ou non) et $A$ un sous-ensemble de $\mathfrak{X}$, désignons par $L(A)$ l'ensemble des $x \in \bar{A}$ pour lesquels il existe des ensembles ouverts $G$ de diamètre aussi petit que l'on veut et tels que $x \in G$ et que $GA$ est connexe.

20. *L'ensemble* $L(A)$ *est un* $G_\delta$.

Car $L(A)=\bar{A}\cdot G_1\cdot G_2\cdot\ldots$, où $G_n$ est la somme des $G$ ouverts tels que $GA$ est connexe et que $\delta(G)<1/n$.

21. *Si* $A$ *est l. c., on a* $A\subset L(A)$.

22. *Si* $A\subset B\subset L(A)$, $B$ *est l. c.*

Car la formule $GA\subset GB\subset G\cdot\bar{A}\subset\overline{GA}$ implique que $GB$ est connexe (dès que $GA$ est connexe).

23. $\mathcal{Y}$ *étant un espace complet,* $A$ *un sous-ensemble l. c. de* $\mathfrak{X}$ *et* $f\in\mathcal{Y}^A$, *il existe une extension* $g\in\mathcal{Y}^B$ *de* $f$, *où* $B$ *est un* $G_\delta$ *l. c.*

De plus, *on a* $A\subset B\subset L(A)$.

Car d'après le th. 1 du § 31, I, il existe un $A^*$ qui est un $G_\delta$ contenant $A$, et une extension $f^*\in\mathcal{Y}^{A^*}$ de $f$. Il suffit de poser:

$$B=A^*\cdot L(A) \quad \text{et} \quad g=f^*|B.$$

**III. Propriétés de la frontière**[2]. 1. *Étant donnée dans un espace l. c. une famille d'ensembles arbitraires* $\{A_\iota\}$, *on a*

$$\mathrm{Fr}\,\Big(\sum_\iota A_\iota\Big)\subset\overline{\sum_\iota \mathrm{Fr}\,(A_\iota)}. \tag{1}$$

Plus précisément: *si* $p\in\mathrm{Fr}\,\big(\sum_\iota A_\iota\big)-\overline{\sum_\iota \mathrm{Fr}(A_\iota)}$, *l'espace n'est pas l. c. au point* $p$.

En effet, si l'espace 1 était l. c. au point $p$, il existerait un entourage connexe $E$ de $p$ tel que

$$E\subset 1-\overline{\sum_\iota \mathrm{Fr}\,(A_\iota)}, \quad \text{donc que} \quad p\in\mathrm{Int}\,(E)\cdot\mathrm{Fr}\,\Big(\sum_\iota A_\iota\Big). \tag{2}$$

Il en résulte (cf. § 7, II, 2) que

$$\mathrm{Int}\,(E)\cdot\sum_\iota A_\iota\neq 0\neq\mathrm{Int}\,(E)-\sum_\iota A_\iota,$$

donc

$$E\cdot\sum_\iota A_\iota\neq 0\neq E-\sum_\iota A_\iota.$$

[1]) S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 83.

[2]) Voir ma note de Fund. Math. **8** (1926), p. 140.



Il existe par conséquent un indice $\varkappa$ tel que

$$EA_\varkappa\neq 0\neq E-A_\varkappa, \quad \text{d'où} \quad E\cdot\mathrm{Fr}\,(A_\varkappa)\neq 0,$$

puisque $E$ est connexe (cf. § 41, I, 1). Mais ceci est incompatible avec la formule (2), car

$$E\subset 1-\overline{\sum_\iota \mathrm{Fr}\,(A_\iota)}\subset 1-\sum_\iota \mathrm{Fr}\,(A_\iota).$$

*Remarque. La condition* (1) *caractérise les espaces l. c.* Plus précisément, tout espace qui n'est pas l. c. contient une suite infinie d'ensembles ouverts et disjoints qui ne satisfait pas à (1)[1].

2. *Étant donnée dans un espace l. c. une suite d'ensembles ouverts et disjoints* $G_1, G_2, \ldots$, *on a*

$$\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} G_n\subset\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty}\mathrm{Fr}\,(G_n).$$

En effet, si $p\in\mathrm{Ls}\,G_n$, on a (les $G_n$ étant disjoints) $p\in 1-G_n$ quel que soit $n$, donc $p\in 1-\sum_n G_n$, et comme $\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} G_n\subset\overline{\sum_n G_n}$, il vient

$$p\in\overline{\sum_n G_n}-\sum_n G_n=\mathrm{Fr}\,\Big(\sum_n G_n\Big)\subset\overline{\sum_n \mathrm{Fr}\,(G_n)}$$

d'après 1. Ainsi

$$\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} G_n\subset\overline{\sum_n \mathrm{Fr}\,(G_n)}, \quad \text{d'où} \quad \mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} G_n=\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} G_{m+n}\subset\overline{\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Fr}\,(G_n)},$$

quel que soit $m$ (cf. § 25, IV, 7). Donc (cf. § 25, IV, 8):

$$\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} G_n\subset\prod_{m=1}^{\infty}\overline{\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{Fr}\,(G_n)}=\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty}\mathrm{Fr}\,(G_n).$$

3. $A$ *étant un sous-ensemble d'un espace l. c., et* $C$ *étant une composante de* $A$, *on a* $\mathrm{Fr}\,(C)\subset\mathrm{Fr}\,(A)$.

Plus précisément: *si* $p\in\mathrm{Fr}\,(C)-\mathrm{Fr}\,(A)$, *l'espace n'est pas l. c. au point* $p$.

Soit

$$p\in\mathrm{Fr}\,(C)-\mathrm{Fr}\,(A)=\bar{C}\cdot\overline{1-C}-\bar{A}\cdot\overline{1-A}.$$

Donc

$$p\in\bar{A}-\bar{A}\cdot\overline{1-A}\subset 1-\overline{1-A}.$$

[1]) Pour la démonstration, voir op. cit., p. 142, où cet énoncé se trouve démontré pour des espaces topologiques généraux.

Si l'espace était l. c. au point $p$, il existerait un entourage connexe $E$ de $p$ tel que

$$E\subset 1-\overline{1-A}, \quad \text{donc} \quad p\in \mathrm{Int}(E)\cdot \mathrm{Fr}(C),$$

d'où (cf. § 7, II, 2 et § 41, I, 1):

$$\mathrm{Int}(E)\cdot C\neq 0\neq \mathrm{Int}(E)-C \quad \text{et} \quad EC\neq 0\neq E-C.$$

Ceci contredit l'hypothèse que $C$ est une composante de $A$, car $E$ étant connexe, les formules $E\subset A$ et $EC\neq 0$ entraînent $E\subset C$.

4. *$A$ étant un sous-ensemble d'un espace l. c., si* Fr $(A)$ *est l. c., $\bar{A}$ l'est également.*

C'est une conséquence de II, 10, car

$$\bar{A}+\overline{1-A}=1 \quad \text{et} \quad \bar{A}\cdot\overline{1-A}=\mathrm{Fr}(A).$$

**IV. Séparation des espaces localement connexes.**

Soit 1 un *espace l. c.*

1. *$F$ étant un ensemble fermé qui ne sépare pas les ensembles $M$ et $N$, disjoints de $F$* (c.-à-d. que $1-F$ est connexe entre $M$ et $N$), *il existe une région $R$ telle que*

$$(1) \qquad RM\neq 0\neq RN \quad \text{et} \quad \bar{R}\cdot F=0.$$

D'après II, 17, il existe une composante $C$ de $1-F$ telle que $CM\neq 0\neq CN$. Soient $p\in CM$ et $q\in CN$. D'après II, 15, il existe une région $R$ telle que $p,q\in R$ et $\bar{R}\subset C$. D'où les conditions (1).

2. *L'ensemble des points de $1-(M+N)$ qui ne séparent pas l'espace entre $M$ et $N$ est ouvert.*

Car $x$ étant un point de ce genre, soit $R$ un ensemble connexe tel que $RM\neq 0\neq RN$ et $x\in 1-\bar{R}$. Aucun point de $1-\bar{R}$ ne sépare donc $M$ de $N$.

Avant de passer au cas où $M$ et $N$ se réduisent à des points individuels, nous établirons l'énoncé auxiliaire suivant:

*$Z$ désignant un ensemble arbitraire de couples $(m,n)$ d'entiers positifs, il existe une suite infinie $k_1<k_2<\dots$ telle qu'on a constamment:*

$$\textit{soit} \quad (k_i,k_{i+1})\in Z, \quad \textit{soit} \quad (k_i,k_{i+1})\ \textit{non-}\in Z.$$

Car, en supposant qu'il n'existe aucune suite infinie du premier genre, il existe un $m$ (et même un $m$ aussi grand que l'on veut) tel que l'inégalité $n>m$ entraîne $(m,n)$ *non-*$\in Z$. En désignant par $\{k_i\}$ la suite de ces $m$, on obtient une suite infinie du deuxième genre.



Ceci établi, désignons, comme d'habitude (§ 41, IX), par $S(a,b)$ *l'ensemble des points qui séparent $a$ de $b$.* On a l'énoncé suivant:

3. *Théorème de G. T. Whyburn* [1]. *L'ensemble $S(a,b)+a+b$ est compact.*

D'après 2, l'ensemble $S(a,b)+a+b$ est fermé. Supposons qu'il ne soit pas compact. $S(a,b)$ contient alors une suite infinie de points (différents) $p_1,p_2,\dots$ dont chaque suite partielle constitue un ensemble fermé. Par hypothèse, il existe pour tout $n$ deux ensembles ouverts tels que

$$(3) \qquad 1-p_n=M_n+N_n, \quad M_n\cdot N_n=0, \quad a\in M_n, \quad b\in N_n.$$

Soit $Z$ l'ensemble de tous les couples $(m,n)$ tels que $p_m\in M_n$. Comme nous venons de montrer, il existe une suite infinie $k_1<k_2<\dots$ telle qu'on a constamment:

$$\text{soit} \quad p_{k_i}\in M_{k_{i+1}}, \quad \text{soit} \quad p_{k_i}\ \textit{non-}\in M_{k_{i+1}}, \quad \text{c.-à-d.} \quad p_{k_i}\in N_{k_{i+1}}.$$

Par raison de symétrie, on peut admettre que c'est le premier cas qui se présente. Comme Fr $(M_n)=p_n$, on a d'après III, 1:

$$\mathrm{Fr}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}M_{k_n}\Big)\subset\overline{\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Fr}(M_{k_n})}=\overline{(p_{k_1},p_{k_2},\dots)}=$$
$$=(p_{k_1},p_{k_2},\dots)\subset\sum_{n=1}^{\infty}M_{k_{n+1}}\subset\sum_{n=1}^{\infty}M_{k_n},$$

ce qui prouve que l'ensemble $M_{k_1}+M_{k_2}+\dots$ est fermé (cf. § 6, II (7)). Cet ensemble étant ouvert et différent de 1 (puisque $b$ *non-*$\in M_n$ quel que soit $n$), cela contredit la connexité de 1.

4. *Si l'espace* 1 *est connexe et satisfait à l'égalité* $1=S(a,b)+a+b$, *il est un arc $ab$.*

Car l'espace est compact d'après 3, donc un arc d'après § 42, V, 1.

*Remarque.* En ce qui concerne les courbes simples fermées, il est remarquable que la somme de deux ensembles $A$ et $B$ irréductiblement connexes entre le même couple de points $(p,q)$ et tels que $AB=(p,q)$ peut ne pas être une courbe simple fermée, tout en étant localement connexe [2].

[1]) *Concerning connected and regular point sets*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), p. 685 et *On the structure of connected and connected im kleinen point sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **32** (1930), p. 927.

[2]) Voir R. H. Bing, *Solution of a problem of R. L. Wilder*, Amer. Journ. Math. **70** (1948), p. 95.

5. *Si l'espace* 1 *(contenant plus d'un point) est connexe et est séparé par chaque couple de points, tandis qu'aucun point individuel ne le sépare, l'espace est une courbe simple fermée.*

Soit $a_0$ un point fixe. Par hypothèse, $1-a_0$ est connexe et tout point $x \in (1-a_0)$ sépare l'ensemble $1-a_0$. D'après le th. 4 du § 41, VIII, tous ces $x$, sauf une infinité dénombrable, séparent $1-a_0$ en deux régions. Soit $a_1$ un $x$ de ce genre. Il existe donc deux régions $R_0$ et $R_1$ telles que

$$1-a_0-a_1=R_0+R_1, \quad R_0 \cdot R_1=0 \quad \text{et} \quad R_j \neq 0 \quad \text{pour} \quad j=0,1.$$

On a $\mathrm{Fr}(R_j)=(a_0,a_1)$, car en supposant que $\mathrm{Fr}(R_j)$ se compose d'un seul point, ce point séparerait l'espace. Tout revient donc à démontrer que $\bar{R}_j$ est un arc $a_0a_1$.

L'ensemble $\mathrm{Fr}(R_j)$ étant l. c., il en est de même de $\bar{R}_j$ (d'après III, 4). L'hypothèse que $\bar{R}_j$ n'est pas un arc $a_0a_1$ implique donc, en vertu du th. 4, l'existence d'un $p \in R_j$ tel que $\bar{R}_j-p$ est connexe entre $a_0$ et $a_1$. Nous en conclurons que $\bar{R}_j-p$ est un ensemble connexe.

En effet, en supposant que

$$(4) \quad \bar{R}_j=U+V, \quad U=\bar{U}, \quad V=\bar{V}, \quad UV=p, \quad U \neq \bar{R}_j \neq V, \quad a_0 \in U,$$

on aurait $a_1 \in U$ (puisque $\bar{R}_j-p$ est connexe entre $a_0$ et $a_1$), donc

$$\bar{R}_{1-j} \cdot V=0, \quad \text{d'où} \quad (\bar{R}_{1-j}+U) \cdot V=UV=p,$$

et la décomposition $1=(\bar{R}_{1-j}+U)+V$ serait incompatible avec l'hypothèse que $p$ ne sépare pas l'espace.

Ceci établi, admettons que $\bar{R}_0$ n'est pas un arc $a_0a_1$. Il existe donc un $p_0 \in R_0$ tel que $\bar{R}_0-p_0$ est connexe. Considérons deux cas, suivant que $\bar{R}_1$ est un arc $a_0a_1$ ou ne l'est pas. Dans le premier cas, soit $p_1 \in R_1$, et dans le deuxième, soit $p_1$ un point de $R_1$ tel que $\bar{R}_1-p_1$ est connexe (et dont l'existence vient d'être établie). Dans les deux cas, le couple $p_0,p_1$ ne sépare pas l'espace — contrairement à l'hypothèse.

6 [1]). *Si l'espace* 1 *(contenant plus d'un point) est discohérent (c'est-à-dire qu'aucun sous-ensemble connexe et fermé ne le sépare), il est une courbe simple fermée.*

Soit, en effet, $Q$ une région telle que $0 \neq \bar{Q} \neq 1$. Posons

$$R_0=1-\bar{Q} \quad \text{et} \quad R_1=1-\bar{R}_0.$$

[1]) Voir R. L. Wilder, *Concerning simple closed curves and related point sets*, Amer. Journ. Math. **53** (1931), p. 54.



Les ensembles $R_0$ et $R_1$ sont connexes par hypothèse, non vides et on a (cf. § 8, VIII):

$$(5) \quad R_j=1-\bar{R}_{1-j} \quad \text{pour} \quad j=0,1.$$

Posons $F=\mathrm{Fr}(R_0)$. Il vient

$$(6) \quad F=\bar{R}_0-R_0=\bar{R}_0 \cdot \bar{R}_1=\mathrm{Fr}(R_1)=1-(R_0+R_1).$$

On en conclut que $F$ ne se réduit pas à un seul point (puisqu'aucun point ne sépare l'espace). Nous allons démontrer que $F$ se compose de **deux** points.

Supposons, par impossible, que $F$ contienne trois points différents $a_0,a_1$ et $a_2$. L'espace étant l. c., soient $A_0$, $A_1$ et $A_2$ trois régions telles que

$$(7) \quad a_k \in A_k \quad (k=0,1,2) \quad \text{et} \quad \bar{A}_0 \cdot \bar{A}_1=\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2=\bar{A}_2 \cdot \bar{A}_0=0.$$

Comme $a_k \in F=\mathrm{Fr}(R_j)$, on a

$$(8) \quad A_k \cdot \mathrm{Fr}(R_j) \neq 0, \quad \text{d'où} \quad R_j \cdot A_k \neq 0, \text{ pour } j=0,1 \text{ et } k=0,1,2.$$

L'ensemble $R_j^{+}=R_j+\bar{A}_0+\bar{A}_1$ est donc connexe et, en conséquence, l'ensemble

$$(9) \quad R_{1-j}^{-}=R_{1-j}-(\bar{A}_0+\bar{A}_1)=1-\bar{R}_j-\bar{A}_0-\bar{A}_1=1-\overline{R_j^{+}}$$

est une région. D'après (6), (7) et (9), $a_2 \in \bar{R}_j \cdot \overline{R_{1-j}^{-}}$. Donc $\bar{R}_j+\overline{R_{1-j}^{-}}$ est connexe et il en est encore de même de l'ensemble (cf. (5)):

$$1-(\bar{R}_j+\overline{R_{1-j}^{-}})=R_{1-j}-\overline{R_{1-j}^{-}}.$$

Les ensembles $\bar{A}_0$ et $\bar{A}_1$ étant séparés d'après (7), la formule

$$R_{1-j}-\overline{R_{1-j}^{-}}=R_{1-j}-\overline{R_{1-j}-(\bar{A}_0+\bar{A}_1)} \subset \bar{A}_0+\bar{A}_1$$

implique donc que l'un des deux ensembles:

$$\bar{A}_0 \cdot R_{1-j}-\overline{R_{1-j}^{-}} \quad \text{ou} \quad \bar{A}_1 \cdot R_{1-j}-\overline{R_{1-j}^{-}}$$

est vide. Admettons que ce soit le premier:

$$(10) \quad \bar{A}_0 \cdot R_{1-j}-\overline{R_{1-j}^{-}}=0.$$

Or, on a d'après (9), $A_0 \cdot R_{1-j}^{-}=0$, d'où $A_0 \cdot \overline{R_{1-j}^{-}}=0$ (puisque $A_0$ est ouvert) et par conséquent d'après (10)

$$0=A_0 \cdot R_{1-j}-\overline{R_{1-j}^{-}}=A_0 \cdot R_{1-j}.$$

On parvient ainsi à une contradiction avec (8).

Il est ainsi établi que l'ensemble $F=\mathrm{Fr}(R_j)$ se compose de deux points. Soit $F=(a_0,a_1)$. D'après III, 4, $\bar{R}_j$ est l. c. Il reste à prouver que $\bar{R}_j$ est un arc $a_0a_1$, donc (cf. th. 4) que tout point de $R_j$ sépare $\bar{R}_j$ entre $a_0$ et $a_1$.

Or, supposons par impossible que $p\in R_0$ et que $\bar{R}_0-p$ soit connexe entre $a_0$ et $a_1$. Il existe donc, d'après 1, un ensemble connexe et fermé $C$ tel que

$$a_0,a_1\in C\subset\bar{R}_0-p, \quad \text{d'où} \quad F\subset C\subset 1-R_1.$$

Il en résulte en vertu de (6) que

$$1-C=(F+R_0+R_1)-C=(R_0-C)+R_1.$$

Cette identité présente donc une décomposition de $1-C$ en deux ensembles ouverts, disjoints et non vides (puisque $p\in R_0-C$), ce qui contredit l'hypothèse de la discohérence de l'espace.

7. *Pour que $E$ sépare l'espace* 1 *en $n$ parties séparées (non vides), il faut et il suffit que $E$ contienne un ensemble fermé $F$ tel que tout ensemble $H$ assujetti aux conditions $F\subset H=\bar{H}\subset E$ sépare l'espace en $n$ ensembles ouverts (disjoints et non vides).*

La condition est nécessaire en vertu du th. 3 du § 41, VII.

Afin de montrer qu'elle est suffisante, admettons que l'ensemble $1-E$ ne se compose pas de $n$ parties séparées non vides. D'après le th. 6 du § 41, II, il existe alors $k$ ensembles connexes $C_1,\ldots,C_k$ tels que

$$1-E=C_1+\ldots+C_k, \quad \text{où} \quad k<n.$$

Soient $F=\bar{F}\subset E$ et $G_1,\ldots,G_j$ $(j\leqslant k)$ un système de composantes de $1-F$ tel que

$$1-E\subset G_1+\ldots+G_j.$$

Posons $H=1-(G_1+\ldots+G_j)$. Il vient $F\subset H=\bar{H}\subset E$, puisque $1-E\subset G_1+\ldots+G_j\subset 1-F$. Cependant $H$ ne sépare pas l'espace en $n$ ensembles ouverts non vides.

8. *Soient $a$ et $b$ deux points d'un espace l. c. compact et $\{F_n\}$ une suite d'ensembles fermés. Si aucun ensemble $F_n$ ne coupe aucune région entre $a$ et $b$, il en est de même de la somme $F_1+F_2+\ldots$* [1].

[1]) Cf. J. R. Kline, Bull. Amer. Math. Soc. (1917).



Soit, en effet, $R$ une région contenant les points $a$ et $b$. Nous définirons par induction une suite de régions $R_0,R_1,\ldots$ vérifiant les conditions suivantes:

(11) $\quad a,b\in R_n,\qquad$ (12) $\quad \bar{R}_{n+1}\subset R_n-F_n.$

Soit $R_0=R$. La condition (11) étant supposée vérifiée par $R_n$, il existe par hypothèse un continu $C_n$ tel que

$$a,b\in C_n\subset R_n-F_n.$$

Soit $R_n^*$ la région-composante de $R_n-F_n$ qui contient $C_n$. D'après II, 15, il existe une région $R_{n+1}$ telle que $a,b\in R_{n+1}$ et $\bar{R}_{n+1}\subset R_n^*$, d'où l'inclusion (12).

La suite $\{R_n\}$ étant définie, posons $K=\bar{R}_1\cdot\bar{R}_2\cdot\ldots$ Les continus $\bar{R}_1,\bar{R}_2,\ldots$ formant une suite décroissante, $K$ est un continu d'après § 42, II, 5. En outre, d'après (11) et (12):

$$a,b\in K\subset R-(F_1+F_2+\ldots).$$

**V. Séparateurs irréductibles.** Soit 1 un *espace l. c.*

1. *Soient $C$ un ensemble fermé, $A$ et $B$ deux composantes différentes de l'ensemble $1-C$, $a\in A$ et $b\in B$. Pour que $C$ soit un séparateur irréductible entre $a$ et $b$, il faut et il suffit que*

(1) $$\mathrm{Fr}(A)=C=\mathrm{Fr}(B).$$

La condition (i) étant suffisante d'après § 41, VII, 4, nous allons démontrer qu'elle est nécessaire. Or, d'après III, 3,

$$\mathrm{Fr}(A)\subset\mathrm{Fr}(1-C)\subset C.$$

$\mathrm{Fr}(A)$ étant un séparateur entre $a$ et $b$ (cf. § 16, VI) et $C$ étant supposé un séparateur irréductible entre $a$ et $b$, il vient $C=\mathrm{Fr}(A)$. De même, $C=\mathrm{Fr}(B)$.

2. *$A$ étant une région et $B$ étant une composante de $1-\bar{A}$, l'ensemble* $\mathrm{Fr}(B)$ *est un séparateur irréductible entre tout couple $a\in A$, $b\in B$.*

On a, en effet (cf. III, 4),

(2) $$\mathrm{Fr}(B)\subset\mathrm{Fr}(1-\bar{A})=\bar{A}\cdot\overline{1-\bar{A}}\subset\bar{A}\cdot\overline{1-A}=\bar{A}-A,$$

ce qui implique: d'une part, que $a$ *non*-$\in\mathrm{Fr}(B)$, d'où $a\in 1-\bar{B}$, donc que l'ensemble $\mathrm{Fr}(B)$ sépare $a$ de $b$; d'autre part, que $x\in\bar{A}\cdot\bar{B}$ pour tout $x\in\mathrm{Fr}(B)$, donc que $A+x+B$ est connexe et que, par conséquent, aucun sous-ensemble de $\mathrm{Fr}(B)$ ne sépare les points $a$ et $b$.

3. *Théorème de Mazurkiewicz*[1]). *Tout séparateur fermé $C$ entre $a$ et $b$ contient un séparateur irréductible fermé $F$ entre $a$ et $b$.*

Soit, en effet, $A$ la composante de $a$ dans $1-C$. On a $b \in 1-\bar{A}$, puisque $\bar{A}=A+\mathrm{Fr}(A)\subset A+C$. $B$ étant la composante de $b$ dans $1-\bar{A}$, on a (cf. (2)): $\mathrm{Fr}(B)\subset \mathrm{Fr}(A)\subset C$. Il suffira donc d'après 2 de poser $F=\mathrm{Fr}(B)$.

De là nous déduirons, en vertu de l'axiome de séparation, le théorème suivant:

4. *Soient $a_0 \in F_0=\bar{F}_0$, $a_1 \in F_1=\bar{F}_1$ et $F_0\cdot F_1=0$. Il existe un séparateur fermé $C$ irréductible entre $a_0$ et $a_1$ et disjoint de $F_0+F_1$.*

En effet, $G$ étant un ensemble ouvert tel que $F_0\subset G$ et $\bar{G}\cdot F_1=0$, la frontière $\mathrm{Fr}(G)$ contient le séparateur $C$ demandé.

**VI. L'ensemble des points de non-connexité locale d'un continu. Continus de convergence.** Un continu $K$ est dit *continu de convergence*[2]) s'il est la limite topologique d'une suite de continus $K_n$:

$$K=\mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} K_n \quad \text{où} \quad K\cdot K_n=0.$$

Si l'espace est compact, les continus $K_1, K_2, \dots$ peuvent être supposés *disjoints deux à deux*. Car ils peuvent être remplacés par $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots$ où $n_1=1$ et où, pour $i>1$,

$$\mathrm{dist}\,(K, K_{n_i})<\varrho(K, K_{n_{i-1}}) \quad \text{et} \quad n_i>n_{i-1}.$$

*Exemple*. Dans la courbe $\mathop{E}_{xy}(y=\sin 1/x)$ $(0<|x|\leqslant 1)$ le segment $-1\leqslant y\leqslant 1$, $x=0$ est un continu de convergence.

1. *L'espace étant un continu et $N$ désignant l'ensemble de ses points de non-connexité locale, tout point $p \in N$ appartient à un continu de convergence $K\subset N$ (et tel que $K\neq p$)*[3]).

Il existe par hypothèse un entourage fermé $E$ de $p$ tel que, $C$ désignant la composante de $p$ dans $E$, $p$ n'en est pas un point intérieur,: $p \in \overline{E-C}$. Soit

$$(1)\qquad p=\lim_{n=\infty} p_n, \qquad\qquad (2)\qquad p_n \in E-C.$$

[1]) Fund. Math. **5** (1924), p. 193, lemme 1.

[2]) D'après C. Zarankiewicz, Fund. Math. **9** (1927), p. 127. Cf. P. Urysohn, Verh. Akad. Amsterdam **13** (1927), p. 43.

[3]) Cf. R. L. Moore, Proc. Nat. Acad. Sc. **4** (1918), C. Zarankiewicz, loco cit., p. 132 et P. Urysohn, loco cit. p. 48.



En désignant par $C_n$ la composante de $p_n$ dans $E$, on a

$$(3)\qquad C\cdot C_n=0.$$

En effet, en supposant que $C\cdot C_n\neq 0$, l'ensemble $C+C_n$ serait un continu $\subset E$, mais alors $C+C_n\subset C$, donc $p_n \in C$, contrairement à (2).

Soit $F$ un entourage fermé de $p$ tel que

$$(4)\qquad F\subset \mathrm{Int}\,(E).$$

Il est légitime d'admettre que $p_n \in F$ pour $n=1,2,\dots$

Soit $D_n$ la composante de $p_n$ dans $F$. Comme $F\subset E$, on a

$$(5)\qquad D_n\subset C_n.$$

Extrayons de la suite $\{D_n\}$ une suite convergente (cf. § 38, I, 1); soit

$$(6)\qquad K=\mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} D_{m_n}.$$

Il vient d'après (1):

$$(7)\qquad p \in K\subset F.$$

Il en résulte que (cf. (4)): $K\subset E$, et $K$ étant un continu (cf. § 42, II, 4), il vient

$$(8)\qquad K\subset C.$$

On a $K\neq p$. Car, d'après § 42, III, 1,

$$D_n\cdot \mathrm{Fr}(F)\neq 0, \quad \text{d'où} \quad K\cdot \mathrm{Fr}(F)\neq 0,$$

tandis que $p$ *non-*$\in \mathrm{Fr}(F)$ (puisque $F$ est un entourage de $p$).

Puis, $K\subset N$. Supposons par impossible que $x \in K-N$. D'après (7) et (4), $E$ est un entourage de $x$ et, $K$ étant un sous-continu de $E$ qui unit $x$ à $p$, $C$ est la composante de $x$ dans $E$. Donc $x \in \mathrm{Int}\,(C)$ (puisque nous supposons que $x$ *non-*$\in N$). Mais alors, comme (cf. (5) et § 25, IV, 2)

$$x \in \mathrm{Ls}\, D_n\subset \mathrm{Ls}\, C_n,$$

il existe un indice $n$ tel que $C\cdot C_n\neq 0$, contrairement à (3).

Enfin, $K$ est un continu de convergence, car les formules (8), (5) et (3) impliquent que $K\cdot D_n=0$.

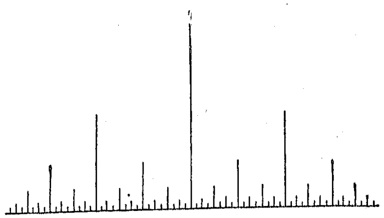
2. *Tout continu dépourvu de continu non dense (qui contienne plus d'un point)*[1]) *est l. c.*

Car tout continu de convergence est non dense.

[1]) Les continus non denses contenant plus d'un point sont aussi appelés *continus de condensation*.

*Remarque.* Un continu non dense n'est pas nécessairement un continu de convergence. Tel est l'exemple suivant:

L'espace se compose du segment 01 de l'axe des $x$ et de la suite de segments verticaux:



$$0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad x = \frac{2k-1}{2^n},$$

où $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$ et $n = 1, 2, \dots$

Le segment horizontal est non dense, mais il n'est pas un continu de convergence.

3. *Théorème de R. L. Moore*[1]. *$\mathcal{X}$ étant un continu et $N$ désignant l'ensemble de ses points de non-connexité locale, la décomposition semi-continue en composantes de $\overline{N}$ et en points individuels de $\mathcal{X} - \overline{N}$ a pour hyperespace un continu localement connexe.*

Autrement dit, *il existe une transformation continue $f$ de $\mathcal{X}$ en un continu l. c. $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ telle que la famille des ensembles $f^{-1}(y)$, où $y \in \mathcal{Y}$, coïncident avec celle des composantes de $\overline{N}$ et des points individuels de $\mathcal{X} - \overline{N}$.*

En effet, la fonction $f$ définie par la décomposition considérée (cf. § 39, V, 3) est une homéomorphie en tout point de $\mathcal{X} - \overline{N}$. Les points de $f(\mathcal{X} - \overline{N})$ sont donc des points de connexité locale de $\mathcal{Y}$. En désignant par $Q$ l'ensemble des points de non-connexité locale de $\mathcal{Y}$, on a donc $Q \subset f(\overline{N})$. Comme (§ 42, VI, 1) $\dim f(\overline{N}) \leqslant 0$, donc $\dim Q \leqslant 0$, il vient $Q = 0$ d'après 1.

Le th. 3, rapproché du th. 6 du N° IV, implique que:

4. *Si $\mathcal{X}$ est un continu discohérent et $\overline{N} \neq \mathcal{X}$, l'hyperespace considéré dans le th. 3 est une courbe simple fermée.*

De là résulte que:

5. *Tout continu discohérent $\mathcal{X}$ est localement un arc en tout point de $\mathcal{X} - \overline{N}$.*

Car l'ensemble $f(\mathcal{X})$ est (comme courbe simple fermée) localement un arc et la fonction $f$ est en chaque point de $\mathcal{X} - \overline{N}$ localement une homéomorphie.

[1]) Voir *Concerning the prime parts of a continuum*, Math. Zft. **22** (1925), p. 307.



Le th. 3 se généralise aussitôt comme suit[1]):

Soit **P** une propriété de points, topologique, locale (c'est-à-dire que l'espace la possède au point $p$ dans le cas où chaque entourage de $p$ la possède en ce point et dans ce cas seulement) et telle que l'ensemble des points où un continu la possède n'est jamais de dimension 0 (c'est-à-dire qu'il est toujours vide ou de dimension positive).

6. *En désignant par $N$ l'ensemble des points où $\mathcal{X}$ possède la propriété* **P**, *le th. 3 reste valable.*

Ainsi, on peut substituer à **P** les propriétés suivantes:

1° $\dim_p \mathcal{X} \geqslant n$ $(n \geqslant 1)$,

2° $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \geqslant \aleph_0$ (voir § 46, III, 5),

3° $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \geqslant \mathfrak{c}$,

4° $p$ est situé sur un continu de convergence (ou encore: sur un continu non dense) ne se réduisant pas à $p$.

Une démonstration analogue à celle du th. 1 nous permettra d'établir l'énoncé suivant:

7. *Tout continu non localement connexe contient:*

1° *un ensemble connexe qui n'est pas un semi-continu,*

2° *un ensemble non connexe qui est cependant connexe entre deux points.*

Reprenons la démonstration du th. 1 en conservant le sens des symboles $p, E, F, C$ et $C_n$. Il est légitime d'admettre que les continus $C_n$ sont disjoints deux à deux et qu'ils constituent une suite convergente:

$$L = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} C_n. \tag{9}$$

On a donc, d'après (1), $p \in L$, d'où $L \subset C$ puisque $L$ est un continu (§ 42, II, 4). D'après § 42, III, 1, on a $C_n \cdot \operatorname{Fr}(E) \neq 0$, d'où $L \cdot \operatorname{Fr}(E) \neq 0$ d'après (9). $L$ étant connexe, l'égalité $F \cdot \operatorname{Fr}(E) = 0$, qui résulte de inclusion (4), implique que $L - [F + \operatorname{Fr}(E)] \neq 0$. Il existe donc un $q \in L \cdot \operatorname{Int}(E) - F$. Soit $H$ un entourage fermé de $q$ et tel que $H \subset E - F$. Soient $D$ la composante de $p$ dans $F$ et $I$ celle de $q$ dans $H$. Il vient $D + I \subset C$ et $DI = 0$. Les ensembles $D, I, C_1, C_2, \dots$ sont donc disjoints deux à deux et il existe d'après § 41, III, 7, une suite infinie d'indices $k_1 < k_2 < \dots$ et un ensemble connexe $W$ tels que

$$C_{k_1} + C_{k_2} + \dots \subset W \quad \text{et soit} \quad WD = 0, \quad \text{soit} \quad WI = 0.$$

[1]) G. T. Whyburn, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), p. 95.

Par raison de symétrie, on peut se borner au premier cas. Comme $p \epsilon L$, l'ensemble $P = W + p$ est connexe. Cependant, il n'est pas un semi-continu. Car, s'il l'était, il existerait (cf. § 42, III, 5) un continu $R$ tel que

$$p \epsilon R \subset PF \quad \text{et} \quad R \neq p$$

(puisque $F$ est un entourage de $p$).

Or, la condition $p \epsilon R \subset F$ entraîne $R \subset D$, d'où $RW = 0$ et comme $R \subset P$, il vient $R = p$.

Enfin, l'ensemble $p + q + \sum_n C_n$ est connexe entre $p$ et $q$ (§ 41, IV, 9), tout en étant un ensemble non-connexe.

**VII. Distance relative. Oscillation** [1]. On appelle *distance relative* entre $x$ et $y$ la borne inférieure du diamètre $\delta(E)$, $E$ étant un ensemble connexe variable unissant $x$ et $y$ [2]. En symbole:

(1) $$\varrho_r(x, y) = \inf \delta(E).$$

Il en résulte que l'inégalité $\varrho_r(x, y) < \varepsilon$ équivaut à l'existence d'un ensemble connexe $E$ tel que

(2) $$x, y \epsilon E \quad \text{et} \quad \delta(E) < \varepsilon.$$

1. *La distance relative métrise tout espace dont chaque couple de points se laisse unir par un ensemble connexe et borné.*

Autrement dit (cf. § 15, I):

(3) $$[\varrho_r(x, y) = 0] \equiv (x = y)$$

et

(4) $$\varrho_r(y, z) \leqslant \varrho_r(x, y) + \varrho_r(x, z).$$

L'équivalence (3) est évidente. Pour établir la formule (4), désignons par $Y$ et $Z$ deux ensembles connexes et bornés unissant $x$ à $y$ et à $z$ respectivement. Il vient (cf. § 15, III (4)):

$$\varrho_r(y, z) \leqslant \delta(Y + Z) \leqslant \delta(Y) + \delta(Z).$$

[1] Notions dues à S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. de Sc. de Varsovie **6** (1913) et **9** (1916), et Fund. Math. **1** (1920), p. 166. De nombreux théorèmes concernant ces notions se trouvent dans C. R. du I Congrès des math. des Pays Slaves, Varsovie 1930, p. 66 (du même auteur) et chez P. Urysohn, Verh. Akad. Amsterdam **13** (1928), p. 38.

[2] De façon plus générale: en supposant que $E$ est un ensemble variable parcourant une famille $F$ d'ensembles, on définit la distance *relative à* $F$. Cf. N. Aronszajn, Fund. Math. **19** (1932), p. 97.



En admettant en outre que

$$\delta(Y) < \varrho_r(x, y) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta(Z) < \varrho_r(x, z) + \varepsilon,$$

il vient $\varrho_r(y, z) < \varrho_r(x, y) + \varrho_r(x, z) + 2\varepsilon$, d'où la formule (4).

2. *Si l'espace est un continu, on peut — sans altérer le nombre* $\varrho_r(x, y)$ *— restreindre la variabilité de* $E$ *dans* (1) *aux continus.*

Car $E$ étant connexe, $\bar{E}$ est un continu et $\delta(\bar{E}) = \delta(E)$.

3. *La distance relative métrise tout espace connexe et localement connexe.*

En outre, *la variabilité de* $E$ *dans* (1) *peut être restreinte aux régions.*

Pour établir la première partie du th. 3, il suffit, d'après 1, de montrer que tout couple de points de l'espace envisagé se laisse unir par un ensemble connexe et borné. Cela est une conséquence directe du th. 8 du § 41, II, en désignant par $\{G_\iota\}$ la famille des régions bornées.

Pour établir la deuxième partie du th. 3, il suffit de remarquer que, $C$ étant un ensemble connexe, à tout $\varepsilon > 0$ correspond une région $R$ telle que

$$C \subset R \quad \text{et} \quad \delta(R) \leqslant \delta(C) + \varepsilon;$$

à savoir la composante de $C$ dans la sphère ouverte de centre $C$ et de rayon $\varepsilon/2$.

4. *Soit* $\mathfrak{X}$ *un espace satisfaisant aux conditions du th.* 1. *Soit* $\mathfrak{X}_r$ *le même espace métrisé par la distance relative. L'identité, considérée comme transformation* $f$ *de* $\mathfrak{X}_r$ *en* $\mathfrak{X}$, *est une fonction continue; la transformation inverse* $f^{-1}$ *est continue au point* $p$ *dans le cas où* $\mathfrak{X}$ *est l. c. en ce point et dans ce cas seulement.*

La continuité de $f$ résulte de l'inégalité

$$|x - y| \leqslant \varrho_r(x, y).$$

Inversement, si la fonction $f^{-1}$ est continue au point $x$, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|x - y| < \eta$ entraîne $\varrho_r(x, y) < \varepsilon$ c'est-à-dire entraîne l'existence d'un ensemble connexe $E$ vérifiant (2). D'après I, 2, $\mathfrak{X}$ est l. c. au point $x$.

Le th. 4 implique directement que

5. *Si l'espace est connexe et l. c., la distance habituelle et la distance relative sont équivalentes au point de vue topologique (c'est-à-dire que* $f$ *est une homéomorphie).*

Il en résulte facilement que, pour qu'un espace métrique connexe soit localement connexe, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un espace dans lequel toute sphère ouverte est connexe [1]).

Appelons *diamètre relatif de $A$*, le nombre

$$\delta_r(A) = \sup \varrho_r(x,y) \quad \text{où} \quad x,y \in A.$$

L'oscillation de la fonction $f^{-1}$ au point $p$, nommée aussi *oscillation de l'espace au point $p$*, est alors par définition (cf. § 15, III):

$$\omega(p) = \inf \delta_r(X) \text{ où } p \in \operatorname{Int}(X)$$
$$= \limsup_{x,y=p} \varrho_r(x,y).$$

*Exemples.* Sur la courbe $\sin 1/x$ de l'ex. 3 du N° I, on a $\omega(p)=2$ pour chaque point $p$ de cette courbe à abscisse 0. Dans l'ex. 4 on a, sur l'axe des $y$, $\omega(y)=1-y$.

6. *Sur tout continu indécomposable $\mathfrak{X}$ l'oscillation est constante* $(=\delta(\mathfrak{X}))$.

Car, dans tout entourage d'un point $p$ donné, il existe un $q$ tel que $\mathfrak{X}$ est irréductible entre $p$ et $q$ (§ 43, VI, 6); donc $\varrho_r(p,q)=\delta(\mathfrak{X})$.

## § 45. Continus localement connexes [2]).

**I. Connexité par arcs.** Un espace est dit *(intégralement) connexe par arcs (i. c. a.)* lorsque tout couple de ses points s'y laisse unir par un arc. Il est dit *localement connexe par arcs (l. c. a.)* au point $p$ lorsque dans tout entourage de $p$ il existe un entourage i. c. a. de $p$, c'est-à-dire, lorsqu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ pour lequel la condition $|x-p|<\eta$ implique l'existence d'un arc $A$ tel que $x,p \in A$ et $\delta(A)<\varepsilon$.

1. *La connexité locale par arcs au point $p$ implique la connexité locale en ce point.*

2. *Si un espace connexe est l. c. a., il est aussi i. c. a.*

De façon plus générale, *toute région (et en particulier, toute composante) d'un espace l. c. a. est i. c. a.*

La première partie est une conséquence directe du th. 8 du § 41, II, en désignant par $G(p)$ un entourage i. c. a. de $p$.

La deuxième partie résulte de la première, vu que les composantes des espaces l. c. sont des régions (§ 44, II, 4).

[1]) M. H. A. Newman, *Plane Topology*, p. 75.

[2]) Les continus localement connexes sont nommés aussi péaniens.



3. *Dans tout espace connexe et l. c. a., la distance relative $\varrho_r(x,y)$ est égale à la borne inférieure des arcs unissant $x$ et $y$. L'inégalité $\varrho_r(x,y)<\varepsilon$ signifie par conséquent qu'il existe un arc $xy$ de diamètre $<\varepsilon$.*

C'est une conséquence du th. 2 et du § 44, VII, 3.

4. *$F$ étant un sous-ensemble compact d'un espace $\mathfrak{X}$ connexe et l. c. a., à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que pour tout couple de points $x,y$ de $F$ la condition $|x-y|<\eta$ entraîne $\varrho_r(x,y)<\varepsilon$, c'est-à-dire que $x$ et $y$ se laissent unir dans $\mathfrak{X}$ par un arc de diamètre $<\varepsilon$.*

Car, en métrisant l'espace $\mathfrak{X}$ par la distance $\varrho_r(x,y)$, on effectue une transformation continue (§ 44, VII, 4), donc uniformément continue sur $F$.

En tant qu'ensemble compact (non vide), $F$ est image continue de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f$ telle que (cf. § 37, VI, 4):

$$f \in F^{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad f(\mathcal{C})=F. \tag{1}$$

Ce théorème se laisse préciser comme suit:

5. *$F$ étant un sous-ensemble compact non vide d'un espace $\mathfrak{X}$ connexe et l. c. a., toute fonction $f$ assujettie aux conditions* (1) *admet une extension $f^* \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{J}}$ qui est une homéomorphie sur tout intervalle contigu à $\mathcal{C}$.*

Soit, en effet, $(a_1b_1), (a_2b_2), \ldots$ la suite des intervalles contigus à $\mathcal{C}$. Comme $\lim_{n=\infty}(b_n-a_n)=0$, on a

$$\lim_{n=\infty}|f(b_n)-f(a_n)|=0,$$

et d'après 4, il existe dans $\mathfrak{X}$ une suite d'arcs $A_n$ $(n=1,2,\ldots)$ aux extrémités $f(a_n)$ et $f(b_n)$ tels que $\lim_{n=\infty}\delta(A_n)=0$. Soit $f_n$ une transformation homéomorphe de l'intervalle $a_nb_n$ en l'arc $A_n$ telle que $f_n(a_n)=f(a_n)$ et $f_n(b_n)=f(b_n)$. La fonction $f^*$ est définie comme suit:

$$f^*(t)=\begin{cases} f(t) & \text{pour } t \in \mathcal{C} \\ f_n(t) & \text{pour } a_n \leqslant t \leqslant b_n, \quad n=1,2,\ldots \end{cases}$$

L'énoncé suivant est un cas particulier du th. 5:

6. *Tout continu l. c. a. (non vide) est une image continue de l'intervalle.*

Il suffit en effet de poser $F=\mathfrak{X}$.

Comme on verra au N° II, le th. 6 se laisse généraliser en substituant à la condition de connexité locale par arcs celle de connexité locale.

## II. Caractérisation des continus localement connexes.

1. *Théorème de Mazurkiewicz-Moore-Menger* [1]). *Tout espace complet, connexe et l. c. est l. c. a.*

Soient $p \neq q$ deux points fixes. Soit $\boldsymbol{G}$ la famille des régions de diamètre $<1$. D'après le th. 9 du § 41, II, cette famille contient un système fini de régions $R_1, \dots, R_k$ qui constitue une „chaîne irréductible" entre $p$ et $q$, c'est-à-dire que

(1) $$p \in R_1, \quad q \in R_k, \quad R_i \cdot R_{i+1} \neq 0 \quad (\text{pour } i<k),$$

(2) $$R_i \cdot R_{i'} = 0 \quad \text{si} \quad |i-i'|>1.$$

Soit $\boldsymbol{G}^*$ la famille des régions $S$ telles que $\delta(S)<1/2$ et $\bar{S} \subset R_1$. Soit (cf. § 41, II, 9) $S_1, \dots, S_{l_1}$ une chaîne à chaînons appartenant à $\boldsymbol{G}^*$, irréductible entre $p$ et $R_1 \cdot R_2$ (respectivement entre $p$ et $q$ si $k=1$). On construit d'une façon analogue une chaîne irréductible entre $S_{l_1} \cdot R_2$ et $R_2 \cdot R_3$ etc.; enfin entre $S_{l_{k-1}} \cdot R_k$ et $q$.

On a ainsi pour $l_{i-1}<j \leqslant l_i$ $(l_0=0)$:

(3) $$\bar{S}_j \subset R_i$$

et on vérifie facilement que la chaîne

(4) $$S_1, \dots, S_{l_1}, S_{l_1+1}, \dots, S_{l_2}, \dots, S_{l_{k-1}}, S_{l_{k-1}+1}, \dots, S_{l_k}$$

est irréductible entre $p$ et $q$.

La chaîne $R_1, \dots, R_k$ étant irréductible, il existe, pour tout point $x$ qui lui appartient, deux indices $\alpha$ et $\alpha'$ tels que:

(5) $$\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha+1, \quad x \in R_\alpha \cdot R_{\alpha'}, \quad x \text{ non-}\in R_i \quad \text{pour} \quad \alpha \neq i \neq \alpha'.$$

De façon analogue, si $x$ appartient à la chaîne (4), il existe deux indices $\beta$ et $\beta'$ tels que

$$\beta \leqslant \beta' \leqslant \beta+1, \quad x \in S_\beta \cdot S_{\beta'}, \quad x \text{ non-}\in S_j \quad \text{pour} \quad \beta \neq j \neq \beta'.$$

La proposition (3) entraîne la relation suivante entre $\alpha$ et $\beta$:

(6) $$l_{\alpha-1} < \beta \leqslant \beta' \leqslant l_{\alpha'}.$$

[1]) S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. **1** (1920) (nouvelle édition 1937, p. 201). Voir les ouvrages antérieurs du même auteur: C. R. Soc. de Sc. de Varsovie, **6** (1913), p. 305 et 941, vol. **9** (1916), p. 428.
R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), p. 135.
K. Menger, Mon. Math.-Phys. **36** (1929), p. 212. Cf. aussi N. Aronszajn, Fund. Math. **15** (1930), p. 228 et ma note, ibid. p. 307.



En effet, si l'on supposait par exemple que $\beta \leqslant l_{\alpha-1}$, on aurait d'après (3):

$$x \in S_\beta \subset R_1 + \dots + R_{\alpha-1},$$

contrairement à (5).

Les formules (3) et (6) entraînent aussitôt les inclusions:

(7) $$\begin{cases} \bar{S}_1 + \dots + \bar{S}_\beta + \bar{S}_{\beta'} \subset R_1 + \dots + R_\alpha + R_{\alpha'}, \\ \bar{S}_\beta + \bar{S}_{\beta'} + \dots + \bar{S}_{l_k} \subset R_\alpha + R_{\alpha'} + \dots + R_k. \end{cases}$$

En posant dans le th. 3 (généralisé) du § 42, V:

$$A_1 = R_1 + \dots + R_{\alpha'}, \quad B_1 = R_\alpha + \dots + R_k, \quad C_1 = A_1 + B_1,$$
$$A_2 = S_1 + \dots + S_{\beta'}, \quad B_2 = S_\beta + \dots + S_{l_k}, \quad C_2 = A_2 + B_2,$$

on voit donc que la condition 1° de ce théorème est satisfaite pour $n=1,2$ et la condition 3° l'est pour $n=1$. En outre:

$$x \in A_1 B_1 = R_\alpha + R_{\alpha'} \quad \text{et} \quad x \in A_2 B_2 = S_\beta + S_{\beta'},$$

d'où

$$\delta(A_1 B_1) \leqslant \delta(R_\alpha) + \delta(R_{\alpha'}) < 2 \quad \text{et} \quad \delta(A_2 B_2) < 1.$$

Le procédé par lequel la chaîne (4) à été obtenue de la chaîne $R_1, \dots, R_k$ se laisse généraliser directement par induction, de sorte qu'on parvient à une suite infinie de chaînes irréductibles entre $p$ et $q$ et telles qu'en désignant par $C_n$ la somme des chaînons de chacune d'elles, toutes les hypothèses du théorème cité se trouvent réalisées; en particulier:

$$\alpha(C_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(A_n B_n) < \frac{2}{n}.$$

On en conclut que l'ensemble $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ est un arc $pq$.

2. *Théorème de Hahn-Mazurkiewicz-Sierpiński* [1]). *$\mathcal{X}$ étant un continu (non vide), les conditions suivantes sont équivalentes:*

1° *$\mathcal{X}$ est image continue de l'intervalle,*

2° *à tout $\varepsilon>0$ correspond une décomposition de $\mathcal{X}$ en un nombre fini de continus de diamètre $<\varepsilon$,*

3° *$\mathcal{X}$ est localement connexe.*

[1]) Voir les ouvrages cités de S. Mazurkiewicz, ainsi que H. Hahn, Jahresb. Deutsch. Math. Ver. **23** (1914), p. 318 et Sgb. Akad. Wiss. Wien **123** (1914), p. 2433, W. Sierpiński, *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*, Fund. Math. **1** (1920) (nouvelle édition 1937, p. 44).

Pour une simple démonstration — due à M. J. L. Kelley — de la connexité par arcs des images continues de l'intervalle (qui résulte des th. 1 et 2), voir G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, p. 39 (3).

$1^0$ entraîne $2^0$. Car, $f$ étant une transformation continue — donc uniformément continue — de l'intervalle $\mathcal{J}$ en $\mathcal{X}$, on a

$$\mathcal{J}=A_1+\ldots+A_n,\quad \mathcal{X}=f(A_1)+\ldots+f(A_n)\quad \text{et}\quad \delta[f(A_i)]<\varepsilon,\quad i=1,\ldots,n,$$

$A_1,\ldots,A_n$ étant des intervalles suffisamment petits.

$2^0$ entraîne $3^0$. En effet, étant donnés: un système de continus $C_1,\ldots,C_n$ tel que

$$\mathcal{X}=C_1+\ldots+C_n \quad \text{et} \quad \delta(C_i)<\varepsilon,$$

et un point $p\in\mathcal{X}$, soit $i_1,\ldots,i_k$ le système de tous les indices tels que

$$p\in C_{i_1},\quad \ldots,\quad p\in C_{i_k}.$$

L'ensemble $C_{i_1}+\ldots+C_{i_k}$ est donc un entourage connexe de $p$ de diamètre $<2\varepsilon$.

$3^0$ entraîne $1^0$ [2]). En effet, le continu $\mathcal{X}$ étant l. c., donc l. c. a. d'après le th. 1, il est image continue de l'intervalle d'après I, 6.

3. *Tout espace compact et l. c. $\mathcal{X}$ se laisse décomposer en un nombre fini de continus l. c. de diamètre arbitrairement petit.*

Tout espace compact et l. c. étant somme d'un nombre fini de continus l. c. (§ 44, II, 7), le théorème se réduit au cas où $\mathcal{X}$ est un continu l. c., donc image continue de l'intervalle. En reprenant la démonstration de la première partie du th. 2 ($1^0\rightarrow 2^0$), on parvient à la conclusion que $\mathcal{X}$ est somme d'un nombre fini de continus de diamètre $<\varepsilon$ et dont chacun est image continue d'un intervalle; d'où la conclusion demandée (puisque $1^0\rightarrow 3^0$).

4. *$\mathcal{X}$ étant un continu l. c., à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que tout couple de points dont la distance est $<\eta$ se laisse unir par un arc de diamètre $<\varepsilon$.*

Car on peut substituer $F$ à $\mathcal{X}$ dans I, 4.

5. *La notion de continu l. c. est un invariant des transformations continues.*

C'est une conséquence de l'équivalence $1^0\equiv 3^0$.

Le th. 1 implique que

6. *Tout espace complet, connexe, l. c. et irréductible entre deux points $a\neq b$ est un arc $ab$.*

[1]) Cette implication embrasse comme cas particulier le célèbre théorème de Peano, d'après lequel le carré $\mathcal{J}^2$ est image continue de l'intervalle $\mathcal{J}$ (Math. Ann. **36**, 1890, p. 157). Pour une démonstration plus directe, voir § 24 a, VI a, cor. 2.



*Remarque*. Rapproché du th. 2 du § 44, VI, le th. 6 implique aussitôt le th. 6 du § 43, VII.

7. *$N$ désignant l'ensemble des points de non-connexité locale d'un continu $\mathcal{X}$ irréductible entre deux points, l'hyperespace $\mathcal{Y}$ de la décomposition de $\mathcal{X}$ en composantes de $\overline{N}$ et en points individuels de $\mathcal{X}-\overline{N}$ est un arc (pourvu que $\overline{N}\neq\mathcal{X}$)* [1]).

Car d'après le th. 3 du § 43, I, $\mathcal{Y}$ est un continu irréductible entre deux points et d'après § 44, VI, 3, il est l. c.

8. *Pour qu'un ensemble fermé sépare un espace l. c. et complet entre deux points, il faut et il suffit qu'il le coupe entre ces points.*

Autrement dit, *si un espace l. c. complet est connexe entre deux points, il contient un continu qui les unit.*

En effet, l'espace étant supposé connexe entre $a$ et $b$, il existe une région $R$ qui contient ces points (à savoir, la composante des points $a$ et $b$, cf. § 44, II, 17). En tant que localement connexe et topologiquement complet, $R$ contient un continu qui unit $a$ et $b$ (d'après le th. 1).

9. *Dans tout espace $\mathcal{X}$ séparable, connexe, l. c., localement compact, mais non-compact intégralement, tout point $p$ est le sommet d'un rayon topologique fermé (c'est-à-dire d'un ensemble fermé homéomorphe à la demi-droite)* [2]).

En effet, $\mathcal{X}^*$ désignant l'espace $\mathcal{X}$ augmenté du „point à l'infini" $\infty$ (cf. § 39, VII, 3), $\mathcal{X}^*$ est un continu l. c. (puisque tous les points, sauf le point $\infty$, étant des points de connexité locale de $\mathcal{X}^*$, le point $\infty$ l'est également en vertu du th. 1 du § 44, VI). $A$ étant un arc $p\infty\subset\mathcal{X}^*$ (dont l'existence résulte du th. 1), $A-\infty$ est le rayon demandé.

Citons sans démonstration le théorème suivant [3]):

10. *$\mathcal{X}$ étant un continu localement connexe à une dimension, à tout $\varepsilon>0$ correspond une fonction $f\in\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ telle que:*

*$1^0$ $f(\mathcal{X})$ est homéomorphe à une ligne polygonale,*

*$2^0$ on a $\delta[f^{-1}(y)]<\varepsilon$ quel que soit $y$.*

[1]) Théorème de R. L. Moore, *Concerning the prime parts of a continuum*, Math. Zeitschr. **22** (1925), p. 307.

[2]) Voir ma note, *Quelques propriétés topologiques de la demi-droite*, Fund. Math. **3** (1922), p. 59.

[3]) Voir S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **20** (1933), p. 281.

**III. Régions et sous-continus des continus $\mathcal{X}$ localement connexes.** Soient $F$ un ensemble fermé et $G$ son complémentaire. On a les deux théorèmes suivants:

1. *Il existe une suite d'ensembles fermés, l. c. $F_1, F_2, \ldots$ telle que:*
$1^0$ $F = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots$, $\quad 2^0$ $F_n \supset F_{n+1}$,
$3^0$ *toute composante de $F_n$ contient une composante de $F$,*
$4^0$ *aucune composante de $G$ ne contient deux composantes différentes de $\mathcal{X} - F_n$,*
$5^0$ *le nombre des composantes de $\mathcal{X} - F_n$ est fini.*

En particulier: *si $F$ est un continu, $F_n$ l'est également; si $F$ ne sépare pas l'espace, $F_n$ ne le sépare non plus.*

De façon plus générale: *le nombre des composantes de $F_n$ ne dépasse pas celui des composantes de $F$ et le nombre des composantes de $\mathcal{X} - F_n$ ne dépasse pas celui des composantes de $G$.*

Nous allons définir d'abord une suite d'ensembles fermés, l. c. $F_1^*, F_2^*, \ldots$ satisfaisant aux conditions $1^0$—$3^0$.

Procédons par induction. Soit $F_1^* = \mathcal{X}$. Admettons que $F_n^*$ est fermé, l. c. et que $F \subset F_n^*$. Il s'agit de définir $F_{n+1}^*$.

D'après II, 3, il existe, pour tout $n$, un système de continus l. c. $K_1^n, \ldots, K_{m_n}^n$ tel que

$$F_n^* = K_1^n + \ldots + K_{m_n}^n \quad \text{et} \quad \delta(K_i^n) < 1/n.$$

Désignons par $F_{n+1}^*$ la somme de tous les $K_i^n$ tels que $F \cdot K_i^n \neq 0$. Il vient

$$F \subset F_{n+1}^* \subset F_n^* \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(F, F_{n+1}^*) < 1/n,$$

d'où les formules $1^0$ et $2^0$.

En outre, $F_{n+1}^*$ est l. c., en tant que somme de continus l. c. (cf. § 44, II, 1).

Enfin, la condition $3^0$ est vérifiée puisque toute composante de $F_{n+1}^*$ admet des points communs avec $F$, comme somme de certains $K_i^n$ non disjoints de $F$.

La suite $\{F_n^*\}$ étant définie, passons à la définition de la suite $\{F_n\}$.

Soit $Q_1, Q_2, \ldots$ la suite (finie ou infinie) des composantes de $G$. Il existe, d'après le th. 14 du § 44, II, une suite double de régions $\{R_k^i\}$ telle que

(1) $\quad Q_i = R_1^i + R_2^i + \ldots, \qquad$ (2) $\quad \overline{R_k^i} \subset R_{k+1}^i.$



Rangeons la suite double $\{R_k^i\}$ en une suite simple $R_1, R_2, \ldots$ Il vient

(3) $\quad G = R_1 + R_2 + \ldots, \qquad$ (4) $\quad \overline{R}_k \subset G.$

Pour $n$ fixe, envisageons les régions $R_k$ disjointes de $F_n^*$ avec $k \leqslant n$. Soit $S_n$ la somme des composantes de $\mathcal{X} - F_n^*$ qui contiennent ces régions. Soit $F_n = \mathcal{X} - S_n$. Il vient $S_n \subset \mathcal{X} - F_n^*$, d'où $F_n^* \subset \mathcal{X} - S_n = F_n$, et comme $F = F_1^* \cdot F_2^* \cdot \ldots$, on a

$$F \subset F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots$$

L'égalité $1^0$ étant équivalente à $G = S_1 + S_2 + \ldots$, donc à

$$R_1 + R_2 + \ldots = S_1 + S_2 + \ldots$$

(d'après (3)), il s'agit de prouver qu'à tout $k$ correspond un $n \geqslant k$ tel que $R_k \cdot F_n^* = 0$.

Or $\mathcal{X} - \overline{R}_k$ étant d'après (4) un entourage de l'ensemble $F = \operatorname{Lim} F_n^*$, on a, pour $n$ suffisamment grand, $F_n^* \subset \mathcal{X} - \overline{R}_k$, d'où $R_k \cdot F_n^* = 0$.

Comme $F_n^* \supset F_{n+1}^*$, il vient $S_n \subset S_{n+1}$, d'où la condition $2^0$.

L'ensemble $F_n^*$ étant l. c., l'ensemble $F_n = \mathcal{X} - S_n$ l'est également d'après le th. 11 du § 44, II. D'après § 44, II, 12, toute composante de $F_n^*$ contient une composante de $F_n$, donc une composante de $F$ (la condition $3^0$ étant vérifiée par $F_n^*$).

Supposons que la condition $4^0$ ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe deux composantes (différentes) $U$ et $V$ de $S_n$ contenues dans une seule composante $Q_i$ de $G$. D'après la définition de $S_n$, $U$ et $V$ sont deux composantes de $\mathcal{X} - F_n^*$ qui contiennent deux termes différents de la suite $R_1^i, R_2^i, \ldots$ Mais cela contredit l'inclusion (2).

Enfin la condition $5^0$ est vérifiée, le nombre des composantes de $S_n'$ ne dépassant pas $n$.

2. *Il existe une suite d'ensembles fermés, l. c. $H_1, H_2, \ldots$ telle que*

(i) $\quad G = H_1 + H_2 + \ldots, \qquad$ (ii) $\quad H_n \subset \operatorname{Int}(H_{n+1}),$

(iii) *aucune composante de $G$ ne contient deux composantes différentes de $H_n$,*

(iv) *toute composante de $\mathcal{X} - H_n$ contient une composante de $F$,*

*et par conséquent,*

(v) *le nombre des composantes de $\mathcal{X} - H_n$ est fini.*

En particulier: *si $G$ est une région, $H_n$ est un continu; si $F$ est un continu, $\mathcal{X}-H_n$ est une région*[1]).

De façon plus générale: *le nombre des composantes de $H_n$ ne dépasse pas celui des composantes de $G$ et le nombre des composantes de $\mathcal{X}-H_n$ ne dépasse pas celui des composantes de $F$.*

Soient $\{Q_i\}$, $\{R_k^i\}$ et $\{R_k\}$ les suites envisagées dans la démonstration précédente. Posons

(5) $$U_k=R_1+\ldots+R_k, \quad \text{où } k=1,2,\ldots$$

D'après le th. 1, il existe un ensemble fermé, l. c. $A_k$ tel que

(6) $$\overline{U}_k\subset A_k\subset G, \quad \text{où } k=1,2,\ldots,$$

et que toute composante de $A_k$ contient une composante de $\overline{U}_k$.

Désignons par $H_k$ l'ensemble $A_k$ augmenté de toutes les composantes de $\mathcal{X}-A_k$ contenues dans $G$.

D'après le th. 11 du § 44, II, $H_k$ est un ensemble fermé l. c.

L'égalité (i) est une conséquence directe de (3), (5) et (6).

De plus, comme

(7) $$G=U_1+U_2+\ldots, \quad U_k\subset U_{k+1} \quad \text{et} \quad U_k\subset \boldsymbol{H}_k,$$

l'égalité (i) reste vérifiée en remplaçant la suite $\{H_k\}$ par une suite partielle arbitraire $\{H_{m_k}\}$ où $m_1<m_2<\ldots$

Or, afin de satisfaire à la condition (ii), on remplacera la suite $\{H_k\}$ par la suite partielle $\{H_{m_k}\}$ définie par induction comme suit:

1) $m_1=1$, 2) $m_{k+1}$ est le plus petit indice $r$ tel que $H_{m_k}\subset U_r$. (un indice $r$ satisfaisant à cette inclusion existe en raison de l'égalité (7) et du fait que $H_{m_k}$ est un sous-ensemble compact de $G$).

D'après (2), aucune composante $Q_i$ de $G$ ne contient deux composantes différentes de $U_k$, donc de $A_k$, donc de $H_k$ (puisque — d'après § 44, II, 12 — toute composante de $H_k$ contient une composante de $A_k$).

Toute composante $C$ de $\mathcal{X}-H_k$ étant une composante de $\mathcal{X}-A_k$ non contenue dans $G$, il vient $C-G\neq 0$, c'est-à-dire $CF\neq 0$. Il existe donc une composante $K$ de $F$ telle que $CK\neq 0$. Cette inégalité, rapprochée de l'inclusion $K\subset \mathcal{X}-H_k$ (qui résulte des inclusions $H_k\subset G$ et $K\subset F$), entraîne $K\subset C$, puisque $C$ est une composante de l'ensemble $\mathcal{X}-H_k$ et $K$ en est un sous-continu.

[1]) Pour un cas particulier et pour des énoncés qui rentrent dans un ordre d'idées analogue, voir W. M. Kincaid, *On non-cut sets of locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), p. 399.



En vue d'applications, nous allons établir le théorème 4, qui sera précédé par un lemme.

3. *Lemme. Soient $R$ une région et $\boldsymbol{S}$ un système de $n+1$ continus disjoints situés dans $R$. Soit $C_0\in\boldsymbol{S}$. En numérotant les continus-éléments de $\boldsymbol{S}$ de façon convenable, il existe $n$ régions $R_1,\ldots,R_n$ telles qu'on a pour $k=1,\ldots,n$:*

(8) $$\overline{R}_k\subset R_{k-1}-C_k, \quad C_0+C_{k+1}+C_{k+2}+\ldots+C_n\subset R_k \quad (\textit{où } R_0=R).$$

Il existe en effet, d'après § 41, III, 6, un continu $C_1\in\boldsymbol{S}-(C_0)$ tel que tous les continus-éléments de $\boldsymbol{S}-(C_1)$ sont situés dans une seule composante $Q$ de $R-C_1$. Ils sont donc (cf. § 44, II, 15) contenus dans une région $R_1$ telle que $\overline{R}_1\subset Q$.

De façon analogue, il existe un élément $C_2$ du système $\boldsymbol{S}-(C_0,C_1)$ et une région $R_2$ tels que tous les continus-éléments de $\boldsymbol{S}-(C_1,C_2)$ sont contenus dans $R_2$ et que $\overline{R}_2\subset R_1-C_2$.

En procédant ainsi de proche en proche, on établit le numérotage demandé des éléments du système $\boldsymbol{S}$.

4. *Soit $F$ un ensemble fermé, composé d'une suite infinie de composantes dont chacune, sauf une seule — désignons-la par $C_0$ — est ouverte dans $F$.*

*En rangeant ces composantes en une suite infinie $C_0,C_1,C_2,\ldots$ de façon convenable, il existe une suite d'ensembles ouverts $G_1,G_2,\ldots$ tels que $G_n$ est formé de $n+1$ composantes:*

(9) $$G_n=R_{n,0}+\ldots+R_{n,n}$$

*et que*

(10) $$F=\prod_{n=1}^{\infty}G_n, \qquad (11) \quad \overline{G}_{n+1}\subset G_n,$$

(12) $$C_j\subset R_{n,j} \quad \textit{pour} \quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

(13) $$C_0+C_{n+1}+C_{n+2}+\ldots\subset R_{n,0}.$$

Remarquons d'abord qu'il existe une suite de continus $K_1,K_2,\ldots$ tels que

(14) $$C_0=\prod_{n=1}^{\infty}K_n, \qquad (15) \quad K_{n+1}\subset K_n$$

et que, pour tout $n$, toutes les composantes de $F$, sauf un nombre fini, sont contenues dans $K_n$.

En effet, $F_1, F_2, \ldots$ désignant une suite d'ensembles fermés, l. c. satisfaisant aux conditions $1^0$ et $2^0$, soit $K_n$ la composante de $F_n$ qui contient $C_0$. Le produit $K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots$, en tant que sous-continu de $F$, est donc identique à $C_0$. En outre, le nombre des composantes de $F_n$ étant fini (d'après § 44, II, 7), $K_n$ contient toutes les composantes de $F$ sauf un nombre fini.

Soit $\boldsymbol{S}_n$ le système ayant pour éléments le continu $K_n$ et toutes les composantes de $F$ disjointes de $K_n$. On déduit aussitôt des formules (14) et (15) que la somme $\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \ldots$ contient comme éléments toutes les composantes de l'ensemble $F$ distinctes de $C_0$.

Soit $l_n + 1$ le nombre des éléments de $\boldsymbol{S}_n$. Il est légitime d'admettre que $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots$ D'après le lemme 3, on peut numéroter les éléments de $\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_{n-1}$ différents de $K_n$ à l'aide des indices $k = l_{n-1} + 1, \ldots, l_n$ et on peut définir un système de $l_n$ régions $R_k$ de façon que l'on ait

(16) $\bar{R}_k \subset R_{k-1} - C_k$, $R_0 = \mathfrak{X}$ et (17) $K_n + C_{k+1} + C_{k+2} + \ldots + C_{l_n} \subset R_k$.

Ainsi, par exemple,

$$C_1 \cdot \bar{R}_1 = 0, \quad K_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_{l_1} \subset R_1, \quad K_1 \subset R_{l_1}, \quad \bar{R}_{l_1} \subset R_{l_1 - 1} - C_{l_1}.$$

Il est aussi légitime d'admettre que la région $R_{l_n}$ est contenue dans la sphère $Z_n$ de centre $K_n$ et de rayon $1/n$; c'est-à-dire que

(18) $$\varrho(x, K_n) < 1/n \quad \text{pour} \quad x \in R_{l_n}.$$

Car on peut, au besoin, remplacer $R_{l_n}$ par la composante de l'ensemble $Z_n \cdot R_{l_n}$ qui contient $K_n$.

Passons à présent à la définition des régions $R_{n,0}, \ldots, R_{n,n}$, où $n = 0, 1, \ldots$

Soit $n$ fixe. Posons $R_{n,0} = R_n$. En supposant que $C_j \subset R_{n-1,j}$ où $1 \leqslant j \leqslant n-1$, soit $R_{n,j}$ une région telle que

(19) $C_j \subset R_{n,j}$, (20) $\bar{R}_{n,j} \subset R_{n-1,j}$

et que

(21) $$\varrho(x, C_j) < 1/n \quad \text{pour} \quad x \in R_{n,j}.$$

Soit, en outre (conformément à (16)):

(22) $C_n \subset R_{n,n}$, (23) $\bar{R}_{n,n} \subset R_{n-1} - \bar{R}_n$.



L'ensemble $G_n$ étant défini par l'égalité (9), les régions $R_{n,0}, \ldots, R_{n,n}$ en sont les composantes; autrement dit: elles sont disjointes. On a, en effet, pour $0 < i < j \leqslant n$ (cf. (20), (22) et (16)):

$$R_{n,i} \subset R_{i,i} \subset R_{i-1} - R_i \subset R_{i-1} - R_{j-1}, \quad \text{d'où} \quad R_{n,i} \cdot R_{n,j} = 0,$$

et d'autre part

$$R_{n,0} \cdot R_{n,j} \subset R_n - R_j = 0.$$

L'égalité (10) résulte des égalités

$$C_0 = \prod_{n=1}^{\infty} R_{n,0} = \prod_{n=1}^{\infty} R_n \quad \text{et} \quad C_j = \prod_{n=j}^{\infty} R_{n,j} \quad (j > 0),$$

qui sont des conséquences de (14), (18) et (16) et de (21).

Puis, l'inclusion (11) résulte des formules (cf. (20) et (8)):

$$\bar{R}_{n,j} \subset R_{n-1,j} \ (1 \leqslant j \leqslant n-1), \quad \bar{R}_{n,0} = \bar{R}_n \subset R_{n-1,0}, \quad \bar{R}_{n,n} \subset R_{n-1,0}.$$

Enfin les inclusions (12) et (13) se déduisent des formules (19), (22) et (8).

5. *Étant donné un système fini de régions* $R_1, \ldots, R_n$ *tel que* $\mathfrak{X} = R_1 + \ldots + R_n$, *il existe un système de continus l. c.* $C_1, \ldots, C_n$ *tel que*

(24) $$\mathfrak{X} = C_1 + \ldots + C_n \quad \textit{et} \quad C_i \subset R_i.$$

En effet, d'après § 16, II, 2, il existe un système d'ensembles fermés $F_1, \ldots, F_n$ tel que

$$\mathfrak{X} = F_1 + \ldots + F_n \quad \text{et} \quad F_i \subset R_i.$$

La dernière inclusion implique d'après § 44, II, 15, l'existence d'un continu $C_i$ tel que $F_i \subset C_i \subset R_i$. En vertu du th. 1, on peut admettre que $C_i$ est un continu l. c., d'où l'egalité (24).

6. *Si le continu l. c.* $\mathfrak{X}$ *n'est pas unicohérent, il se laisse décomposer en deux continus l. c. dont le produit n'est pas connexe.*

Il existe par hypothèse deux continus $K$ et $L$ tels que $\mathfrak{X} = K + L$ et dont le produit n'est pas connexe. Soient, conformément à 1, $K_1, K_2, \ldots$ et $L_1, L_2, \ldots$ deux suites de continus l. c. tels que

$$K = \prod_{n=1}^{\infty} K_n, \quad L = \prod_{n=1}^{\infty} L_n, \quad K_{n+1} \subset K_n \quad \text{et} \quad L_{n+1} \subset L_n.$$

Il vient

$$\mathfrak{X} = K_n + L_n \quad \text{et} \quad KL = \prod_{n=1}^{\infty} (K_n \cdot L_n).$$

Pour $n$ suffisamment grand, $K_n \cdot L_n$ n'est pas connexe, car autrement $KL$ serait connexe en vertu du § 42, II, 5.

7. *$R$ étant une sous-région de $\mathfrak{X}$,*

*1⁰ les points de* $\mathrm{Fr}(R)$ *accessibles de $R$ constituent un ensemble dense dans* $\mathrm{Fr}(R)$,

*2⁰ si $p \in \mathrm{Fr}(R)$ et $R+p$ est l. c., $p$ est accessible de $R$,*

*3⁰ tout point $p$ accessible de $R$ en est accessible par un continu l. c., donc par un arc; c'est-à-dire qu'il existe un arc $L$ tel que $p \in L \subset R+p$.*

Soient, en effet, $p \in \mathrm{Fr}(R)$ et $\varepsilon > 0$. $\mathfrak{X}$ étant l. c., il existe un arc $qp$ tel que $q \in R$ et $\delta(qp) < \varepsilon$. Donc, $r$ désignant le premier point de $\mathrm{Fr}(R)$ sur $qp$, $r$ est accessible et $|p-r| < \varepsilon$; d'où l'énoncé 1⁰.

On déduit 2⁰ du th. II, 1, en tenant compte du fait que l'ensemble $R+p$, en tant qu'un $G_\delta$, est topologiquement complet (cf. § 29, VI).

Soit enfin $C$ un continu tel que

$$p \in C \subset R+p \quad \text{et} \quad CR \neq 0.$$

Posons

$$(25) \quad A_n = C \cdot \underset{x}{E}[1/n \leqslant |x-p| \leqslant 1/(n-1)], \quad \text{d'où} \quad (26) \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Donc $\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, A_n = p$. D'après 1, il existe un $F_n$ fermé, l. c. tel que

$$(27) \quad A_n \subset F_n \subset R, \qquad (28) \quad \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, F_n = p,$$

et que toutes les composantes de $F_n$ (dont le nombre est d'ailleurs fini, cf. § 44, II, 7) ont des points communs avec $A_n$. D'après (26) et (27), l'ensemble $C^* = p + F_1 + F_2 + \dots$ est un continu. D'après (27), aucun point n'appartient à une infinité des $F_n$ et, par conséquent, le continu $C^*$ est l. c. en chaque point de la somme $F_1 + F_2 + \dots$, donc en chacun de ses points (puisque $p$ ne peut pas être le seul point de non-connexité locale de $C^*$, cf. § 44, VI, 1).

Dans le même ordre d'idées, citons sans démonstration:

4⁰ *si* $\dim \mathrm{Fr}(R) = 0$ et $p \in \mathrm{Fr}(R)$, $R+p$ *est l. c.*[1]).

[1]) G. T. Whyburn, *A generalized notion of accessibility*, Fund. Math. **14** (1929), p. 315.



8. *Soient $G$ un sous-ensemble ouvert d'un continu l. c. et $R_1, R_2, \dots$ la suite de ses composantes. En supposant que $\lim\limits_{n=\infty} \delta(R_n) = 0$, on a*

$$d_1(G) = \max \delta(R_n);$$

*c'est-à-dire* (cf. § 40, IV) *qu'il existe un système fini d'ensembles ouverts $H_1, \dots, H_m$ tel que*

$$G = H_1 + \dots + H_m, \quad H_i \cdot H_j = 0 \quad \textit{pour} \quad i \neq j \quad \textit{et} \quad \delta(H_i) \leqslant \max \delta(R_n).$$

Posons $\mu = \max \delta(R_n)$. Soit $k$ un indice tel que $\delta(R_n) < \mu/3$ pour $n > k$. L'ensemble $G$ étant totalement borné, soit $A_1, \dots, A_r$ un système d'ensembles tels que

$$G = A_1 + \dots + A_r \quad \text{et} \quad \delta(A_i) < \mu/3 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, r.$$

On posera: $m = k + r$, $H_i = R_i$ pour $i \leqslant k$ et $H_{k+j} =$ somme des $R_n$ tels que $n > k$, et

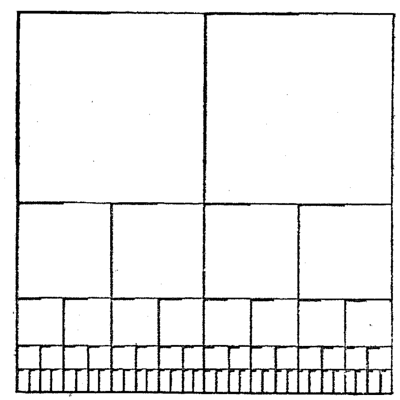
$$R_n \cdot A_j \neq 0 = R_n \cdot A_s \quad \text{pour} \quad s < j \ (1 \leqslant j \leqslant r).$$

**IV. Continus héréditairement localement connexes (h. l. c.)** [1]).

On appelle ainsi tout continu qui est l. c. de même que chacun de ses sous-continus.

Tel est p. ex. un arc, le continu du § 44, VI, p. 178. Cependant, le carré $\mathcal{I}^2$ est l. c., mais non h. l. c. Il en est de même du continu suivant qui est *somme de deux continus h. l. c.*

Soit $C$ le continu composé du segment $(0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0)$, des segments verticaux $(x = m/2^n,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/2^n)$ avec $0 \leqslant m \leqslant 2^n$, et des segments horizontaux $(0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1/2^n)$, où $n = 0, 1, \dots$ Le continu $C$ est somme de deux continus h. l. c. symétriques par rapport à la droite $x = 1/2$ et dont l'un est représenté sur la figure par des lignes grasses.



D'après le th. 2 du § 44, VI, on a le théorème suivant (cf. aussi § 46, IV, 3 et 2):

[1]) Cf. G. T. Whyburn, *Concerning hereditarily locally connected continua*, Amer. Journ. Math. **53** (1931), p. 374—384.

1. *Tout continu dépourvu de continu non-dense (qui contienne plus d'un point) est h. l. c.*

2[1]). *Pour qu'un continu soit h. l. c., il faut et il suffit qu'il soit dépourvu de continu de convergence (qui contienne plus d'un point).*

La condition étant suffisante d'après le th. 1 du § 44, VI, il s'agit de prouver qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire qu'étant donnée une suite de continus $K_1, K_2, \dots$ tels que

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} K_n = K, \quad K_i \cdot K_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j, \quad K \cdot K_n = 0, \quad p \in K \neq p,$$

il existe un continu non-localement connexe.

Il est donc légitime d'admettre que l'espace est l. c. Il existe, par conséquent, un continu $Q$ tel que $p \in \operatorname{Int}(Q)$ et $K - Q \neq 0$. Comme $p \in \operatorname*{Lim}_{n=\infty} K_n$, il existe un $n_0$ tel que $QK_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$. Le continu

$$C = K + Q + K_{n_0} + K_{n_0+1} + \dots$$

est non-localement connexe en tout point $q \in K - Q$. Car, dans le cas contraire, il existerait un continu $L \subset C - Q$ contenant $q$ dans son intérieur relatif à $C$. Donc

$$L \cdot (K_{n_0} + K_{n_0+1} + \dots) \neq 0.$$

Mais alors la formule

$$L = LK + LK_{n_0} + LK_{n_0+1} + \dots$$

représenterait une décomposition du continu $L$ en série d'ensembles fermés disjoints dont deux au moins sont non-vides, ce qui contredit le théorème de Sierpiński (§ 42, III, 6).

3. *Étant donnée dans un continu h. l. c., une suite de régions disjointes $R_1, R_2, \dots$, on a $\lim_{n=\infty} \delta(R_n) = 0$.*

Car, autrement, il existerait un $\varepsilon > 0$ et une suite convergente de continus $K_{i_1}, K_{i_2}, \dots$ tels que $K_{i_n} \subset R_{i_n}$ et $\delta(K_{i_n}) > \varepsilon$. Mais alors la limite $K = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} K_{i_n}$ serait un continu de convergence ne se réduisant pas à un seul point, puisque $\delta(K) \geqslant \varepsilon$.

*Remarque*. Il peut cependant exister une suite de continus disjoints $C_1, C_2, \dots$ tels que $\lim_{n=\infty} \delta(C_n) \neq 0$. Le continu suivant en est un exemple[2]):

[1]) Voir C. Zarankiewicz, Fund. Math. **9** (1927), p. 134 et P. Urysohn, Verh. Akad. Amsterdam **13** (1927), p. 49.

[2]) Cf. P. Urysohn, loco cit. p. 46 et G. T. Whyburn, Math. Ann. **102** (1929), p. 333.

Il importe de remarquer que la singularité en question ne peut pas se présenter sur le plan (cf. § 53).



Soit $p_1, p_2 \dots$ la suite des nombres premiers à partir de 3. Soit, dans l'espace $XYZ$, $C$ l'intervalle 01 de l'axe $X$. Soit $C_n$ l'arc formé de demi-circonférences unissant successivement les points

$$\frac{1}{p_n}, \frac{2}{p_n}, \dots, \frac{p_n - 1}{p_n}$$

et situé sur le plan $z = y/n$.

Le continu $C + C_1 + C_2 + \dots$ est h. l. c., tandis que $\lim_{n=\infty} \delta(C_n) = 1$.

4. *Soient $G$ un sous-ensemble ouvert d'un continu h. l. c. et $R_1, R_2, \dots$ la suite des composantes de $G$. En supposant que $\delta(R_n) < \varepsilon$ pour chaque $n$, on a $d_1(G) < \varepsilon$, c'est-à-dire que $G$ se laisse décomposer en un nombre* f i n i *d'ensembles ouverts, disjoints et de diamètre $< \varepsilon$.*

Le th. 4 résulte du th. 3 en vertu de III, 8.

Les th. 3 et 4 impliquent aussitôt que

5. *Tout continu h. l. c. jouit de la propriété suivante:*

(*) *étant donnée une suite d'ensembles ouverts et disjoints $G_1, G_2, \dots$, on a $\lim_{n=\infty} d_1(G_n) = 0$, c'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un indice $n_\varepsilon$ tel que, pour $n > n_\varepsilon$, $G_n$ se décompose en un nombre fini d'ensembles ouverts, disjoints et de diamètre $< \varepsilon$.*

De façon plus générale:

5a. *$A$ étant un sous-ensemble d'un continu h. l. c., l'ensemble $A$, considéré comme l'espace, jouit de la propriété* (*).

C'est une conséquence de l'énoncé suivant:

6. *La propriété* (*) *est héréditaire; c'est-à-dire que, $A$ étant un sous-ensemble d'un espace jouissant de la propriété* (*), *cette propriété subsiste en entendant par „ouvert" un ensemble ouvert relativement à $A$.*

En effet, les ensembles $G_1, G_2, \dots$ étant disjoints et ouverts dans $A$, il existe une suite d'ensembles disjoints et ouverts (dans l'espace) $H_1, H_2, \dots$ tels que $G_n = AH_n$ (cf. § 15, XIII, 2). On a donc par hypothèse, pour $n > n_\varepsilon$, la décomposition $H_n = H_n^1 + \dots + H_n^{m_n}$ en ensembles ouverts, disjoints et de diamètre $< \varepsilon$. La formule

$$G_n = A \cdot H_n^1 + \dots + A \cdot H_n^{m_n}$$

fournit donc une décomposition de $G_n$ en ensembles disjoints, ouverts dans $A$ et de diamètre $< \varepsilon$.

7. *Lemme. Étant donnés dans un espace séparable à propriété* (*) *un ensemble fermé* $A$ *et une famille d'ensembles fermés-ouverts* $\{G_\iota\}$ *tels que* $A\subset\sum_\iota G_\iota$, *il existe une suite infinie d'indices* $\iota_1,\iota_2,\ldots$ *et une suite infinie d'ensembles fermés-ouverts* $H_1,H_2,\ldots$ *tels que:*

(1) $H_n\subset G_{\iota_n}$, (2) $A\subset\sum_n H_n=\overline{\sum_n H_n}$.

Soit, conformément au théorème de Lindelöf (§ 17, I), $\iota_1,\iota_2,\ldots$ une suite telle que

$$A\subset\sum_n G_{\iota_n}.$$

Posons

(3) $F_1=G_{\iota_1}$ et $F_n=G_{\iota_n}-(G_{\iota_1}+\ldots+G_{\iota_{n-1}})$ pour $n>1$.

Les ensembles $F_1,F_2,\ldots$ sont donc fermés-ouverts, disjoints et on a

(4) $$A\subset\sum_n F_n.$$

Comme $\lim_{n=\infty} d_1(F_n)=0$, il vient

(5) $F_n=F_{n1}+\ldots+F_{nl_n}$ où $\delta(F_{nj_n})<\varepsilon_n$ et $\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$,

les ensembles $F_{n1},\ldots,F_{nl_n}$ étant fermés-ouverts et disjoints. Soit $H_n$ la somme de ceux qui ont des points communs avec $A$. Les formules (3) et (5) impliquent aussitôt l'inclusion (1). La première partie de (2) résulte de (3)—(5). Pour prouver la deuxième, posons

$$x=\lim_{n=\infty} x_n \quad \text{où} \quad x_n\in H_{m_n} \quad \text{et} \quad m_1<m_2<\ldots$$

On a donc $x_n\in F_{m_nj_{m_n}}$ où $A\cdot F_{m_nj_{m_n}}\neq 0$; soit $y_n\in A\cdot F_{m_nj_{m_n}}$. Il vient $|x_n-y_n|<\delta(F_{m_nj_{m_n}})<\varepsilon_{m_n}$, donc $\lim_{n=\infty} y_n=x$. Par conséquent

$$x\in\bar{A}=A, \quad \text{d'où} \quad x\in\sum_n H_n,$$

d'après l'inclusion (2).

8. *Pour tout espace séparable jouissant de la propriété* (*), *la connexité de l'espace entre deux ensembles fermés* $A$ *et* $B$ *entraîne sa connexité entre un couple de points* $a\in A$ *et* $b\in B$.

Autrement dit, *la propriété* (*) *entraîne la propriété* ($M$) (considérée au § 42, II, 1).



Nous allons démontrer d'abord qu'un espace qui n'est connexe entre $B$ et aucun point $a$ de $A$ est non connexe entre $A$ et $B$. En effet, à tout point $a\in A$ correspond par hypothèse un ensemble fermé-ouvert $G(a)$ tel que

$$a\in G(a) \quad \text{et} \quad B\cdot G(a)=0.$$

Le lemme implique donc l'existence d'un ensemble fermé-ouvert $H$ tel que

$$A\subset H\subset\sum_{a\in A} G(a), \quad \text{d'où} \quad BH=0.$$

L'espace n'est donc pas connexe entre $A$ et $B$.

Il est ainsi établi que la connexité entre deux ensembles fermés $A$ et $B$ implique la connexité entre $B$ et un point $a$ de $A$. En appliquant cette implication au cas où $A=(a)$, on en conclut finalement que l'espace est connexe entre $a$ et un point $b$ de $B$.

9. *Tout sous-ensemble* $E$ *d'un continu h. l. c. (plus généralement: tout espace séparable jouissant de la propriété* (*)*) satisfait aux conditions suivantes:*

1° *si* $E$ *est connexe entre deux ensembles* $A$ *et* $B$ *fermés dans* $E$, *il existe une composante* $C$ *de* $E$ *telle que* $AC\neq 0\neq BC$;

2° *les quasi-composantes de* $E$ *sont connexes et coïncident, par conséquent, avec ses composantes;*

3° *si* $\dim_p E>0$, $p$ *appartient à un ensemble connexe (qui ne se réduit pas à* $p$*);*

4° *pour tout* $\varepsilon>0$ *il n'existe qu'un nombre fini de composantes de* $E$ *de diamètre* $>\varepsilon$;

5° [1]) *si* $E$ *est connexe,* $E$ *est localement connexe.*

Les énoncés 1°, 2° et 3° résultent en vertu de 8 respectivement des théorèmes 3, 2 et 9 du § 42, II.

Pour établir 4°, envisageons conformément au th. 3 du § 41, V, une transformation continue $f$ de $E$ en un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor telle que les ensembles $f^{-1}(y)$ coïncident avec les quasi-composantes de $E$ ($y$ parcourant $f(E)$). En supposant qu'il existe une infinité de composantes, donc — d'après 2° — une infinité de quasi-composantes de $E$, de diamètre $>\varepsilon$, il existerait un ensemble infini $A\subset f(E)$ tel que $\delta[f^{-1}(y)]>\varepsilon$ pour $y\in A$. Soit $H_1,H_2,\ldots$ une suite infinie d'ensembles disjoints, ouverts dans $\mathcal{C}$ et tels que $AH_n\neq 0$. Aucun des ensembles $G_n=f^{-1}(H_n)$ ne se laisse donc décomposer

[1]) R. L. Wilder, Proc. Nat. Acad. Sc. **15** (1929), p. 616.

en ensembles ouverts disjoints de diamètre $<\varepsilon$ (puisque $G_n$ contient un ensemble connexe de diamètre $>\varepsilon$). Mais cela contredit la propriété (*), les ensembles $G_1, G_2, \ldots$ étant ouverts et disjoints.

Passons à 5°. Considérons $E$ comme l'espace. $E$ étant supposé non-localement connexe au point $p$, il existe un entourage fermé $F$ de $p$ tel que $p$ n'est pas un point intérieur de sa composante dans $F$. Il existe par conséquent une suite de points $p_1, p_2, \ldots$ convergente vers $p$ et appartenant à des composantes différentes $Q_1, Q_2, \ldots$ de $F$. Comme $p \in \mathrm{Int}(F)$, il existe d'après 6 et 4° un indice $n$ tel que $Q_n \subset \mathrm{Int}(F)$, c'est-à-dire que $Q_n \cdot \mathrm{Fr}(F) = 0$. Suivant 2°, $Q_n$ est la quasi-composante du point $p_n$ dans $F$. Par conséquent $F$ est non-connexe entre $p_n$ et chaque point de $\mathrm{Fr}(F)$, donc — en vertu de 8 — entre $p_n$ et $\mathrm{Fr}(F)$. Autrement dit, $F$ contient un ensemble fermé $H$ tel que $p_n \in H$, $H \cdot \mathrm{Fr}(F) = 0$ et que $H$ est ouvert dans $F$, donc dans $\mathrm{Int}(F)$ (puisque $H \subset \mathrm{Int}(F)$). Mais alors $H$ est fermé-ouvert, contrairement à l'hypothèse que l'espace est connexe.

10. *Si tout sous-ensemble connexe du continu $\mathscr{X}$ est un semi-continu, tout sous-ensemble $E$ connexe entre deux points est connexe par arcs.*

En effet, l'hypothèse implique en vertu du § 44, VI, 7, que $\mathscr{X}$ est h. l. c. Or, en tant que connexe entre deux points, $E$ est connexe (d'après 9, 1°), donc un semi-continu (par hypothèse). Tout semi-continu situé dans $\mathscr{X}$ étant connexe par arcs, $E$ est connexe par arcs.

## § 46. Théorie des courbes. Ordre de l'espace en un point [1].

**I. Définitions et exemples.** $\mathfrak{n}$ désignant un nombre cardinal $\leqslant \mathfrak{c}$ ou le nombre ordinal $\omega$, l'espace $\mathscr{X}$ est dit *d'ordre* $\leqslant \mathfrak{n}$ *au point* $p$, en symbole:

$$\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n},$$

[1]) Cf. K. Menger, *Kurventheorie*, Teubner, Berlin-Leipzig 1932, où l'on trouvera de nombreux renvois bibliographiques. Les définitions et les théorèmes fondamentaux de la théorie des courbes se trouvent chez K. Menger, Monatsh. Math.-Phys. **36** (1929), Math. Ann. **95** (1926) *(Grundzüge einer Theorie der Kurven)* et chez P. Urysohn, *Sur la ramification des lignes cantoriennes*, C. R. Paris **175** (1922), p. 483 et *Mémoire sur la multiplicités cantoriennes II*, Verh. Akad. Amsterdam **13** (1927).



lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $G$ tel que

$$(1) \qquad p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{n}\,^{1)}.$$

Posons

$$\mathscr{X}^{[\mathfrak{n}]} = \underset{p}{E}(\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}).$$

L'égalité $\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} = \mathfrak{n}$ veut dire que $\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$ sans que $\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{m}$ pour aucun $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

L'inégalité $\mathrm{ord}\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$ veut dire que $\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$ quel que soit $p$.

$\mathfrak{n}$ étant un nombre cardinal, l'espace $\mathscr{X}$ est dit *d'ordre* $\leqslant \mathfrak{n}$ *entre deux ensembles $A$ et $B$*, en symbole:

$$\mathrm{ord}_{A,B}\, \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n},$$

lorsqu'il existe un ensemble ouvert $G$ tel que

$$(2) \qquad A \subset G, \quad \overline{G} \cdot B = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{n};$$

autrement dit, lorsqu'il existe un ensemble fermé $F$ de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$ qui sépare $\mathscr{X}$ entre $A$ et $B$.

Bien entendu, si les ensembles $A$ et $B$ ne sont pas séparés, on ne peut attribuer aucun sens au symbole $\mathrm{ord}_{A,B}\, \mathscr{X}$; on a, en effet, $\mathrm{ord}_{A,B}\, \mathscr{X} > \mathfrak{n}$, quel que soit $\mathfrak{n}$, en convenant que le symbole $>$ désigne la négation de $\leqslant$.

Les points d'ordre $\leqslant \aleph_0$ sont dits *rationnels*; ceux d'ordre $\leqslant \omega$ sont dits *réguliers* (ce sont donc les points $p$ pour lesquels l'ensemble $\mathrm{Fr}(G)$ est fini). Les points d'ordre 1 sont appelés des *points d'arrêt*. Les points $p$ d'ordre 0 coïncident évidemment avec ceux où $\dim_p \mathscr{X} = 0$.

Un espace composé exclusivement de points réguliers (respectivement rationnels), c'est-à-dire tel que

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}^{[\omega]} \quad (\text{respectivement} \quad \mathscr{X} = \mathscr{X}^{[\aleph_0]}),$$

est dit *régulier* (respectivement *rationnel*).

Tout continu à 1 dimension est dit une *courbe*. Les continus rationnels sont donc des courbes.

*Exemples.* 1) Les points 0 et 1 sont des points d'arrêt de l'intervalle $\mathscr{J} = 01$. On a

$$\mathscr{J} - \mathscr{J}^{[1]} = \mathscr{J}^{[2]}, \quad \mathscr{S} = \mathscr{S}^{[2]}, \quad \mathscr{S}^{[1]} = 0,$$

$\mathscr{S}$ désignant la circonférence $x^2 + y^2 = 1$.

[1]) Le symbole $\overline{\overline{X}}$ désigne la puissance de l'ensemble $X$. Nous convenons que l'inégalité $\overline{\overline{X}} \leqslant \omega$ veut dire que l'ensemble $X$ est fini.

2) Soit $A_n$ le segment défini en coordonnées polaires par les conditions:

$$\alpha=\frac{\pi}{n}, \quad 0\leqslant\varrho\leqslant\frac{1}{n}.$$

En posant $\mathfrak{X}=A_1+A_2+\dots$ et $p=(0,0)$, il vient

$$\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}=\omega.$$

3) Dans l'exemple 4[0] du § 44, I, on a pour tout point $p$ du segment 01 de l'axe des $y$,

$$\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}=\aleph_0.$$

4) $\mathfrak{X}$ désignant le continu de la fig. p. 85, on a

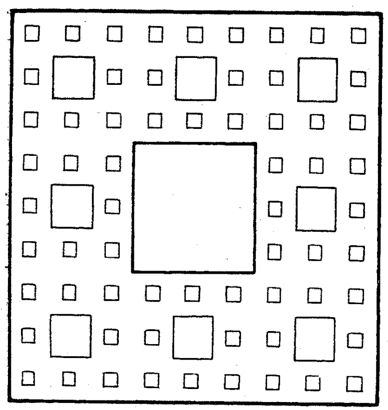
$$\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}=\mathfrak{c},$$

quel que soit $p$.

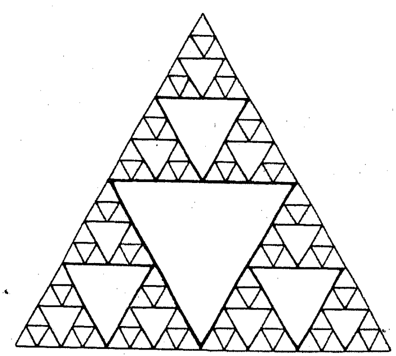
Il en est de même si $\mathfrak{X}$ est un *continu indécomposable*.

5) La „courbe universelle de Sierpiński" est *un continu situé sur le plan, localement connexe, non-dense est composé exclusivement de points d'ordre* $\mathfrak{c}$[1]).

Voici sa définition. Partageons le carré $\mathcal{I}^2$ en neuf carrés égaux et enlevons l'intérieur du carré central. De façon analogue, partageons chacun des 8 carrés restants et enlevons-en l'intérieur des carrés centraux. Procédons ainsi de proche en proche. Les points qui n'ont pas été enlevés constituent le continu demandé.



Ex. 5.



Ex. 6.

[1]) Voir C. R. Paris **162** (1916), p. 629.



6) La „courbe triangulaire de Sierpiński" est définie comme il suit[1]).

Soit $T$ un triangle équilatéral. Divisons-le en 4 triangles égaux. Soient $T_0$, $T_1$, $T_2$ ceux qui admettent un sommet en commun avec $T$. De façon analogue, divisons chacun des triangles $T_0$, $T_1$, $T_2$ en 4 triangles égaux et désignons par $T_{00}, T_{01}, T_{02}, T_{10}, \dots, T_{22}$ ceux qui ont un sommet commun avec $T_0$ ou $T_1$ ou $T_2$. Procédons ainsi de proche en proche.

Posons

$$B_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}=\mathrm{Fr}\,(T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}=\overline{\sum B_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}},$$

les indices $\alpha_i$ admettant les valeurs 0, 1 et 2, et $k=0,1,\dots$

$\mathfrak{X}$ est un continu admettant 3 *points d'ordre* 2 (les sommets du triangle $T$), *une infinité dénombrable de points d'ordre* 4 (les sommets des autres triangles), *tous les autres points étant d'ordre* 3.

Il est facile de construire un continu composé *exclusivement de points d'ordre* 3 *et* 4. Il suffit à ce but, d'ajouter à $\mathfrak{X}$ un continu (topologiquement) analogue et n'ayant en commun avec $\mathfrak{X}$ que les sommets du triangle $T$.

7) *Il existe des espaces réguliers, connexes et totalement imparfaits*[2]).

Décomposons, en effet, le plan en deux ensembles $A$ et $B$ totalement imparfaits et disjoints. $\mathfrak{X}$ désignant le continu de l'ex. 6 et $S$ l'ensemble des sommets des triangles $T_{\alpha_1\dots\alpha_k}$, l'ensemble $A\cdot\mathfrak{X}+S$ jouit — comme on prouve — des propriétés demandées.

8) *Un ensemble-somme de $n$ arcs $pa_1,\dots,pa_n$ n'ayant deux à deux aucun point commun, sauf $p$, est d'ordre $n$ au point $p$.*

Réciproquement, on a le théorème remarquable suivant[3]):

*Soit $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe. Si* $\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}\geqslant n$, *il existe $n$ arcs $pa_1,\dots,pa_n$ qui n'ont deux à deux aucun point commun, sauf $p$.*

[1]) Prace Mat.-Fiz. **27** (1915) et C. R. Paris **160** (1915), p. 302.

[2]) Voir la note de B. Knaster et de moi-même, *A connected and connected im kleinen point set which contains no perfect subset*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), p. 106.

[3]) Théorème de K. Menger („*n-Beinsatz*"), Fund. Math. **10** (1927), p. 98. Pour la démonstration, voir K. Menger, *Kurventheorie*, Chap. VI, 1, et G. T. Whyburn, *On n-arc connectedness*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), p. 452. La démonstration pour $n=2$ sera donnée au § 47, II, 15.

**II. Généralités.** 1. *Pour que* $p \in (E+p)^{[\mathfrak{n}]}$, *il faut et il suffit qu'il existe, pour tout* $\varepsilon > 0$, *un ensemble ouvert* $G$ *assujetti aux conditions*:

(1) $$p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad et \quad \overline{\overline{E \cdot \mathrm{Fr}\,(G)}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

*Pour que* $\mathrm{ord}_{A,B} E \leqslant \mathfrak{n}$, *où* $A, B \subset E$, *il faut et il suffit qu'il existe un ensemble ouvert* $G$ *tel que*:

(2) $$A \subset G, \quad \bar{G} \cdot B = 0 \quad et \quad \overline{\overline{E \cdot \mathrm{Fr}\,(G)}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

En effet, si $p \in (E+p)^{[\mathfrak{n}]}$, il existe un ensemble $H$ ouvert dans $E+p$ et tel que

(3) $$p \in H, \quad \delta(H) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\overline{(E+p) \cdot \bar{H} - H}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Les ensembles $H$ et $E - \bar{H}$ étant séparés, il existe (d'après § 16, V, 6) un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions:

$$H \subset G, \quad \bar{G} \cdot E - \bar{H} = 0 \quad \text{et} \quad \delta(G) < \varepsilon.$$

Par conséquent

$$E \cdot \bar{G} - G \subset E \cdot \bar{H} - H, \quad \text{d'où} \quad \overline{\overline{E \cdot \mathrm{Fr}\,(G)}} \leqslant \overline{\overline{E \cdot \bar{H} - H}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Réciproquement, si l'ensemble ouvert $G$ satisfait aux conditions (1), l'ensemble $H = EG + p$ est ouvert dans $E+p$ et satisfait aux conditions (3), car

$$(E+p) \cdot \bar{H} - H = (E+p) \cdot (\overline{EG} + p) - (EG + p) =$$
$$= (E \cdot \overline{EG} + p) - (\overline{EG} + p) = E \cdot \overline{EG} - EG - p \subset E\bar{G} - G.$$

Par conséquent, $p \in (E+p)^{[\mathfrak{n}]}$.

Passons à la deuxième partie du théorème.

Soient $\mathrm{ord}_{A,B} E \leqslant \mathfrak{n}$ et $H$ un ensemble ouvert dans $E$ tel que

(4) $$A \subset H, \quad \bar{H} \cdot B = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E \cdot \bar{H} - H}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

$G$ désignant un ensemble ouvert tel que

$$H \subset G \quad \text{et} \quad \bar{G} \cdot E - \bar{H} = 0,$$

les conditions (2) sont satisfaites.

Réciproquement, en supposant les conditions (2) satisfaites et en posant $H = EG$, les conditions (4) se trouvent satisfaites; d'où $\mathrm{ord}_{A,B} E \leqslant \mathfrak{n}$.

2. *L'ensemble* $\mathfrak{X}^{[\mathfrak{n}]}$ *et plus généralement l'ensemble*

$$\underset{p}{E}\{p \in (E+p)^{[\mathfrak{n}]}\}$$

*est un* $G_\delta$.



Il est, en effet, égal à $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots$ où $G_k$ se compose des points $p$ pour lesquels il existe un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions (1) avec $\varepsilon = 1/k$.

3. $E \cdot \mathfrak{X}^{[\mathfrak{n}]} \subset E^{[\mathfrak{n}]}$, c'est-à-dire, *si* $p \in E$ *on a* $\mathrm{ord}_p E \leqslant \mathrm{ord}_p \mathfrak{X}$.

4. *Si* $G$ *est ouvert, on a* $G \cdot \mathfrak{X}^{[\mathfrak{n}]} = G \cdot G^{[\mathfrak{n}]}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{ord}_p G = \mathrm{ord}_p \mathfrak{X} \quad pour \quad p \in G.$$

La démonstration des énoncés 3 et 4 est immédiate.

5. *Si* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{[\mathfrak{n}]}$, *il existe une base formée d'ensembles ouverts* $R_1, R_2, \ldots$ *tels que* $\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(R_i)}} \leqslant \mathfrak{n}$.

Faisons correspondre, en effet, à tout point $p$ et à tout entier positif $k$ un ensemble ouvert $G_k(p)$ satisfaisant aux conditions I (1) pour $\varepsilon = 1/k$. D'après le théorème de Lindelöf (§ 17, I), il existe pour tout $k$ une suite $G_k(p_1), G_k(p_2) \ldots$ telle que $\mathfrak{X} = G_k(p_1) + G_k(p_2) + \ldots$ En transformant la suite double $\{G_k(p_l)\}$, où $k = 1, 2, \ldots$ et $l = 1, 2, \ldots$, en une suite simple, on obtient la base $R_1, R_2, \ldots$ demandée.

6. *Pour que* $\mathrm{ord}_p \mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{n}$, *il faut et il suffit que tout ensemble fermé* $F$ *tel que* $p \in \mathfrak{X} - F$ *satisfasse à la condition* $\mathrm{ord}_{p,F} \mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{n}$.

Cette condition étant évidemment nécessaire, nous allons démontrer qu'elle est suffisante.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $F = \underset{x}{E}[|x-p| \geqslant \varepsilon]$. Il existe par hypothèse un ensemble ouvert $G$ tel que:

$$p \in G, \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(G)}} \leqslant \mathfrak{n} \quad \text{et} \quad \bar{G} \cdot F = 0, \quad \text{d'où} \quad \delta(G) \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\mathrm{ord}_p \mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{n}$.

**III. Ordre $\aleph_0$ et $\mathfrak{c}$.** 1. *Soit* $\mathfrak{n} = \aleph_0$ *ou* $\mathfrak{n} = \mathfrak{c}$. $\mathfrak{X}$ *étant un espace compact d'ordre* $\mathfrak{n}$ *entre deux ensembles fermés* $A$ *et* $B$, $\mathfrak{X}$ *est d'ordre* $\mathfrak{n}$ *entre deux points* $a \in A$ *et* $b \in B$.

De façon plus générale, *si un sous-ensemble* $E$ *d'un espace compact est d'ordre* $\mathfrak{n}$ *entre* $A$ *et* $B$ *(où* $A + B \subset E$*), il existe un couple de points* $a$ *et* $b$ *tels que*

(1) $$a \in \bar{A}, \quad b \in \bar{B} \quad et \quad \mathrm{ord}_{a,b}(E + a + b) \geqslant \mathfrak{n}.$$

La démonstration sera tout à fait analogue à celle du th. 1 du § 42, II[1]).

[1]) En ce qui concerne les analogies entre la théorie de la dimension et celle de l'ordre, il est à remarquer que de nombreux théorèmes des deux théories se laissent déduire de la théorie des familles dimensionnantes (cf. § 22, VII).

Soit $\mathbf{G}$ la famille de tous les ensembles ouverts $G$ tels que $\overline{\overline{E\cdot \mathrm{Fr}\,(G)}}<\mathfrak{n}$. Supposons que, quels que soient les points $a \in \bar{A}$ et $b \in \bar{B}$, l'inégalité (1) soit en défaut, c'est-à-dire (cf. II, 1), qu'il corresponde à ces points un ensemble ouvert $G$ tel que

$$a \in G,\ b \text{ non-}\in \bar{G} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{(E+a+b)\cdot \mathrm{Fr}\,(G)}}<\mathfrak{n}, \text{ d'où } G \in \mathbf{G}.$$

Il existe alors d'après § 37, V, 6, un ensemble

$$H = G_1^1\cdot \ldots \cdot G_{l_1}^1+\ldots+G_1^k\cdot \ldots \cdot G_{l_k}^k \quad \text{où} \quad G_j^i \in \mathbf{G}$$

tel que $\bar{A}\subset H$ et $\bar{B}\cdot\bar{H}=0$. Comme (cf. § 6, II (8) et (9))

$$\mathrm{Fr}\,(H)\subset\sum_{i,j}\mathrm{Fr}\,(G_j^i), \text{ d'où } \overline{\overline{E\cdot \mathrm{Fr}\,(H)}}<\mathfrak{n},$$

il vient $\mathrm{ord}_{A,B}\,E<\mathfrak{n}$.

2. *Soit* $\mathfrak{n}=\aleph_0$ *ou* $\mathfrak{n}=\mathfrak{c}$. *Si* $\mathcal{X}$ *est compact et* $\mathrm{ord}_p\,\mathcal{X}=\mathfrak{n}$, *il existe un point* $q$ *tel que* $\mathrm{ord}_{p,q}\,\mathcal{X}=\mathfrak{n}$.

De façon plus générale, *$E$ étant un sous-ensemble d'un espace compact $\mathcal{X}$, à tout point $p$ d'ordre $\mathfrak{n}$ de $E$ correspond un point $q$ tel que* $\mathrm{ord}_{p,q}\,(E+q)=\mathfrak{n}$.

Car d'une part, l'inégalité $\mathrm{ord}_{p,q}\,(E+q)\leqslant\mathrm{ord}_p\,E$ est valable pour tout $q\neq p$ et, d'autre part, en substituant à $B$ dans 1 un ensemble fermé dans $E$ tel que $p\in E-B$ et que (cf. II, 6) $\mathrm{ord}_p\,E\leqslant\mathrm{ord}_{p,B}\,E$, on en déduit l'existence d'un point $q\in B$ pour lequel

$$\mathrm{ord}_{p,B}\,E\leqslant\mathrm{ord}_{p,q}\,(E+q), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{ord}_{p,q}\,(E+q)=\mathfrak{n}.$$

3. *Si* $\mathcal{X}$ *est compact et* $\mathrm{ord}_{p,x}\,\mathcal{X}\leqslant\aleph_0$ *quel que soit* $x\neq p$, *on a* $\mathrm{ord}_p\,\mathcal{X}\leqslant\aleph_0$.

En effet, si $\mathrm{ord}_p\,\mathcal{X}>\aleph_0$, il existe d'après II, 6 un ensemble fermé $F$ tel que $p\in\mathcal{X}-F$ et $\mathrm{ord}_{p,F}\,\mathcal{X}=\mathfrak{c}$. Mais il existe alors (d'après 1) un point $x\in F$ tel que $\mathrm{ord}_{p,x}\,\mathcal{X}=\mathfrak{c}$.

4. *Soit* $\mathfrak{n}=\aleph_0$ *ou* $\mathfrak{n}=\mathfrak{c}$. *$\mathcal{X}$ étant un espace compact et $p$ étant un point fixe de $\mathcal{X}$, l'ensemble*

$$P=\underset{x}{E}\,(\mathrm{ord}_{p,x}\,\mathcal{X}\geqslant\mathfrak{n})\,^{1})$$

*est un continu.*

[1]) On rapprochera cette définition de celle de quasi-composante (§ 41, V); celle-ci coincide avec $\underset{x}{E}\,(\mathrm{ord}_{p,x}\,\mathcal{X}\geqslant 1)$.



D'abord $P$ est fermé, car $\mathcal{X}-P$ est la somme des ensembles ouverts $X$ tels que $p\in\mathcal{X}-\bar{X}$ et $\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(X)}}<\mathfrak{n}$. Pour prouver que $P$ est connexe, désignons par $G$ un ensemble ouvert tel que $p\in G$ et $P\cdot\mathrm{Fr}\,(G)=0$. Il s'agit de montrer que $P\subset G$.

L'égalité $P\cdot\mathrm{Fr}\,(G)=0$ implique en vertu du th. 1 que $\mathrm{ord}_{p,\mathrm{Fr}(G)}\,\mathcal{X}<\mathfrak{n}$. Il existe par conséquent un ensemble ouvert $H$ tel que

$$p\in H,\quad \bar{H}\cdot\mathrm{Fr}\,(G)=0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H)}}<\mathfrak{n}.$$

Il vient

$$p\in HG \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}\,(HG)\subset\mathrm{Fr}\,(H),$$

car

$$\mathrm{Fr}\,(HG)=\overline{HG}-HG\subset(\bar{H}\cdot\bar{G}-H)+(\bar{H}\cdot\bar{G}-G)\subset\bar{H}-H$$

(puisque $\bar{H}\cdot\bar{G}-G=0$). Donc $\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(HG)}}<\mathfrak{n}$. Comme $p\in HG$, on en conclut (d'après la définition de $P$) que

$$P\subset\overline{HG}, \quad \text{donc} \quad P\subset\bar{H}\cdot\bar{G}=\bar{H}G\subset G.$$

Les th. 2 et 4 impliquent aussitôt que

5. *Dans tout espace compact, l'ensemble des points irréguliers (c'est-à-dire, l'ensemble $\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[\omega]}$), ainsi que celui des points irrationnels (c'est-à-dire, l'ensemble $\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[\aleph_0]}$), sont des sommes de continus (ne se réduisant pas à des points individuels)* [1]).

6. *$\mathcal{X}$ étant un espace compact, l'ensemble des points d'ordre $\mathfrak{c}$* [2]) *est irrégulier en chacun de ses points.*

En symbole:

(2) $$(\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[\aleph_0]})^{[\omega]}=0\,^{3}).$$

Supposons par impossible que $p\in(\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[\aleph_0]})^{[\omega]}$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe donc un ensemble ouvert $G$ tel que

(3) $$p\in G,\ \delta(G)<\varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(G)-\mathcal{X}^{[\aleph_0]}}}<\infty.$$

[1]) Voir K. Menger, Math. Ann. **95** (1926), p. 287, P. Urysohn, Verh. Akad. Amsterdam **13** (1927), p. 19 et W. Hurewicz, Math. Ann. **96** (1927), p. 759.

[2]) Cet ensemble est appelé *noyau ordinal*, par analogie au noyau dimensionnel (envisagé au § 22, V).

[3]) Voir K. Menger, loco cit. p. 289 et P. Urysohn, loco cit. p. 21.

La démonstration du th. 6 donnée ici est complètement analogue à celle du théorème correspondant sur le noyau dimensionnel (§ 40, V).

Il existe, d'autre part, une famille d'ensembles ouverts $\boldsymbol{G}$ telle qu'à tout $x \in \operatorname{Fr}(G) \cdot \mathscr{X}^{[\aleph_0]}$ et à tout entier positif $k$ correspond un ensemble $H \in \boldsymbol{G}$ satisfaisant aux conditions:

$$x \in H, \quad \delta(H) < \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(H)}} \leqslant \aleph_0. \tag{4}$$

L'ensemble $\operatorname{Fr}(G) - \mathscr{X}^{[\aleph_0]}$ étant fini (d'après (3)), l'ensemble $\operatorname{Fr}(G) \cdot \mathscr{X}^{[\aleph_0]}$ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$. Le théorème 8 du § 37, V, lui est donc applicable. On en déduit l'existence d'une suite d'ensembles $H_1, H_2, \ldots$ appartenant à $\boldsymbol{G}$ et satisfaisant aux conditions:

$$\operatorname{Fr}(G) \cdot \mathscr{X}^{[\aleph_0]} \subset \sum_m H_m, \tag{5}$$
$$\overline{\sum_m H_m} \subset \sum_m \bar{H}_m + \operatorname{Fr}(G). \tag{6}$$

Posons

$$Q = G + \sum_m H_m. \tag{7}$$

Il vient d'après (3) et (4):

$$p \in Q \quad \text{et} \quad \delta(Q) \leqslant 2\varepsilon. \tag{8}$$

En outre, d'après (7) et (6),

$$\begin{aligned}\operatorname{Fr}(Q) = \bar{Q} - Q = (\bar{G} - Q) + (\overline{\sum_m H_m} - Q) \subset \\ \subset (\bar{G} - G - \sum_m H_m) + \{[\sum_m \bar{H}_m + \operatorname{Fr}(G)] - G - \sum_m H_m\} \subset \\ \subset [\operatorname{Fr}(G) - \sum_m H_m] + \sum_m \operatorname{Fr}(H_m),\end{aligned}$$

puisque

$$\sum_m \bar{H}_m - \sum_m H_m \subset \sum_m (\bar{H}_m - H_m) = \sum_m \operatorname{Fr}(H_m).$$

Il en résulte, en vertu de (4), que

$$\overline{\overline{\operatorname{Fr}(Q)}} \leqslant \aleph_0, \tag{9}$$

car, d'après (5) et (3),

$$\overline{\overline{\operatorname{Fr}(G) - \sum_m H_m}} \leqslant \overline{\overline{\operatorname{Fr}(G) - \mathscr{X}^{[\aleph_0]}}} < \infty.$$

Les formules (8) et (9) entraînent $p \in \mathscr{X}^{\aleph_0}$, contrairement à l'hypothèse.



*Remarque.* Le terme *irrégulier* ne peut pas être remplacé par *irrationnel*. Plus précisément, il existe un espace compact $\mathscr{X}$ dont l'ensemble des points d'ordre $\mathfrak{c}$ est rationnel (c'est-à-dire n'est en aucun point d'ordre $\mathfrak{c}$) et non-vide.

Tel est l'exemple suivant[1]):

$x$ étant un point de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor, posons

$$x = \frac{2}{3^{n_1}} + \frac{2}{3^{n_2}} + \ldots + \frac{2}{3^{n_k}} + \ldots, \quad \text{où} \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,$$

et

$$f(x) = \frac{(-1)^{n_1}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{(-1)^{n_2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n_k}}{\left(\frac{3}{2}\right)^k} + \ldots, \quad f(0) = 0.$$

L'espace $\mathscr{X}$ se compose des segments aux extrémités $(x, i_x)$ et $(x, s_x)$, où $i_x$ et $s_x$ désignent la plus petite et la plus grande limite de la fonction $f$ au point $x$ et où $x \in \mathcal{C}$.

### IV. Espaces réguliers, espaces rationnels.

1. *Tout espace connexe régulier est localement connexe.*

Plus précisément, *si $\mathscr{X}$ est connexe et $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \omega$, $\mathscr{X}$ est localement connexe au point $p$.*

Soient, en effet, $\varepsilon > 0$ et $G$ un ensemble ouvert tel que

$$p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \operatorname{Fr}(G) = (q_1, \ldots, q_n). \tag{1}$$

L'ensemble $\mathscr{X} - \operatorname{Fr}(G)$ étant la somme des ensembles séparés $G$ et $\mathscr{X} - \bar{G}$, et l'ensemble $\operatorname{Fr}(G)$ étant (d'après (1)) la somme de $n$ ensembles connexes, il résulte du th. 7 du § 41, II, que l'ensemble $\bar{G} = G + \operatorname{Fr}(G)$ est somme de (tout au plus) $n$ ensembles connexes séparés:

$$\bar{G} = S_1 + \ldots + S_k, \quad p \in S_1 \quad \text{et} \quad k \leqslant n. \tag{2}$$

---

[1]) Voir E. Otto, *Über Punkte der Ordnung* $\mathfrak{c}$, Monatsh. Math.-Phys. **40** (1933), p. 88. Cf. aussi ma note *Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers*, Mathematica **6** (1932), p. 123.

Le premier exemple jouissant de la propriété en question a été trouvé par S. Mazurkiewicz. Voir *Sur les points d'ordre* $\mathfrak{c}$ *dans les continus*, Fund. Math. **15** (1930), p. 222. Pour une solution partielle, voir la Note de Mazurkiewicz et de moi-même sous le même titre dans Fund. Math. **11** (1928).

En tant que séparé des ensembles $S_2, S_3, \ldots, S_k$, donc de leur somme $S_2 + \ldots + S_k$, l'ensemble $S_1$ est un entourage de $p$ relatif à $\overline{G}$, donc à $\mathscr{X}$ (puisque $p \in G$).

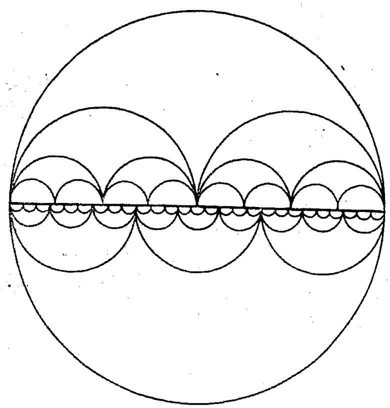
Finalement $\delta(S_1) < \varepsilon$, d'après (1) et (2). Donc $\mathscr{X}$ est localement connexe au point $p$.

2. *Tout continu régulier est héréditairement localement connexe.*

Plus généralement, *tout sous-ensemble connexe d'un espace régulier est localement connexe.*

Car tout sous-ensemble d'un espace régulier est régulier.

*Remarques.* 1⁰ La réciproque n'est pas vraie: *il existe des espaces héréditairement localement connexes qui ne sont pas réguliers.*



Tel est le continu (plan) [1] composé du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$, des demi-circonférences:

$$\left(x - \frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4^n}, \quad y \geqslant 0,$$

où $n = 1, 2, \ldots$ et $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$, et de demi-circonférences:

$$\left(x - \frac{2k-1}{2 \cdot 3^n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4 \cdot 9^n}, \quad y \leqslant 0,$$

où $n = 0, 1, \ldots$ et $k = 1, 2, \ldots, 3^n$.

2⁰ On a cependant le théorème suivant: *tout espace héréditairement localement connexe est rationnel* [2].

Enfin l'exemple I, 3⁰ du § 44 représente un continu rationnel qui n'est pas localement connexe.

3. *Tout continu dépourvu de sous-continus non-denses (qui contiennent plus d'un point) est régulier.*

En effet, $\mathscr{X}$ étant supposé un continu irrégulier, il existe, d'après III, 5, un continu

(3) $$K \subset \mathscr{X} - \mathscr{X}^{[\omega]}$$

---

[1]) Cet exemple est dû à B. Knaster; voir K. Menger, *Kurventheorie*, p. 258. Voir aussi H. M. Gehman, Ann. of. Math. **27** (1926), p. 43.

[2]) Pour la démonstration, voir K. Menger, *Kurventheorie*, p. 251, ou G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, p. 94.



contenant plus d'un point. En tant que dépourvu de continus non-denses (contenant plus d'un point), $\mathscr{X}$ est héréditairement localement connexe (d'après § 45, IV, 1). Le continu $K$ est donc localement connexe et contient par conséquent (cf. § 45, II, 1) un arc $A$. Cet arc n'étant pas non-dense dans $\mathscr{X}$, soit $p$ un point intérieur de $A$. Évidemment

$$\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} = \mathrm{ord}_p\, A \leqslant 2,$$

contrairement à la formule (3).

4. *Pour qu'un espace soit rationnel, il faut et il suffit qu'il soit somme de deux ensembles dont l'un est de dimension $\leqslant 0$ et l'autre est dénombrable* [1]).

En effet, $\mathscr{X}$ étant supposé rationnel, soit, conformément à II, 5, $R_1, R_2, \ldots$ une base de $\mathscr{X}$ telle que $\overline{\overline{\mathrm{Fr}(R_i)}} \leqslant \aleph_0$. Posons

(4) $$D = \sum_m \mathrm{Fr}(R_m).$$

Il vient

(5) $$\overline{\overline{D}} = \aleph_0 \quad \text{et} \quad \dim(\mathscr{X} - D) \leqslant 0,$$

puisque les ensembles $R_m - D$ sont fermés-ouverts dans $\mathscr{X} - D$ et y constituent une base.

Réciproquement, soit $D$ un ensemble satisfaisant aux conditions (5). Soit $p \in \mathscr{X}$. Il vient

(6) $$\dim_p(\mathscr{X} - D + p) = 0,$$

d'après l'inégalité (5) et § 21, III, 2.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, d'après (6) et § 20, II, $2_0$, un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions:

(7) $$p \in G, \ \delta(G) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}(G) \subset D, \quad \text{d'où} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(G)}} \leqslant \aleph_0,$$

suivant l'égalité (5).

Les formules (7) impliquent que $\mathrm{ord}_p\, \mathscr{X} \leqslant \aleph_0$.

5. *Toute famille de sous-ensembles connexes disjoints (et contenant plus d'un point) d'un espace rationnel est dénombrable.*

En effet, cette famille étant supposée indénombrable et l'ensemble $D$ étant supposé dénombrable, il existe dans cette famille un ensemble connexe $C$ disjoint de $D$ (et même une infinité indénombrable de tels ensembles); c'est-à-dire $C \subset \mathscr{X} - D$. L'ensemble $C$ étant connexe, $\mathscr{X} - D$ ne peut pas être de dimension 0, contrairement au th. 4.

---

[1]) Ce théorème est un cas particulier de § 22, VII, 1.

6. *La somme d'une série infinie d'ensembles fermés rationnels est un ensemble rationnel* [1]).

Désignons cette somme par $\mathfrak{X}$ et ces ensembles par $A_1, A_2, \dots$ On a d'après 4:

$$A_n = B_n + D_n, \quad \text{où } \dim B_n \leqslant 0, \quad \overline{\overline{D}}_n \leqslant \aleph_0 \quad \text{et} \quad B_n \cdot D_n = 0.$$

Il vient

$$(8) \qquad \mathfrak{X} = \sum_n B_n + \sum_n D_n, \qquad \dim\left(\sum_n B_n\right) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\sum_n D_n}} \leqslant \aleph_0,$$

puisque $B_n$ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et la somme d'une série infinie d'ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$ 0-dimensionnels est de dimension 0 (cf. § 21, III, 1).

Les formules (8) et le th. 4 impliquent que l'espace $\mathfrak{X}$ est rationnel.

*Remarque.* L'exemple considéré dans la remarque 1⁰ montre que *la somme de deux continus réguliers peut être un continu irrégulier.*

On a cependant le théorème suivant:

7. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace compact. Si $\mathfrak{X} = A + B$, où $A$ et $B$ sont fermés et réguliers, l'ensemble $C = \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^{[\omega]}$ est un ensemble frontière dans $A$ et dans $B$.*

Comme $A - B \subset \mathfrak{X}^{[\omega]}$ et $B - A \subset \mathfrak{X}^{[\omega]}$, il vient $C \subset AB$.

Il s'agit de prouver que

$$(9) \qquad C \subset \overline{A - C}.$$

On a

$$(10) \qquad \mathfrak{X} - \overline{A - C} = (A - \overline{A - C}) + (B - \overline{A - C}) \subset AC + B \subset B,$$

car $C \subset AB$.

En tant que sous-ensemble de l'ensemble régulier $B$, l'ensemble $\mathfrak{X} - \overline{A - C}$ est régulier. En tant qu'ouvert, il est contenu dans $\mathfrak{X}^{[\omega]}$ (cf. II, 4); d'où l'inclusion (9).

8. *Si l'on admet, sous les hypothèses du th. 7, que l'une de deux conditions suivantes soit satisfaite:*

(i) $\dim AB = 0$,

(ii) *$B$ ne contient aucun continu (contenant plus d'un point) qui soit non-dense dans $B$,*
*l'espace $\mathfrak{X}$ est régulier.*

C'est une conséquence directe des théorèmes 7 et III, 5.

[1]) Cf. § 22, VII, 4.



9. *Soit $\mathfrak{m} = \omega$ ou $\mathfrak{m} = \aleph_0$. $\mathfrak{X}$ étant compact, chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{[\mathfrak{m}]}$, c'est-à-dire pour que $\mathfrak{X}$ soit régulier ou rationnel (suivant que $\mathfrak{m}$ est $\omega$ ou $\aleph_0$):*

1⁰ $\mathrm{ord}_{x,y} \mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{m}$ *quels que soient les points $x \neq y$,*

2⁰ $\mathrm{ord}_{A,B} \mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{m}$ *quels que soient les ensembles fermés et disjoints $A$ et $B$.*

Les conditions sont nécessaires. Car, en supposant que $\mathfrak{X}$ est régulier (rationnel), la condition 1⁰ est satisfaite évidemment. En outre, 1⁰ entraîne 2⁰ d'après III, 1.

Les conditions sont suffisantes en vertu de II, 6.

10. *Théorème de décomposition. Étant donné un recouvrement par des ensembles ouverts d'un espace compact régulier (ou rationnel respectivement): $\mathfrak{X} = G_1 + \dots + G_k$, il existe un système d'ensembles fermés $F_1, \dots, F_k$ satisfaisant aux conditions:*

$$(11) \qquad \mathfrak{X} = F_1 + \dots + F_k, \quad F_i \subset G_i \quad \text{et} \quad \overline{\overline{F_i \cdot F_j}} \leqslant \mathfrak{m} \quad \text{pour } i \neq j,$$

*où $\mathfrak{m} = \omega$ (ou $\mathfrak{m} = \aleph_0$ respectivement).*

Procédons par induction. Pour $k = 2$, le théorème résulte de 9,2⁰. En effet, en posant

$$\mathfrak{X} = G_1 + G_2, \quad A = \mathfrak{X} - G_1 \quad \text{et} \quad B = \mathfrak{X} - G_2,$$

il vient $AB = 0$, d'où $\mathrm{ord}_{A,B} \leqslant \mathfrak{m}$. Il existe par conséquent un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions:

$$A \subset G, \ \overline{G} \cdot B = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Les ensembles $F_1 = \mathfrak{X} - G$ et $F_2 = \overline{G}$ satisfont donc aux conditions (11).

Admettons à présent que le théorème est vrai pour $k-1$. Il existe, comme nous venons de montrer, deux ensembles fermés $H$ et $F_k$ tels que

$$(12) \qquad \mathfrak{X} = H + F_k, \quad H \subset G_1 + \dots + G_{k-1}, \quad F_k \subset G_k \quad \text{et} \quad \overline{\overline{HF_k}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

L'ensemble $H$ étant compact et régulier (respectivement rationnel), l'identité $H = HG_1 + \dots + HG_{k-1}$ implique par hypothèse l'existence d'un système d'ensembles fermés $F_1, \dots, F_{k-1}$ satisfaisant aux conditions:

$$(13) \qquad H = F_1 + \dots + F_{k-1}, \quad F_i \subset HG_i \quad \text{et} \quad \overline{\overline{F_i \cdot F_j}} \leqslant \mathfrak{m} \quad \text{pour } i < j < k.$$

Les formules (12) et (13) donnent aussitôt (11).

Le théorème 10 entraîne le corollaire suivant:

11. *$\mathfrak{X}$ étant un espace compact régulier (ou rationnel respectivement), à tout $\varepsilon>0$ correspond un système fini d'ensembles fermés $F_1,\dots,F_k$ satisfaisant aux conditions:*

$$(14)\qquad \mathfrak{X}=F_1+\dots+F_k,\quad \delta(F_i)<\varepsilon,\quad \overline{\overline{F_i\cdot F_j}}\leqslant\mathfrak{m},\quad F_h\cdot F_i\cdot F_j=0$$

*pour tout système d'indices différents ($\mathfrak{m}$ désignant $\omega$ ou $\aleph_0$).*

En effet, comme $\dim\mathfrak{X}\leqslant1$, il existe (cf. § 40, IV, 1) un système d'ensembles ouverts $G_1,\dots,G_k$ satisfaisant aux conditions:

$$\mathfrak{X}=G_1+\dots+G_k,\quad \delta(G_i)<\varepsilon,\quad G_k\cdot G_i\cdot G_j=0.$$

$F_1,\dots,F_k$ étant un système d'ensembles fermés vérifiant les formules (11), les conditions (14) se trouvent réalisées.

*Remarques.* 1) Il existe un continu régulier qui ne se laisse pas décomposer en continus de diamètre $<\varepsilon$ qui *n'aient deux à deux qu'un seul point commun (au plus)*[1]).

2) *Si $\mathfrak{X}$ est un continu régulier, les ensembles $F_1,\dots,F_k$ du th. 11 peuvent être aussi supposés des continus réguliers.*

En effet, la somme $F_1+\dots+F_k$ étant connexe et tout produit $F_i\cdot F_j$, avec $i\neq j$, étant formé d'un nombre fini de composantes, on conclut facilement que le nombre des composantes de tout $F_i$ est fini. Soient $C_i^1,\dots,C_i^{m_i}$ les composantes de $F_i$. En remplaçant la formule

$$\mathfrak{X}=\sum_{i=1}^{k}F_i\quad\text{par}\quad\mathfrak{X}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_i}C_i^r,$$

on parvient à la décomposition demandée.

12[2]). *À tout espace compact régulier (ou rationnel) $\mathfrak{X}$ correspond une fonction $f\in\mathcal{J}^{\mathfrak{X}}$ telle que l'ensemble des $y$ pour lesquels $\overline{\overline{f^{-1}(y)}}\leqslant\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}=\omega$ ou $\aleph_0$) est dense dans l'intervalle $\mathcal{J}$.*

---

[1]) J. H. Roberts, *On a problem of Menger concerning regular curves*, Fund. Math. **14** (1929), p. 327.

[2]) Théorème de G. T. Whyburn, *Characterizations of certain curves by continuous functions defined upon them*, Amer. Journ. Math. **55** (1933), p. 131. Le cas où l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini pour chaque $y$, a été étudié par E. Čech, Fund. Math. **18** (1932), p. 86, S. Mazurkiewicz, ibid. p. 89, B. Aitchison, C. R. Soc. Sc. de Varsovie **27** (1934), p. 3, O. G. Harrold, Jr. *(Continua of finite sections)*, Duke Math. Journ. **8** (1941), p. 682.



Envisageons, en effet, la suite infinie d'ensembles fermés $F_1,F_2,\dots$ définie par induction comme suit.

$F_1$ est un ensemble fermé tel que

$$(15)\qquad \operatorname{Int}(F_1)\neq0,\quad F_1\neq\mathfrak{X}\quad\text{et}\quad\overline{\overline{\operatorname{Fr}(F_1)}}\leqslant\mathfrak{m}.$$

Le système des ensembles $F_1,F_2,\dots,F_{3^k}$ (où $k\geqslant0$) étant supposé strictement monotone et assujetti aux conditions (15) (en remplaçant l'indice 1 par $i\leqslant3^k$), il existe un système d'ensembles $F_{3^k+1},\dots,F_{3^{k+1}}$ satisfaisant aux conditions (15) et tel que le système $F_1,\dots,F_{3^{k+1}}$ est strictement monotone.

Pour s'en convaincre, on remarquera que, si les trois ensembles fermés $A\subset F\subset B$ constituent un système strictement monotone, il existe (d'après 9, 2°) deux ensembles $^*F$ et $F^*$ tels que $A\subset{}^*F\subset F\subset F^*\subset B$ et que les 5 ensembles envisagés constituent un système strictement monotone. De plus, les ensembles $^*F$ et $F^*$ satisfont aux conditions (15) si $F$ leur satisfait. On peut admettre enfin que l'inégalité $\varrho(x,\mathfrak{X}-F)>1/k$ entraîne $x\in{}^*F$.

Soit $\boldsymbol{F}$ la famille des ensembles $F_n$, $n=1,2,\dots$ Le type d'ordre de la famille $\boldsymbol{F}$ (ordonnée par l'inclusion) est dense, car les formules $F_m\subset\operatorname{Int}(F_n)$ et $0\neq F_m\neq\mathfrak{X}$ entraînent $F_m\neq F_n$. On peut donc (conformément au § 19, VII, 1) représenter les éléments de $\boldsymbol{F}$ sous la forme $A_r$, l'indice $r$ parcourant les nombres rationnels (binaires) entre 0 et 1. En vertu des définitions de $F^*$ et de $^*F$, on a

$$A_r=\prod_{s>r}A_s\quad\text{et}\quad\operatorname{Int}(A_r)=\sum_{q<r}\operatorname{Int}(A_q).$$

On en conclut en vertu du § 19, IX (14), que, $f$ désignant la transformation de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{J}$, considérée dans le § 19, IX, 3,

$$\operatorname{Fr}(A_r)\subset f^{-1}(r)\subset\prod_{s>r}A_s-\sum_{q<r}\operatorname{Int}(A_q)=A_r-\operatorname{Int}(A_r)=\operatorname{Fr}(A_r),$$

d'où $f^{-1}(r)=\operatorname{Fr}(A_r)$ quel que soit $r$.

13[1]). *$\mathfrak{X}$ étant compact et rationnel, il existe un nombre ordinal $\alpha<\Omega$ tel qu'à tout $p\in\mathfrak{X}$ et à tout $\varepsilon>0$ correspond un ensemble ouvert $G$ assujetti aux conditions:*

$$p\in G,\quad\delta(G)<\varepsilon\quad\text{et}\quad[\operatorname{Fr}(G)]^{(\alpha)}=0,$$

*$X^{(\alpha)}$ désignant le dérivé d'ordre $\alpha$ de $X$* (cf. § 19, IV).

---

[1]) Voir H. Reschovsky, *Über rationale Kurven*, Fund. Math. **15** (1930), p. 19.

Soit, en effet, conformément à II, 5, $R_1, R_2, \ldots$ une base formée d'ensembles ouverts $R_i$ tels que $\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(R_i)}} \leqslant \aleph_0$. Il existe donc (cf. § 19, IV) un $\alpha_i < \Omega$ tel que $[\mathrm{Fr}\,(R_i)]^{(\alpha_i)} = 0$, et il suffit de désigner par $\alpha$ un nombre $\geqslant \alpha_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$

*Remarque.* Les espaces compacts rationnels peuvent donc *être rangés en $\aleph_1$ classes* suivant le nombre $\alpha$ (le plus petit possible) [1] qui vient leur correspondre en vertu du th. 13. On démontre [2] qu'aucune de ces classes n'est vide (en particulier, la classe 0 est celle des espaces de dimension 0 et la classe 1 est celle des espaces réguliers). Il en résulte *qu'il n'existe parmi les espaces rationnels aucun dont le rang topologique soit le plus élevé.*

Ajoutons trois théorèmes sans démonstration:

15. *Théorème de compactification* [3]. *Tout espace régulier est contenu topologiquement dans un espace régulier compact.*

16 [4]. *Les homéomorphies $f \in (\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$ telles que*

$$\mathrm{ord}_{p,q}\,\mathcal{X} = \mathrm{ord}_{f(p),f(q)}\,\overline{f(\mathcal{X})}, \quad \textit{où} \quad \mathrm{ord}_{p,q}\,\mathcal{X} < \infty,$$

*constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$.*

17. *Théorème de prolongement. Tout ensemble régulier (situé dans un espace arbitraire) est contenu dans un $G_\delta$ régulier.*

Le th. 17 est une conséquence facile du th. 15 rapproché du théorème de Lavrentieff (§ 31, II, corollaire).

*Remarques.* 1) Le th. 15 est en défaut pour les espaces *rationnels*. Envisageons, en effet, l'ensemble (plan) composé des segments unissant le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ à tous les points rationnels de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$. Il est impossible de le compactifier sans que le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ devienne d'ordre du continu.

[1] Dit *genre de $\mathcal{X}$* („Geschlecht"); cf. K. Menger, Fund. Math. **10** (1927), p. 111. Pour une étude plus détaillée de cette notion, voir H. Reschovsky ibid. et K. Menger, *Kurventheorie*, Chap. IX.

[2] K. Menger, ibid. p. 294.

[3] Voir G. Nöbeling, *Über regulär-eindimensionale Räume*, Math. Ann. **104** (1931), p. 81, et ma note *Quelques théorèmes sur le plongement topologique des espaces*, Fund. Math. **30** (1937), p. 8.

[4] Voir ma note *Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle*, Fund. Math. **30** (1937), p. 246.



2) Le th. 15 est en défaut pour les espaces réguliers d'ordre *n fixe*. Il existe, en effet, un espace d'ordre 4 (c'est-à-dire, d'ordre $\leqslant 4$ en chaque point) qui n'est contenu topologiquement dans aucun espace compact d'ordre 4 [1].

3) Parmi les espaces réguliers, il n'existe aucun dont le rang topologique soit le plus élevé [2].

**V. Points d'ordre fini. Caractérisation des arcs et des courbes simples fermées.** 1. *Si* $\mathrm{ord}_p\,\mathcal{X} \leqslant 1$, *$p$ n'est pas un point de séparation de $\mathcal{X}$.* Donc, *si $\mathcal{X}$ est connexe, $\mathcal{X} - p$ l'est également.*

Admettons, par impossible, que $\mathcal{X} - p$ n'est pas connexe entre deux ensembles fermés $A$ et $B$ entre lesquels $\mathcal{X}$ est connexe (cf. § 41, VII). Il existe donc deux ensembles ouverts $A^*$ et $B^*$ satisfaisant aux conditions:

$$(1) \qquad \mathcal{X} - p = A^* + B^*, \quad A^* \cdot B^* = 0, \quad A \subset A^* \quad \text{et} \quad B \subset B^*.$$

D'après l'inégalité $\mathrm{ord}_p\,\mathcal{X} \leqslant 1$, il existe un ensemble ouvert $G$ tel que

$$(2) \qquad p \in G, \quad \overline{G} \cdot (A + B) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(G)}} \leqslant 1.$$

La dernière inégalité implique que l'on a

$$\text{soit } \mathrm{Fr}\,(G) \cdot A^* = 0, \quad \text{soit } \mathrm{Fr}\,(G) \cdot B^* = 0.$$

Posons $\mathrm{Fr}\,(G) \cdot B^* = 0$. Il vient

$$B^* - \overline{G} = B^* - [G + \mathrm{Fr}\,(G)] = B^* - G,$$

ce qui prouve que l'ensemble $B^* - G$ est ouvert.

On a, d'autre part, d'après (1) et (2):

$$\mathcal{X} = (A^* + G) + (B^* - G), \quad (A^* + G)(B^* - G) = 0, \quad A \subset A^* + G, \quad B \subset B^* - G.$$

$\mathcal{X}$ n'est donc pas connexe entre $A$ et $B$, contrairement à l'hypothèse.

2. $\dim \mathcal{X}^{[1]} \leqslant 0$.

En effet, $S$ désignant l'ensemble des points de séparation de $\mathcal{X}$, on a d'après 1, $\mathcal{X}^{[1]} \cdot S = 0$. Il suffit donc de prouver qu'à tout $p \in \mathcal{X}^{[1]}$ et tout $\varepsilon > 0$, correspond un ensemble ouvert $G$ tel que

$$(3) \qquad p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad (3') \qquad \mathrm{Fr}\,(G) \subset S.$$

Si $\mathrm{ord}_p\,\mathcal{X} = 0$, on a $\dim_p \mathcal{X} = 0$. Il existe par conséquent un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions (3) et tel que $\mathrm{Fr}\,(G) = 0$, d'où l'inclusion (3').

[1] Voir G. Beer, Monatsh. Math.-Phys. **38**.

[2] Voir G. Nöbeling, loco cit. p. 82.

Si $\operatorname{ord}_p \mathcal{X}=1$, on a $\dim_p \mathcal{X}\neq 0$. L'espace $\mathcal{X}$ est connexe par conséquent (cf. § 41, IV, 2) entre le point $p$ et un ensemble fermé $F$ tel que $p\in\mathcal{X}-F$. D'autre part, l'égalité $\operatorname{ord}_p \mathcal{X}=1$ implique l'existence d'un point $q$ et d'un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions (3) et tel que $\bar{G}\cdot F=0$ et $\operatorname{Fr}(G)=q$. Le point $q$ sépare donc l'espace entre $p$ et $F$, d'où $q\in S$, et la formule (3′) se trouve vérifiée.

3. *Si $\mathcal{X}$ est irréductible entre $a$ et $b$, on a $\mathcal{X}^{[1]}\subset(a,b)$.*

Autrement dit: *l'égalité* $\operatorname{ord}_p \mathcal{X}=1$ *implique que l'on a soit $p=a$, soit $p=b$.*

Supposons, par contre, que $\operatorname{ord}_p \mathcal{X}=1$ et que $a\neq p\neq b$. Soient $G$ un ensemble ouvert et $q$ un point tels que

(4) $\quad p\in G,\qquad$ (4′) $\quad a,b\in\mathcal{X}-\bar{G},\qquad$ (4″) $\quad\operatorname{Fr}(G)=q.$

Les ensembles $G$ et $\mathcal{X}-\bar{G}$ étant séparés, la formule

$$\mathcal{X}-q=\mathcal{X}-(\bar{G}-G)=G+(\mathcal{X}-\bar{G})$$

implique (cf. § 41, II, 4) que l'ensemble $q+(\mathcal{X}-\bar{G})=\mathcal{X}-G$ est connexe. C'est donc un ensemble connexe, fermé, contenant les points $a$ et $b$ (d'après (4′)). $\mathcal{X}$ étant irréductible entre ces points, il vient $\mathcal{X}-G=\mathcal{X}$, contrairement à (4).

Nous en déduirons le théorème suivant:

4. *Si $\mathcal{X}$ est un continu, $\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[1]}$ est un semi-continu.*

Soient, en effet, $a,b\in\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[1]}$ et $C$ un continu irréductible entre $a$ et $b$ (cf. § 43, I, 1). Il vient d'après II, 3, et 3:

$$C\cdot\mathcal{X}^{[1]}\subset C^{[1]}\subset(a,b),\quad \text{d'où}\quad C\cdot\mathcal{X}^{[1]}=0,\quad\text{donc}\quad C\subset\mathcal{X}-\mathcal{X}^{[1]}.$$

5. *Tout espace connexe $\mathcal{X}$ contenant deux points $a$ et $b$ tels que*

(5) $$\operatorname{ord}_a \mathcal{X}=1=\operatorname{ord}_b \mathcal{X},\quad a\neq b,$$

(6) $$\operatorname{ord}_x \mathcal{X}=2\quad\textit{pour}\quad a\neq x\neq b,$$

*est un arc $ab$*[1]).

Soit $F=S(a,b)+a+b$, où $S(a,b)$ désigne l'ensemble des points qui séparent $\mathcal{X}$ entre $a$ et $b$. $\mathcal{X}$ étant localement connexe (d'après IV, 1), tout revient à démontrer que $\mathcal{X}=F$ (cf. § 44, IV, 4).

[1]) Cf. F. Frankl, *Über die zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung*, Fund. Math. **11** (1928), p. 96.



Supposons, par contre, que $\mathcal{X}-F\neq 0$. Soit $R$ une composante de $\mathcal{X}-F$. Donc $R\neq\mathcal{X}$ et, $\mathcal{X}$ étant connexe, il existe un point $p\in\operatorname{Fr}(R)$. L'espace étant localement connexe, on a $\operatorname{Fr}(R)\subset\operatorname{Fr}(F)$ (d'après § 44, III, 3), et l'ensemble $F$ étant fermé (d'après § 44, IV, 3), on a $\operatorname{Fr}(F)\subset F$. Donc $p\in F$, c'est-à-dire que

(7) $$p\in[S(a,b)+a+b].$$

On a d'autre part $a\neq p\neq b$. Supposons en effet, que $p=a$. Il existe donc, d'après (5), un point $c$ et un ensemble ouvert $G$ suffisamment petit pour que l'on ait:

$$a=p\in G,\quad b\in\mathcal{X}-\bar{G},\quad R-G\neq 0\quad\text{et}\quad\operatorname{Fr}(G)=c.$$

Il en résulte que $c\in S(a,b)$, d'où $c\in F$, donc $c\in\mathcal{X}-R$, c'est-à-dire $R\cdot\operatorname{Fr}(G)=0$.

Cependant, la condition $p\in G\cdot\operatorname{Fr}(R)$ donne $RG\neq 0$ et comme $R-G\neq 0$, il vient $R\cdot\operatorname{Fr}(G)\neq 0$ en vertu de la connexité de $R$ (cf. § 41, I, 1). Il est ainsi établi que

(8) $$a\neq p\neq b.$$

D'après (6), il vient $\operatorname{ord}_p \mathcal{X}=2$. Il existe donc un ensemble ouvert $G$ et deux points $q$ et $r$ tels que

(9) $$p\in G,\quad a,b\in\mathcal{X}-\bar{G},\quad R-G\neq 0\quad\text{et}\quad\operatorname{Fr}(G)=(q,r).$$

Il vient, comme auparavant, $R\cdot\operatorname{Fr}(G)\neq 0$, donc

(10) $$\text{soit}\quad q\in R,\quad\text{soit}\quad r\in R.$$

En outre, comme $p\in S(a,b)$ (d'après (7) et (8)), il existe deux ensembles ouverts $A$ et $B$ tels que

(11) $$a\in A,\quad b\in B,\quad\mathcal{X}-p=A+B\quad\text{et}\quad AB=0.$$

L'ensemble $A+p$ étant connexe (cf. § 41, II, 4), les formules $p\in G\cdot(A+p)$ et $a\in(A+p)-G$, (cf. (9) et (11)), entraînent $(A+p)\cdot\operatorname{Fr}(G)\neq 0$ (cf. § 41, I, 1), d'où (cf. (9)): $A\cdot\operatorname{Fr}(G)\neq 0$. De même $B\cdot\operatorname{Fr}(G)\neq 0$. Soient donc $q\in A$, $r\in B$ et, conformément à (10):

(12) $$r\in R,\quad\text{d'où}\quad r\in\mathcal{X}-F.$$

Posons $H=A+G$. D'après (11) et (9),

$$\bar{A}=A+p\quad\text{et}\quad\bar{G}=G+q+r.$$

Par suite

$$\operatorname{Fr}(H)=(A+p+G+q+r)-(A+G)=r,\quad a\in H\quad\text{et}\quad b\in\mathcal{X}-\bar{H}.$$

Donc $r\in S(a,b)\subset F$, contrairement à (12).

6. *Tout continu composé exclusivement de points d'ordre* 2 *est une courbe simple fermée.*

D'après le th. 2 du § 42, V, il s'agit de montrer que le continu $\mathcal{X}$ envisagé est séparé par tout couple de ses points.

Supposons, par contre, que $a \neq b$ et que l'ensemble $\mathcal{X}-(a,b)$ soit connexe. $\mathcal{X}$ étant localement connexe (d'après IV, 1), soit $ab$ un arc. On a $\mathcal{X} \neq ab$ (puisqu'on aurait autrement $\mathrm{ord}_a \mathcal{X}=1$). Soient

$$c \in [ab-(a,b)] \quad \text{et} \quad d \in [\mathcal{X}-ab].$$

L'ensemble $\mathcal{X}-(a,b)$ étant ouvert et connexe, il existe (d'après § 45, II, 1) un arc $cd \subset \mathcal{X}-(a,b)$. Soit $e$ le dernier point de l'arc $cd$ appartenant à l'arc $ab$. On a donc

$$e \neq d, \quad a \neq e \neq b \quad \text{et} \quad ed \cdot ab=(e).$$

Évidemment $e$ est un point d'ordre 3 du triode $ab+ed$, d'où

$$\mathrm{ord}_e \mathcal{X} \geqslant 3.$$

L'énoncé 7 qui suit nous servira de lemme pour établir le th. 8.

Soit $\mathcal{X}^{[n,k]}$ la somme des ensembles ouverts $G$ tels que

$$(13) \qquad \delta(G)<1/k \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(G)}} \leqslant n.$$

7. *Soient* $A$ *et* $B$ *deux ensembles fermés tels que* $\mathcal{X}=A+B$, *et* $p$ *un point isolé de* $AB$ *tel que* $\mathrm{ord}_p \mathcal{X} \leqslant 2n-1$ $(n \geqslant 1)$. *À tout* $\varepsilon>0$ *et à tout entier* $k>0$, *correspond alors un ensemble ouvert* $P$ *tel que:*

$$(14) \qquad p \in P, \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(P)}}<\infty, \quad \delta(P)<\varepsilon,$$

*et que*

$$(15) \qquad \textit{soit} \quad A \cdot \mathrm{Fr}\,(P) \subset \mathcal{X}^{[n,k]}, \quad \textit{soit} \quad B \cdot \mathrm{Fr}\,(P) \subset \mathcal{X}^{[n,k]}.$$

Il existe par hypothèse un ensemble ouvert $H$ satisfaisant aux conditions:

$$(16) \qquad \overline{H} \cdot AB=p \in H, \ \delta(H)<1/k \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H)}} \leqslant 2n-1.$$

Comme

$$\mathrm{Fr}\,(H)=\mathrm{Fr}\,(H) \cdot A+\mathrm{Fr}\,(H) \cdot B \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}\,(H) \cdot AB=\mathrm{Fr}\,(H) \cdot p=0,$$

on a

$$\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H)}}=\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H) \cdot A}}+\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H) \cdot B}},$$

d'où en vertu de (16):

$$\text{soit} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H) \cdot A}}<n, \quad \text{soit} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H) \cdot B}}<n.$$



Admettons que

$$(17) \qquad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H) \cdot A}}<n.$$

Comme

$$\mathrm{Fr}\,(H-B)=\overline{H-B}-(H-B)=\overline{H-B}-H+\overline{H-B} \cdot B \subset$$
$$\subset(\overline{H}-H) \cdot \overline{\mathcal{X}-B}+\overline{H} \cdot \overline{\mathcal{X}-B} \cdot B \subset \mathrm{Fr}\,(H) \cdot A+\overline{H} \cdot AB,$$

il vient, d'après (16) et (17), $\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H-B)}} \leqslant n$, d'où suivant (13)

$$(18) \qquad H-B \subset \mathcal{X}^{[n,k]}.$$

Soit $P$ un ensemble ouvert satisfaisant aux conditions (14) et tel que $\overline{P} \subset H$. Il vient

$$(\overline{P}-P)AB=0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{P}-P \subset(\mathcal{X}-A)+(\mathcal{X}-B).$$

Par conséquent,

$$A\overline{P}-P \subset \mathcal{X}-B \subset H-B,$$

puisque $\overline{P} \subset H$. Il en résulte (15) en vertu de (18).

8. *Théorème de W. L. Ayres*[1]). $\dim(\mathcal{X}^{[2n-1]}-\mathcal{X}^{[n]}) \leqslant 0$ (*pour* $n \geqslant 1$).

Évidemment

$$\mathcal{X}^{[n]}=\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}^{[n,k]}, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{X}^{[2n-1]}-\mathcal{X}^{[n]}=\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}^{[2n-1]}-\mathcal{X}^{[n,k]}.$$

L'ensemble $\mathcal{X}^{[n,k]}$ étant ouvert, il suffit, en vertu du théorème d'addition (§ 21, III, 1), de démontrer que, quel que soit $k$, on a

$$\dim(\mathcal{X}^{[2n-1]}-\mathcal{X}^{[n,k]}) \leqslant 0;$$

autrement dit, qu'à tout point $q \in \mathcal{X}^{[2n-1]}$ et à tout $\varepsilon>0$ correspond un ensemble ouvert $G$ satisfaisant aux conditions:

$$(19) \qquad q \in G, \quad \delta(G)<\varepsilon \quad \text{et} \quad Q(G)=0,$$

en convenant que de façon générale

$$Q(X)=\mathcal{X}^{[2n-1]} \cdot \mathrm{Fr}\,(X)-\mathcal{X}^{[n,k]}.$$

Comme $q \in \mathcal{X}^{[2n-1]}$, il existe un ensemble ouvert $H$ tel que

$$(20) \qquad q \in H, \ \delta(H)<\varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H)}}<\infty.$$

[1]) Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), p. 252.

Posons

(21) $$m=\overline{\overline{Q(H)}}.$$

Nous définirons l'ensemble $G$ en procédant par induction.

Si $m=0$, posons $G=H$. Les conditions (19) sont donc satisfaites.

Soit $m>0$. Admettons qu'à tout ensemble ouvert $H_1$ tel que $\overline{\overline{Q(H_1)}}\leqslant m-1$ et qui satisfait aux conditions (20) (en y remplaçant $H$ par $H_1$), correspond un ensemble ouvert $G$ assujetti aux conditions (19). Tout revient donc à établir l'existence d'un ensemble $H_1$ de ce genre.

Soit $p\in Q(H)$. Posons dans 7: $A=\overline{H}$ et $B=\mathfrak{X}-H$. On en déduit en vertu de (20) l'existence d'un ensemble ouvert $P$ tel que

(22) $$p\in P,\quad q\in\mathfrak{X}-\overline{P},\quad \delta(P)<\varepsilon-\delta(H),\quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(P)}}<\infty,$$

et que l'on a

(23) $\overline{H}\cdot\mathrm{Fr}\,(P)\subset\mathfrak{X}^{[n,k]}$ ou (24) $\mathrm{Fr}\,(P)-H\subset\mathfrak{X}^{[n,k]}$.

Posons

(25) $H_1=H-\overline{P}$ ou (26) $H_1=H+P$,

suivant que l'on a (23) ou (24).

Dans les deux cas, on a d'après (20) et (22)

(27) $$q\in H_1,\quad \delta(H_1)<\varepsilon\quad\text{et}\quad p\in\mathfrak{X}-\mathrm{Fr}\,(H_1),$$

puisque, $P$ étant ouvert, il vient (cf. § 5, III et § 6, II, (8)):

$$P\cdot\mathrm{Fr}\,(H-\overline{P})\subset P\cdot\overline{H-\overline{P}}=P\overline{H-\overline{P}}=0\quad\text{et}\quad P\cdot\mathrm{Fr}\,(H+P)=0.$$

Dans les deux cas, on a aussi

(28) $$\mathrm{Fr}\,(H_1)\subset\mathrm{Fr}\,(H)+\mathfrak{X}^{[n,k]}.$$

Car, d'une part, la formule (25) donne (cf. § 6, II (9) et (5)):

$$\mathrm{Fr}\,(H_1)\subset\mathrm{Fr}\,(H)+\overline{H}\cdot\mathrm{Fr}\,(\overline{P})\subset\mathrm{Fr}\,(H)+\overline{H}\cdot\mathrm{Fr}\,(P),$$

et d'autre part, d'après (26),

$$\mathrm{Fr}\,(H_1)=\overline{H+P}-H-P\subset\mathrm{Fr}\,(H)+[\mathrm{Fr}\,(P)-H].$$

L'inclusion (28) donne

$$\mathrm{Fr}\,(H_1)-\mathfrak{X}^{[n,k]}\subset\mathrm{Fr}\,(H)-\mathfrak{X}^{[n,k]},\quad\text{d'où}\quad Q(H_1)\subset Q(H),$$

donc $\overline{\overline{Q(H_1)}}\leqslant m$, d'après (21).



Il en résulte que $\overline{\overline{Q(H_1)}}\leqslant m-1$, car $p\in[Q(H)-Q(H_1)]$ d'après (27). Finalement, $H_1$ satisfait d'après (27) aux conditions (20) en remplaçant $H$ par $H_1$, puisque

$$\mathrm{Fr}\,(H_1)\subset\mathrm{Fr}\,(H)+\mathrm{Fr}(P)\quad\text{et}\quad\overline{\overline{\mathrm{Fr}\,(H)+\mathrm{Fr}\,(P)}}<\infty$$

d'après (20) et (22).

Le th. 8 implique deux corollaires:

8'. *Pour tout* $n\neq2$, *on a* $\dim(\mathfrak{X}^{[n]}-\mathfrak{X}^{[n-1]})\leqslant0$.

Pour $n=1$, c'est une conséquence du th. 2.

Si $n\geqslant3$, c'est-à-dire, si $n\leqslant2n-3$, on a $\mathfrak{X}^{[n]}\subset\mathfrak{X}^{[2(n-1)-1]}$ d'où la conclusion demandée en vertu du th. 8.

8''. *Si tous les points de* $\mathfrak{X}$ *ont le même ordre fini* $n>0$, *on a* $n=2$.

Par conséquent, *si* $\mathfrak{X}$ *est un continu, il est une courbe simple fermée.*

Par hypothèse $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^{[n]}-\mathfrak{X}^{[n-1]}$. L'inégalité $n\neq2$ implique donc d'après 8' que $\dim\mathfrak{X}\leqslant0$; mais alors $n=0$.

La deuxième partie du théorème en résulte en vertu du th. 6.

9. $\mathfrak{X}$ *étant un continu, tous ses points de séparation, sauf une infinité dénombrable, sont d'ordre* 2 [1]).

D'après le th. 1 du § 41, VII, il existe une suite de points $a_1,a_2,\dots$ telle que tout point de séparation est un séparateur entre un couple $(a_i,a_j)$ convenablement choisi. Il suffit donc de démontrer que, étant donné un couple de points $(a,b)$, on a $\mathrm{ord}_p\mathfrak{X}=2$ pour tout $p\in S(a,b)$, sauf une infinité dénombrable.

Imaginons les points $p\in S(a,b)$ munis d'indices conformément au th. 2 du § 41, VIII. D'après le th. 3 du § 41, VIII, à tout indice $y$, abstraction faite d'un ensemble dénombrable, correspondent deux suites d'indices $\{z_n\}$ et $\{u_n\}$ telles que

$$p_y=\prod_n A(p_{z_n})\cdot\overline{\mathfrak{X}-A(p_{u_n})}.$$

L'espace $\mathfrak{X}$ étant compact, il en résulte que (cf. § 38, III, 1)

$$\lim_{n=\infty}\delta[A(p_{z_n})\cdot\overline{\mathfrak{X}-A(p_{u_n})}]=0.$$

[1]) Voir G. T. Whyburn, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), p. 606. Pour une extension du th. 6 aux points de *séparation locale*, voir G. T. Whyburn, Monatsh. Math.-Physik **36** (1929), p. 309.

L'ensemble $A(p_{z_n})\cdot\overline{\mathfrak{X}-A(p_{u_n})}$ étant un entourage du point $p_y$, il vient $\mathrm{ord}_{p_y}\mathfrak{X}=2$ en vertu de la formule suivante:

$$\mathrm{Fr}[A(p_{z_n})\cdot\overline{\mathfrak{X}-A(p_{u_n})}]=A(p_{z_n})\cdot\overline{\mathfrak{X}-A(p_{u_n})}[\overline{\mathfrak{X}-A(p_{z_n})}+\overline{\mathfrak{X}-\overline{\mathfrak{X}-A(p_{u_n})}}]\subset$$
$$\subset\mathrm{Fr}[A(p_{z_n})]+\mathrm{Fr}[A(p_{u_n})]=(p_{z_n})+(p_{u_n}).$$

10. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un continu localement connexe et* $p$ *un point qui ne le sépare pas. Si* $\mathrm{ord}_p\mathfrak{X}\geqslant 2$, *il existe un point* $q\neq p$ *tel que* $\mathrm{ord}_{p,q}\mathfrak{X}\geqslant 2$.

L'inégalité $\mathrm{ord}_p\mathfrak{X}\geqslant 2$ implique, en effet (cf. II, 6), l'existence d'un ensemble fermé $F$ satisfaisant aux conditions:

$$F\subset\mathfrak{X}-p \quad \text{et} \quad \mathrm{ord}_{p,F}\mathfrak{X}\geqslant 2. \tag{29}$$

L'ensemble $\mathfrak{X}-p$ étant connexe, il existe, d'après § 44, II, 15, un continu $C$ tel que

$$F\subset C\subset\mathfrak{X}-p. \tag{30}$$

Soit $pq$ un arc tel que $pq\cdot C=q$.

Supposons que $\mathrm{ord}_{p,q}\mathfrak{X}=1$. Il existe alors un point $r$ qui sépare $\mathfrak{X}$ entre $p$ et $q$, d'où $r\in(pq-p-q)$. $C$ étant un continu, les formules $r\in\mathfrak{X}-C$ et $q\in C$ impliquent que $r$ est un point de séparation entre $p$ et $C$.

Donc $\mathrm{ord}_{p,C}\mathfrak{X}=1$, et d'après (30), $\mathrm{ord}_{p,F}\mathfrak{X}=1$ contrairement à (29).

**VI. Dendrites.** On appelle *dendrite* tout continu localement connexe qui ne contient aucune courbe simple fermée.

*Exemples*: 1⁰ Tout arc est une dendrite. La somme de trois arcs $ab$, $ac$ et $ad$ qui n'ont deux à deux que le point $a$ en commun est une dendrite (nommée *triode*).

2⁰ L'exemple 2) du N⁰ I est une dendrite contenant un point d'ordre $\omega$.

Il est facile de condenser cette singularité.

3⁰ Le continu du § 44, VI, p. 178 est une dendrite admettant un sous-continu non-dense: le segment 01 de l'axe des $x$.

4⁰ Évidemment, la somme de deux dendrites peut ne pas être une dendrite. Plus encore, comme on le voit sur la figure p. 195 (§ 45, IV), la somme de deux dendrites peut contenir un continu qui n'est pas localement connexe. Cf. aussi VII, 9, remarque.



5⁰ Il existe sur le plan une dendrite qui contient topologiquement toute autre dendrite [1]).

$\mathfrak{X}$ étant supposé une dendrite, on a les théorèmes suivants:

1. $\mathfrak{X}$ *est unicohérent* [2]).

Plus précisément, $K$ *et* $L$ *étant deux sous-continus de* $\mathfrak{X}$, *l'ensemble* $KL$ *est un continu.*

$\mathfrak{X}$ étant un continu localement connexe, tout sous-continu de $\mathfrak{X}$ est produit d'une suite infinie descendante de continus localement connexes (cf. § 45, III, 1). Le produit de toute suite descendante de continus étant un continu (cf. § 42, II, 5), la démonstration se ramène au cas où $K$ et $L$ sont des continus localement connexes.

Supposons par impossible que

$$KL=P+Q,\quad PQ=0,\quad 0\neq P=\overline{P},\quad 0\neq Q=\overline{Q}.$$

Il existe par conséquent (cf. § 45, II, 1) un arc $A$ et deux points $p$ et $q$ tels que

$$A\subset K,\quad AP=(p)\quad \text{et}\quad AQ=(q).$$

Soit $B$ un arc $pq\subset L$. Il vient

$$AB\subset AKL=A(P+Q)=(p)+(q).$$

$A+Q$ est donc une courbe simple fermée.

Il en résulte que:

2. *Chaque couple de points* $a\neq b$ *d'une dendrite s'y laisse unir par un et seul arc ayant ces points pour extrémités.*

3. *Les sous-continus* $K$ *et* $L$ *de* $\mathfrak{X}$ *étant supposés disjoints, on a* $\mathrm{ord}_{K,L}\mathfrak{X}=1$, *c'est-à-dire qu'il existe un point* $p$ *qui sépare* $K$ *et* $L$.

*On a, en particulier*

$$\mathrm{ord}_{x,y}\mathfrak{X}=1,\quad \textit{quels que soient}\quad x\neq y. \tag{1}$$

De façon plus générale, *si* $K$ *est un continu,* $L$ — *somme de* $n$ *continus et* $KL=0$, *on a* $\mathrm{ord}_{K,L}\mathfrak{X}\leqslant n$.

---

[1]) Pour la démonstration, voir par exemple, K. Menger, *Kurventheorie*, Chap. X, 6 („Universalbäume"). Cf. T. Ważewski, Ann. Soc. Pol. Math. **2** (1924), p. 57.

[2]) Réciproquement, tout continu de dimension 1, localement connexe, unicohérent est une dendrite, voir § 52, III, 8.

Soit d'abord $n=1$. Soit $A$ un arc $qr$ tel que $AK=q$ et $AL=r$. Tout point $p\in A-q-r$ sépare $K$ et $L$. En effet, en supposant que $K$ et $L$ appartiennent à la même région-composante de $\mathfrak{X}-p$, il existerait (cf. § 45, II, 1) un arc $B\subset\mathfrak{X}-p$ aux extrémités $q$ et $r$; donc $A\neq B$, contrairement à 2.

Ceci établi, soit $L=L_1+\ldots+L_n$, somme de $n$ continus $(n\geqslant 1)$. Comme nous venons de prouver, il existe un point $p_i$ et un ensemble ouvert $G_i$ (où $i=1,\ldots,n$) tels que

$$K\subset G_i,\quad \mathrm{Fr}\,(G_i)=p_i \quad \text{et} \quad L_i\subset\mathfrak{X}-\bar{G}_i.$$

Posons $G=G_1\cdot\ldots\cdot G_n$. Il vient:

$$K\subset G,\quad \mathrm{Fr}\,(G)\subset\mathrm{Fr}\,(G_1)+\ldots+\mathrm{Fr}\,(G_n)=(p_1,\ldots,p_n)$$

et

$$L\subset(\mathfrak{X}-\bar{G}_1)+\ldots+(\mathfrak{X}-\bar{G}_n)=\mathfrak{X}-(\bar{G}_1\cdot\ldots\cdot\bar{G}_n)\subset\mathfrak{X}-\bar{G}.$$

L'ensemble $\mathrm{Fr}\,(G)$ sépare donc $\mathfrak{X}$ entre $K$ et $L$ et se compose de $n$ points au plus.

La condition (1) implique d'après IV, 9 que

4. *$\mathfrak{X}$ est un continu régulier.*

Par conséquent, *tout sous-continu d'une dendrite est une dendrite.*

*Remarque.* La même implication prouve que la condition (1) *caractérise* les dendrites parmi les continus. Car, d'une part, tout continu régulier est localement connexe (d'après IV, 1) et, d'autre part, aucun espace contenant une courbe simple fermée ne satisfait à la condition (1).

5. *Théorème de décomposition. À tout $\varepsilon>0$ correspond un système fini de dendrites $F_1,\ldots,F_k$ satisfaisant aux conditions:*

$$\mathfrak{X}=F_1+\ldots+F_k,\quad \delta(F_i)<\varepsilon,\quad \overline{\overline{F_i\cdot F_j}}\leqslant 1 \quad \textit{et} \quad F_h\cdot F_i\cdot F_j=0$$

*pour tout système d'indices différents.*

$\mathfrak{X}$ étant un continu régulier (d'après 4), envisageons la décomposition (14) du th. IV, 11, remarque 2. En tant que sous-continu de $\mathfrak{X}$, $F_i$ est une dendrite (suivant 4). Le produit $F_i\cdot F_j$, fini et connexe (d'après 1), contient un seul point au plus.

6. *Le nombre des composantes de $\mathfrak{X}-p$ (supposé fini)* $=\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}$.

Désignons ce nombre par $n$. L'inégalité $\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}\geqslant n$ étant évidente, il s'agit de prouver que $\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}\leqslant n$; autrement dit (cf. II, 6), qu'à tout ensemble fermé $F$ tel que $p\in\mathfrak{X}-F$ correspond un ensemble composé de $n$ points qui sépare $\mathfrak{X}$ entre $p$ et $F$.



Soit $\mathfrak{X}-p=R_1+\ldots+R_n$, somme de $n$ régions. L'ensemble $FR_i$ étant fermé, puisque $\overline{FR_i}\subset F\cdot(R_i+p)=FR_i$, il existe un continu $K_i$ tel que $FR_i\subset K_i$ (cf. § 44, II, 15). Il existe donc d'après 3 un ensemble composé de $n$ points (au plus) qui sépare $\mathfrak{X}$ entre $p$ et $K_1+\ldots+K_n$, donc entre $p$ et $F$.

7. $\overline{\overline{\mathfrak{X}-\mathfrak{X}^{[2]}}}\leqslant\aleph_0$.

En d'autres termes: l'ensemble des points „de ramification" d'une dendrite est dénombrable.

C'est une conséquence directe du th. 6, rapproché du th. 1 du § 41, IX.

8. $\mathfrak{X}=\overline{\mathfrak{X}^{[2]}-\mathfrak{X}^{[1]}}$ *(pourvu que $\mathfrak{X}$ ne se réduise pas à un seul point)* [1].

Soit, en effet, $G$ un ensemble ouvert (non vide). Soit $A$ un arc $ab\subset G$. On a évidemment

$$A\cdot\mathfrak{X}^{[1]}\subset(a,b),\quad \text{donc} \quad \overline{\overline{A\cdot\mathfrak{X}^{[1]}}}\leqslant 2,$$

et d'après 7

$$\overline{\overline{A-\mathfrak{X}^{[2]}}}\leqslant\aleph_0.$$

Donc

$$\overline{\overline{A\cdot\mathfrak{X}^{[2]}-\mathfrak{X}^{[1]}}}=\mathfrak{c},\quad \text{d'où} \quad G\cdot\mathfrak{X}^{[2]}-\mathfrak{X}^{[1]}\neq 0.$$

Parmi les propriétés des dendrites qui vont être établies plus tard, citons la suivante (cf. § 48, III, 8 et 16):

9. *$\mathfrak{X}$ étant une dendrite, il existe, dans toute transformation $f\in\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$, un point invariant* [2].

**VII. Dendrites locales.** Tout continu dont chaque point admet un entourage qui est une dendrite s'appelle *dendrite locale.*

Il suit aussitôt de VI, 4 que

1. *Toute dendrite locale est un continu régulier.*

2. *Si $\mathfrak{X}$ est une dendrite locale, il existe un $\varepsilon>0$ tel que tout sous-continu $C$ de diamètre $<\varepsilon$ est une dendrite.*

D'après le théorème de Borel-Lebesgue (§ 37, V, 2), il existe un système fini de dendrites $D_1,\ldots,D_n$ tel que

$$\mathfrak{X}=\mathrm{Int}\,(D_1)+\ldots+\mathrm{Int}\,(D_n).$$

[1]) Voir K. Menger, Math. Ann. **96** (1927), p. 576.

[2]) Le cas particulier du th. 9, où $f$ est une homéomorphie, a été établi par W. Scherrer, Math. Zeitschr. **24** (1925), p. 125. Voir aussi W. L. Ayres, *Some generalizations of the Scherrer fixed-point theorem,* Fund. Math. **16** (1930), p. 332.

Il existe donc (cf. § 37, VII, 3′) un $\varepsilon>0$ tel que tout ensemble de diamètre $<\varepsilon$ est contenu dans l'un des ensembles $\mathrm{Int}(D_i)$, donc dans l'une des dendrites $D_i$. Soit $C$ un continu de diamètre $<\varepsilon$. Tout sous-continu d'une dendrite étant une dendrite (d'après VI, 4), $C$ est une dendrite.

3. *Lemme. Soient* $\mathfrak{X}$ *un continu localement connexe et* $\varepsilon$ *la borne inférieure des diamètres des courbes simples fermées contenues dans* $\mathfrak{X}$. *Si* $\varepsilon>0$, $\mathfrak{X}$ *est une dendrite locale.*

Car $p$ étant un point de $\mathfrak{X}$ et $C$ étant un continu localement connexe qui en est un entourage tel que $\delta(C)<\varepsilon$ (cf. § 45, II, 3), $C$ ne contient aucune courbe simple fermée, c'est-à-dire, est une dendrite.

4. *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que* $\mathfrak{X}$ *soit une dendrite locale:*

1° $\mathfrak{X}$ *est un continu localement connexe ne contenant qu'un nombre fini (ou nul) de courbes simples fermées.*

2° $\mathfrak{X}$ *est un continu-somme d'un nombre fini de dendrites:*

$$\mathfrak{X}=D_1+\ldots+D_k \quad \textit{où} \quad \overline{\overline{D_i\cdot D_j}}<\infty \quad \textit{pour} \quad i\neq j. \tag{1}$$

1) La condition 1° implique que $\mathfrak{X}$ est une dendrite locale. C'est une conséquence directe de 3.

2) Si $\mathfrak{X}$ est une dendrite locale, $\mathfrak{X}$ satisfait à 2°. En effet, $\mathfrak{X}$ étant un continu régulier (d'après 1), il existe, d'après IV, 11 (remarque 2), des continus $D_1,\ldots,D_k$ satisfaisant à la condition (1) et de diamètre $<\varepsilon$, où $\varepsilon$ est un nombre positif donné en avance. En admettant que $\varepsilon$ satisfait à la thèse du th. 2, on en conclut que les continus $D_1,\ldots,D_k$ sont des dendrites.

3) La condition 2° entraîne 1°. Posons, en effet,

$$F=\sum_{i\neq j} D_i\cdot D_j \tag{2}$$

et désignons par $\boldsymbol{A}$ la famille de tous les arcs $A$ satisfaisant aux deux conditions suivantes:

(i) $A$ est contenu dans l'une des dendrites $D_i$,

(ii) les extrémités de $A$ appartiennent à $F$.

L'ensemble $F$ étant fini, la famille $\boldsymbol{A}$ l'est également (cf. VI, 2).

Soit $C$ une courbe simple fermée $\subset\mathfrak{X}$. Il vient $CF\neq 0$ puisque $C$ n'est contenu dans aucun $D_i$. $R$ étant une composante de $C-F$, on a $\bar{R}\in\boldsymbol{A}$. Par conséquent, $C$ est somme de certains arcs appartenant à la famille $\boldsymbol{A}$. Cette famille étant finie, la famille des courbes simples fermées contenues dans $\mathfrak{X}$ l'est donc également.



5. *Tout continu localement connexe qui contient une infinité de courbes simples fermées en contient de diamètre aussi petit que l'on veut* [1].

En effet, si la borne inférieure du diamètre des courbes simples fermées contenues dans $\mathfrak{X}$ est positive, $\mathfrak{X}$ est évidemment une dendrite locale. Mais alors $\mathfrak{X}$ ne renferme qu'un nombre fini de courbes simples fermées (cf. 1°).

6. *Les théorèmes* 7 *et* 8 *du* N° VI *restent vrais en admettant que* $\mathfrak{X}$ *est une dendrite locale.*

Appliquons, en effet, la condition 4,2°. $F$ étant défini par l'identité (2), on a $\mathrm{ord}_p\,(D_i-F)=\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}$, quel que soit $p$ (cf. II, 4). Il vient

$$D_i^{[2]}-F\subset\mathfrak{X}^{[2]}, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{X}-\mathfrak{X}^{[2]}=\sum_{i=1}^{k}(D_i-\mathfrak{X}^{[2]})\subset\sum_{i=1}^{k}(D_i-D_i^{[2]})+F,$$

donc d'après VI, 7:

$$\overline{\overline{\mathfrak{X}-\mathfrak{X}^{[2]}}}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\overline{\overline{D_i-D_i^{[2]}}}+\overline{\overline{F}}\leqslant\aleph_0.$$

De façon analogue (cf. II, 4),

$$\mathfrak{X}^{[2]}-\mathfrak{X}^{[1]}-F=\sum_{i=1}^{k}D_i\cdot(\mathfrak{X}^{[2]}-\mathfrak{X}^{[1]})-F=\sum_{i=1}^{k}(D_i^{[2]}-D_i^{[1]})-F,$$

et l'ensemble $F$ étant fini, il vient d'après VI, 8:

$$\overline{\mathfrak{X}^{[2]}-\mathfrak{X}^{[1]}}=\sum_{i=1}^{k}\overline{D_i^{[2]}-D_i^{[1]}}=\sum_{i=1}^{k}D_i=\mathfrak{X}.$$

Citons encore les théorèmes suivants:

7. *Toute dendrite locale, gauche au sens topologique (c'est-à-dire qui n'est pas contenue topologiquement dans le plan) contient topologiquement l'une de deux lignes polygonales suivantes:*

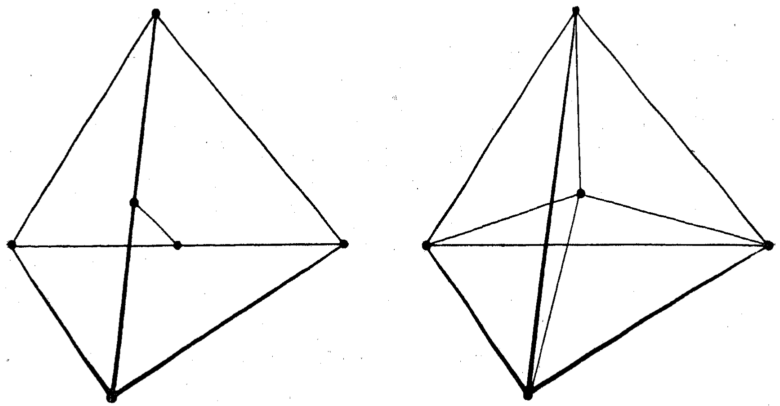
(i) *somme des arêtes d'un tétraèdre et d'un segment unissant deux arêtes disjointes,*

(ii) *somme des arêtes d'un tétraèdre et des 4 segments qui unissent le centre de gravité du tétraèdre à ses sommets* [2].

---

[1]) Théorème de C. Zarankiewicz, Fund. Math. **9** (1927) p. 146.

[2]) Pour la démonstration, voir ma note *Sur les problème des courbes gauches en Topologie*, Fund. Math. **15** (1930), p. 271.



En rapprochant le th. 7 du th. 10 du § 45, II, on en déduit:

7'. *Soit $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe à une dimension. S'il n'existe aucune transformation continue de $\mathfrak{X}$ en sous-ensemble du plan, à tranches de diamètre $<\varepsilon$, où le nombre positif $\varepsilon$ est convenablement choisi, le continu $\mathfrak{X}$ contient topologiquement l'une des deux lignes polygonales précitées*[1]).

8. *Pour qu'un continu $\mathfrak{X}$ soit une dendrite locale, il faut et il suffit qu'il se laisse réduire en une ligne polygonale topologique (c'est-à-dire en un ensemble homéomorphe à une ligne polygonale) par un petit déplacement continu; autrement dit: qu'à tout $\varepsilon>0$ corresponde une fonction $f\in\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}\times\mathfrak{I}}$ telle que*

$$f(x,0)=x,\quad |f(x,t)-x|<\varepsilon \quad \textit{et} \quad f(\mathfrak{X},1)\underset{\text{top}}{=}L,$$

*où $L$ est une ligne polygonale*[2]).

9. *Toute dendrite locale est somme de deux dendrites*[3]).

*Remarque.* Évidemment, la somme de deux dendrites (même de deux arcs) n'est pas nécessairement une dendrite locale. Plus encore, il existe (sur le plan), pour tout entier positif $n$, un continu régulier d'ordre 3 *qui se laisse décomposer en $n$, mais pas en un nombre moindre de dendrites*[4]).

---

[1]) Théorème de Mazurkiewicz, *Über nichtplättbare Kurven*, Fund. Math. **20** (1933), p. 281.

[2]) Théorème de P. Alexandroff, *Über endlich-hoch zusammenhängende stetige Kurven*, Fund. Math. **13** (1929), p. 34.

[3]) Théorème de N. E. Steenrod, *Characterizations of certain finite curve-sums*, Amer. Journ. Math. **56** (1934), p. 565.

[4]) Voir K. Borsuk, *Sur la décomposition des courbes régulières en dendrites*, Fund. Math. **22** (1934), p. 287.



## § 47. Décomposition d'un continu localement connexe en éléments cycliques[1]).

**I. Ensembles complètement connexes par arcs**[2]). Appelons ainsi tout sous-ensemble $L$ d'un continu localement connexe $\mathfrak{X}$ qui satisfait à la condition suivante:

(1) *si $x,y\in L$, tout arc $xy$ est contenu dans $L$.*

Cette définition implique aussitôt les deux énoncés suivants:

1. *Le produit d'une famille arbitraire d'ensembles complètement connexes par arcs est complètement connexe par arcs.*

2. *Tout ensemble complètement connexe par arcs est localement et intégralement connexe par arcs.*

3. *Si la somme et le produit de deux ensembles $M$ et $N$ fermés dans $M+N$ sont complètement connexes par arcs, ces ensembles le sont également.*

Soit, en effet, $ab$ un arc aux extrémités $a,b\in M$. Il s'agit de prouver que $ab\subset M$.

Par hypothèse

(2) $$ab\subset M+N, \quad \text{c'est-à-dire} \quad ab=ab\cdot M+ab\cdot N.$$

Soit $c\in ab\cdot N$. Il s'agit donc de montrer que $c\in M$.

Les ensembles $ac\cdot M$ et $ac\cdot N$ étant fermés dans $M+N$, donc dans $ac$, l'identité (cf. (2)) $ac=ac\cdot M+ac\cdot N$ implique $ac\cdot MN\neq 0$. Soit $p\in ac\cdot MN$ et, de façon analogue, soit $q\in cb\cdot MN$. Par hypothèse, l'arc $pcq$ est contenu dans $MN$. Donc $c\in M$.

---

[1]) Cf. le mémoire de G. T. Whyburn et de moi-même *Sur les éléments cycliques et leurs applications*, Fund. Math. **16** (1930), pp. 305—331, où l'on trouvera de nombreux renvois bibliographiques. Pour des généralisations de la notion d'élément cyclique et pour des décompositions en éléments plus fins, voir: G. T. Whyburn, Amer. Journ. Math. **56** (1934), p. 133, D. W. Hall, *On a decomposition of true cyclic elements*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), p. 305, T. Radó and P. Reichelderfer, *Cyclic transitivity*, Duke Math. Journ. **6** (1940), p. 474 et Fund. Math. **34** (1947), p. 14, J. W. T. Youngs, *K-cyclic elements*, Amer. Journ. Math. **62** (1940), p. 449, Albert and J. W. T. Youngs, Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), p. 637, A. D. Wallace, *Extension sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **59** (1946), p. 1.

[2]) Cf. la notion d'*arc-curve* de W. L. Ayres, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), p. 567. Cette notion est ce caractère auxiliaire par rapport à celle d'élément cyclique que nous allons étudier au N° II.

Soit $L$ un ensemble *fermé et complètement connexe par arcs.* On a les énoncés suivants:

4. *La frontière de toute composante $R$ de $\mathfrak{X}-L$ se réduit à un seul point (appartenant à $L$).*

Car, dans le cas contraire, la frontière $\mathrm{Fr}(R)$ contiendrait deux points différents, $p$ et $q$, accessibles de $R$ (cf. § 45, III, 6). Il existerait donc un arc $pq\subset R+p+q$, d'où $pq-L\neq 0$, contrairement à l'hypothèse.

5. *Tout ensemble fermé $F$ qui sépare $L$ entre $A$ et $B$ (où $A+B\subset L$) sépare l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier entre ces ensembles.*

En effet, si $F$ ne sépare pas l'espace entre $A$ et $B$, il existe un arc $ab$ tel que $a\in A$, $b\in B$ et $ab\cdot F=0$. Comme $ab\subset L$, la dernière égalité prouve que $F$ ne sépare pas l'ensemble $L$ entre $A$ et $B$.

5'. *Si $A+B\subset LZ$ et si $Z$ est connexe entre $A$ et $B$, $LZ$ l'est également.*

Admettons, en effet, que $LZ$ n'est pas connexe entre $A$ et $B$, c'est-à-dire, que $L-Z$ sépare $L$ entre $A$ et $B$. L'ensemble $L-Z$ contient par conséquent (cf. § 41, VII, 3) un ensemble fermé $F$ qui sépare $L$ entre $A$ et $B$. D'après 5, $F$ sépare l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier entre ces ensembles, c'est-à-dire que $\mathfrak{X}-F$ n'est pas connexe entre $A$ et $B$. Il en est de même de $Z$ puisque $Z\subset\mathfrak{X}-F$.

Le th. 5 implique aussitôt:

6. *Si $A+B\subset L$, on a* $\mathrm{ord}_{A,B}L=\mathrm{ord}_{A,B}\mathfrak{X}$.

7. *Si la suite des composantes $R_1,R_2,\dots$ de $\mathfrak{X}-L$ est infinie, on a* $\lim\limits_{n=\infty}\delta(R_n)=0$.

Car dans le cas contraire, on pourrait en extraire une suite convergente $\{R_{n_k}\}$ dont la limite contiendrait deux points $a\neq b$ et, en posant $Z=\sum\limits_k R_{n_k}+a+b$, on aurait $a,b\in LZ$. L'ensemble $Z$ serait donc connexe entre $a$ et $b$ (cf. § 41, IV, 9), tandis que $LZ$ ne l'est pas (en tant que composé de deux points, $a$ et $b$).

8. *$A$ et $B$ étant deux ensembles fermés complètement connexes par arcs et tels que $AB\neq 0$, l'ensemble $A+B$ est complètement connexe par arcs.*

En outre, *l'ensemble $AB$ sépare l'espace entre $A-B$ et $B-A$.*



Soient, en effet, $ab$ un arc dont les extrémités appartiennent à $A+B$. Il s'agit de montrer que $ab\subset A+B$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soient $a_1b_1$ un intervalle de l'arc $ab$, contigu à l'ensemble $ab\cdot(A+B)$. Les ensembles $A$ et $B$ étant complètement connexes par arcs, aucun d'eux ne peut contenir les deux points $a_1$ et $b_1$. Il est donc légitime d'admettre que

(3) $a_1\in A-B$ et (4) $b_1\in B-A$.

On a par conséquent

(5) $a_1b_1\cdot A=a_1$ et (6) $a_1b_1\cdot B=b_1$.

Soit $c\in AB$. Comme $b_1,c\in B$, on a pour tout arc $b_1c$ l'inclusion

(7) $b_1c\subset B$, d'où $a_1b_1\cdot b_1c=b_1$

d'après (6). Par conséquent $a_1b_1+b_1c$ est un arc dont les extrémités appartiennent à $A$. Mais alors $a_1b_1+b_1c\subset A$, d'où $b_1\in A$, contrairement à (4).

La deuxième partie du théorème est une conséquence directe de 5, l'ensemble $AB$ étant un séparateur de $A+B$ entre $A-B$ et $B-A$.

9. *Si l'espace $\mathfrak{X}$ est unicohérent, l'ensemble $L$ l'est également.*

Soient, en effet, $A$ et $B$ deux continus tels que $L=A+B$. Il s'agit de prouver que leur produit $AB$ est un continu.

Désignons par $M$ la somme de toutes les composantes $R$ de $\mathfrak{X}-L$ telles que $\mathrm{Fr}(R)\subset A$. Soit $S$ la somme de toutes les autres composantes de $\mathfrak{X}-L$. L'ensemble $\mathrm{Fr}(R)$ se réduisant (d'après 4) à un seul point appartenant à $L$, la frontière des composantes qui forment $S$ est contenue dans $B$.

Il vient ainsi

(8) $\mathfrak{X}=(A+R)+(B+S)$ et (9) $(A+R)(B+S)=AB$.

Les ensembles $A+R$ et $B+S$ étant des continus (cf. § 44, III, 1) et l'espace $\mathfrak{X}$ étant unicohérent, il en résulte que $AB$ est un continu.

10. *Étant donnée une suite de continus $K,K_1,K_2,\dots$ telle que*

(10) $\mathrm{Lim}_{n=\infty}K_n=K\subset L$ *et* (11) $LK_n\neq 0$,

*on a*

(12) $$\mathrm{Lim}_{n=\infty}LK_n=K.$$

D'après (10) et § 25, IV, 2, on a

$$\operatorname*{Ls}_{n=\infty} LK_n \subset \operatorname*{Ls}_{n=\infty} K_n = K.$$

Il s'agit donc de montrer que

(13) $$K \subset \operatorname*{Li}_{n=\infty} LK_n.$$

Soit $p \in K$. Il s'agit de définir une suite $p_1, p_2, \dots$ telle que

(14) $$p_n \in LK_n \quad \text{et} \quad (15) \quad \lim_{n=\infty} p_n = p.$$

D'après (10), $p \in \operatorname*{Li}_{n=\infty} K_n$. Il existe donc une suite $q_1, q_2, \dots$ telle que

(16) $$q_n \in K_n \quad \text{et} \quad (17) \quad \lim_{n=\infty} q_n = p.$$

Nous définissons $p_n$ comme suit: si $q_n \in L$, nous posons $p_n = q_n$; si $q_n \in \mathfrak{X} - L$, nous posons conformément à 4:

(18) $$p_n = \mathrm{Fr}\,(R_n), \quad \text{où} \quad q_n \in R_n,$$

$R_n$ étant une composante de $\mathfrak{X} - L$.

La formule (14) est satisfaite. Ceci étant une conséquence directe de (16) dans le cas où $q_n \in L$, admettons que $q_n \in \mathfrak{X} - L$, donc que $q_n \in K_n - L$ (d'après (16)). On a par conséquent

(19) $$K_n \cdot R_n \neq 0 \neq K_n - R_n$$

puisque $0 \neq LK_n \subset K_n - R_n$ d'après (11).

La double inégalité (19) donne (cf. § 41, I, 1)

$$K_n \cdot \mathrm{Fr}\,(R_n) \neq 0, \quad \text{donc} \quad p_n \in K_n$$

(d'après (18)) et comme $\mathrm{Fr}\,(R_n) \subset L$ (cf. § 44, III, 3), il en résulte (14).

Supposons par impossible que la formule (15) ne soit pas satisfaite. Il existe alors une suite $m_1 < m_2 < \dots$ telle qu'aucune sous-suite de $\{p_{m_n}\}$ ne converge vers $p$.

Il est donc légitime d'admettre, conformément à (17), que l'on a constamment $p_{m_n} \neq q_{m_n}$, donc, suivant (18), que

(20) $$p_{m_n} = \mathrm{Fr}\,(R_{m_n}).$$

Il y a deux cas à distinguer:



1⁰ Il existe une suite $i_1 < i_2 < \dots$ telle que les composantes $R_{m_{i_1}}, R_{m_{i_2}}, \dots$ sont deux à deux différentes. On a alors d'après 7 et (20)

$$\lim_{n=\infty} \delta(R_{m_{i_n}}) = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{n=\infty} |p_{m_{i_n}} - q_{m_{i_n}}| = 0, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n=\infty} p_{m_{i_n}} = p$$

d'après (17).

2⁰ Il existe un indice $r$ et une suite d'indices $i_1 < i_2 < \dots$ telles que $R_{m_{i_1}} = R_{m_{i_2}} = \dots = R_r$. Posons

(21) $$a = \mathrm{Fr}\,(R_r).$$

On a donc d'après (20)

(22) $$p_{m_{i_1}} = p_{m_{i_2}} = \dots = a, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n=\infty} p_{m_{i_n}} = a.$$

D'autre part, $q_{m_{i_n}} \in R_r$ d'après (18), et il vient $p \in \bar{R}_r$ d'après (17). Comme (cf. (10)) $p \in L$, on en tire

$$p \in \mathrm{Fr}\,(R_r), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad p = a = \lim_{n=\infty} p_{m_{i_n}},$$

conformément à (21) et (22).

Ainsi, contrairement à la définition de la suite $\{m_n\}$, nous sommes parvenus, dans les deux cas, à la conclusion que la suite $\{p_{m_n}\}$ contient une sous-suite convergente vers $p$.

**II. Éléments cycliques.** *$\mathfrak{X}$ étant un continu localement connexe, on appelle éléments cycliques*[1] *de $\mathfrak{X}$:*

1⁰ *tout point qui sépare $\mathfrak{X}$,*

2⁰ *tout ensemble*

(1) $$E_p = \mathop{E}_{x}\,(\mathrm{ord}_{p,x}\,\mathfrak{X} \geqslant 2)$$

(c'est-à-dire, *l'ensemble des $x$ tels qu'aucun point ne coupe $\mathfrak{X}$ entre $p$ et $x$), si $p$ ne sépare pas $\mathfrak{X}$.*

*Exemple.* Soit $\mathfrak{X}$ l'espace composé de deux circonférences tangentes (extérieurement) et d'un rayon. Chacune des circonférences est un élément cyclique, ainsi que leur point commun et tout point du rayon.

On constate aussitôt que

1. *Si $p$ ne sépare pas l'espace, on a* $p \in E_p$.

Donc, *l'espace est somme de ses éléments cycliques.*

2. *Si* $\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X} = 1$, *on a* $E_p = p$.

[1]) La notion d'élément cyclique est due à G. T. Whyburn; voir *Cyclicly connected continuous curves*, Proc. Nat. Acad. Sc. **13** (1927), p. 31. Cf. aussi R. L. Moore, Monatsh. Math.-Phys. **36** (1929), p. 81.

Cependant, d'après § 46, V, 10,

3. *Si le point $p$ ne sépare pas l'espace et si* $\mathrm{ord}_p\,\mathfrak{X}\geqslant 2$, *on a* $E_p-p\neq 0$.

4. *Si* $E_a\neq E_b$, *l'ensemble* $E_a\cdot E_b$ *est vide ou se réduit à un seul point qui sépare l'espace.*

Soit $c\in E_a-E_b$. Il existe par conséquent un point $q$ qui sépare l'espace entre $c$ et $b$. Soit $p\in E_a\cdot E_b$. Nous allons montrer que $p=q$.

On a par hypothèse

$$\mathrm{ord}_{a,p}\,\mathfrak{X}\geqslant 2,\quad \mathrm{ord}_{p,b}\,\mathfrak{X}\geqslant 2\quad \text{et}\quad \mathrm{ord}_{c,a}\,\mathfrak{X}\geqslant 2. \tag{2}$$

En outre $q\neq a$, puisque $a$ n'est pas un point de séparation.

Supposons par impossible que $p\neq q$. On peut donc (d'après (2)) unir par des arcs en dehors de $q$: $a$ à $p$, $p$ à $b$ et $c$ à $a$, donc — $c$ à $b$. Mais alors $q$ ne sépare pas $c$ de $b$.

5. *Si $b$ ne sépare pas l'espace et* $b\in E_a$, *on a* $E_b=E_a$.

Car $b\in E_a\cdot E_b$ d'après 1, et $E_a\cdot E_b\neq b$ d'après 4.

6. *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $E$ (contenant plus d'un point) soit un élément cyclique*:

1⁰ *il existe deux points* $a\neq b$ *tels que*

$$\mathrm{ord}_{a,b}\,\mathfrak{X}\geqslant 2 \tag{3}$$

*et que $E$ est le produit de tous les ensembles fermés, complètement connexes par arcs et contenant $a$ et $b$;*

2⁰ *$E$ est connexe et saturé par rapport à la propriété de ne contenir aucun point qui le sépare.*

1) Soit $E_a$ un élément cyclique $\neq a$. Soit $b\in E_a-a$. Soit $L$ le produit de tous les ensembles fermés, complètement connexes par arcs et contenant $a$ et $b$. Nous allons montrer que

$$E_a=L. \tag{4}$$

Soit $x\in\mathfrak{X}-L$. Soit $R$ la région-composante de $\mathfrak{X}-L$ qui contient $x$ et, conformément à I, 1 et 4, soit $y=\mathrm{Fr}(R)$. Comme $y$ sépare l'espace, tandis que $a$ ne le sépare pas, on a $y\neq a$, et comme $a\in L$ et $x\in R$, le point $y$ sépare l'espace entre $a$ et $x$. Donc $x\in\mathfrak{X}-E_a$.

On a ainsi $E_a\subset L$.

Réciproquement, soit $x\in\mathfrak{X}-E_a$. Il existe par conséquent un point $y$ qui sépare l'espace entre $a$ et $x$.



On a donc:

$$\mathfrak{X}=M+N,\quad \overline{M}=M,\quad \overline{N}=N,\quad a\in M,\quad x\in N\ \text{et}\ MN=y. \tag{5}$$

Comme $b\in E_a-a$, on a l'inégalité (3), et il vient, d'après (5), $b\in M$. En appliquant le théorème 3 du N⁰ I, il résulte des formules (5) que $M$ est complètement connexe par arcs; on a donc, d'après la définition de $L$, $L\subset M$, d'où $x\in\mathfrak{X}-L$, puisque $x\in\mathfrak{X}-M$ d'après les deux dernières formules (5).

On a ainsi $L\subset E_a$, d'où l'identité (4).

2) La condition 1⁰ entraîne 2⁰. $E$ étant un ensemble satisfaisant à la condition 1⁰ et $x$ étant un point de $E$, l'ensemble $E-x$ est connexe. Supposons, en effet, que

$$E=M+N,\quad \overline{M}=M,\quad \overline{N}=N\quad \text{et}\quad MN=x. \tag{6}$$

Il s'agit de prouver que soit $M=E$, soit $N=E$.

L'une des deux inégalités $x\neq a$ ou $x\neq b$ étant vraie, admettons que $x\neq a$. On peut admettre en outre que $a\in M$. D'après (3), le point $x$ ne sépare pas l'espace entre $a$ et $b$; par conséquent (cf. I, 1, 4 et 5) il ne sépare non plus l'ensemble $E$ entre ces points. Il en résulte que $b\in M$. L'ensemble $M$ est donc, d'après (6) et I, 3, un ensemble fermé, complètement connexe par arcs et contenant $a$ et $b$. Donc $E\subset M$, d'où $M=E$ en vertu de (6).

Ceci établi, soit $C$ un ensemble connexe tel que $E\subset C\neq E$. Il s'agit de prouver que $C$ contient un point qui le sépare.

Soient $p\in C-E$ et $R$ la composante de $\mathfrak{X}-E$ qui contient $p$. Posons, conformément au th. 4 du N⁰ I, $q=\mathrm{Fr}(R)$. Le point $q$ sépare évidemment l'ensemble $C$.

3) La condition 2⁰ implique que $E$ est un élément cyclique. Par hypothèse, aucun point ne sépare l'ensemble $E$. L'ensemble des points de $E$ qui séparent l'espace est donc dénombrable (cf. § 41, IX, 3). Soit $p$ un point de $E$ qui ne sépare pas l'espace. Nous allons démontrer que $E=E_p$.

Pour tout $x\in E$, on a par hypothèse $\mathrm{ord}_{p,x}E\geqslant 2$, donc $\mathrm{ord}_{p,x}\,\mathfrak{X}\geqslant 2$, d'où $x\in E_p$ d'après (1). On a ainsi $E\subset E_p$.

Il en résulte que $E=E_p$, puisque — comme nous avons démontré — $E_p$ jouit de la propriété 2⁰, qui implique que $E_p$ est connexe et ne contient aucun point de séparation; d'autre part, $E$ est saturé par rapport à cette propriété.

*Remarque.* Le th. 4 peut être précisé comme suit:

*$A$ et $B$ étant deux éléments cycliques et $p$ un point tel que $AB=p$, le point $p$ sépare l'espace entre $A-B$ et $B-A$.*

C'est une conséquence directe de I, 8, les ensembles $A$ et $B$ étant complètement connexes par arcs d'après 6, $1^0$ et I, 1.

7. *Tout élément cyclique est un continu localement connexe.*

C'est une conséquence directe de la condition $2^0$ et des énoncés I, 1 et 2.

8. *$E$ étant un élément cyclique, l'ensemble $A$ de ses points qui appartiennent à d'autres éléments cycliques est dénombrable.*

En effet, d'après 6, $2^0$, aucun point n'est un point de séparation de $E$. Par conséquent (cf. § 41, IX, 3), l'ensemble $B$ des points de séparation de l'espace qui appartiennent à $E$ est dénombrable. D'après 4, on a $A\subset B$.

9. *$E^1, E^2, \ldots$ étant une suite d'éléments cycliques différents, on a* $\lim\limits_{n=\infty}\delta(E^n)=0$.

Par conséquent, *la famille de tous les éléments cycliques qui ne se réduisent pas à des points individuels est dénombrable.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il est alors légitime d'admettre l'existence de deux suites de points $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ telles que

$$a_n, b_n \epsilon E^n, \quad \lim_{n=\infty} a_n=a, \quad \lim_{n=\infty} b_n=b \quad \text{et} \quad a\neq b.$$

Pour $n$ suffisamment grand, il existe par conséquent deux arcs disjoints $a_n a_{n+1}$ et $b_n b_{n+1}$ (cf. § 45, II, 4). Mais alors le produit de l'ensemble connexe

$$Z=E^{n+1}+a_n a_{n+1}+b_n b_{n+1}$$

et de $E^n$ n'est pas connexe, puisque

$$ZE^n=E^n\cdot a_n a_{n+1}+(E^n\cdot b_n b_{n+1}+E^n\cdot E^{n+1})$$

et l'ensemble $E^n\cdot E^{n+1}$ est vide ou se réduit à un seul point (d'après 4). Cette conclusion contredit le th. I, 5', l'ensemble $E^n$ étant complètement connexe par arcs (d'après 6, $1^0$ et I, 1).

10. *Tout ensemble connexe $C$ qui n'est séparé par aucun point est contenu dans un élément cyclique.*

Plus précisément, $a$ et $b$ étant deux points (différents) de $C$, le produit $E$ de tous les ensembles fermés complètement connexes par arcs et contenant ces points est l'élément cyclique demandé.



En effet, $E$ est un élément cyclique d'après 6, $1^0$, car on a, par hypothèse, $\mathrm{ord}_{a,b}\,\mathfrak{X}\geqslant 2$. D'autre part, en supposant que $p\,\epsilon\, C-E$ et en désignant par $R$ la composante de $\mathfrak{X}-E$ qui contient $p$, le point $\mathrm{Fr}(R)$ (cf. I, 4) serait un séparateur de $C$ entre $a$ et $p$ ou entre $b$ et $p$ (suivant que $a\neq\mathrm{Fr}(R)$ ou $b\neq\mathrm{Fr}(R)$).

11. *Pour qu'un continu $L$ (ne se réduisant pas à un seul point) soit complètement connexe par arcs, il faut et il suffit qu'il soit somme d'éléments cycliques.*

La condition est n é c e s s a i r e. Admettons, en effet, que le point $p\,\epsilon\, L$ n'appartient à aucun élément cyclique contenu dans $L$. Le point $p$ lui-même n'est donc pas un élément cyclique. Il en résulte que $p$ ne sépare pas l'espace. $E_p$ est par conséquent (cf. 4) le seul élément cyclique contenant $p$.

Par hypothèse $E_p-L\neq 0$. Soit $R$ une composante de $E_p-L$. L'ensemble $LE_p$ étant complètement connexe par arcs relativement à l'ensemble $E_p$ (considéré comme l'espace), la frontière de $R$ relative à $E_p$ se réduit, d'après I, 4, à un seul point, appelons-le $q$. Le point $q$ sépare donc $E_p$ entre $E_p-L$ et $LE_p-q$, ce qui implique, d'après 6, $2^0$, que $LE_p-q=0$, c'est-à-dire que $LE_p=q$, et comme $p\,\epsilon\, LE_p$, il vient $q=p$ et $LE_p=p$. Il en résulte (cf. I, 8) que le point $p$ sépare l'espace entre $E_p-L$ et $L-E_p$, donc que $L-E_p=0$, c'est-à-dire, que $L-p=0$, d'où $L=p$, contrairement à l'hypothèse.

La condition est s u f f i s a n t e. Supposons, en effet, que le continu $L$ soit somme d'éléments cycliques, que $a,b\,\epsilon\, L$ et que $ab-L\neq 0$. L'arc $ab$ contient par conséquent un sous-arc $cd$ tel que

$$L\cdot cd=(c,d) \quad \text{et} \quad L-cd\neq 0. \tag{7}$$

On voit aussitôt que $\mathrm{ord}_{c,d}\,\mathfrak{X}\geqslant 2$. Il existe donc un élément cyclique $E$ tel que $c,d\,\epsilon\, E$, d'où $cd\subset E$ et d'après (7) $E-L\neq 0$. Cette inégalité entraîne une contradiction, car elle implique d'après 8 que l'ensemble $EL$ est dénombrable et, d'après 6, $1^0$ et I, 5', que $EL$ est un continu (contenant au moins deux points: $c$ et $d$).

*Remarque.* On démontre, de façon plus générale, que les ensembles c o n n e x e s, sommes d'éléments cycliques, coïncident avec les ensembles complètement connexes par arcs[1]).

[1]) Cf. G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, p. 80.

12. *Tout continu de convergence (contenant plus d'un point) de $\mathfrak{X}$ est un continu de convergence de l'élément cyclique qui le contient.*

Soient, en effet, $K, K_1, K_2, \dots$ une suite de continus et $a$, $b$ un couple de points (différents) satisfaisant aux conditions:

(8) $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} K_n = K$, (9) $a, b \in K$,

(10) $K_i \cdot K_j = 0$ pour $i \neq j$, (11) $K \cdot K_n = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$

L'ensemble $Z = a + b + K_1 + K_2 + \dots$ est donc connexe entre $a$ et $b$ (d'après § 41, IV, 9). Il vient

(12) $$\mathrm{ord}_{a,b}\, \mathfrak{X} \geqslant 2.$$

Car, en supposant que $p$ sépare $\mathfrak{X}$ entre $a$ et $b$, l'un des ensembles $K_n$, $K_1$ par exemple, le contient. Mais alors (d'après (10)) $p$ n'appartient pas à l'ensemble $(a + b + K_2 + K_3 + \dots)$, qui est aussi connexe entre $a$ et $b$.

La formule (12) établie, soit conformément à 6, 1°, $E$ l'élément cyclique qui contient $a$ et $b$.

Le choix des points $a$ et $b$ étant arbitraire, il vient

(13) $$K \subset E.$$

Nous allons démontrer que $K$ est un continu de convergence de $E$; à savoir, que $EK_n$ est un continu et que

(14) $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} (EK_n) = K$, (15) $K \cdot (EK_n) = 0$.

Or, $EK_n$ est un continu d'après I, 5'. En outre

(16) $EK_n \neq 0$ pour $n$ suffisamment grand.

En effet, en supposant par impossible que $m_1 < m_2 < \dots$ et $EK_{m_i} = 0$, l'ensemble $V = a + b + K_{m_1} + K_{m_2} + \dots$ serait connexe entre $a$ et $b$ (d'après § 41, IV, 9), tandis que l'ensemble $EV = (a, b)$ ne le serait pas, contrairement à I, 5'.

La formule (16) établie, on déduit (14) de I, 10 (en posant $L = E$). Enfin (15) est une conséquence directe de (11).

Les lemmes qui suivent nous serviront pour établir l'important théorème 15.



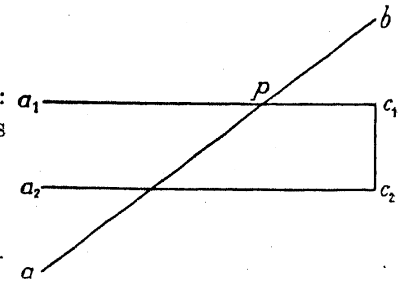
13. *Lemme. Étant donnés 4 arcs $a_1c_1$, $a_2c_2$, $ab$ et $c_1c_2$ tels que*

(17) $$a_1c_1 \cdot a_2c_2 = 0 = ab \cdot c_1c_2,$$

(18) $$a_1c_1 \cdot c_1c_2 = c_1, \quad a_2c_2 \cdot c_1c_2 = c_2,$$

*la somme $a_1c_1 + a_2c_2 + ab$ contient deux arcs $M$ et $N$ qui unissent respectivement l'ensemble $(a_1, a_2, a)$ à $b$ et l'ensemble $(a_1, a_2)$ à $(c_1, c_2)$ de façon que*

(19) $$M \cdot (N + c_1c_2) = 0.$$




Il y a deux cas à distinguer:

1) $ab \cdot (a_1c_1 + a_2c_2) = 0$. Nous posons dans ce cas

$M = ab$ et $N = a_1c_1$ (ou $a_2c_2$).

2) $ab \cdot (a_1c_1 + a_2c_2) \neq 0$. Désignons par $p$ le premier point de l'arc (orienté) $ba$ appartenant à la somme $a_1c_1 + a_2c_2$. On peut admettre par raison de symétrie que $p \in a_1c_1$. Il vient

$$a_1p \cdot pb = p \neq c_1 \quad \text{et} \quad pb \cdot a_2c_2 = 0,$$

et il suffit de poser:

$$M = a_1p + pb \quad \text{et} \quad N = a_2c_2.$$

14. *Lemme. Étant donnés, dans un espace $\mathfrak{X}$ localement et intégralement connexe par arcs, deux ensembles $A$ et $B$ fermés, disjoints et tels qu'aucun point $x$ ne sépare les ensembles $A - x$ et $B - x$, il existe deux arcs disjoints unissant $A$ à $B$* [1]).

Soit, en effet, $E$ l'ensemble des points $x$ tels qu'il existe deux arcs disjoints unissant $A$ à $x$ et $A$ à $B$ respectivement. Il s'agit de prouver que $EB \neq 0$. Nous allons montrer que $E = \mathfrak{X}$.

L'espace étant connexe, cela revient à montrer que,

(20) $E \neq 0$, (21) *$E$ est ouvert*, (22) *$E$ est fermé.*

Soit $ab$ un arc irréductible entre $A$ et $B$. Soit $a_1 \in (A - a)$. L'espace étant localement connexe par arcs, il existe un entourage $R$ de $a_1$, disjoint de $ab$ et connexe par arcs. Par conséquent, $R \subset E$, d'où l'inégalité (20).

[1]) Pour la démonstration de ce lemme, exposée ici, cf. G. T. Whyburn, *On the cyclic connectivity theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (1931), p. 429.

Soit $p \in E$. Il existe donc deux arcs disjoints $M$ et $N$ unissant $A$ respectivement à $p$ et à $B$. On constate aussitôt que, $R$ désignant un entourage de $p$, connexe par arcs et disjoint de $N$, on a $R \subset E$. L'ensemble $E$ est donc ouvert.

Afin de prouver que $E = \bar{E}$, posons $q \in \bar{E}$. Il s'agit de montrer que $q \in E$. Par hypothèse, $q$ ne sépare pas l'espace entre $A-q$ et $B-q$. L'ensemble $\mathcal{X}-q$ contient donc un arc $ab$ irréductible entre $A$ et $B$. Soit $R$ un entourage de $q$, connexe par arcs et disjoint de $ab$. Il existe par conséquent: un $r \in ER$, donc un arc $qr \subset R$, d'où

$$qr \cdot ab = 0, \tag{23}$$

ainsi que deux arcs $P$ et $Q$ unissant $A$ respectivement à $r$ et à $B$, et tels que

$$PQ = 0. \tag{24}$$

Il est légitime d'admettre que $Q \cdot qr \neq 0$, car autrement, en extrayant de $P + qr$ un arc $S$ unissant $A$ à $q$, on aurait $SQ = 0$ et en conséquence $q \in E$.

Ceci établi, soient $a_1c_1$ et $a_2c_2$ deux arcs tels que

(25) $a_1c_1 \subset Q$, (26) $a_1c_1 \cdot qr = c_1$,

(27) $a_2c_2 \subset P$, (28) $a_2c_2 \cdot qr = c_2$.

Les hypothèses du lemme sont vérifiées: (17) résulte de (25), (27), (24) et (23), et (18) résulte de (26) et (28).

L'ensemble $a_1c_1 + a_2c_2 + ab$ contient par conséquent deux arcs $M$ et $N$ unissant $A$ respectivement à $B$ et à $(c_1, c_2)$ de façon que l'égalité (19) soit satisfaite, donc (cf. (26), (28) et (23)) que

$$M \cdot (N + c_1c_2 + qc_1) = 0. \tag{29}$$

En extrayant de $N + c_1c_2 + qc_1$ un arc unissant $A$ à $q$, on conclut de (29) que $q \in E$.

15. *Tout point $p$ d'ordre $\geqslant 2$ d'un continu localement connexe $\mathcal{X}$ est situé sur un arc $apb$ (où $a \neq p \neq b$)* [1].

Nous allons d'abord établir ce théorème dans l'hypothèse supplémentaire qu'aucun point ne sépare $\mathcal{X}$, donc que $\mathcal{X}$ est un élément cyclique de lui-même.

[1]) Cf. W. L. Ayres, Amer. Journ. Math. **51** (1929), p. 577. Pour une démonstration plus directe, voir du même auteur, *A new proof of the cyclic connectivity theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), p. 627.



Il est légitime d'admettre que $p$ n'est un point de séparation d'aucun continu localement connexe $C$. Car tout arc unissant dans $C$ deux points $a$ et $b$ appartenant à deux composantes différentes de $C-p$ passerait nécessairement par $p$ (qui constitue leur frontière commune).

Sous ces hypothèses, nous allons définir par induction deux suites de points $a_0, a_1, \ldots$ et $b_0, b_1, \ldots$, ainsi qu'une suite de continus localement connexes $E_0, E_1, \ldots$ qui ne sont séparés par aucun point et qui satisfont aux conditions suivantes:

(30) $a_n \neq b_n$, (31) $a_n, b_n \in E_n$,

(32) $p \in E_n \subset E_{n-1}$, (33) $\delta(E_n) < 1/n$.

Soient: $E_0 = \mathcal{X}$ et $a_0$ et $b_0$ deux points tels que

$$a_0 \neq b_0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq p \neq b_0.$$

$a_{n-1}$, $b_{n-1}$ et $E_{n-1}$ supposés assujettis aux conditions

(34) $a_{n-1} \neq b_{n-1}$, $a_{n-1}, b_{n-1} \in E_{n-1}$, (35) $p \in E_{n-1}$,

soit $C_n$ un continu localement connexe tel que

(36) $C_n \subset E_{n-1}$, (37) $a_{n-1}, b_{n-1} \in E_{n-1} - C_n$, (38) $\delta(C_n) < 1/n$,

et que $p$ est un point de $C_n$ intérieur relativement à $E_{n-1}$, donc (cf. § 46, II, 4) que

$$\operatorname{ord}_p C_n = \operatorname{ord}_p E_{n-1} \geqslant 2, \tag{39}$$

puisque $E_{n-1}$ ne contient aucun point de séparation.

Le point $p$ appartient, d'après (39), th. 6, 1⁰ et § 46, V, 10, à un élément cyclique — appelons-le $E_n$ — de $C_n$ (tel que $E_n \neq p$). D'après (37), $a_{n-1}, b_{n-1} \in E_{n-1} - E_n$. L'ensemble $E_{n-1}$ ne contenant aucun point de séparation, il existe donc d'après 14 deux arcs, $a_{n-1}a_n$ et $b_{n-1}b_n$, tels que:

$$a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n \subset E_{n-1}, \tag{40}$$

(41) $a_{n-1}a_n \cdot b_{n-1}b_n = 0$, $a_{n-1}a_n \cdot E_n = a_n$ et $b_{n-1}b_n \cdot E_n = b_n$.

En tenant compte de (41) et (38), on constate aussitôt que les conditions (30)—(33) sont satisfaites.

En posant

$$A = a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots \quad \text{et} \quad B = b_0b_1 + b_1b_2 + \ldots,$$

la somme $A + p + B$ est un arc $a_0pb_0$.

En effet, $A+p$ (ainsi que $B+p$) est un arc, car: $p \in \mathcal{X}-A$ d'après (32) et (41), et $a_{m-1}a_m \subset (E_{m-1}-E_m)+a_m$ d'après (40) et (41), d'où (en vertu de (32)):

$$(a_0 a_1 + \ldots + a_{n-1}a_n)\cdot a_n a_{n+1} \subset (E_0-E_n+a_n)(E_n-E_{n+1}+a_{n+1}) = a_n,$$

et d'après (32), (33) et (40)

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} a_{n-1}a_n = p.$$

Enfin, les arcs $A+p$ et $B+p$ n'ont que le point $p$ en commun puisque $AB=0$ d'après (41).

Le théorème se trouve ainsi établi pour le cas où $\mathcal{X}$ se réduit à un élément cyclique.

Le cas général se ramène à celui-là. En effet, on peut admettre comme auparavant que $p$ n'est pas un point de séparation. Mais alors la condition $\text{ord}_p\, \mathcal{X} \geqslant 2$ implique d'après 6, 1° et § 46, V, 10, que $p$ appartient à un élément cyclique ne se réduisant pas à un seul point.

16. *Tout couple de points $p \neq q$ d'un continu localement connexe $\mathcal{X}$ qui ne contient aucun point de séparation (donc tout couple de points d'un élément cyclique) est situé sur une courbe simple fermée.*

Remarquons d'abord que $p$ appartient à une courbe simple fermée. Il existe, en effet, d'après 15 un arc $apb$; d'autre part, l'ensemble $\mathcal{X}-p$, en tant que connexe (par hypothèse), contient un arc $cd$ irréductible entre $ap$ et $pb$. En lui ajoutant les arcs $cp$ et $pd$ (extraits de $apb$), on obtient une courbe simple fermée contenant $p$.

Ceci étant établi, soient $P$ et $Q$ deux courbes simples fermées contenant $p$ et $q$ respectivement. Il y a trois cas à distinguer:

($\alpha$) $PQ=0$. Il existe dans ce cas, d'après 14, deux arcs disjoints $A$ et $B$, irréductibles entre $P$ et $Q$. On constate aussitôt que la somme $P+Q+A+B$ contient une courbe simple fermée qui unit $p$ à $q$.

($\beta$) Le produit $PQ$ se réduit à un seul point $r$. En désignant par $R$ un arc contenu dans $\mathcal{X}-r$ et irréductible entre $P$ et $Q$, on voit facilement que la somme $P+Q+R$ contient une courbe simple fermée unissant $p$ à $q$.

($\gamma$) Enfin, si le produit $PQ$ contient deux points (au moins), les points $p$ et $q$ appartiennent à une courbe simple fermée contenue dans $P+Q$.



17. *Pour qu'un ensemble contenant plus d'un point soit un élément cyclique, il faut et il suffit qu'il soit saturé par rapport à l'existence, pour tout couple de ses points, d'une courbe simple fermée qui passe par ces points.*

La condition est nécessaire. En effet, $E$ étant un élément cyclique, tout couple de ses points appartient d'après 16 à une courbe simple fermée contenue dans $E$. D'après 6, 2°, $E$ est saturé par rapport à cette propriété, car tout ensemble qui la possède ne contient aucun point de séparation.

La condition est suffisante. En effet, tout ensemble $E$ qui lui satisfait ne contient aucun point qui le sépare. Il est donc (cf. 10) contenu dans un élément cyclique $E^*$. Tout couple de points de $E^*$ étant situé (comme nous venons de démontrer) sur une courbe simple fermée contenue dans $E^*$, et $E$ étant saturé par rapport à cette propriété, il vient $E^* \subset E$, d'où $E=E^*$.

**III. Propriétés extensibles**[1]). L'utilité de la décomposition d'un continu localement connexe en éléments cycliques provient en général de la structure dendritique du continu relativement à ses éléments cycliques[2]). Il y a un grand nombre de propriétés de l'espace tout entier qui ne dépendent que des propriétés analogues d'éléments cycliques. Telles sont les propriétés dites *extensibles*. Nous appelons ainsi toute propriété (d'ensemble) qui appartient à l'espace tout entier, dès qu'elle appartient à chaque élément cyclique.

Nous dirons aussi qu'une propriété est *réductible*, si elle appartient à tout élément cyclique, dès qu'elle appartient à l'espace.

1. *Soit $\boldsymbol{F}$ une famille de sous-ensembles fermés du continu localement connexe $\mathcal{X}$ telle que*

$$(x) \in \boldsymbol{F} \quad \text{quel que soit} \quad x \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

*La propriété* **P** *suivante de $E$ est extensible: à tout couple de points (différents) $x, y \in E$ correspond un ensemble $F \in \boldsymbol{F}$ qui les sépare.*

---

[1]) Voir le mémoire cité de G. T. Whyburn et de moi-même, Fund. Math. **15** (1930), p. 322. On y trouvera de nombreux exemples des propriétés extensibles.

[2]) Cf. aussi A. D. Wallace, *The acyclic elements of a Peano space.* Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941); l'auteur appelle ainsi les composantes de l'ensemble des points de séparation et des points d'arrêt; la théorie des éléments acycliques est duale par rapport à celle des éléments cycliques.

Admettons que tout élément cyclique jouit de la propriété **P**. Soient $a$ et $b$ deux points différents. Il s'agit de prouver qu'il existe un ensemble $F\in\boldsymbol{F}$ qui les sépare.

Si $a$ et $b$ appartiennent à un élément cyclique $E$, il existe par hypothèse un ensemble $F\in\boldsymbol{F}$ qui sépare $E$ entre $a$ et $b$. Cet ensemble sépare l'espace tout entier entre ces points (d'après II, 6, 1⁰ et I, 1 et 5).

D'autre part, s'il n'existe aucun élément cyclique qui contient $a$ et $b$, on a d'après II, 6, 1⁰, $\mathrm{ord}_{a,b}\mathfrak{X}\leqslant 1$, et il existe par conséquent un point $x$ qui sépare $a$ et $b$. Il ne reste qu'à poser $F=(x)$ (conformément à (1)).

En substituant à $\boldsymbol{F}$ successivement les familles:

1) des ensembles finis,

2) des ensembles fermés dénombrables,

3) des ensembles fermés de dimension $\leqslant n$ $(n=0,1,2,\dots)$, — l'énoncé 1, rapproché du théorème 9 du § 46, IV et du corollaire 2 du § 22, II, implique le théorème qui suit.

2. *Les propriétés suivantes sont extensibles*:

1⁰ *régularité de* $E$,

2⁰ *rationnalité de* $E$,

3⁰ *relation* $\dim E\leqslant n$ *(pour* $n=1,2,\dots$*)*.

3. *La connexité locale héréditaire est une propriété extensible.*

Admettons, en effet, que le continu localement connexe $\mathfrak{X}$ n'est pas héréditairement localement connexe. Il contient par conséquent (d'après § 45, IV, 2) un continu de convergence $K$ (contenant plus d'un point). D'après II, 12, $K$ est un continu de convergence d'un élément cyclique $E$. Il s'ensuit (d'après § 45, IV, 2) que $E$ n'est pas héréditairement localement connexe.

4. *La connexité par arcs des sous-ensembles connexes de* $E$ *est une propriété extensible.*

Soient, en effet, $C$ un ensemble connexe, et $a$ et $b$ deux points (différents) de $C$. Soient $A$ un arc $ab$ et $S$ l'ensemble de tous les points qui séparent $\mathfrak{X}$ entre $a$ et $b$. Posons $F=S+a+b$. Évidemment $F\subset CA$.

Comme $F=\overline{F}$ (cf. § 44, IV, 3), l'ensemble $A-F$ est formé d'une suite d'intervalles contigus (ouverts):

$$a_1b_1-a_1-b_1,\quad a_2b_2-a_2-b_2,\dots$$

Il vient

(2) $$\mathrm{ord}_{a_i,b_i}\mathfrak{X}\geqslant 2.$$



Car, dans le cas contraire, il existerait un point $p$ qui séparerait l'espace entre $a_i$ et $b_i$, donc, entre $a$ et $b$, et on aurait par conséquent $p\in F\cdot(a_ib_i-a_i-b_i)$, ce qui est impossible.

L'inégalité (2) établie, soit $E^i$ l'élément cyclique qui contient $a_i$ et $b_i$. L'ensemble $CE^i$ étant connexe d'après I, 5', donc connexe par arcs (par hypothèse), il existe un arc $(a_ib_i)^*\subset CE^i$. Posons

(3) $$B=F+\sum_i(a_ib_i)^*.$$

Comme $B\subset C$, tout revient à démontrer que $B$ est un arc.

Envisageons la transformation $f$ suivante de $A$ en $B$:

(i) $f(x)=x$ pour $x\in F$,

(ii) la fonction partielle $f|a_ib_i$ est une transformation homéomorphe de l'arc $a_ib_i$ en $(a_ib_i)^*$.

Il s'agit de montrer que $f$ est biunivoque et continue. Nous allons prouver, dans ce but, que

(4) $$AE^i=(a_i,b_i).$$

La formule $a_i,b_i\in E^i$ implique d'après I, 5' que

(5) $$a_ib_i\subset E^i.$$

D'autre part,

(6) $$(aa_i-a_i)\cdot E^i=0=(bb_i-b_i)\cdot E^i.$$

En effet, en tant qu'élément de $F$, le point $a_i$ sépare $\mathfrak{X}$ entre $aa_i-a_i$ et $b_i$. Par conséquent, la condition $x\in(aa_i-a_i)$ implique $\mathrm{ord}_{x,b_i}\mathfrak{X}=1$, d'où $x\in\mathfrak{X}-E^i$ d'après II, 6, 2⁰.

La première égalité (6) se trouve ainsi établie, et la deuxième en résulte par raison de symétrie.

Les formules (5) et (6) donnent aussitôt (4). Il en résulte que $E^i\neq E^j$ pour $i\neq j$.

Conformément à II, 6 (remarque), le produit $E^i\cdot E^j$ est vide ou se réduit à un seul point $p$ qui sépare l'espace entre tout couple $x\in E^i-p$ et $y\in E^j-p$. En tenant compte de (5), $p$ sépare l'espace entre $a$ et $b$, donc $p\in F$.

On a ainsi

(7) $$E^i\cdot E^j\subset F\quad\text{et}\quad FE^i\subset(a_i,b_i),$$

la dernière inclusion étant une conséquence de (4).

Les inclusions (7) impliquent que la fonction $f$ est biunivoque. On a, en effet,

$$f(A)=f(F)+\sum_i f(a_ib_i-a_i-b_i),$$
$$f(F)\cdot f(a_ib_i-a_i-b_i)=F\cdot(a_ib_i)^*-a_i-b_i\subset FE^i-(a_i,b_i)=0,$$
$$f(a_ib_i-a_i-b_i)\cdot f(a_jb_j-a_j-b_j)=[(a_ib_i)^*-a_i-b_i]\,[(a_jb_j)^*-a_j-b_j]\subset$$
$$\subset E^i\cdot E^j\cdot F-(a_i,b_i,a_j,b_j)=0.$$

Enfin la fonction $f$ est continue. C'est évident si la famille des arcs $a_ib_i$ est finie. Si elle est infinie, on a d'après II, 9

$$\lim_{i=\infty}\delta(E^i)=0,\quad \text{donc}\quad \lim_{i=\infty}\delta(a_ib_i)^*=0,$$

d'où la continuité de la fonction $f$.

*Remarque.* Le th. 4, rapproché du § 45, IV, 10, implique que les deux propriétés suivantes sont extensibles:

(i) *tout sous-ensemble connexe de $E$ est un semi-continu,*

(ii) *tout sous-ensemble de $E$, connexe entre deux points, est connexe par arcs.*

5. *L'unicohérence est une propriété extensible et réductible.*

Admettons que le continu localement connexe $\mathfrak{X}$ n'est pas unicohérent. Soient (conformément à § 45, III, 6), $K$ et $L$ deux continus localement connexes, et $A$ et $B$ deux ensembles fermés satisfaisant aux conditions:

$$\mathfrak{X}=K+L,\quad KL=A+B,\quad AB=0,\quad A\neq 0\neq B. \tag{8}$$

Soit $ab$ un arc tel que

$$ab\subset K,\quad ab\cdot A=a\quad \text{et}\quad ab\cdot B=b.$$

Il vient

$$\operatorname{ord}_{a,b}\mathfrak{X}\geqslant 2. \tag{9}$$

Car, en supposant que $p$ sépare $\mathfrak{X}$ entre $a$ et $b$, on aurait

$$p\in(ab\cdot L),\quad \text{donc}\quad p\in(ab\cdot KL)=ab\cdot A+ab\cdot B=(a,b),$$

c'est-à-dire que $p=a$ ou $p=b$.

La formule (9) établie, soit $E$ un élément cyclique contenant les points $a$ et $b$. On a donc d'après (8):

$$E=EK+EL,\quad (EK)(EL)=EA+EB,$$
$$(EA)(EB)=0,\quad EA\neq 0\neq EB. \tag{10}$$

Les ensembles $EK$ et $EL$ étant des continus (d'après I, 5'), la formule (10) montre que l'élément cyclique $E$ n'est pas unicohérent.



Il est ainsi établi que l'unicohérence est une propriété extensible. Elle est aussi réductible, d'après I, 9.

*Remarques.* Un continu $\mathfrak{X}$ est dit *tout au plus $n$-cohérent* lorsque, pour toute décomposition en deux continus: $\mathfrak{X}=K+L$, le produit $KL$ contient $n$ composantes au plus [1]). Posons $r(\mathfrak{X})=n-1$ si $\mathfrak{X}$ est $n$-cohérent. On a la formule suivante [2]):

$$r(\mathfrak{X})=\sum_i r(E^i),$$

$E^1, E^2, \dots$ désignant la suite des éléments cycliques qui ne se réduisent pas à des points individuels.

Citons encore sans démonstration la formule suivante qui permet de calculer l'ordre de l'espace au point $p$ (cet ordre étant supposé fini) [3]):

$$\operatorname{ord}_p\mathfrak{X}=m(p)-n(p)+\sum_{i=1}^{n(p)}\operatorname{ord}_p E_i,$$

où $m(p)$ désigne le nombre des composantes de l'ensemble $\mathfrak{X}-p$ et où $E^1, E^2, \dots, E^{n(p)}$ est le système des éléments cycliques qui contiennent $p$ et ne se réduisent pas à $p$.

**IV. Courbes** $\theta$. On appelle ainsi tout continu-somme de trois arcs ayant les mêmes extrémités et n'ayant deux à deux aucun autre point en commun (telle est la lettre $\theta$).

Les continus localement connexes dépourvus de courbe $\theta$ présentent une généralisation importante des dendrites (ainsi, par exemple, tout continu de ce genre est homéomorphe à la frontière d'une région située sur le plan [4])).

1. *Tout continu localement connexe $\mathfrak{X}$ dépourvu de courbe $\theta$ et qui ne contient aucun point de séparation est une courbe simple fermée (à moins qu'il se réduise à un seul point).*

$\mathfrak{X}$ n'étant pas une dendrite, soit $C$ une courbe simple fermée contenue dans $\mathfrak{X}$. Supposons que $\mathfrak{X}\neq C$. Soit $R$ une région-composante de $\mathfrak{X}-C$. Par hypothèse, $\operatorname{Fr}(R)$ contient aux moins

[1]) S. Eilenberg, *Sur les espaces multicohérents I*, Fund. Math. **37** (1936), p. 153.

[2]) Voir, par exemple, G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, p. 85.

[3]) Voir le mémoire cité de G. T. Whyburn et de moi-même, Fund. Math. **15** (1930), p. 326.

[4]) Voir R. L. Ayres, Fund. Math. **14** (1929), p. 92.

deux points. Il existe par conséquent (cf. § 45, III, 7) deux points (différents) $p,q\in\mathrm{Fr}(R)$ accessibles de la région $R$, donc — un arc $pq\subset R+p+q$. Comme $\mathrm{Fr}(R)\subset C$ (cf. § 44, III, 3), il vient $p,q\in C$. $C+pq$ est donc une courbe $\theta$.

2. *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un continu localement connexe $\mathcal{X}$ soit dépourvu de courbe $\theta$:*

1° *tout élément cyclique de $\mathcal{X}$ (qui ne se réduit pas à un seul point) est une courbe simple fermée;*

2° *pour tout couple de points $p\neq q$, on a* $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X}\leqslant 2$.

La condition 1° est nécessaire d'après 1.

La condition 1° implique 2°. En effet, si les points $p$ et $q$ n'appartiennent pas à un élément cyclique, on a $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X}=1$ (d'après II, 6, 1°). Si $E$ est un élément cyclique — donc une courbe simple fermée — qui contient $p$ et $q$, on a $\mathrm{ord}_{p,q}E=2$, d'où $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X}=2$, d'après I, 6.

Enfin, la condition 2° est suffisante. En effet, $p$ et $q$ étant les points de ramification d'une courbe $\theta$, on a $\mathrm{ord}_{p,q}\theta=3$. Par conséquent, si $\theta\subset\mathcal{X}$, on a $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X}\geqslant 3$.

3. *Tout continu localement connexe $\mathcal{X}$ sans courbes $\theta$ est régulier et tout sous-ensemble connexe de $\mathcal{X}$ est connexe par arcs.*

C'est une conséquence directe de 2, 1°, III, 2, 1° et III, 4.

4. *$K$ étant un sous-continu non-localement connexe d'un continu localement connexe $\mathcal{X}$, il existe une courbe $\theta=(ab)_0+(ab)_1+(ab)_2$ telle que pour $i=0,1,2$, l'arc $(ab)_i$ se laisse unir à $K$ par un continu $Q$ disjoint de $(ab)_{i+1}+(ab)_{i+2}$ (les indices étant réduits* mod 3*)* [1].

D'après le th. 1 du § 44, VI, $K$ contient un continu de convergence (qui ne se réduit pas à un seul point). Il existe par conséquent dans $K$ une suite de continus disjoints $K_0,K_1,\dots$ et deux suites convergentes de points telles que

$$\lim_{n=\infty}u_n\neq\lim_{n=\infty}v_n\quad\text{et}\quad u_n,v_n\in K_n.$$

L'espace étant localement connexe par arcs, on peut admettre que $A$ et $B$ sont deux continus localement connexes tels que

$$u_0,u_1,u_2\in A,\quad v_0,v_1,v_2\in B\quad\text{et}\quad AB=0. \tag{1}$$

[1] Voir ma note de Fund. Math. **15** (1930), p. 180. Ce théorème sera appliqué au § 54, II, 4.



D'après le th. 3 du § 45, II, $\mathcal{X}$ est somme d'une famille finie $\boldsymbol{F}$ de continus localement connexes si petits qu'en désignant respectivement par $K_i^*,A^*,B^*$ la somme des éléments de $\boldsymbol{F}$ qui ont des points communs avec $K_i,A,B$, on a

$$A^*\cdot B^*=0=K_0^*\cdot K_1^*=K_1^*\cdot K_2^*=K_2^*\cdot K_0^*. \tag{2}$$

Soit $p_iq_i$ un arc tel que

$$p_iq_i\cdot A=p_i,\quad p_iq_i\cdot B=q_i\quad\text{et}\quad p_iq_i\subset K_i^*\quad(i=0,1,2). \tag{3}$$

Soient $p_0p_1$ et $q_0q_1$ deux arcs contenus dans $A$ et $B$ respectivement. La courbe

$$C=p_0p_1+p_1q_1+q_1q_0+q_0p_0$$

est évidemment une courbe simple fermée. En unissant les arcs $p_0p_1$ et $q_0q_1$ dans le continu $A+K_2^*+B$ par un arc, appelons-le $(ab)_2$, dont seules les extrémités appartiennent à $p_0p_1$ et à $q_0q_1$ respectivement, la courbe $C+(ab)_2$ est une courbe $\theta$.

On a, en effet, d'après (2) et (3):

$$p_0q_0\cdot(ab)_2\subset(p_0,q_0)\quad\text{et}\quad p_1q_1\cdot(ab)_2\subset(p_1,q_1).$$

En posant $C=(ab)_0+(ab)_1$, il vient:

$$(ab)_i\subset A+K_i^*+B,\quad a\in A,\quad b\in B\quad(i=0,1,2). \tag{4}$$

Les formules $A^*\cdot(ab)_i\neq 0\neq B^*\cdot(ab)_i$ et $A^*\cdot B^*=0$ impliquent que $(ab)_i\not\subset A^*+B^*$. Il existe donc d'après (4) un point $c_i\in K_i^*-(A^*+B^*)$. D'après la définition de $K_i^*$, le point $c_i$ appartient à un continu $Q_i\in\boldsymbol{F}$ tel que

$$Q_i\cdot K_i\neq 0\quad\text{et}\quad Q_i\subset K_i^*. \tag{5}$$

Comme $c_i\in Q_i\not\subset(A^*+B^*)$, il vient d'après la définition de $A^*$ et de $B^*$,

$$Q_i\cdot(A+B)=0. \tag{6}$$

D'autre part, l'inclusion (5), rapprochée des égalités (2), entraîne

$$Q_i\cdot K_{i+1}^*=0=Q_i\cdot K_{i+2}^*. \tag{7}$$

Les formules (4), (6) et (7) impliquent que

$$Q_i\cdot(ab)_{i+1}=0=Q_i\cdot(ab)_{i+2}.$$

On en conclut, en tenant compte de l'inégalité (5), que $Q_i$ est le continu demandé.