Passons au cas où $r<n$. L'ensemble Ψ étant un G_δ d'après IV, 5, il s'agit de prouver qu'il est dense.

Soit $f \epsilon (\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$ et $\varepsilon>0$. Soit f_* la fonction-élément de $(\mathcal{J}^n)^{\mathfrak{X}}$ définie par les conditions:

$$f_*^i(x)=\begin{cases} f^i(x) & \text{pour} \quad i\leqslant r \\ 0 & \text{pour} \quad r<i\leqslant n. \end{cases}$$

Comme nous venons de prouver, il existe une fonction $g_* \epsilon (\mathcal{J}^n)^{\mathfrak{X}}$ à tranches 0-dimensionnelles et telle que $|g_*-f_*|<\varepsilon$.

Posons $g(x)=[g_*^1(x),\dots,g_*^r(x)]$. Il vient

$$g \epsilon (\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}} \quad \text{et} \quad |g-f|<\varepsilon.$$

Enfin, $g \epsilon \Psi$, car la condition (1) est une conséquence directe du th. VI, 3, en y posant:

$$\mathcal{Y}_1=\mathcal{J}^r, \quad \mathcal{Y}_2=\mathcal{J}^{n-r}, \quad f_1=g, \quad f_2=(g_*^{r+1},\dots,g_*^n), \quad \text{donc} \quad f=g_*.$$

CINQUIÈME CHAPITRE.

Espaces connexes.

§ 41. Notion de connexité.

I. Définition. Généralités. L'espace 1 est dit *connexe* lorsqu'il ne contient aucun ensemble X tel que

(1) $$0\neq X\neq 1 \quad \text{et} \quad \overline{X}\cdot\overline{1-X}=0\ [1];$$

autrement dit: si la *frontière* d'aucun ensemble satisfaisant à la condition $0\neq X\neq 1$ n'est vide.

Pour que l'espace soit connexe, il faut et il suffit qu'il ne se laisse pas décomposer en deux ensembles fermés, disjoints et non vides.

Car si l'espace se laisse décomposer de la sorte en X et Y, X satisfait à (1); inversement, si X satisfait à (1), la décomposition $1=\overline{X}+\overline{1-X}$ est une décomposition en deux ensembles fermés, disjoints et non vides.

En relativisant la définition de connexité, on en conclut que, pour qu'un *ensemble* C (situé dans l'espace donné) soit connexe, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout sous-ensemble X de C tel que $0\neq X\neq C$, l'inégalité $C\cdot\overline{X}\cdot\overline{C-X}\neq 0$; autrement dit, que C ne se laisse pas décomposer en deux ensembles X et Y fermés dans C, disjoints et non vides; ou encore, en deux ensembles X et Y *séparés* (cf. § 16, V) et non vides, c.-à-d. satisfaisant aux conditions:

(2) $$C=X+Y, \quad \overline{X}Y+X\overline{Y}=0, \quad X\neq 0\neq Y.$$

Un ensemble connexe et ouvert est dit une *région*.

[1] La définition de connexité adoptée ici remonte à C. Jordan, *Cours d'analyse I*, p. 25, Paris 1893. Cf. N. J. Lennes, Amer. Journ of Math. **33** (1911), p. 303. Elle a pour but, d'exprimer de façon topologique la notion intuitive de la continuité d'un ensemble de points.

1. *Si C est connexe et $CA \neq 0 \neq C-A$, on a $C \cdot \mathrm{Fr}(A) \neq 0$.*
Car $0 \neq C \cdot \overline{CA} \cdot \overline{C-A} \subset C \cdot \bar{A} \cdot \overline{1-A} = C \cdot \mathrm{Fr}(A)$.

2. *Si C n'est pas connexe, il existe un G ouvert tel que*

$$CG \neq 0 \neq C-\bar{G} \quad \text{et} \quad C \cdot \mathrm{Fr}(G)=0.$$

Car X et Y satisfaisant à (2), soit

$$G=\underset{x}{E}[\varrho(x,X)<\varrho(x,Y)].$$

Il vient

$$X \subset G \quad \text{et} \quad \bar{G} \cdot Y=0, \quad \text{d'où} \quad (X+Y)\cdot(\bar{G}-G)=0.$$

3. *La connexité est un invariant des transformations continues.*

En effet, si $f(C)=X+Y$ où X et Y sont deux ensembles fermés, disjoints et non vides, il vient

$$C=f^{-1}f(C)=f^{-1}(X)+f^{-1}(Y)$$

où les ensembles $f^{-1}(X)$ et $f^{-1}(Y)$ sont aussi fermés, disjoints et non vides.

4. *C étant un espace métrique, séparable et connexe (contenant plus d'un point), C a la puissance du continu.*

Car p et q étant deux points distincts, les frontières des sphères $S_\varrho(p)$, de centre p et de rayon positif $\varrho<|p-q|$, sont non vides et disjointes pour ϱ variable.

Le th. 4 est aussi une conséquence de l'énoncé suivant:

5. *Dans les mêmes hypothèses sur C, on a $\dim_p C \neq 0$.*

En supposant que $\dim_p C=0$, il existerait un entourage fermé-ouvert de p différent de C.

Exemples et remarques. L'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels est connexe. C'est une conséquence facile de l'axiome de Dedekind.

Un ensemble composé d'un *seul point* et l'ensemble *vide* sont des ensembles connexes.

Il en est de même de l'intervalle $\mathcal{J}=01$ et, par conséquent, de l'ensemble $\underset{xy}{E}[y=f(x)]$, où f est une fonction continue à valeurs réelles définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ (qui lui est homéomorphe).

De façon plus générale, on a le théorème suivant:

6. *Etant donnée une fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{J}=01$, de I-e classe de Baire et telle que, pour tout intervalle ouvert xx' on a $f(x) \in \overline{f(xx')}$ et $f(x') \in \overline{f(xx')}$, — l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathcal{J})$ est connexe.*

Supposons, par contre, que F soit un sous-ensemble fermé et ouvert de $\mathcal{Y}$ et que $0 \neq F \neq \mathcal{Y}$. Posons $A=f^{-1}(F)$. La connexité de $\mathcal{J}$ implique que $\mathrm{Fr}(A)=\bar{A}\cdot\overline{\mathcal{J}-A} \neq 0$, donc — la fonction f étant de I-e classe — que la fonction partielle $f|\mathrm{Fr}(A)$ admet un point de continuité a (§ 30, VII). Les hypothèses sur F et $\mathcal{Y}-F$, donc sur A et $\mathcal{J}-A$, étant identiques, on peut poser $a \in A$, d'où $a \in A \cdot \overline{\mathcal{J}-A}$.

La fonction $f|\mathrm{Fr}(A)$ étant continue au point a et F étant un entourage de $f(a)$, l'ensemble $A=f^{-1}(F)$ contient un entourage de a relatif à $\mathrm{Fr}(A)$; il existe donc un $\varepsilon>0$ tel que les conditions $x \in \mathrm{Fr}(A)$ et $|x-a|<\varepsilon$ entraînent $x \in A$. Soit, conformément à la formule $a \in \overline{\mathcal{J}-A}$, b un point de $\mathcal{J}-A$ tel que $|a-b|<\varepsilon$. Donc b non-$\in \mathrm{Fr}(A)$ et par conséquent $b \in \mathcal{J}-\bar{A}$. Soit, cd l'intervalle (ouvert) contigu à $\bar{A}$ et contenant b. L'une des deux extrémités, soit c, est située entre a et b; donc $|c-a|<\varepsilon$ et comme $c \in \mathrm{Fr}(A)$, il vient $c \in A$, d'où $f(c) \in F$. Cela contredit la formule

$$f(c) \in \overline{f(cd)} \subset \overline{f(\mathcal{J}-A)}=\overline{ff^{-1}(\mathcal{Y}-F)}=\mathcal{Y}-F.$$

Le th. 6 entraîne le corollaire suivant:

7. *Soit g une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{J}$. Si la fonction g est de I-e classe et satisfait à la condition de Darboux (c.-à-d. qu'elle passe d'une valeur à une autre par toutes les valeurs intermédiaires), l'ensemble $C=\underset{xy}{E}[y=g(x)]$ est connexe* [1].

En effet, la condition de Darboux implique qu'à chaque x correspondent deux suites $\{x'_n\}$ et $\{x''_n\}$ convergentes vers x, l'une croissante et l'autre décroissante, et telles que

$$\lim_{n=\infty} g(x'_n)=g(x)=\lim_{n=\infty} g(x''_n) \text{ [2]}.$$

La fonction „complexe" $f(x)=[x,g(x)]$ satisfait par conséquent aux hypothèses du th. 6. L'ensemble $C=f(\mathcal{J})$ est donc connexe.

---

[1]) Voir la note de M. Sierpiński et de moi-même *Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes ponctiformes*, Fund. Math. **3** (1922), p. 304. Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 256.

[2]) Dans le domaine des fonctions de I-e classe, l'implication inverse est aussi vraie. Voir W. H. Young, Rend. di Palermo **24** (1907), p. 187.

L'énoncé 7 implique directement le suivant:

8. *Si la dérivée* $\dfrac{dg(x)}{dx}$ *est finie pour tout* x, *l'ensemble*

$$\underset{xy}{E}\left[y=\frac{dg(x)}{dx}\right]$$

est connexe [1]).

En outre, comme ensemble G_δ (cf. § 27, VII, 1) *cet ensemble est un espace topologiquement complet* (§ 29, VI).

Les th. 7 et 8 permettent de définir des ensembles connexes jouissant des différentes propriétés remarquables (cf. VI, 3°) [2]).

En dehors des fonctions de I-e classe, la condition de Darboux reste (comme on montre facilement) nécessaire pour la connexité de l'image géométrique de la fonction, mais cesse d'être suffisante.

Considérons, en effet, la fonction (de II-e classe) de Cesàro:

$$\omega(x)=\limsup\frac{a_1+\ldots+a_n}{n},\quad \text{où}\quad 0<x<1,$$

le développement dyadique de x étant $x=(0,a_1a_2\ldots)_2$.

La fonction $\omega(x)$ prend toute valeur entre 0 et 1 dans chaque intervalle. Elle satisfait donc à la condition de Darboux, de-même que la fonction $g(x)$ définie comme suit: $g(x)=0$ lorsque $x=\omega(x)$ et $g(x)=\omega(x)$ ailleurs. Ainsi la droite $y=x$ ne rencontre pas l'ensemble $\underset{xy}{E}[y=g(x)]$; cet ensemble n'est donc pas connexe [3]).

II. Opérations. 1. *C étant un sous-ensemble connexe de la somme $M+N$ des ensembles séparés M et N, on a soit $CM=0$, soit $CN=0$.*

Car, dans le cas contraire, C serait la somme des ensembles CM et CN, séparés et non vides.

2. *Théorème d'addition* [4]). *Etant donnée une famille $\{C_\iota\}$ d'ensembles connexes qui contient un ensemble C_0 dont aucun C_ι n'est séparé, la somme $\sum_\iota C_\iota$ est connexe.*

---

[1]) Voir la note de B. Knaster et de moi-même *Sur quelques propriétés topologiques des fonctions dérivées*, Rend. di Palermo **49** (1925).

[2]) Dans un but analogue, on peut se servir des fonctions satisfaisant à l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Cf. F. B. Jones, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), p. 115.

[3]) Ibid. Ajoutons que l'ensemble $\underset{xy}{E}[y=\omega(x)]$ est connexe, comme l'a démontré L. Vietoris, Mon. Math. u. Ph. **3** (1921), p. 173.

[4]) Voir le mémoire de B. Knaster et de moi-même *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. **2** (1921), p. 210.

Considérons comme l'espace 1 la somme $\sum_\iota C_\iota$. Soit $1=M+N$ où M et N sont fermés-ouverts et disjoints. Il s'agit de prouver que soit $M=0$, soit $N=0$. Conformément à 1, on peut poser $C_0M=0$, d'où $C_0\subset N$, donc N est un entourage (ouvert) de C_0. Les ensembles C_0 et C_ι n'étant pas séparés, il vient $C_\iota\cdot N\neq0$, d'où selon 1, $C_\iota\cdot M=0$ quel que soit ι. Donc $M=0$.

3. *Corollaires.* 1° *La somme de deux ensembles connexes ayant des points communs est un ensemble connexe.*

2° *Si C est connexe et $C\subset X\subset\overline{C}$, X est connexe.*

3° *Si tout couple de points de l'espace se laisse unir par un ensemble connexe, l'espace tout entier est connexe.*

Le cor. 1° résulte directement du théorème. Pour démontrer 2°, on pose $C_0=C$ et $C_x=(x)$ pour $x\in X-C$ (d'où $\overline{C}_0\cdot C_x\neq0$). Enfin, en vue d'établir 3°, on désignera par C_0 un point p fixe et par C_x un ensemble connexe contenant p et x.

4. *Théorème de décomposition* [1]). *C étant un sous-ensemble connexe d'un espace connexe, et M et N étant deux ensembles séparés tels que $1-C=M+N$, les ensembles $C+M$ et $C+N$ sont connexes.*

En outre: *si C est fermé, $C+M$ et $C+N$ le sont également.*

Posons, en effet, $C+M=A+B$, où A et B sont séparés. Il s'agit de prouver que soit $A=0$, soit $B=0$. Conformément à 1, on peut poser $CA=0$, d'où $A\subset M$, puisque $A\subset C+M$. Les ensembles M et N étant séparés, A est donc séparé de N et par conséquent de $B+N$, puisque A et B sont séparés (cf. § 16, V, 4). L'identité

$$1=C+M+N=A+B+N$$

représente ainsi une décomposition de l'espace (connexe) en deux ensembles séparés A et $B+N$. L'un d'eux est donc vide, c. q. f. d.

Enfin, si C est fermé, on a

$$\overline{C+M}=C+\overline{M}=(C+\overline{M})(C+M+N)=C+M,$$

car $\overline{M}\cdot N=0$.

5. *Corollaire* [2]). *Soient A et B deux ensembles fermés (ou deux ensembles ouverts). Si les ensembles $A+B$ et AB sont connexes, les ensembles A et B le sont également.*

---

[1]) Ibidem, th. VI.

[2]) Voir la note de S. Janiszewski et de moi-même dans Fund. Math. **1** (1920), nouv. éd. 1937, p. 211, th. I.

Considérons, en effet, $A+B$ comme l'espace et posons dans le théorème 4:

$$M=A-B, \quad N=B-A \quad \text{et} \quad C=AB.$$

Les ensembles $A-B$ et $B-A$ étant séparés (cf. § 16, V, 2), les ensembles

$$A=AB+(A-B) \quad \text{et} \quad B=AB+(B-A)$$

sont connexes.

6. *Si E n'est pas somme de n ensembles connexes, il existe $n+1$ ensembles deux à deux séparés $A_1,\dots,A_{n+1}$ tels que*

$$E=A_1+\dots+A_{n+1}, \quad A_i\neq 0 \qquad 1\leqslant i\leqslant n+1.$$

Ce théorème étant évident pour $n=1$, admettons-le pour $n-1$. On a donc $E=A_1+\dots+A_n$, les A_j étant non vides et séparés deux à deux (pour $j\leqslant n$). Par hypothèse, l'un des A_j, soit A_n, n'est pas connexe; il existe donc deux ensembles séparés et non vides A_n^* et A_{n+1} tels que $A_n=A_n^*+A_{n+1}$; d'où la conclusion démandée.

7. *Théorème 4 généralisé*[1]. *$C_1,\dots,C_n$ étant des sous-ensembles connexes d'un espace connexe, et M et N étant deux ensembles séparés tels que*

$$1-(C_1+\dots+C_n)=M+N,$$

l'ensemble $C_1+\dots+C_n+M$ se compose de n ensembles connexes (différents on non).

Supposons, par contre, qu'il existe une décomposition en $n+1$ ensembles non vides et séparés deux à deux (cf. th. 6):

$$C_1+\dots+C_n+M=A_1+\dots+A_{n+1}.$$

Aucun A_i, pour $i\leqslant n+1$, n'est séparé de N, car on aurait dans le cas contraire la décomposition

$$1=A_i+(A_1+\dots+A_{i-1}+A_{i+1}+\dots+A_{n+1}+N)$$

en deux ensembles séparés et non vides, contrairement à la connexité de l'espace. M et N étant séparés, il en résulte que $A_i \not\subset M$, donc que $A_i\cdot C_j\neq 0$ pour un $j\leqslant n$ convenablement choisi. C_j étant un

[1]) Voir la note de B. Knaster et de moi-même dans Proc. Nat. Acad. of Sc., **13** (1927), p. 648. Cf. aussi (pour le cas $n=2$) G. T. Whyburn, Fund. Math. **10** (1927), p. 181.

sous-ensemble connexe de la somme des ensembles séparés $A_1,\dots,A_{n+1}$, il vient $C_j\subset A_i$.

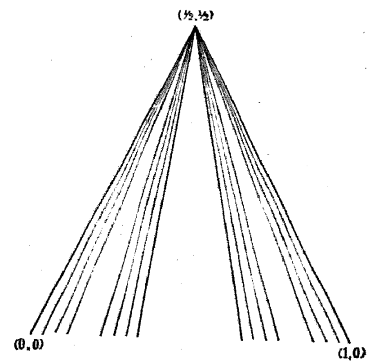
On en conclut que chacun des ensembles $A_1,\dots,A_{n+1}$ contient un ensemble (non vide) appartenant au système $\{C_1,\dots,C_n\}$, ce qui est évidemment impossible.

Remarques. Le th. 4 implique que tout espace connexe contenant plus d'un point est somme de deux ensembles connexes différents de lui et contenant plus d'un point[1].

En effet, si pour tout x, l'ensemble $1-x$ est connexe, on a la décomposition $1=(1-x_1)+(1-x_2)$ où $x_1\neq x_2$. D'autre part, s'il existe un x tel que $1-x$ n'est pas connexe, on a $1-x=M+N$, où M et N sont séparés et non vides; d'où (cf. 4): $1=(x+M)+(x+N)$.

Il est cependant à remarquer qu'il existe des espaces — nommés *biconnexes* — qui ne se laissent pas décomposer en deux vrais sous-ensembles connexes disjoints et contenant plus d'un point.

Tel est l'exemple suivant[2]. Unissons le point $(^1/_2, ^1/_2)$ à tout point de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor par un segment rectiligne. Si ce segment contient une extrémité d'un intervalle contigu à $\mathcal{C}$, considérons ses points à ordonnée rationnelle; dans le cas contraire, considérons ses points à ordonnée irrationnelle. Tous les points considérés constituent l'ensemble biconnexe en question.



L'espace biconnexe qui vient d'être défini contient un point p, à savoir le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tel que $1-p$ *ne renferme aucun ensemble connexe* (contenant plus d'un point). L'existence des espaces biconnexes dépourvus de cette propriété se laisse établir à l'aide de l'hypothèse du continu[3]).

[1]) Pour un résultat plus précis de A. H. Stone et pour des problèmes qui s'y rattachent, voir P. Erdös, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), p. 442.

[2]) Voir le mémoire précité de B. Knaster et de moi-même, Fund. Math. **2** (1921), p. 241, où l'on trouvera la démonstration. Pour un autre exemple, voir la note de B. Knaster et de moi-même dans Rend. di Palermo **49** (1925), p. 3. Voir aussi P. M. Swingle, *Generalization of biconnected sets*, Amer. Journ. Math. **53** (1931), p. 385 et P. Erdös, op. cit.

[3]) Voir E. W. Miller, *Concerning biconnected sets*, Fund. Math. **29** (1927), p. 123.

8. *C étant un espace connexe et $\{G_\iota\}$ étant une famille d'ensembles ouverts tels que $C=\sum_\iota G_\iota$, tout couple de points se laisse unir par une chaîne à chaînons appartenant à cette famille, c.-à-d. qu'à tout couple (x,y) correspond un système fini d'indices $\iota_1,\dots,\iota_n$ tel que*

$$(1)\qquad x\in G_{\iota_1},\quad G_{\iota_k}\cdot G_{\iota_{k+1}}\neq 0 \quad \textit{pour} \quad 1\leqslant k<n,\quad y\in G_{\iota_n}.$$

Soient x un point fixe et E l'ensemble de tous les y qui se laissent unir à x par une chaîne. Il s'agit de prouver que $E=C$. Comme $E\neq 0$ (puisque $x\in E$) et comme E est évidemment ouvert, cela se réduit à démontrer que E est fermé.

Or, soit $p\in\overline{E}$. Soit $p\in G_\iota$. L'ensemble G_ι étant ouvert, il existe donc un $y\in E\cdot G_\iota$. La chaîne $G_{\iota_1},\dots,G_{\iota_n}$ satisfaisant à (1), la chaîne $G_{\iota_1},\dots,G_{\iota_n},G_\iota$ unit x à p. Donc $p\in E$, d'où $\overline{E}=E$.

Il en résulte aussitôt que

9. *Dans les mêmes hypothèses sur C et $\{G_\iota\}$, à tout couple d'ensembles non vides (A,B), correspond une chaîne irréductible entre A et B, c.-à-d. qu'il existe un système d'ensembles $R_1,\dots,R_n$ $(n>0)$ appartenant à la famille $\{G_\iota\}$ et tel qu'en posant $R_0=A$ et $R_{n+1}=B$, l'inégalité $R_i\cdot R_{i'}\neq 0$ équivaut à $|i-i'|\leqslant 1$.*

10. *Si, dans les hypothèses du th. 8, l'indice ι parcourt l'ensemble des entiers positifs, il existe une permutation de cet ensemble $k_1,k_2,\dots$ telle que*

$$(2)\qquad (G_{k_1}+\dots+G_{k_n})\cdot G_{k_{n+1}}\neq 0 \quad \textit{pour} \quad n=1,2,\dots,$$

les ensembles G_ι étant supposés non vides.

Posons, en effet, $k_1=1$. Pour $n>0$, soit k_{n+1} le plus petit entier positif vérifiant l'inégalité (2) et distinct des nombres $k_1,\dots,k_n$.

Un entier de ce genre existe, car en supposant le contraire, l'ensemble $G_{k_1}+\dots+G_{k_n}$ serait fermé-ouvert et distinct de l'espace tout entier.

Il s'agit de montrer que la suite $\{k_n\}$ contient tous les entiers positifs.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit $l_1,l_2,\dots$ la suite (finie ou infinie) d'entiers positifs qui n'appartiennent pas à la suite $\{k_n\}$. En vertu de la connexité de l'espace, on a

$$(G_{k_1}+G_{k_2}+\dots)\cdot(G_{l_1}+G_{l_2}+\dots)\neq 0.$$

Il existe donc deux indices n et m tels que

$$G_{k_n}\cdot G_{l_m}\neq 0.$$

D'après la définition de k_{n+1}, on a donc $k_{n+1}<l_m$, de même que $k_{n+2}<l_m$ etc. Mais c'est impossible, la suite $\{k_n\}$ étant non bornée.

11. *$C_1,C_2,\dots$ étant une suite (finie ou infinie) d'espaces connexes, leur produit (cartésien) $C_1\times C_2\times\dots$ est connexe.*

En particulier, *l'espace euclidien n-dimensionnel $\mathcal{E}^n$, l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ de Fréchet, le cube fondamental $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert — sont des espaces connexes.*

En effet, (x_1,y_1) et (x_2,y_2) étant deux points de $C_1\times C_2$, l'ensemble $C_1\times y_1+x_2\times C_2$ est connexe, en tant que somme de deux ensembles connexes ayant le point (x_2,y_1) en commun. $C_1\times C_2$ est donc connexe d'après 3,3°.

Ainsi, le produit de deux, donc d'un nombre fini arbitraire d'espaces connexes, est connexe.

Passons au cas où la suite $C_1,C_2,\dots$ est infinie. Soit p_n un point fixe extrait de C_n. Posons

$$A_n=C_1\times\dots\times C_n\times p_{n+1}\times p_{n+2}\times\dots$$

On prouve facilement (cf. § 14, VI) que

$$\overline{A_1+A_2+\dots}=C_1\times C_2\times\dots$$

Les ensembles A_n étant connexes, leur somme l'est également (puisque $A_1\subset A_2\subset\dots$). L'espace $C_1\times C_2\times\dots$ est donc connexe d'après 3,2°.

III. Composantes. Un ensemble saturé par rapport à la propriété: être connexe, est dit *composante* de l'espace [1]); en d'autres termes, C est une composante, lorsque C est connexe et, pour tout ensemble connexe C_1 tel que $C\subset C_1$, on a $C_1=C$.

On constate aussitôt (en vertu de II, 2 et 3) que

1. *Les composantes sont des ensembles fermés et disjoints.*

2. *Tout ensemble connexe non vide est contenu dans une seule composante de l'espace.*

3. *Si C est une composante de A et si $C\subset B\subset A$, C est une composante de B.*

4. *Tout ensemble fermé-ouvert F est somme d'une famille de composantes de l'espace.* En particulier, *si F est connexe et non vide, il est une composante.*

[1]) Suivant F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 152.

Car l'hypothèse que C est une composante telle que $CF\neq 0\neq C-F$ est incompatible avec le th. II, 1.

5. *Soit 1 un espace connexe. A étant un ensemble connexe et C étant une composante de $1-A$, l'ensemble $1-C$ est connexe.*

Soit, en effet,

$$1-C=M+N, \quad \overline{M}N+M\overline{N}=0.$$

Il s'agit de montrer que, soit $M=0$, soit $N=0$. Comme

$$A\subset 1-C=M+N,$$

on peut poser conformément à II, 1:

$$AM=0, \quad \text{d'où} \quad A(C+M)=0, \quad \text{donc} \quad C\subset C+M\subset 1-A.$$

L'ensemble $C+M$ étant connexe d'après II, 4, cette double inclusion implique suivant la définition de la composante, que $C=C+M$, d'où $M=0$.

Le th. 5 entraîne les corollaires suivants:

6. *L'espace étant connexe, tout système fini $\boldsymbol{S}$ (contenant deux éléments au moins) de sous-ensembles connexes et disjoints contient au moins deux ensembles-éléments, X et Y, jouissant de la propriété suivante:*

(**P**) *il existe un ensemble connexe disjoint de X (respectivement de Y) qui contient tous les éléments de $\boldsymbol{S}$ autres que X (respectivement autres que Y).*

Posons $\boldsymbol{S}=(C_0,C_1,...,C_n)$ et procédons par induction. Le théorème étant évident pour $n=1$, admettons-le pour $n-1(\geqslant 1)$.

Il s'agit de montrer qu'il existe un $k>0$ tel que l'ensemble C_k jouit de la propriéte **P**.

Admettons que l'ensemble C_1 ne jouit pas de cette propriété. Il existe donc tout au moins deux composantes A et B de l'ensemble $1-C_1$ qui contiennent des ensembles du système $\boldsymbol{S}$; soit A celle qui ne contient pas C_0.

Soit $m_1,...,m_j$ la suite des indices des ensembles C_i contenus dans A. On a donc

(1) $\quad 1\leqslant j\leqslant n-1, \qquad$ (2) $\quad 0\neq m_1, \; ..., \; 0\neq m_j,$

(3) $\quad$ si $\; r\neq m_1,...,r\neq m_j \;$ et $\; r\leqslant n, \;$ on a $\; C_r\subset 1-A.$

L'ensemble $1-A$ étant connexe (d'après 5) et le système

$$\boldsymbol{S}^*=(1-A,C_{m_1},C_{m_2},...,C_{m_j})$$

étant composé de tout au plus n éléments (d'après (1)), il existe par hypothèse un indice $s\leqslant j$ tel que l'ensemble C_{m_s} jouit de la propriété **P** par rapport au système $\boldsymbol{S}^*$. Il existe par conséquent un ensemble connexe K tel que

$$(1-A)+C_{m_1}+...+C_{m_{s-1}}+C_{m_{s+1}}+...+C_{m_j}\subset K\subset 1-C_{m_s}.$$

D'après (3), on a donc $C_q\subset K$ pour tout $q\neq m_s$.

Cela veut dire que l'ensemble C_{m_s} jouit de la propriéte **P** (par rapport au système $\mathcal{S}$).

Enfin, $m_s>0$ d'après (2); m_s est donc l'indice k demandé.

7. *Soit, dans un espace connexe, $\boldsymbol{S}$ une famille infinie d'ensembles connexes disjoints. S_0 et S_1 étant deux éléments arbitraires de $\boldsymbol{S}$, il existe soit dans $1-S_0$, soit dans $1-S_1$, un ensemble connexe qui contient une infinité d'ensembles-éléments de $\boldsymbol{S}$.*

Soit C_j (pour $j=0,1$) la composante de $1-S_j$ qui contient S_{1-j}. L'ensemble $1-C_{1-j}$ étant connexe (d'après 5), la double inclusion

$$S_{1-j}\subset 1-C_{1-j}\subset 1-S_j,$$

qui résulte de $S_j\subset C_{1-j}\subset 1-S_{1-j}$, entraîne donc

$$1-C_{1-j}\subset C_j. \tag{4}$$

Admettons que C_0 ne contienne qu'un nombre fini d'éléments de $\boldsymbol{S}$. Il existe donc une infinité d'éléments de $\boldsymbol{S}$ contenus dans $1-C_0$, donc d'après (4), dans C_1. On parvient ainsi à la conclusion que l'ensemble $1-S_1$ contient un ensemble connexe, à savoir C_1, qui contient une infinité d'ensembles-éléments de $\boldsymbol{S}$.

IV. Connexité entre ensembles. Un espace est dit *connexe entre A et B* lorsqu'il n'existe aucun ensemble fermé-ouvert F tel que $A\subset F$ et $FB=0$ [1]).

La connexité entre deux ensembles est une relation symétrique. Car $1-F$ est ouvert-fermé, $B\subset 1-F$ et $(1-F)A=0$.

On constate aussitôt que

1a. *Si 1 est connexe entre A et B, on a $A\neq 0\neq B$, et si $A\subset A_1$ et $B\subset B_1$, 1 est connexe entre A_1 et B_1.*

[1]) Cf. S. Mazurkiewicz, C. R. Paris **151** (1910), p. 296.

1 b. *Si* 1 *est connexe entre* $\bar{A}$ *et* $\bar{B}$, *il l'est aussi entre* A *et* B. *Si* $AB \neq 0$, 1 *est connexe entre* A *et* B.

1 c. *Un espace connexe est connexe entre tout couple de ses sous-ensembles non vides.*

1 d. *Si un sous-ensemble de l'espace est connexe entre* A *et* B, *l'espace tout entier l'est également.*

2. *Pour qu'un espace (séparable) soit de dimension* 0, *il faut et il suffit qu'il ne soit connexe entre aucun couple d'ensembles fermés et disjoints* (§ 21, II, th. III); *pour qu'il soit de dimension positive au point* a, *il faut et il suffit qu'il soit connexe entre* a *et un* B *fermé qui ne contient pas* a.

3. *Si l'espace n'est connexe ni entre* A *et* B_0, *ni entre* A *et* B_1, *il n'est pas connexe entre* A *et* B_0+B_1.

Soit F_j, où $j=0,1$, un ensemble fermé-ouvert tel que $A\subset F_j$ et $F_j\cdot B_j=0$. Posons $F=F_0\cdot F_1$. L'ensemble F est donc fermé-ouvert et satisfait aux formules:

$$A\subset F \quad \text{et} \quad F\cdot(B_0+B_1)=0.$$

4. *Étant donné un système d'ensembles* $A_0,\dots,A_n$ *tel que l'espace n'est connexe entre aucun couple* A_i,A_j, *où* $i\neq j$, *il existe un système d'ensembles fermés et disjoints* $F_0,\dots,F_n$ *tel que*

$$(1) \qquad 1=F_0+\dots+F_n \quad \text{et} \quad A_i\subset F_i \quad \text{pour} \quad i=0,\dots,n.$$

Procédons par induction. Le théorème est évident pour $n=1$. Il suffit donc de l'établir pour $n>1$ en l'admettant pour $n-1$.

Posons: $A_i^*=A_i$ pour $i<n-1$ et $A_{n-1}^*=A_{n-1}+A_n$. D'après 3, l'espace n'est connexe entre aucun couple A_i^*, A_j^* pour $i\neq j$. Il existe donc par hypothèse un système d'ensembles fermés et disjoints $F_0^*,\dots,F_{n-1}^*$ tels que

$$(2) \qquad 1=F_0^*+\dots+F_{n-1}^* \quad \text{et} \quad A_i^*\subset F_i^* \quad \text{pour} \quad i=0,\dots,n-1.$$

L'espace n'étant pas connexe entre A_{n-1} et A_n, il en est de même de l'ensemble F_{n-1}^* (cf. 1 d). Il existe donc deux ensembles fermés et disjoints, F_{n-1} et F_n, satisfaisant aux conditions:

$$(3) \qquad F_{n-1}^*=F_{n-1}+F_n, \quad A_{n-1}\subset F_{n-1} \quad \text{et} \quad A_n\subset F_n.$$

En posant $F_i=F_i^*$ pour $i<n-1$, on déduit (1) de (2) et (3).

5. *Si l'espace n'est pas connexe entre* A *et* B, *la fonction* f *égale à* 1 *sur* A *et à* 0 *sur* B *admet une extension continue sur l'espace tout entier ne prenant que les valeurs* 0 *et* 1.

Réciproquement, si f *est une transformation continue de l'espace à valeurs entières et si les ensembles* $f(A)$ *et* $f(B)$ *sont disjoints, l'espace n'est pas connexe entre* A *et* B.

Car, d'une part, la fonction caractéristique d'un ensemble fermé-ouvert F tel que $A\subset F$ et $FB=0$, est l'extension demandée de f.

D'autre part, en posant $F=f^{-1}[f(A)]$, on a $A\subset F$ et $FB=0$, car

$$A\subset f^{-1}[f(A)] \quad \text{et} \quad FB\subset f^{-1}[f(A)]\cdot f^{-1}[f(B)]=f^{-1}[f(A)\cdot f(B)]=0.$$

6. *Dans tout espace métrique séparable, il existe une suite d'ensembles fermés-ouverts* $F_1,F_2,\dots$ *telle qu'à chaque couple de points* p,q *entre lesquels l'espace n'est pas connexe, correspond un* n *tel que* F_n *contient* p *sans contenir* q.

Soit, en effet, $R_1,R_2,\dots$ la base de l'espace composée d'ensembles ouverts. A chaque couple d'ensembles R_i, R_j entre lesquels l'espace n'est pas connexe, faisons correspondre un ensemble fermé-ouvert F_{ij} tel que $R_i\subset F_{ij}$ et $F_{ij}\cdot R_j=0$. En rangeant les F_{ij} en une suite simple $F_1,F_2,\dots$, on obtient la suite demandée. Car F étant un ensemble fermé-ouvert tel que $p\in F$ et $q\in 1-F$, il existe un R_i et un R_j tels que $p\in R_i\subset F$ et $q\in R_j\subset 1-F$, ce qui prouve que 1 n'est pas connexe entre R_i et R_j. Il existe, par conséquent, un n tel que $p\in R_i\subset F_n$ et $q\in R_j\subset 1-F_n$.

Remarque. Si l'espace est compact, on peut prendre pour la famille $\{F_n\}$ celle de tous les ensembles fermés-ouverts. Cette famille est dénombrable d'après le th. 4 du § 37, V.

7. *Pour qu'un ensemble* E *situé dans l'espace* 1 *soit connexe entre deux sous-ensembles* A *et* B, *il faut et il suffit qu'il n'existe aucun ensemble ouvert* G *(dans* 1*) tel que*

$$E\cdot \mathrm{Fr}(G)=0, \quad A\subset G, \quad \bar{G}B=0.$$

Car, si un tel G existe, EG est fermé-ouvert dans E. Réciproquement, si F est fermé-ouvert dans E, les ensembles F et $E-F$ sont séparés et il existe (selon § 16, V, 6) un ensemble G tel que

$$F\subset G \quad \text{et} \quad \bar{G}E\subset F, \quad \text{d'où} \quad E\bar{G}-G=0.$$

8. *Si l'espace est de dimension positive au point a, il existe un $\varepsilon>0$ tel que tout ensemble fermé A contenant a et de diamètre $<\varepsilon$ est connexe entre a et $A\cdot\overline{1-A}$.*

Si l'espace est connexe, tout vrai sous-ensemble fermé A est connexe entre sa frontière (c.-à-d. entre l'ensemble $A\cdot\overline{1-A}$) et chacun de ses points.

En effet, en supposant que F soit un sous-ensemble fermé de A tel que $A-F$ est fermé et que $a\in F$ et $F\cdot\overline{1-A}=0$, on aurait la décomposition

$$1=F+[(A-F)+\overline{1-A}]$$

en deux ensembles fermés, disjoints et non vides (et tels que $\delta(F)<\varepsilon$).

9. *Si les ensembles $C_1, C_2, \dots$ sont connexes et $a\in\operatorname{Li}_{n=\infty} C_n$ et $b\in\operatorname{Li}_{n=\infty} C_n$, l'ensemble $E=a+b+C_1+C_2+\dots$ est connexe entre a et b.*

Car, autrement, il existe un F fermé-ouvert dans E tel que $a\in F$ et $b\in E-F$. Comme $a\in F\cdot\operatorname{Li}_{n=\infty} C_n$, on a pour n suffisamment grand $FC_n\neq0$, d'où $C_n\subset F$ (puisque C_n est connexe et F est séparé de $E-F$). Mais alors $\operatorname{Li}_{n=\infty} C_n\subset F$, d'où $b\in F$, contrairement à la formule $b\in E-F$.

Exemple. Soient

$$C_n=\underset{xy}{E}[(-1\leqslant x\leqslant 1)\,(y=1/n)],\quad a=(-1,0),\quad b=(+1,0).$$

E est connexe entre a et b. Cependant, a et b appartiennent à deux composantes différentes de E.

En outre, $E-b$ est connexe entre a et l'ensemble B des points $(1,1/n)$, $n=1,2,\dots$, mais *n'est connexe entre a et aucun point individuel de B* (cf. aussi § 42, II, 1).

V. Quasi-composantes. *La quasi-composante du point p* est le produit de tous les ensembles fermés-ouverts contenant p [1]). Autrement dit: c'est l'ensemble de tous les x tels que l'espace est connexe entre p et x.

On constate aussitôt que

1. *La composante de p est contenue dans la quasi-composante de p.*

[1]) Voir F. Hausdorff, *Grundzüge*, p. 248.

L'inclusion inverse n'est pas en général vraie (comme le prouve l'exemple du N° IV). Elle est cependant vraie dans les espaces compacts (voir § 42, II, 2).

2. *Les quasi-composantes sont des ensembles fermés et disjoints.*

En effet, comme produit d'ensembles fermés, toute quasi-composante est fermée. Soient, d'autre part, Q_1 et Q_2 les quasi-composantes des points p_1 et p_2. Supposons que $Q_1\neq Q_2$, que $x\in Q_2-Q_1$ par exemple. Il existe, par conséquent, un F fermé-ouvert tel que $p_1\in F$ et $x\in 1-F$. Donc $Q_2\not\subset F$ et par suite $p_2\in 1-F$, d'où $Q_2\subset 1-F$. Comme $Q_1\subset F$, il vient $Q_1\cdot Q_2=0$.

3 [1]). *$\mathfrak{X}$ étant un espace métrique séparable, il existe une transformation continue f de $\mathfrak{X}$ en un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor telle que les ensembles $f^{-1}(y)$ coïncident avec les quasi-composantes de $\mathfrak{X}$ (y parcourant l'ensemble $f(\mathfrak{X})$).*

Telle est la fonction caractéristique de la suite $F_1, F_2, \dots$ considérée dans le th. 6 du N° IV; c.-à-d. que

$$f(x)=\sum_n [f^{(n)}(x)/3^n],\quad \text{où}\quad f^{(n)}(x)=\begin{cases}2 & \text{pour}\quad x\in F_n\\ 0 & \text{pour}\quad x\in\mathfrak{X}-F_n.\end{cases}$$

En effet, p et q appartenant à deux quasi-composantes différentes, il existe un F_n tel que $p\in F_n$ et $q\in\mathfrak{X}-F_n$, d'où $f^{(n)}(p)=2$ et $f^{(n)}(q)=0$, donc $f(p)\neq f(q)$.

Cela prouve que, pour tout $y\in f(\mathfrak{X})$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est contenu dans une seule quasi-composante de $\mathfrak{X}$.

Inversement, Q étant une quasi-composante, on a pour tout n soit $Q\subset F_n$, soit $Q\subset\mathfrak{X}-F_n$; donc Q est contenu dans un seul ensemble $f^{-1}(y)$, c. q. f. d.

4. *Tout espace métrique séparable $\mathfrak{X}$ est contenu topologiquement dans un espace compact $\mathfrak{X}^*$ tel que deux quasi-composantes différentes de $\mathfrak{X}$ sont contenus toujours dans deux quasi-composantes différentes de $\mathfrak{X}^*$* [2]).

Plus précisément, *dans l'espace fonctionnel $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ les homéomorphies f telles que l'ensemble $\mathfrak{X}^*=\overline{f(\mathfrak{X})}$ satisfait à la condition demandée constituent un ensemble résiduel.*

[1]) Voir ma note de Fund. Math. **30** (1938), p. 245, où je montre que les fonctions f qui satisfont à la thèse du th. 3 constituent un ensemble *résiduel* dans l'espace $\mathcal{C}^{\mathfrak{X}}$.

[2]) Ibid., p. 243. Ce théorème a été proposé par B. Knaster.

Soit, en effet, $F_1, F_2, \ldots$ la suite d'ensembles fermés-ouverts considérée dans le th. IV, 6 (l'espace $\mathcal{X}$ étant suppose non-connexe). D'après les th. 4 et 6 du § 38, VII, l'ensemble Φ_n des homéomorphies f telles que

$$(1) \qquad f \in (\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}} \quad \text{et} \quad \overline{f(F_n)} \cdot \overline{f(\mathcal{X}-F_n)} = 0$$

est résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$. Il en est donc de même de l'ensemble $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \ldots$

Soit $f \in \Phi$. Soient p et q deux points appartenant à deux quasi-composantes différentes P et Q de $\mathcal{X}$. Il existe donc un indice n tel que

$$p \in F_n \quad \text{et} \quad q \in \mathcal{X}-F_n, \quad \text{d'où} \quad f(p) \in f(F_n) \quad \text{et} \quad f(q) \in f(\mathcal{X}-F_n).$$

Comme

$$X^* = \overline{f(\mathcal{X})} = \overline{f(F_n)} + \overline{f(\mathcal{X}-F_n)}$$

et $f \in \Phi_n$, on conclut de l'égalité (1) que $\mathcal{X}^*$ n'est pas connexe entre $f(p)$ et $f(q)$; ces points appartiennent, par conséquent, à deux quasi-composantes différentes de $\mathcal{X}^*$.

VI. Espaces nulle part connexes. Espaces dispersés.

Un espace est dit *nulle part connexe* lorsqu'à tout couple de points a et b correspond un ensemble fermé et ouvert qui contient a et ne contient pas b; autrement dit: lorsque l'espace n'est connexe entre aucun couple de points, ou encore, lorsque toutes ses quasi-composantes se réduisent à des points individuels.

Un espace est dit *dispersé*, lorsqu'il ne contient aucun sous-ensemble connexe (contenant plus d'un point). Evidemment:

1. *Tout espace 0-dimensionnel est nulle part connexe et tout espace nulle part connexe est dispersé.*

2. *Tout espace faiblement 1-dimensionnel, c.-à-d. tel que les points où cet espace est de dimension positive constituent un ensemble N de dimension* $\leqslant 0$ (cf. § 22, VI), *est dispersé* [1]).

Car, C étant un ensemble connexe contenant plus d'un point, on a (cf. I, 5) $\dim_p C > 0$ pour tout $p \in C$. Donc $C \subset N$, d'où $\dim N > 0$.

On constate facilement que

3. *Tout espace qui se laisse transformer en un espace nulle part connexe de façon biunivoque et continue est lui-même nulle part connexe.*

[1]) K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 204.

En particulier, l'ensemble faiblement 1-dimensionnel défini au § 22, VI est *un G_δ nulle part connexe de dimension positive* [1]).

Car il se projette de façon biunivoque sur l'ensemble de Cantor.

Remarques. 1⁰. *Il existe des espaces nulle part connexes de dimension finie arbitraire et même de dimension infinie.*

On prouve en effet [2]) que l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor est image biunivoque et continue d'un espace métrique séparable de dimension aussi grande que l'on veut (finie ou infinie).

De façon plus précise: il existe des espaces complets séparables et nulle part connexes de dimension aussi grande que l'on veut [3]).

2⁰. *Il existe des espaces (complets séparables) dispersés qui ne sont pas nulle part connexes* (c.-à-d. qui sont connexes entre deux points) [4]). Soit, en effet, E un ensemble G_δ faiblement 1-dimensionnel situé dans un espace compact (l'ensemble défini au § 22, VI, par exemple). Soit $\dim_a E = 1$. Il existe, comme on montre (cf. § 42, II, 8), un point $b \neq a$ tel que $E+b$ est connexe entre a et b. En outre, comme ensemble faiblement 1-dimensionnel, $E+b$ est dispersé.

3⁰. M. Pompeiu a défini une fonction $g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, dont la dérivée $g'(x)$ est finie en tout point et s'annule dans tout intervalle sans être constante dans aucun. La fonction $y = g(x)$ peut être définie par l'égalité

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sqrt[3]{y - a_n}, \quad \text{où} \quad a_n = (2k+1)/2^{m+1},$$

k et m étant des entiers donnés par les conditions

$$n = 2^m + k \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1 \text{ [5]}).$$

[1]) Le premier exemple d'un espace nulle part connexe de dimension positive a été donné par M. Sierpiński dans son ouvrage *Sur les ensembles connexes et non connexes*, Fund. Math. **2** (1921), p. 81.

[2]) Théorème de Hilgers, *Bemerkung zur Dimensionstheorie*, Fund. Math. **28** (1937), p. 303.

[3]) Théorème de Mazurkiewicz, *Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn*, Fund. Math. **10** (1927), p. 311. Pour le problème λ de Urysohn, voir Fund. Math. **8** (1926), p. 324.

[4]) Théorème de W. Sierpiński, l. c. p. 81.

[5]) Voir Pompeiu, Math. Ann. **63** (1907), p. 326. Cf. aussi Köpcke, Math. Ann. t. **29**, **34** et **35**, et la note de B. Knaster et de moi-même, Rend. di Palermo **49** (1925).

D'après I, 8 et § 27, VII, 1, l'ensemble $C=\underset{xy}{E}[y=g'(x)]$ est un G_δ connexe.

Soit $g'(a)\neq 0$. *L'ensemble* $A=C-\mathcal{J}+(a,0)$ *est connexe entre les points* $p=[a,0]$ *et* $q=[a,g'(a)]$.

Supposons, par impossible, que M et N soient séparés et que

$$A=M+N, \quad p\in M \quad \text{et} \quad q\in N.$$

Soit bc un intervalle tel que

$$b<a<c, \quad \overline{N}\cdot bc=0 \quad \text{et} \quad g'(b)=0=g'(c).$$

Désignons par N_1 la partie de N qui se projette sur l'intervalle bc; N_1 est donc séparé de $N-N_1$ ainsi que de $\mathcal{J}$, donc de $(N-N_1+M+\mathcal{J})$. Comme

$$C\subset N_1+(N-N_1+M+\mathcal{J})$$

et $p\in M$ et $q\in N_1$, c'est incompatible avec la connexité de C.

Ceci établi, on en conclut (cf. § 21, III, 3) que $C-\mathcal{J}$ est de dimension 1 en chacun de ses points.

Remarquons, en outre, que l'égalité $\overline{C\mathcal{J}}=\mathcal{J}$ implique que $C-\mathcal{J}$ *est nulle part connexe*. Donc A *est dispersé* (sans être nulle part connexe)[1]).

VII. Séparateurs. Par définition (§ 16, VI), C *sépare l'espace entre* A *et* B (est un *séparateur entre* A *et* B) lorsque $1-C$ n'est pas connexe entre A et B; autrement dit, lorsqu'il existe deux ensembles M et N tels que

$$\text{(i)} \qquad 1-C=M+N, \quad \overline{M}N+\overline{N}M=0, \quad A\subset M, \quad B\subset N.$$

L'ensemble C est dit *un séparateur de l'espace* (tout court) lorsqu'il existe un couple d'ensembles fermés A et B entre lesquels l'espace est connexe, tandis que $1-C$ ne l'est pas.

Si l'espace est c o n n e x e, C en est un séparateur dans le cas et dans ce cas seulement lorsque $1-C$ n'est pas connexe (car tout espace est connexe entre chaque couple de ses points).

C est dit un *séparateur irréductible entre* a *et* b lorsque C est un séparateur entre ces points, tandis qu'aucun $X\subset C\neq X$ ne l'est pas.

C est dit un *séparateur irréductible complet* lorsque C est un séparateur irréductible entre chaque couple de points qu'il sépare (et qu'il existe au moins un couple de points séparés par C).

1) Cf. ma communication dans les Ann. Soc. Pol. Math. **5** (1927), p. 109.

Nous dirons que C sépare localement l'espace lorsque C sépare un ensemble ouvert qui contient C; autrement dit, lorsqu'il existe un ensemble G ouvert, et deux ensembles A et B fermés dans G tels que $A+B+C\subset G$ et que G est connexe entre A et B tandis que $G-C$ ne l'est pas.

1. $p_1,p_2,\ldots$ *étant une suite de points dense dans l'espace, chaque séparateur fermé est un séparateur entre un couple* (p_i,p_j) *convenablement choisi.*

Car M et N étant deux ensembles ouverts tels que $1-C=M+N$ et $MN=0$, il existe un $p_i\in M$ et un $p_j\in N$.

2. *Pour qu'un ensemble fermé* C *sépare l'espace entre* A *et* B, *il faut et il suffit qu'il existe deux ensembles fermés* P *et* Q *tels que*

$$\text{(ii)} \qquad 1=P+Q, \quad C=PQ, \quad AQ=0=BP.$$

De plus, *si les ensembles* A, B *et* C *sont disjoints, la double égalité peut être remplacée par les inclusions* $A\subset P$ *et* $B\subset Q$.

Car, d'une part, si la formule (i) est satisfaite, on pose

$$P=M+C \quad \text{et} \quad Q=N+C.$$

D'autre part, si P et Q satisfont à (ii), il suffit de poser

$$M=1-Q \quad \text{et} \quad N=1-P.$$

3. *Si* E *sépare tout couple d'ensembles appartenant au système* $A_1,\ldots,A_n$, E *contient un* F *f e r m é jouissant de la même propriété.*

On a par hypothèse et d'après IV, 4

$$1-E=X_1+\ldots+X_n, \quad A_i\subset X_i,$$

les ensembles X_i étant disjoints et ouverts dans $1-E$. D'après § 15, XIII, 2, il existe un système d'ensembles ouverts $G_1,\ldots,G_n$, disjoints et tels que $X_i\subset G_i$. Il suffit de poser $F=1-(G_1+\ldots+G_n)$.

4. *Tout ensemble* C *qui est la frontière commune de deux composantes* A *et* B *de son complémentaire, est un séparateur irréductible entre tout couple de points* (a,b) *où* $a\in A$ *et* $b\in B$.

Car, d'une part, l'ensemble $C=\overline{A}\cdot\overline{1-A}$ décompose l'espace en deux ensembles séparés $\overline{A}-C$ et $\overline{1-A}-C$ dont l'un contient a et l'autre b. D'autre part, si $X\subset C\neq X$, donc si $c\in C-X$, l'ensemble $A+c+B$ est connexe et unit a et b en dehors de X. L'ensemble X n'est donc pas un séparateur entre a et b. Autrement dit, X est un séparateur irréductible entre a et b.

VIII. Séparation des espaces connexes[1]. Dans ce N⁰, *l'espace est supposé connexe et séparable.*

C étant un séparateur fermé entre a et b, il existe d'après VII (i) deux ensembles ouverts M et N tels que

$$1-C=M+N, \quad MN=0, \quad a\in M, \quad b\in N. \tag{1}$$

La décomposition (1) n'est pas, en général, déterminée d'une façon univoque: tel est l'exemple où l'espace se compose de trois segments ac, bc et dc n'ayant que le point c en commun.

1. *Soit* $\boldsymbol{C}$ *une famille de séparateurs entre* a *et* b, *fermés, connexes et disjoints. En faisant correspondre à tout* $C\in\boldsymbol{C}$ *deux ensembles ouverts* $M(C)$ *et* $N(C)$ *assujettis aux conditions* (1) *et en posant* $A(C)=M(C)+C$, *la famille* $\boldsymbol{F}$ *des ensembles* $A(C)$, *où* C *parcourt* $\boldsymbol{C}$, *est strictement monotone*[2].

Plus encore, *si* $C\neq D$, *on a, soit* $A(D)\subset M(C)$, *soit* $A(C)\subset M(D)$.

Soient $C\neq D$ deux éléments de $\boldsymbol{C}$. Les ensembles $M(C)$ et $N(C)$ étant séparés et D étant un sous-ensemble connexe de leur somme, l'un d'eux contient D, tandis que l'autre en est disjoint. Admettons que $D\subset M(C)$. Nous allons démontrer que $M(D)\subset M(C)$.

On a d'abord $C\subset N(D)$. Car si cette inclusion était en défaut, on aurait $C\subset M(D)$ (pour la raison mentionnée tout-à-l'heure). Or les formules

$$1=M(C)+C+N(C) \quad \text{et} \quad 1=M(D)+D+N(D) \tag{2}$$

entraînent

$$1=M(C)+M(D)+C+D+N(C)\cdot N(D),$$

et comme $D\subset M(C)$, l'hypothèse $C\subset M(D)$ entraînerait la décomposition de l'espace

$$1=[M(C)+M(D)]+[N(C)\cdot N(D)]$$

en deux ensembles ouverts, disjoints et non vides (contenant a et b respectivement), qui est incompatible avec l'hypothèse de la connexité de cet espace.

---

[1] Voir G. T. Whyburn, *Non-separated cuttings of connected point sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), p. 444, et mon ouvrage *Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes*, Fund. Math. **30** (1937), p. 17.

[2] Rappelons (cf. § 19, N⁰ VIII) qu'une famille d'ensembles est dite ***strictement monotone*** lorsque, pour chaque couple $X\neq Y$ de ses éléments, on a soit $X\subset \operatorname{Int}(Y)$, soit $Y\subset \operatorname{Int}(X)$. Le th. 1 permet d'appliquer à la famille $\boldsymbol{F}$ les théorèmes établis au § 19, VIII.

L'inclusion $C\subset N(D)$ étant établie, considérons la décomposition (qui résulte aussi de (2)):

$$1=M(C)+N(D)+C+D+N(C)\cdot M(D)=[M(C)+N(D)]+[N(C)\cdot M(D)].$$

Ces deux sommandes étant ouverts et disjoints et le premier n'étant pas vide, il vient

$$N(C)\cdot M(D)=0, \quad \text{d'où} \quad M(D)\subset M(C)+C,$$

et comme $C\cdot M(D)=0$ (puisque $C\subset N(D)$), il vient finalement

$$M(D)\subset M(C).$$

Il en résulte que

$$A(D)=D+M(D)\subset M(C)\subset \operatorname{Int}[A(C)],$$

puisque $M(C)$ est un sous-ensemble ouvert de $A(C)$.

De façon analogue, si l'on admet que $D\subset N(C)$, on en déduit que $C\subset M(D)$ et, par raison de symétrie, que

$$A(C)\subset M(D)\subset \operatorname{Int}[A(D)].$$

Le th. 1 étant ainsi établi, on parvient, en le rapprochant du th. 1 du § 19, VII, et en tenant compte du fait que l'inégalité $C\neq D$ entraîne $A(C)\neq A(D)$, au corollaire suivant:

2. *Les éléments* C *de la famille* $\boldsymbol{C}$ *peuvent être munis d'indices* y *tels que* $0<y<1$ *et que l'inégalité* $u<y$ *entraîne* $M(C_u)\subset A(C_u)\subset M(C_y)$.

En conséquence, *si* $u<y<z$, C_y *sépare l'espace entre* C_u *et* C_z.

3. *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'éléments de la famille* $\boldsymbol{C}$, *tout* $C\in\boldsymbol{C}$ *satisfait aux conditions suivantes*:

$$\operatorname{Int}[A(C)]=M(C), \quad \textit{d'où} \quad \operatorname{Fr}[A(C)]=C, \tag{3}$$

$$C=\operatorname{Fr}[M(C)]=\operatorname{Fr}[N(C)], \tag{4}$$

(5) *il existe deux suites* $\{D_n\}$ *et* $\{E_n\}$ *dans* $\boldsymbol{C}$ *telles que*

$$C=\prod_n M(D_n)\cdot N(E_n)=\prod_n A(D_n)\cdot\overline{1-A(E_n)},$$

$$M(C) \quad \textit{et} \quad N(C) \quad \textit{sont connexes}. \tag{6}$$

On a, en effet, en vertu de 2,

$$\sum_{u<y}\operatorname{Int}[A(C_u)]\subset M(C_y)\subset \operatorname{Int}[A(C_y)].$$

Soit conformément à § 19, VII, 4:

$$\mathrm{Int}\,[A(C_y)] = \sum_{u<y} \mathrm{Int}\,[A(C_u)].$$

Il vient

$$\mathrm{Int}\,[A(C_y)] = M(C_y), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Fr}\,[A(C_y)] = A(C_y) - \mathrm{Int}\,[A(C_y)] = C_y.$$

La formule (3) établie, on en déduit en vertu de § 19, VIII (5) que

$$C = \mathrm{Fr}\,[A(C)] = A(C) - \mathrm{Int}\,[A(C)] =$$
$$= \overline{\mathrm{Int}\,[A(C)]} - \mathrm{Int}\,[A(C)] = \mathrm{Fr}\,[\mathrm{Int}\,(A(C))] = \mathrm{Fr}\,[M(C)].$$

(5) résulte de (3) et § 19, VIII (9):

$$C_y = \prod_n \{\mathrm{Int}[A(D_n)] - A(E_n)\} \subset \prod_n M(D_{n-1}) N(E_n) \subset \prod_n A(D_{n-1}) \overline{1 - A(E_n)} = C_y,$$

puisque $A(D_n) \subset M(D_{n-1})$ d'après 2.

Enfin, comme nous allons voir, (5) entraîne (6).

Soit $M(C) = M_1 + M_2$, deux ensembles ouverts et disjoints, et $a \in M_1$. Il s'agit de prouver que $M_2 = 0$.

Les ensembles $M(C)$ et $N(C)$ étant séparés, et 1 et C étant connexes, les ensembles $C + M(C)$ et $C + N(C)$ sont connexes d'après II, 4. Pour les mêmes raisons, les ensembles $C + N(C) + M_1$ et $C + N(C) + M_2$ sont connexes. Or, l'ensemble $C + N(C) + M_1$ unissant les points a et b, et E_n étant un séparateur entre ces points, on a $E_n \cdot [C + N(C) + M_1] \neq 0$. Comme l'ensemble $A(E_n)$ précède $A(C)$, il vient $E_n \cdot N(C) = 0$, donc $E_n \cdot M_1 \neq 0$ et par conséquent $E_n \cdot M_2 = 0$. Les ensembles M_2 et $M_1 + N(C)$ étant séparés, $M_2 + C$ est connexe et, d'après l'égalité précédente, disjoint de E_n. L'inclusion $C \subset N(E_n)$, qui résulte de (5), implique donc que

$$M_2 + C \subset N(E_n), \quad \text{d'où} \quad M_2 \subset N(E_n).$$

D'autre part, d'après 2:

$$M_2 \subset A(C) \subset M(D_n),$$

d'où

$$M_2 \subset \prod_n M(D_n) \cdot N(E_n) = C,$$

et comme $C \cdot M_2 = 0$, il vient $M_2 = 0$.

4. *Dans chaque famille de séparateurs connexes, fermés et disjoints, tout séparateur — abstraction faite d'un ensemble dénombrable — sépare l'espace en deux ensembles connexes dont il forme la frontière commune; il est donc un séparateur irréductible complet.*

Soit $p_1, p_2, \ldots$ une suite de points dense dans l'espace.

D'après VII, 1, la famille considérée se décompose en une suite (dénombrable) de sous-familles $\boldsymbol{C}_{ij}$ de séparateurs entre p_i et p_j. L'énoncé 4 se déduit ainsi des propositions (4) et (6), l'irréductibilité étant une conséquence de VII, 4.

5. *$\boldsymbol{C}$ étant une famille de séparateurs entre a et b, fermés, connexes, disjoints et munis des indices conformément au th. 2, il existe une transformation continue f de l'espace en l'intervalle 01 (tout entier), telle que l'on ait $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ et que pour chaque indice $y < 1$, on ait*

$$\textit{soit} \quad f^{-1}(0y) = A(C_y), \quad \textit{soit} \quad f^{-1}(0y) = \prod_{z>y} A(C_z),$$

suivant que l'indice y admet ou non un indice qui le suit immédiatement.

Soit, en effet, $\boldsymbol{F}^*$ la famille des ensembles $A_y = A(C_y)$ avec $0 < y < 1$, augmentée des ensembles $A_0 = (a)$ et $A_1 = 1$. Considérons la fonction f définie au § 19, IX, 3. Évidemment $f(a) = 0$ et on a $f(b) = 1$, s'il n'existe aucun indice qui précède 1 immédiatement. En désignant, dans le dernier cas, cet indice par r, on n'aura qu'à modifier la définition de la fonction f sur l'ensemble $1 - A_r$; on posera:

$$f(x) = r + (1 - r) \frac{\varrho(x, A_r)}{\varrho(x, A_r) + |x - b|}.$$

Le th. 5 établi, plusieurs propriétés de la classe $\boldsymbol{C}$ se laissent déduire des formules § 19, IX (13)—(18). Notons qu'en particulier (en vertu de (3) et § 19, IX (17):

6. *Abstraction faite de $\aleph_0$ ensembles C_y, on a $C_y = f^{-1}(y)$.*

IX. Points de séparation. Admettons, comme dans le N° VIII, que l'espace 1 est *connexe séparable*. Désignons par $S(a, b)$ l'ensemble de tous les points qui séparent a et b. Ces points peuvent être munis d'indices conformément au th. 2 du N° VIII; la condition $u < y < z$ implique alors que p_y sépare les points p_u et p_z.

Le th. VIII, 4, implique que:

1 [1]). *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable de points x, l'ensemble $1-x$ est, soit connexe, soit somme de deux ensembles connexes.*

2. *A étant connexe, tout point de $A\cdot S(a,b)$, sauf le premier et le dernier (s'ils existent), sépare l'ensemble A.*

Il en résulte en vertu de VII, 1 que

3 [2]). *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable, tout point de l'ensemble connexe A qui est un point de séparation de l'espace, est aussi un point de séparation de A.*

Remarque. Ajoutons sans démonstration que

Toute famille d'ensembles connexes, disjoints ne se réduisant pas à des points individuels et dont chacun contient un point qui sépare l'espace, est dénombrable [3]).

4. *C étant la limite topologique* (cf. § 25, VI) *d'une suite $C_1, C_2, \ldots$ d'ensembles connexes disjoints, l'ensemble $C\cdot S(a,b)$ contient deux points au plus. L'ensemble de points de C qui séparent l'espace est donc dénombrable.*

Supposons, par contre, que $p_u, p_y, p_z \in C$ avec $u<y<z$. Il vient (cf. VIII, 2), $p_u \in M(p_y)$ et $p_z \in N(p_y)$. Les ensembles $M(p_y)$ et $N(p_y)$ étant ouverts, la formule $p_y \in \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, C_n$ implique donc pour n suffisamment grand que

$$C_n\cdot M(p_y) \neq 0 \neq C_n\cdot N(p_y), \quad \text{d'où} \quad C_n\cdot \mathrm{Fr}\,[M(p_y)] \neq 0, \quad \text{c.-à-d.} \quad p_y \in C_n,$$

contrairement à l'hypothèse que les ensembles C_n sont disjoints.

5. *Il existe une transformation continue f de l'espace en l'intervalle* 01, *dont l'ensemble des points de biunivocité* (cf. § 37, VI, 3), *augmenté d'un ensemble dénombrable convenablement choisi, coïncide avec $S(a,b)+a+b$.*

A savoir, *f est la fonction du th. VIII, 5, où C est la famille des ensembles qui se réduisent à des points individuels séparant a de b.*

---

[1]) Voir la note de M. C. Zarankiewicz et de moi-même, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), p. 571.

[2]) Voir C. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. **9** (1927), p. 17, et, dans des hypothèses plus restrictives, R. L. Moore, Proc. Nat. Acad. **9** (1923), p. 102.

[3]) Théorème de C. Zarankiewicz, Trans. Amer. Math. Soc. **33**, p. 447. Pour la démonstration, voir ma note précitée de Fund. Math. **30**, p. 30.

[4]) Cf. C. Zarankiewicz, Fund. Math. **9** (1927), p. 139.

En effet, si p est un point de biunivocité, différent de a et de b, il existe un y tel que $p=f^{-1}(y)$ et $0\neq y\neq 1$. Par conséquent la formule

$$1-p=f^{-1}(0y-y)+f^{-1}(y1-y)$$

représente une décomposition en deux ensembles ouverts dont l'un contient a et l'autre b. On a donc $p\in S(a,b)$.

D'autre part, d'après VIII (7), tout point de $S(a,b)$, abstraction faite d'un ensemble dénombrable, est un point de biunivocité de la fonction f.

6. *Théorème de Lennes* [1]). *Si $1=S(a,b)+a+b$, c.-à-d. si tout point différent de a et de b sépare l'espace entre a et b, il existe une transformation biunivoque et continue de l'espace en l'intervalle $0\leqslant y\leqslant 1$.*

Posons, en effet, $f(p_y)=y$, $f(a)=0$ et $f(b)=1$.

La fonction f étant évidemment biunivoque, il s'agit de démontrer qu'elle est continue, c.-à-d. que G étant un ensemble ouvert dans l'intervalle $\mathcal{J}$, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est ouvert (dans l'espace 1), ce qui se réduit au cas où G est un intervalle ouvert dans $\mathcal{J}$. Or, c'est une conséquence des formules (cf. VIII, 2):

$$f^{-1}(0y-y)=M(p_y) \quad \text{et} \quad f^{-1}(y1-y)=N(p_y),$$

les ensembles $M(p_y)$ et $N(p_y)$ étant ouverts.

Remarques. L'hypothèse du th. 6 équivaut évidemment à la condition qu'*à tout point x correspondent deux ensembles fermés A et B tels que*

$$1=A+B, \quad a\in A, \quad b\in B, \quad AB=x.$$

Elle équivaut aussi à l'hypothèse que *les points a et b ne se laissent unir par aucun vrai sous-ensemble connexe de l'espace.*

Soit, en effet, $p\in(1-a-b)$ un point qui ne sépare pas a de b. Il existe alors un ensemble connexe C tel que $a, b\in C\neq 1$. Car dans le cas où $1-p$ n'est pas connexe, il existe deux ensembles ouverts G et H tels que

$$1-p=G+H, \quad G\dot{H}=0, \quad H\neq 0 \quad \text{et} \quad a,b\in G,$$

puisque p ne sépare pas a de b.

L'ensemble $C=p+G$ est alors un vrai sous-ensemble connexe (cf. II, 4) de l'espace unissant les points a et b.

---

[1]) Amer. Journ. of Math. **33** (1911), où ce théorème se trouve démontré dans des hypothèses supplémentaires. Cf. aussi F. Hausdorff *Mengenlehre*, p. 220 et *Sur les ensembles connexes* § 2, de B. Knaster et de moi-même, Fund. Math. **2** (1921), où les espaces, de ce genre sont étudiés de plus près (sous le nom d'espaces connexes *irréductibles entre a et b*).

X. Unicohérence. Discohérence. Un espace 1 est dit *unicohérent* s'il est connexe et si, pour toute décomposition $1=A+B$ en deux ensembles connexes fermés, le produit AB est connexe.

L'espace est dit *discohérent* si, pour aucun couple d'ensembles fermés A et B tels que

$$(1) \qquad 1=A+B \quad \text{et} \quad A\neq 1\neq B,$$

le produit AB n'est connexe.

D'après II, 5, si l'espace est connexe sans être discohérent, il existe deux ensembles A et B, fermés, *connexes*, dont le produit est connexe et qui satisfont aux conditions (1).

Évidemment, tout espace discohérent est connexe.

Exemples. L'intervalle $\mathcal{J}$ est unicohérent, la circonférence $\mathcal{S}$ est discohérente. Comme on verra plus tard, $\mathcal{J}^n$ est unicohérent pour chaque n et $\mathcal{S}_n$ l'est pour $n\geqslant 2$.

1. *Pour qu'un espace connexe soit discohérent, il faut et il suffit qu'aucun sous-ensemble connexe et fermé C n'en soit un séparateur (c.-à-d. que $1-C$ soit toujours connexe).*

En effet, si

$$1-C=M+N, \quad \overline{M}\cdot N+\overline{N}\cdot M=0 \quad \text{et} \quad M\neq 0\neq N,$$

les ensembles $A=C+M$ et $B=C+N$ sont fermés, $A\neq 1\neq B$ et $AB=C$.

Réciproquement, si les ensembles fermés A et B satisfont à (1) et si le produit $C=AB$ est connexe, on a, en posant $M=1-A$ et $N=1-B$:

$$1-C=M+N, \quad \overline{M}\cdot N+\overline{N}\cdot M=0, \quad M\neq 0\neq N,$$

de sorte que l'ensemble (fermé et connexe) C est un séparateur de l'espace.

2. *Si l'espace est discohérent et C et D sont connexes, fermés et tels que*

$$(2) \qquad 1=C+D \quad \textit{et} \quad C\neq 1\neq D,$$

les ensembles $A=\overline{1-C}$ et $B=\overline{1-A}$ sont connexes, satisfont aux conditions (1) *et on a en outre $A=\overline{1-B}$.*

En effet, d'après 1, l'ensemble $1-C$ est connexe. L'ensemble $A=\overline{1-C}$ l'est donc également. Cela implique que $1-A$ est connexe; d'où la connexité de l'ensemble $B=\overline{1-A}$.

D'après (2), $1-C\subset D\neq 1$, d'où $\overline{1-C}\subset D\neq 1$, donc $A\neq 1$. Comme $0\neq 1-C\subset \mathrm{Int}(A)=1-\overline{1-A}$, on a $\overline{1-A}\neq 1$, d'où $B\neq 1$.

Puis $A+B=A+\overline{1-A}=1$.

Enfin, d'après § 8, VIII:

$$\overline{1-B}=\overline{1-\overline{1-A}}=\overline{1-\overline{1-\overline{1-C}}}=\overline{1-C}=A.$$

XI. Connexité n-dimensionnelle [1]. La notion de connexité se laisse préciser comme suit.

Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique séparable (contenant plus d'un point). $\mathfrak{X}$ est dit *à connexité au plus n-dimensionnelle* lorsqu'il existe une décomposition en deux ensembles fermés M et N telle que

$$(1) \qquad \mathfrak{X}=M+N, \quad M\neq\mathfrak{X}\neq N \quad \text{et} \quad \dim MN\leqslant n-1;$$

autrement dit: lorsqu'il existe un ensemble ouvert G tel que

$$(2) \qquad 0\neq G, \quad \overline{G}\neq\mathfrak{X} \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Fr}\,(G)\leqslant n-1;$$

ou encore: lorsqu'il existe un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ qui sépare $\mathfrak{X}$.

Le plus petit entier n de ce genre (fini ou infini) est dit *dimension de la connexité de* $\mathfrak{X}$ et est désigné par $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}$ [2]. Par conséquent — si $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}<\infty$ — il existe un séparateur fermé de dimension $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-1$, mais il n'en existe aucun de dimension $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-2$.

Convenons, en outre, que $\mathrm{dc}\,(p)=0$ et $\mathrm{dc}\,0=-1$.

On constate aussitôt que $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}\leqslant\dim\mathfrak{X}$ et que l'inégalité $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}\geqslant 1$ équivaut à l'hypothèse que $\mathfrak{X}$ est connexe et contient plus d'un point.

Les espaces *compacts* $\mathfrak{X}$ satisfaisant à l'égalité $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}=\dim\mathfrak{X}$ sont dits *multiplicités cantoriennes*.

Remarques. Pour deux cubes qui n'ont en commun qu'un seul sommet, on a $\mathrm{dc}=1$; s'ils ont une arête commune, on a $\mathrm{dc}=2$; enfin, s'ils ont une face commune, on a $\mathrm{dc}=3$.

---

[1] Voir la note de M. E. Otto et de moi-même *Sur les espaces à connexité n-dimensionnelle*, Fund. Math. **32** (1939), p. 259.

[2] Voir ma note *Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle*, Fund. Math. **30** (1938), p. 242 (on y remplacera n par $n+1$).

Comme on voit, le coefficient $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}$ permet de préciser l'idée géométrique qui attribue au polytope formé de deux cubes une connexité plus ou moins „faible", suivant que ces cubes sont unis par une face commune, une arête ou un sommet.

Les th. 6et 3 du § 40, IV entraînent les th. 1 et 2 qui suivent:

1. *$\mathfrak{X}$ étant un espace compact irréductible par rapport à son degré n-dimensionnel, on a* $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}\geqslant n$.

2. *Tout espace compact de dimension $\geqslant n$ contient un ensemble fermé F tel que* $\mathrm{dc}\,F\geqslant n$; *il contient donc, en particulier, une composante de dimension $\geqslant n$* [1]).

De nombreux théorèmes de la théorie des ensembles connexes se laissent généraliser et préciser de façon à devenir des énoncés sur la dimension de connexité. Citons-en sans démonstration les suivants:

3. *C étant un ensemble contenant plus d'un point, l'inégalité* $\mathrm{dc}\,C\leqslant n$ *équivaut à l'existence de deux ensembles M et N tels que*

$$(3)\quad C=M+N,\quad C-\overline{M}\neq 0\neq C-\overline{N},\quad \dim(\overline{M}\cdot N+\overline{N}\cdot M)\leqslant n-1,$$

ainsi qu'à l'existence d'un ensemble ouvert G tel que

$$(4)\qquad CG\neq 0\neq C-\overline{G},\quad \dim[C\cdot\mathrm{Fr}\,(G)]\leqslant n-1.$$

4. *Si* $\mathrm{dc}\,C\geqslant n$, $C\subset M+N$ *et* $\dim(\overline{M}\cdot N+\overline{N}\cdot M)\leqslant n-2$, *on a soit $C\subset\overline{M}$, soit $C\subset\overline{N}$.*

5. *Étant donnée une famille $\{C_\iota\}$ d'ensembles tels que* $\mathrm{dc}\,C_\iota\geqslant n$ *et qui contient un ensemble C_0 tel que* $\dim C_0\cdot C_\iota\geqslant n-1$ *pour tout ι, on a* $\mathrm{dc}\,(\sum\limits_\iota C_\iota)\geqslant n$.

6. *Si* $C\subset E\subset\overline{C}$ *et* $\mathrm{dc}\,C\geqslant n$, *on a* $\mathrm{dc}\,E\geqslant n$.

7. $\mathrm{dc}\,(\mathfrak{X}-C)\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-\dim C-1$.

8. *Si* $\mathfrak{X}-C=M+N$, $\overline{M}\cdot N+\overline{N}\cdot M=0$ *et* $\mathrm{dc}\,C\leqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}$, *on a* $\mathrm{dc}\,C\leqslant\mathrm{dc}\,(C+M)$ *et* $\mathrm{dc}\,C\leqslant\mathrm{dc}\,(C+N)$.

9. *A et B étant deux ensembles fermés tels que* $\mathrm{dc}\,AB\leqslant\mathrm{dc}\,(A+B)$, *on a* $\mathrm{dc}\,(AB)\leqslant\mathrm{dc}\,A$ *et* $\mathrm{dc}\,(AB)\leqslant\mathrm{dc}\,B$.

10. *f étant une transformation continue d'un espace compact (et connexe) $\mathfrak{X}$ à tranches de dimension $\leqslant k$, on a*

$$\mathrm{dc}\,f(\mathfrak{X})\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-k.$$

[1]) Dans le même ordre d'idées, cf. la notion de „composante dimensionnelle" de P. Alexandroff, Math. Ann. **106** (1932), p. 215. Cf. aussi L. Tumarkin, C. R. Paris **186** (1928), p. 420.

XII. Connexité n-dimensionnelle entre deux ensembles.

$\mathfrak{X}$ est dit *à connexité n-dimensionnelle entre deux sous-ensembles A et B*, en symbole: $\mathrm{dc}_{A,B}\,\mathfrak{X}=n$, lorsque n est le plus petit entier tel qu'il existe deux ensembles fermés M et N assujettis aux conditions:

$$\mathfrak{X}=M+N,\quad AN=0=BM,\quad \dim MN\leqslant n-1,$$

c.-à-d. qu'il existe un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ qui sépare $\mathfrak{X}$ entre A et B.

On démontre que [1])

1. *Pour qu'un ensemble C (situé dans $\mathfrak{X}$) soit à connexité $\leqslant$n-dimensionnelle entre deux sous-ensembles A et B, il faut et il suffit qu'il existe un G ouvert tel que*

$$A\subset G,\quad \overline{G}\cdot B=0,\quad \dim C\cdot\mathrm{Fr}\,(G)\leqslant n-1.$$

2. *Si* $\mathrm{dc}_{A_1,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$ *et* $\mathrm{dc}_{A_2,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$, *on a* $\mathrm{dc}_{A_1+A_2,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$.

3. *Pour tout espace compact, la connexité n-dimensionnelle entre deux ensembles fermés A et B entraîne la connexité n-dimensionnelle entre un couple de points $a\in A$ et $b\in B$.*

Plus précisément: *étant donnés dans un espace compact un ensemble C et deux sous-ensembles A et B de C, il existe deux points $a\in\overline{A}$ et $b\in\overline{B}$ tels que*

$$\mathrm{dc}_{A,B}\,C\leqslant\mathrm{dc}_{a,b}\,(C+a+b).$$

4. *Pour que* $\dim_a\mathfrak{X}\leqslant n$, *il faut et il suffit que tout ensemble fermé B tel que $a\in\mathfrak{X}-B$ satisfasse à la condition* $\mathrm{dc}_{a,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$.

5. *Pour que* $\dim\mathfrak{X}\leqslant n$, *il faut et il suffit que, quels que soient les ensembles A et B fermés et disjoints, on ait* $\mathrm{dc}_{A,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$.

Si $\mathfrak{X}$ est compact, il faut et il suffit que, quels que soient les points $a\neq b$, on ait $\mathrm{dc}_{a,b}\,\mathfrak{X}\leqslant n$.

6. *C étant un sous-ensemble d'un espace compact, à tout point $a\in C$ correspond un point $b\neq a$ tel que*

$$\mathrm{dc}_{a,b}\,(C+b)=\dim_a C,\quad \textit{pourvu que}\quad \dim_a C<\infty.$$

7 [2]). *$\mathfrak{X}$ étant un espace métrique séparable, on peut le compactifier sans augmenter la dimension de sa connexité entre aucun couple de points.*

[1]) Voir ibidem, p. 263—264.

[2]) Voir ma note citée de Fund. Math. **30**, p. 243. Le th. 7 est une généralisation du th. 4 du N° V.

Plus précisément: *les homéomorphies* $f \in (\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ *telles que, quel que soit le couple* $p, q \in \mathfrak{X}$, *la dimension de la connexité de* $\mathfrak{X}$ *entre* p *et* q *est égale à celle de la connexité de* $\overline{f(\mathfrak{X})}$ *entre* $f(p)$ *et* $f(q)$, — *constituent un ensemble résiduel dans l'espace* $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$.

§ 42. Continus.

I. Définition. Conséquences immédiates. Un espace connexe et compact s'appelle un *continu* [1]).

Pour qu'un espace compact soit un continu, il faut et il suffit qu'à tout couple de points a *et* b *de cet espace et à tout* $\varepsilon > 0$ *corresponde un système fini de points*

$$p_0 = a, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n = b \quad \textit{où} \quad |p_i - p_{i+1}| < \varepsilon\ ^{2}).$$

La condition est nécessaire, car l'ensemble $F(a, \varepsilon)$ des points qui se laissent unir à a par une „chaîne" à chaînons $< \varepsilon$ est fermé et ouvert; il coïncide donc avec l'espace si cet espace est connexe. La condition est suffisante, car étant donnée une décomposition $1 = A + B$ de l'espace compact 1 en deux ensembles fermés, disjoints et non vides, on a $\varrho(A, B) > 0$; il n'existe donc aucune chaîne entre $a \in A$ et $b \in B$ à chaînons $< \varrho(A, B)$.

Les énoncés suivants résultent directement des théorèmes correspondants du § 41 sur les ensembles connexes:

1. *La somme de deux continus ayant des points communs est un continu* (cf. II, 3, 1⁰).

2. A *et* B *étant deux ensembles compacts tels que* $A + B$ *et* AB *sont des continus,* A *et* B *sont des continus* (cf. II, 5).

3. C *étant un sous-continu du continu* 1 *et* M *et* N *étant deux ensembles séparés tels que* $1 - C = M + N$, *les ensembles* $C + M$ *et* $C + N$ *sont des continus* (cf. II, 4).

4. *Le produit cartésien (fini ou dénombrable) de continus est un continu* (II, 11).

5. *L'image continue d'un continu est un continu* (I, 3).

6. *Les composantes d'un espace compact sont des continus* (III, 1).

---

[1]) Le terme „continu" est employé aussi par différents auteurs pour désigner les ensembles connexes fermés.

[2]) C'est bien la définition primitive du continu de G. Cantor. Voir Math. Ann. **21** (1883), p. 576.

II. Sous-ensembles connexes des espaces compacts. 1. *Tout espace compact jouit de la propriété suivante:*

(M) *La connexité de l'espace entre deux ensembles fermés* A *et* B *entraîne sa connexité entre un couple de points* a *et* b *où* $a \in A$ *et* $b \in B$ [1]).

De façon plus générale, *si un sous-ensemble* E *d'un espace compact est connexe entre deux ensembles* A *et* B *(où* $A + B \subset E$*), il existe un couple de points* $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ *tel que l'ensemble* $E + a + b$ *est connexe entre* a *et* b.

Soit, en effet, $\boldsymbol{G}$ la famille de tous les ensembles ouverts G tels que $E \cdot \mathrm{Fr}(G) = 0$. Supposons que, quels que soient les points $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$, l'ensemble $E + a + b$ ne soit jamais connexe entre a et b, c.-à-d. (cf. § 41, IV, 7) qu'à tout couple $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ corresponde un G ouvert tel que

$$a \in G, \quad b \ \textit{non-}\in \bar{G} \quad \text{et} \quad (E + a + b) \cdot \mathrm{Fr}(G) = 0,$$

donc que $G \in \boldsymbol{G}$.

Il existe alors d'après § 37, V, 6, un ensemble

$$H = G_1^1 \cdot \ldots \cdot G_{i_1}^1 + \ldots + G_1^k \cdot \ldots \cdot G_{i_k}^k \quad \text{où} \quad G_j^i \in \boldsymbol{G}$$

tel que $\bar{A} \subset H$ et $\bar{B} \cdot \bar{H} = 0$. Comme (cf. § 6, II (8) et (9))

$$\mathrm{Fr}(H) \subset \sum_{i,j} \mathrm{Fr}(G_j^i),$$

il vient $E \cdot \mathrm{Fr}(H) = 0$. E n'est donc pas connexe entre A et B.

2. *Dans les espaces compacts (ou, plus généralement, dans les espaces à propriété* M*) les quasi-composantes sont connexes et coïncident, par conséquent, avec les composantes.*

Supposons, en effet, que la quasi-composante Q du point p ne soit pas connexe. Il existe alors (cf. § 41, I, 2) un ensemble ouvert G et un point q tels que

$$p \in G, \quad q \in Q - \bar{G} \quad \text{et} \quad Q \cdot \mathrm{Fr}(G) = 0.$$

La dernière égalité veut dire que l'espace n'est connexe entre p et aucun point de l'ensemble $\mathrm{Fr}(G)$. La propriété M implique donc que l'espace n'est pas connexe entre p et $\mathrm{Fr}(G)$. Il existe par conséquent un ensemble fermé-ouvert F tel que

$$p \in F \quad \text{et} \quad F \cdot \mathrm{Fr}(G) = 0.$$

---

[1]) Cf. S. Mazurkiewicz, C. R. Paris **151** (1910), p. 296.

Il vient $p \in FG$ et $q \in 1-FG$; en outre FG est ouvert et fermé, puisque

$$\overline{FG} \subset \overline{F} \cdot \overline{G} = F \cdot \overline{G} = F \cdot G + F \cdot \mathrm{Fr}(G) = F \cdot G.$$

On est parvenu ainsi à une conclusion incompatible avec l'hypothèse de connexité de l'espace entre p et q.

3. *Si un espace compact (ou, plus généralement, un espace à propriété M) est connexe entre deux ensembles fermés A et B, il existe une composante C telle que $AC \neq 0 \neq BC$.*

En effet, (a,b) désignant un couple de points tel que $a \in A$, $b \in B$ et que l'espace est connexe entre a et b, C est la composante (donc la quasi-composante) du point a.

4[1]. *Dans tout espace compact, la limite d'une suite convergente d'ensembles connexes est connexe.*

Par conséquent, *la famille des sous-continus (non-vides) d'un espace compact $\mathfrak{X}$ est fermée dans l'espace $2^{\mathfrak{X}}$.*

Posons

$$C = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} C_n. \tag{1}$$

Admettons que C soit non-connexe, donc que A et B soient deux ensembles fermés tels que

$$C = A + B, \quad AB = 0 \quad \text{et} \quad A \neq 0 \neq B.$$

Il existe donc deux ensembles ouverts G et H tels que

$$GH = 0, \quad A \subset G \quad \text{et} \quad B \subset H.$$

Il vient $C \subset G + H$. L'espace étant compact, on en conclut (cf. § 38, I, 2) que $C_n \subset G + H$ pour n suffisamment grand.

D'autre part, comme $0 \neq A \subset G$, il résulte de (1) que $C_n G \neq 0$ pour n suffisamment grand et, de façon analogue, que $C_n H \neq 0$. Mais alors C_n n'est pas connexe (cf. § 41, II, 1).

Le th. 4 implique trois corollaires:

5. *$C_1, C_2, \ldots$ étant une suite de continus tels que*

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots, \tag{2}$$

le produit $C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_n \cdot \ldots$ est un continu.

Car la condition (2) implique que $C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} C_n$ (cf. § 25, VI, 8).

[1]) Cf. L. Zoretti, Journ. de Math. (6) **1** (1905), p. 8.

Remarque. Le th. 5 admet la généralisation suivante:

Étant donnée, dans un espace complet, une suite descendante, $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ d'ensembles fermés, connexes et tels que $\lim_{n=\infty} \alpha(C_n) = 0$, le produit $C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots$ est un continu[1]).

Supposons par impossible que

$$\prod_n C_n = A + B, \tag{3}$$

$$A = \overline{A}, \quad B = \overline{B}, \quad A \neq 0 \neq B, \quad AB = 0. \tag{4}$$

Soit G un ensemble ouvert tel que

$$A \subset G \quad \text{et} \quad \overline{G} \cdot B = 0. \tag{5}$$

L'ensemble C_n étant connexe, l'inégalité $C_n G \neq 0 \neq C_n - G$ entraîne $C_n \cdot \mathrm{Fr}(G) \neq 0$. Posons $F_n = C_n \cdot \mathrm{Fr}(G)$. Comme

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots, \quad 0 \neq F_n = \overline{F}_n$$

et

$$\alpha(F_n) \leqslant \alpha(C_n), \quad \text{d'où} \quad \lim_{n=\infty} \alpha(F_n) = 0,$$

il vient, selon § 37, IV, remarque 2,

$$\prod_n F_n \neq 0, \quad \text{c.-à-d.} \quad \prod_n C_n \cdot \mathrm{Fr}(G) \neq 0,$$

contrairement aux formules (3) et (5).

Il est ainsi établi que l'ensemble $\prod_n C_n$ est connexe. Sa compacité résulte de l'égalité $\alpha(\prod_n C_n) = 0$, qui signifie que $\prod_n C_n$ est totalement borné (cf. § 37, II, 3).

6. *$C_1, C_2, \ldots$ étant une suite de sous-continus d'un espace compact tels que $\operatorname*{Li}_{n=\infty} C_n \neq 0$, l'ensemble $\operatorname*{Ls}_{n=\infty} C_n$ est un continu.*

En effet, d'après § 25, VIII, corollaire, $\operatorname*{Ls}_{n=\infty} C_n$ est la somme des limites des sous-suites $\{C_{k_n}\}$ convergentes. Ces limites étant connexes (d'après 4) et contenant l'ensemble $\operatorname*{Li}_{n=\infty} C_n$ (cf. § 25, II, 5), leur somme est connexe (cf. § 41, II, 2).

7. *f étant une transformation continue du continu $\mathfrak{X}$, il existe un sous-continu C de $\mathfrak{X}$ irréductible par rapport à la propriété: être un continu tel que $f(C) = f(\mathfrak{X})$.*

[1]) Voir ma note dans Fund. Math. **15** (1930), p. 304. Pour la définition de $\alpha(C)$, voir § 37, IV, remarque 2.

C'est une conséquence du th. 1 du § 38, V et du fait que les familles des continus et des ensembles fermés X tels que $f(X)=f(\mathfrak{X})$ sont fermées dans $2^{\mathfrak{X}}$ (cf. § 38, VI, 3).

8. *Soit E un sous-ensemble d'un espace compact. Si $\dim_a E>0$ (où a est un point fixe de E), il existe un point $b\neq a$ tel que $E+b$ est connexe entre a et b* [1]).

En effet, B_0 étant un ensemble fermé dans E tel que $a\in E-B_0$ et que E est connexe entre a et B_0 (cf. § 41, IV, 2), on n'a qu'à poser dans le th. 1: $A=a$ et $B=\bar{B}_0$.

9. *Si un espace compact (ou plus généralement, un espace à propriété M) est de dimension positive au point p, ce point est situé sur un ensemble connexe (qui ne se réduit pas à p).*

En effet, d'après le th. 8, l'espace est connexe entre p et un point $q\neq p$. La quasi-composante de p, qui est en même temps sa composante, contient donc q.

III. Sous-ensembles fermés du continu.

1. *A étant un vrai sous-ensemble fermé du continu* 1 *et C étant une composante de A, on a*

$$C\cdot\overline{1-A}\neq 0,\quad \text{c.-à-d.}\quad C\cdot\mathrm{Fr}(A)\neq 0\ ^{2)}.$$

Car (cf. II, 3) A est connexe entre tout point a de A et l'ensemble $A\cdot\overline{1-A}$ (d'après § 41, IV, 8).

Le th. 1 admet la généralisation suivante:

2. *X étant un vrai sous-ensemble (arbitraire) du continu* 1 *et C étant une composante de X, on a*

$$\bar{C}\cdot\overline{1-X}\neq 0,\quad \text{c.-à-d.}\quad \bar{C}\cdot\mathrm{Fr}(X)\neq 0.$$

Soit $a\in C$. Le théorème étant trivial lorsque $a\in\overline{1-X}$, soit a un point intérieur de X. Soit S_n la sphère ouverte de centre a et de rayon $\dfrac{1}{n}\varrho(a,\overline{1-X})$. D'après 1, il existe un continu C_n tel que

$$a\in C_n\subset 1-S_n\quad\text{et}\quad C_n\cdot\bar{S}_n\neq 0.$$

Comme $1-X\subset S_n$, on a $1-S_n\subset X$. Par conséquent

$$C_n\subset C,\quad \text{d'où}\quad C\cdot\bar{S}_n\neq 0,\quad \text{donc}\quad \bar{C}\cdot\bar{S}_n\neq 0.$$

D'autre part,

$$\overline{1-X}=\prod_n\bar{S}_n,\quad \text{d'où}\quad \bar{C}\cdot\overline{1-X}=\prod_n\bar{C}\cdot\bar{S}_n\neq 0,$$

d'après le théorème de Cantor (§ 37, IV, 1).

3. *A étant un vrai sous-ensemble fermé d'un continu, toute composante de A contient une (au moins) composante de la frontière de A.*

Par conséquent, *la puissance de la famille des composantes de A ne dépasse jamais celle de la famille des composantes de* $\mathrm{Fr}(A)$.

En effet, C étant une composante de A, on a d'après 1 $C\cdot\mathrm{Fr}(A)\neq 0$. Soit D une composante de $\mathrm{Fr}(A)$ telle que $CD\neq 0$. Comme $D\subset\mathrm{Fr}(A)\subset A$, il vient $D\subset C$.

4. *Tout point a d'un continu* 1 *(qui ne se réduit pas à ce point) est situé sur un sous-continu (ne se réduisant pas à a) de* 1, *de diamètre aussi petit que l'on veut.*

Pour s'en convaincre, il suffit de substituer à A dans le th. 1 une sphère de centre a et de rayon arbitrairement petit.

5 [1]). *K étant un vrai sous-continu du continu* 1, *il existe un continu C tel que*

$$K\subset C\quad\text{et}\quad K\neq C\neq 1.$$

Soient, en effet, G un ensemble ouvert tel que $K\subset G$ et $\bar{G}\neq 1$, et C la composante de $\bar{G}$ contenant K. C est donc un vrai sous-continu de l'espace, et il vient d'après 1:

$$C\cdot\overline{1-\bar{G}}\neq 0,\quad \text{d'où}\quad C-G\neq 0,$$

car

$$C-G=C\cdot\overline{1-G}\supset C\cdot\overline{1-\bar{G}}.$$

Les formules $K\subset G$ et $C-G\neq 0$ donnent $K\neq C$.

6. *Théorème de Sierpiński* [2]). *Aucun continu ne se laisse décomposer en une infinité dénombrable d'ensembles fermés, non vides et disjoints.*

---

[1]) Théorème de K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 207.

[2]) Théorème de S. Janiszewski, Bull. Acad. Sc. Cracovie 1912, p. 907. Pour des généralisations de ce théorème, voir P. Szymański, *Sur les constituants d'ensembles situés sur des continus arbitraires*, Fund. Math. **10** (1927), p. 363, où l'on trouvera d'autres renvois bibliographiques.

[1]) Pour des généralisations du th. 5, voir N⁰ VII, 3 et § 43, VI, 1.

[2]) Tôhoku Math. Journ. **13** (1918), p. 300.

Supposons, par contre, que l'espace 1 soit un continu tel que

$$1=\sum_n A_n,$$

les A_n étant fermés, disjoints et deux (au moins) parmi eux n'étant pas vides. Nous allons définir une suite de continus $C_1, C_2, \ldots$ tels que:

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots, \quad C_n A_n = 0 \quad \text{et} \quad C_n \neq 0;$$

cela impliquera une contradiction, puisque

$$\prod_n C_n \cdot \sum_n A_n = 0, \quad \text{d'où} \quad \prod_n C_n = 0,$$

contrairement au théorème de Cantor.

Tout revient donc à démontrer l'existence d'un continu C tel que $C \cdot A_1 = 0$ et que deux au moins des termes $CA_2, CA_3, \ldots$ ne soient pas vides (on désignera C par C_1 et, pour définir C_2, on considérera C_1 comme l'espace etc.).

Or, on peut admettre évidemment que $A_1 \neq 0$ (car on poserait $C=1$ dans le cas contraire). Soit $A_m \neq 0$ avec $m \neq 1$. Soient F un entourage fermé de A_m (c.-à-d. $A_m \cdot \overline{1-F} = 0$) tel que $F \cdot A_1 = 0$, et C une composante de F telle que $C \cdot A_m \neq 0$. Comme $F \cdot A_1 = 0$, on a $C \cdot A_1 = 0$. D'autre part, d'après 1,

$$C \cdot \overline{1-F} \neq 0, \quad \text{d'où} \quad C \not\subset A_m, \quad \text{c.-à-d.} \quad C - A_m \neq 0,$$

et comme

$$C - A_m \subset CA_2 + \ldots + CA_{m-1} + CA_{m+1} + \ldots,$$

il existe un indice $n \neq m$ tel que $CA_n \neq 0$.

Remarques. 1° Le th. 6 implique le corollaire suivant:

6 a. *Si un espace compact est décomposé en une infinité dénombrable de continus disjoints (non vides) $C_1, C_2, \ldots$, tout C_n est une composante de l'espace.*

Car il existerait, dans le cas contraire, un continu K tel que $K \supset C_n$ et $K \neq C_n$. La série

$$K = KC_1 + KC_2 + \ldots$$

contiendrait donc au moins deux termes non vides.

2° L'hypothèse de compacité dans le th. 6 est *essentielle*. Voici un exemple d'espace connexe et *localement compact* E qui se décompose en une série d'ensembles fermés, connexes et disjoints.

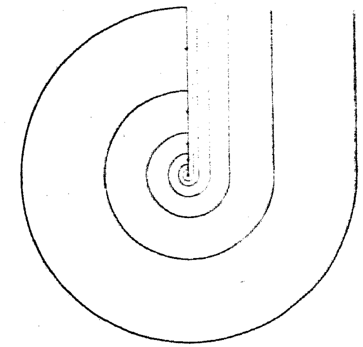
E est la réunion:

1° des segments $x = 2^{-n}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

2° du segment $x = 0$, $0 < y \leqslant 1$, diminué des points à ordonnées $3/2^n$,

3° des arcs $\varrho = 2^{-n}$, $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (en coordonnées polaires) [1]).

On peut transformer facilement par homéomorphie l'ensemble E en un ensemble connexe et fermé situé dans l'espace euclidien *à 3 dimensions*. Cependant, *sur le plan*, il n'existe aucun ensemble connexe fermé qui se laisse décomposer en une série d'ensembles fermés, *connexes* et disjoints [2]). Par contre, on peut construire sur le plan un ensemble connexe et fermé qui se décompose en une série d'ensembles fermés et disjoints (mais non connexes) [3]).



Applications à la notion d'accessibilité. Un point p est dit *accessible de l'ensemble A* lorsqu'il existe un continu C tel que

$$(1) \qquad p \in C \subset A + p \quad \text{et} \quad C \neq p.$$

Ainsi p. ex., E désignant la courbe $y = \sin(1/x)$, $0 < |x| \leqslant 1$, augmentée du segment $|y| \leqslant 1$, $x = 0$, seules les extrémités de ce segment sont accessibles de $\mathcal{E}^2 - E$, tous les autres points de ce segment étant inaccessibles.

7. *Théorème d'Urysohn* [4]). *E étant un F_σ dans un espace complet séparable, l'ensemble E_a de ses points qui sont accessibles de $1-E$ est analytique.*

---

[1]) Voir W. Sierpiński, Fund. Math. **4** (1923), p. 5 et Wiad. Mat. **23** (1919), p. 188. Cf. aussi la note de B. Knaster et de moi-même, Fund. Math. **5** (1924), p. 58.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur les continus plans non bornés*, Fund. Math. **5** (1924), p. 188, et. R. L. Moore, *Concerning the sum of a countable number of mutually exclusive continua in the plane*, Fund. Math. **6** (1924), p. 189.

[3]) S. Mazurkiewicz, loc. cit.

[4]) *Sur les points accessibles des ensembles fermés*, Proc. Akad. Amsterdam **28** (1925), p. 984. Pour la démonstration, voir ma note de Fund. Math. **17** (1931), p. 263. Pour un théorème analogue concernant l'accessibilité rectilinéaire, cf. § 34, VIII.

Car (cf. § 37, III, 9):

$$(x \in E_a) \equiv (x \in E) \cdot \sum_C \{(C \neq x) \prod_y [(y \neq x) \rightarrow (y \in 1-E)]\},$$

C parcourant l'espace compact (cf. II, 4) des sous-continus de l'espace 1.

Des exemples d'ensembles fermés situés dans $\mathcal{E}^3$ prouvent que l'ensemble E_a peut être *non-borelien* [1]).

8. *G étant un sous-ensemble ouvert d'un continu, tout point isolé p de* $\mathrm{Fr}(G)$ *est accessible de G.*

Nous allons établir d'abord l'existence d'un continu K tel que

$$(2) \qquad p \in K \subset \bar{G} \quad \text{et} \quad K \neq p.$$

Soit $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$ où $p_n \in G$. Soit C_n la composante de p_n dans G. Si $p \in \bar{C}_n$, le continu $K = \bar{C}_n$ vérifie les conditions (2). Il est donc légitime d'admettre que p *non-*$\in \bar{C}_n$ quel que soit n, et qu'en outre, la suite $\{C_n\}$ est convergente. Posons $K = \mathrm{Lim}_{n=\infty} C_n$.

D'après III, 2, il existe un point $q_n \in \bar{C}_n - G$. On peut admettre que la suite $\{q_n\}$ est convergente: $q = \lim\limits_{n=\infty} q_n$. Comme $q_n \in \bar{C}_n - G \subset \bar{G} - G$ et p est un point isolé de $\bar{G} - G$, il vient $p \neq q \in K$, d'où la formule (2).

Ceci établi, soit (conformément à III, 4) C un continu assujetti aux conditions:

$$p \in C \subset K \quad \text{et} \quad 0 < \delta(C) < \varrho[p, \mathrm{Fr}(G) - p].$$

Les formules (1) se trouvent donc vérifiées en substituant G à A.

IV. Séparation des espaces compacts. Le th. II, 3 implique que:

1. *Si $\mathcal{X}$ est compact, C en est un séparateur dans ce cas et dans ce cas seulement, lorsqu'il existe une composante Q de $\mathcal{X}$ contenant deux points entre lesquels $\mathcal{X} - C$ n'est pas connexe.*

Dans ce cas, CQ est évidemment un séparateur de Q.

Cependant, un séparateur d'une composante de $\mathcal{X}$ n'est pas nécessairement un séparateur de $\mathcal{X}$.

---

[1]) P. Urysohn, ibid. et O. Nikodym, C. R. Soc. Sc. de Varsovie **19** (1926), p. 285.

Ajoutons que, si E est un sous-ensemble compact du plan, E_a est borelien. Voir S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **26** (1936), p. 153.

Le th. 1 du § 41, VII se laisse préciser comme suit:

2. *Dans tout espace compact $\mathcal{X}$, il existe une suite de points $p_1, p_2, \ldots$ telle que tout séparateur fermé F est un séparateur entre un couple (p_i, p_j) entre lequel $\mathcal{X}$ est connexe.*

Plus précisément, *étant donnés: une famille $\{Q_n\}$ de composantes, dense dans la famille de toutes les composantes de $\mathcal{X}$, et un ensemble dénombrable de points $P = \{p_n\}$ tel qu'on a $\overline{PQ_n} = Q_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on peut faire correspondre à tout séparateur fermé F trois indices i, j, k tels que $p_i, p_j \in Q_k$ et que F sépare l'espace entre ces points.*

En effet, il existe par hypothèse deux ensembles ouverts M et N et une composante C de $\mathcal{X}$ tels que

$$(1) \qquad \mathcal{X} - F = M + N, \quad MN = 0,$$

$$(2) \qquad CM \neq 0 \neq CN.$$

L'ensemble C étant la limite d'une suite extraite de $\{Q_n\}$, il existe un indice k tel que

$$Q_k \cdot M \neq 0 \neq Q_k \cdot N.$$

Enfin, l'égalité $\overline{PQ_k} = Q_k$ implique l'existence de deux indices i et j tels que $p_i \in Q_k \cdot M$ et $p_j \in Q_k \cdot N$. D'après (1), F est un séparateur de l'espace entre p_i et p_j.

3. *Théorème de G. T. Whyburn* [1]). *Si $\mathcal{X}$ est un continu, l'ensemble $S(a,b)$ de tous les points qui séparent $\mathcal{X}$ entre a et b est un G_δ augmenté d'un ensemble dénombrable.*

D'après § 41, IX, 5, l'ensemble $S(a,b) + a + b$ diminué d'un ensemble dénombrable coïncide avec l'ensemble des points de biunivocité d'une fonction continue définie sur $\mathcal{X}$, et celui-ci est un G_δ (cf. § 37, VI, 9).

4. *L'ensemble de tous les points qui séparent le continu $\mathcal{X}$ est un $G_{\delta\sigma}$.*

C'est une conséquence des th. 2 et 3.

Remarque. Si $\mathcal{X}$ n'est pas compact, $S(a,b)$ peut être non borelien. Soit, en effet, dans le carré $\mathcal{I}^2$, $\mathcal{X}$ l'ensemble composé de la base du carré et des segments verticaux aux abscisses appartenant à un ensemble D dense dans $\mathcal{I}$.

Soient $a = (0,0)$ et $b = (1,0)$. Il vient $S(a,b) = \mathcal{I} - D$.

---

[1]) Trans. Amer. Math. Soc. **32** (1930), p. 151.

5. *Théorème de R. L. Moore* [1]). *Dans tout continu $\mathcal{X}$ (qui contient plus d'un point), il existe au moins deux points qui ne le séparent pas.*

Il s'agit de démontrer que, étant donné un point p, il existe un $q\neq p$ qui ne sépare pas $\mathcal{X}$. Or, soit $p_0, p_1, p_2, \dots$ une suite dense dans $\mathcal{X}$ où $p_0=p$ et où $p_i\neq p_j$ pour $i\neq j$. On peut admettre que, pour $n>0$, p_n sépare $\mathcal{X}$.

Soit $i_0=0, i_1, i_2, \dots$ une suite d'indices et $A_0=\mathcal{X}, A_1, A_2, \dots$ une suite d'ensembles ouverts définies par les conditions suivantes:

1° i_n est le plus petit indice tel que $p_{i_n}\in A_{n-1}$,

2° A_n est un ensemble ouvert tel que

$$\bar{A}_n=A_n+p_{i_n} \quad \text{et} \quad p_{i_{n-1}}\in \mathcal{X}-A_n$$

(l'existence de A_n résulte du fait que $\mathcal{X}-p_{i_n}$ se décompose en deux ensembles ouverts, disjoints et non vides; celui qui ne contient pas $p_{i_{n-1}}$ est désigné par A_n).

$\bar{A}_n$ étant un continu (cf. § 41, II, 4), les conditions

(1) $\quad p_{i_n}\in \bar{A}_n\cdot A_{n-1}$ et $\operatorname{Fr}(A_{n-1})=p_{i_{n-1}}$, d'où $\bar{A}_n\cdot\operatorname{Fr}(A_{n-1})=0$,

entraînent (cf. § 41, I, 1) $\bar{A}_n\subset A_{n-1}$.

Donc (cf. § 37, IV, 1) $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\neq 0$. Soit

(2) $\quad q\in(A_1\cdot A_2\cdot\ldots)$, d'où $q\neq p_{i_n}$ pour $n=0,1,\dots$

Soient M et N deux ensembles ouverts tels que

(3) $$\mathcal{X}-q=M+N \quad \text{et} \quad MN=0.$$

Il s'agit de prouver qu'un d'eux est vide. Supposons qu'il existe une infinité d'indices i_n tels que $p_{i_n}\in N$, donc que

(4) $$(M+q)\cdot\operatorname{Fr}(A_n)=0$$

d'après (1), (2) et (3).

L'ensemble $M+q$ étant un continu (cf. § 41, II, 4), la condition $(M+q)\cdot A_n\neq 0$ (cf. (2) et (4)) entraîne d'après § 41, I, 1

(5) $$M+q\subset A_n, \quad \text{d'où} \quad M+q\subset A_1\cdot A_2\cdot\ldots$$

[1]) Trans. Amer. Math. Soc. **21** (1920), p. 340, th. 2 et Proc. Nat. Ac. Sc. **9** (1923), p. 101. Pour des généralisations, voir N° VI. Cf. aussi S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **2** (1921), p. 119, H. M. Gehman, Proc. Nat. Ac. Sc. **14** (1928), p. 433, R. H. Bing, Amer. Journ. of Math. **70** (1948), p. 501, et ma note de Fund. Math. **5** (1924), p. 113.

Si l'on suppose que $M\neq 0$, il existe un $p_k\in M$; mais alors n étant un indice tel que $i_n>k$, il vient $p_k\in M\subset A_{n-1}$ (d'après (5)) et i_n n'est pas le plus petit indice satisfaisant à la condition $p_{i_n}\in A_{n-1}$, contrairement à 1°. Donc $M=0$.

V. Arcs. Courbes simples fermées. Un espace homéomorphe à l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$ est dit un *arc*. Un espace homéomorphe à la circonférence $x^2+y^2=1$ est dit une *courbe simple fermée*.

Comme tout intervalle contient exactement deux points qui ne le séparent pas, il en est de même de tout arc. Ces deux points s'appellent *extrémités* de l'arc (un „arc ab" est un arc aux extrémités a et b).

1. *Si tout point x du continu $\mathcal{X}$, abstraction faite de deux points a et b, en est un séparateur, $\mathcal{X}$ est un arc* [1]).

Soient, en effet, $a\neq x\neq b$ et $1-x=M+N$, où M et N sont deux ensembles ouverts, disjoints et non vides. Soit $a\in M$. Il vient $b\in N$, car, dans le cas contraire, y désignant (conformément au th. V, 5) un point de N qui ne sépare pas le continu $N+x$, l'ensemble

$$1-y=(N+x)-y+(M+x)$$

serait connexe, contrairement à l'hypothèse.

Chaque x étant un point de séparation entre a et b, l'intervalle 01 est une image biunivoque et continue de $\mathcal{X}$, d'après le th. 6 du § 41, IX. En tant que compact, l'espace $\mathcal{X}$ est donc homéomorphe à l'intervalle (cf. 37, VI, 2).

1'. *Si le continu $\mathcal{X}$ contient deux points a et b tels qu'à tout point x correspondent deux ensembles fermés A et B satisfaisant aux conditions*

$$\mathcal{X}=A+B, \quad a\in A, \quad b\in B \quad \textit{et} \quad AB=x,$$

$\mathcal{X}$ est un arc [2]).

Car tout point $x\in\mathcal{X}-a-b$ en est un séparateur.

[1]) Cf. le renvoi au th. de Lennes (§ 41, IX, 6). Voir aussi R. L. Moore, *Concerning simple continuous curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **21** (1920), p. 340.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *L'arc simple comme un ensemble de points dans l'espace à m-dimensions*, Ann. di Mat. **26** (1916), p. 131, et *Le continu linéaire comme un ensemble abstrait*, Prace Mat.-Fiz. **27** (1916), p. 203, S. Straszewicz, *Über den Begriff des einfachen Kurvenbogens*, Math. Ann. **78** (1918), p. 369.

Remarque. Les conditions énoncées dans **1** et **1'** sont non seulement suffisantes, mais aussi *nécessaires* pour qu'un espace soit un arc. De façon générale: les arcs formant un seul type topologique, toute propriété topologique suffisante pour qu'un espace soit un arc (et réalisée pour au moins un espace) est en même temps une condition nécessaire.

2. *Théorème de R. L. Moore*[1]. *Si tout couple de points sépare le continu $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}$ est une courbe simple fermée.*

D'abord, pour tout a, l'ensemble $\mathscr{X}-a$ est connexe. Car, il existerait, dans le cas contraire, deux continus P et Q tels que

$$\mathscr{X}=P+Q \quad \text{et} \quad PQ=a.$$

Il existerait donc d'après IV, 5 deux points $p \in P$, $q \in Q$, $p \neq a \neq q$, tels que les ensembles $P-p$ et $Q-q$ seraient connexes. Mais alors l'ensemble

$$\mathscr{X}-p-q=(P-p)+(Q-q)$$

serait connexe (puisque $a \in (P-p)(Q-q)$), contrairement à l'hypothèse.

Par hypothèse, tout point $x \neq a$ est un séparateur de l'ensemble $\mathscr{X}-a$. D'après le th. 4 du § 41, VIII, il existe parmi ces x un point b qui sépare l'ensemble $\mathscr{X}-a$ en deux ensembles M et N connexes, non vides et séparés. Donc

$$\mathscr{X}-a-b=M+N.$$

Il vient $\bar{M}=M+a+b$, car en supposant que a *non*-$\in \bar{M}$, on aurait une décomposition de l'ensemble (connexe) $\mathscr{X}-b$ en deux ensembles séparés M et $N+a$. De façon analogue, $\bar{N}=N+a+b$.

Il s'agit de prouver que $\bar{M}$ et $\bar{N}$ sont deux arcs ab.

Or, admettons que, par exemple, $\bar{M}$ n'est pas un arc ab. Il existe alors, d'après 1, un $x \in M$ tel que $\bar{M}-x$ est connexe. Distinguons deux cas suivant que $\bar{N}$ est un arc ab ou ne l'est pas.

Si $\bar{N}$ n'est pas un arc ab, il existe un $y \in N$ tel que $\bar{N}-y$ est connexe. Mais alors l'ensemble

$$\mathscr{X}-x-y=(\bar{M}-x)+(\bar{N}-y)$$

est connexe, contrairement à l'hypothèse.

[1] Op. cit. p. 342. Cf. aussi R. H. Bing, op. cit., p. 505.

Si $\bar{N}$ est un arc, chaque point $y \in N$ le décompose en deux ensembles connexes $ay-y$ et $by-y$, et on parvient à la même contradiction, puisque l'ensemble

$$\mathscr{X}-x-y=(\bar{M}-x)+(ay-y)+(by-y)$$

est connexe.

Les deux énoncés suivants résultent directement du th. 2:

2'. *Si à tout couple de points a, b du continu $\mathscr{X}$ correspondent deux ensembles fermés A et B tels que*

$$\mathscr{X}=A+B, \quad AB=(a,b) \quad \textit{et} \quad A \neq \mathscr{X} \neq B,$$

$\mathscr{X}$ est une courbe simple fermée[1].

2''. *Si aucun sous-ensemble connexe du continu $\mathscr{X}$ ne le sépare, $\mathscr{X}$ est une courbe simple fermée*[2].

3. *Étant donnée dans un espace compact une suite $\{C_n\}$ d'ensembles connexes contenant deux points a et b tels qu'à tout point $x \in \prod_n C_n$ correspond une décomposition $C_n=A_n+B_n$ assujettie aux conditions:*

1⁰: $a \in A_n$, $b \in B_n$, $x \in A_n \cdot B_n$,

2⁰: $\lim_{n=\infty} \delta(A_n \cdot B_n)=0$,

3⁰: $\bar{A}_{n+1} \subset A_n$, $\bar{B}_{n+1} \subset B_n$,

le produit $\prod_n C_n$ est un arc ab.

De façon plus générale: *l'hypothèse de compacité de l'espace peut être remplacée par celle que l'espace soit complet et que l'on ait* $\lim_{n=\infty} \alpha(C_n)=0$.

Comme $\bar{C}_{n+1}=\bar{A}_{n+1}+\bar{B}_{n+1} \subset A_n+B_n=C_n$, le produit $\prod_n \bar{C}_n$ est un continu (cf. II, 5, remarque 2⁰) et

$$\prod_n \bar{C}_{n+1} \subset \prod_n C_n \quad \text{entraîne} \quad \prod_n C_n=\prod_n \bar{C}_n.$$

Posons (pour x fixe):

$$A=\prod_n A_n, \quad B=\prod_n B_n.$$

[1] La condition plus restrictive qui s'obtient de 2' en supposant que A et B soient des continus est due à S. Janiszewski, Thèse, Journ. Ec. Polyt. 2 s., **16** (1911), p. 137.

[2] Cf. J. R. Kline, Fund. Math. **5** (1924), p. 3.

Il s'agit de démontrer que A et B satisfont au th. 1' (pour $\mathfrak{X}=\prod_n C_n$). Or comme $\bar{A}_{n+1}\subset A_n\subset\bar{A}_n$, on a $A=\prod_n \bar{A}_n$, ce qui prouve que A est fermé. De même, B est fermé. Les inclusions $A_{n+1}\subset A_n$ et $B_{n+1}\subset B_n$ impliquent que

$$\prod_n C_n=\prod_n (A_n+B_n)=\prod_n A_n+\prod_n B_n=A+B.$$

Enfin, $x\in\prod_n (A_n\cdot B_n)=AB$, et comme $\delta(AB)=0$, on a $AB=x$.

VI. Décompositions des espaces compacts en continus. Transformations monotones. 1. *Théorème* [1]). *La décomposition d'un espace compact en composantes est semi-continue supérieurement.*

Plus précisément: *il existe une transformation continue f de cet espace en un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor telle que les ensembles $f^{-1}(y)$ coïncident avec les composantes de l'espace.*

Telle est, en effet, la fonction caractéristique de la suite $F_1, F_2, \dots$ de tous les ensembles à la fois fermés et ouverts (cf. § 37, V, 4), c.-à-d. la fonction

$$f(x)=\frac{\alpha_1(x)}{3}+\frac{\alpha_2(x)}{3^2}+\dots,\quad \text{où}\quad \alpha_n(x)=2 \text{ ou } 0,$$

suivant que x appartient ou non à F_n (cf. aussi § 41, V, 3 et § 42, II, 2).

Le th. 1 implique les deux corollaires suivants:

2. *Si un espace compact est décomposé en une infinité dénombrable de continus disjoints (non vides) $C_1, C_2, \dots$, il existe au moins un C_n ouvert* [2]).

D'après III, 6a, les continus C_k sont des composantes de l'espace et conformément au th. 1, la fonction f transforme l'espace en un ensemble fermé dénombrable; y étant un point isolé de cet ensemble, $f^{-1}(y)$ est le continu ouvert demandé.

3. *Tout ensemble fermé F, somme d'une famille de composantes d'un espace compact, est le produit d'une série d'ensembles fermés-ouverts.*

f étant la fonction considérée dans le th. 1, posons $A=f(F)$. Il vient

$$A=\bar{A},\quad F=f^{-1}(A)\quad \text{et}\quad \dim A=0.$$

[1]) Voir L. E. J. Brouwer, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam **12** (1910), p. 785.

[2]) R. L. Moore, *An extension of the theorem that no countable point set is perfect*, Proc. Nat. Acad. Sc. **10** (1924), p. 168.

Il existe donc (cf. § 21, I, cor. 2) une suite $\{G_n\}$ d'ensembles fermés-ouverts dans A et telle que $A=G_1\cdot G_2\cdot\dots$ Par conséquent, $f^{-1}(G_n)$ est un ensemble fermé-ouvert et il vient

$$F=f^{-1}(A)=f^{-1}(G_1)\cdot f^{-1}(G_2)\cdot\dots$$

Définition [1]). Une transformation f est dite *monotone* lorsque ses tranches, c.-à-d. les ensembles $f^{-1}(y)$, sont connexes.

Telles sont les fonctions réelles de variable réelle (définies sur un intervalle) monotones dans le sens habituel du môt.

Telle est aussi la fonction f considérée dans le th. 1.

4. *Théorème* [2]). *Soit f une transformation continue monotone de l'espace compact $\mathfrak{X}$ en l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathfrak{X})$.*

Si l'ensemble $C\subset\mathcal{Y}$ est connexe, $f^{-1}(C)$ l'est également.

De façon plus générale: *pour que C soit une composante de D, il faut et il suffit que $f^{-1}(C)$ soit une composante de $f^{-1}(D)$.*

Soient, en effet, A et B deux ensembles séparés tels que $f^{-1}(C)=A+B$. Les ensembles $f^{-1}(y)$ étant connexes, l'inégalité $A\cdot f^{-1}(y)\neq 0$ entraîne $f^{-1}(y)\subset A$, car $f^{-1}(y)\subset A+B$; donc, M désignant l'ensemble des y qui satisfont à cette inégalité, on a $A=f^{-1}(M)$.

De façon analogue, il existe un N tel que $B=f^{-1}(N)$. Les ensembles $A=f^{-1}(M)$ et $B=f^{-1}(N)$ étant séparés, il en est de même de M et N (cf. § 37, VI, 6). L'hypothèse que l'ensemble $C=M+N$ est connexe implique donc que $M=0$ ou $N=0$, donc que $A=0$ ou $B=0$.

Passons à la deuxième partie du théorème. On a:

$$f^{-1}(C)\subset E\subset f^{-1}(D)\quad \text{entraîne}\quad C\subset f(E)\subset D.$$

Or, C étant supposé une composante de D et E étant supposé un ensemble connexe, il vient

$$C=f(E),\quad \text{d'où}\quad f^{-1}(C)=f^{-1}f(E)\supset E,\quad \text{donc}\quad f^{-1}(C)=E,$$

c.-à-d. que $f^{-1}(C)$ est une composante de $f^{-1}(D)$.

[1]) Cf. G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, p. 127. Cf. aussi A. D. Wallace, *Quasi-monotone transformations*, Duke Math. Journ. **7** (1940), p. 136 (une généralisation de la notion de transformation monotone).

[2]) Cf. L. Vietoris, Proc. K. Akad. Amsterdam **29** (1926), p. 445 et ma note de Fund. Math. **10** (1928), p. 181, th. X.

Réciproquement, si $f^{-1}(C)$ est supposée une composante de $f^{-1}(D)$ et si H est un ensemble connexe tel que $C \subset H \subset D$, il vient

$$f^{-1}(C) \subset f^{-1}(H) \subset f^{-1}(D),$$

et l'ensemble $f^{-1}(H)$ étant connexe, il en résulte que

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(H), \quad \text{d'où} \quad C = H.$$

C est donc une composante de D.

5. *Dans le domaine des espaces compacts, les notions d'unicohérence et de discohérence sont des invariants des transformations monotones continues.*

Soient, en effet, A et B deux continus tels que

$$f(\mathcal{X}) = A + B, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{X} = f^{-1}(A) + f^{-1}(B).$$

D'après le th. 4, les ensembles $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont des continus. Par conséquent, si l'espace $\mathcal{X}$ est unicohérent, l'ensemble

$$f^{-1}(AB) = f^{-1}(A) \cdot f^{-1}(B)$$

est connexe et il en est de même de l'ensemble

$$AB = f[f^{-1}(AB)],$$

d'après le th. 3 du § 41, I. L'espace $f(\mathcal{X})$ est donc unicohérent.

Si $\mathcal{X}$ est discohérent, l'ensemble $f^{-1}(AB)$ n'est pas connexe et il en est de même de l'ensemble AB d'après le th. 4. L'espace $f(\mathcal{X})$ est donc discohérent.

Le th. 5 du N° IV admet la généralisation suivante:

6. *C étant un vrai sous-ensemble connexe d'un continu $\mathcal{X}$, il existe dans $\mathcal{X} - C$ un point qui ne sépare pas $\mathcal{X}$* [1].

Le théorème étant évident dans le cas où $\bar{C} = \mathcal{X}$ (cf. § 41, II, 3, 2°), admettons que $\bar{C} \neq \mathcal{X}$. Soit f une transformation continue de $\mathcal{X}$ en un continu $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$, telle que l'ensemble $f(\bar{C})$ se réduit à un seul point y_0 et que, pour $y \neq y_0$, $f^{-1}(y)$ se réduit à un seul point de $\mathcal{X} - \bar{C}$ (cf. § 39, V, remarque 3). D'après IV, 5, il existe un $y_1 \neq y_0$ tel que $\mathcal{Y} - y_1$ est connexe. L'ensemble $f^{-1}(\mathcal{Y} - y_1) = \mathcal{X} - f^{-1}(y_1)$ est donc connexe lui aussi.

[1]) Théorème de H. M. Gehman, *Concerning irreducible continua*, Proc. Nat. Ac. Sc. **14** (1928), p. 435.

Citons sans démonstration la généralisation suivante du th. IV, 5:

7. *Étant donnée une décomposition d'un continu $\mathcal{X}$ en (deux au moins) ensembles connexes $\{C_\iota\}$, il existe deux indices $\iota_1 \neq \iota_2$ tels que les ensembles $\sum_{\iota \neq \iota_1} C_\iota$ et $\sum_{\iota \neq \iota_2} C_\iota$ sont connexes* [1]).

La généralisation suivante du th. 1 nous servira pour établir le th. 9 [2]):

8. *Étant donnée une décomposition semi-continue $\boldsymbol{D}$ d'un espace compact $\mathcal{X}$, la famille $\boldsymbol{F}$ des composantes des tranches de cette décomposition constitue elle-même une décomposition semi-continue.*

Soit, en effet, $F_0, F_1, \ldots$ une suite d'ensembles-éléments de $\boldsymbol{F}$ telle que

(1) $$F_0 \cdot \mathrm{Li}\, F_n \neq 0.$$

Il s'agit de montrer que

(2) $$\mathrm{Ls}\, F_n \subset F_0.$$

Soit D_n ($n \geqslant 0$) la tranche de la décomposition $\boldsymbol{D}$ dont F_n est une composante. D'après (1): $D_0 \cdot \mathrm{Li}\, D_n \neq 0$, d'où $\mathrm{Ls}\, D_n \subset D_0$, la décomposition $\boldsymbol{D}$ étant semi-continue.

On a donc $\mathrm{Ls}\, F_n \subset D_0$. D'après (1) et le th. 6 du N° II, $\mathrm{Ls}\, F_n$ est un continu. Or F_0 étant une composante de l'ensemble D_0 et $\mathrm{Ls}\, F_n$ étant un sous-continu de D_0 qui a des points communs avec F_0 (d'après (1)), l'inclusion (2) en résulte.

9. *Toute transformation continue f d'un espace compact $\mathcal{X}$ se laisse représenter comme superposition de deux transformations continues h et g:*

$$f(x) = gh(x), \quad x \in \mathcal{X},$$

dont h est monotone et g est à tranches de dimension 0.

Plus précisément: h étant (conformément au th. 8) une fonction continue ayant pour tranches les composantes des tranches de la fonction f, la fonction g définie par l'égalité

(3) $$g(y) = f[h^{-1}(y)] \quad \text{où} \quad y \in h(\mathcal{X})$$

est continue et l'on a

(4) $$\dim g^{-1}(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \in f(\mathcal{X}).$$

[1]) S. Eilenberg, Fund. Math. **22** (1934), p. 297.

[2]) Pour les th. 8 et 9, voir S. Eilenberg, Fund. Math. **22** (1934), p. 292, et G. T. Whyburn, Amer. Journ. Math. **56** (1934), p. 294.

Remarquons d'abord que le membre droit de l'égalité (3) se réduit à un seul élément, car l'ensemble $h^{-1}(y)$ est contenu dans une seule tranche de la fonction f.

La fonction g est continue, car (cf. § 37, VI, 7) l'ensemble

$$\underset{yz}{E}[z=g(y)]=\underset{yz}{E}\sum_{x}[z=f(x)]\,[x\in h^{-1}(y)]=\underset{yz}{E}\sum_{x}[z=f(x)]\,[y=h(x)]$$

est fermé, en tant que projection d'un ensemble fermé.

Pour établir (4), envisageons un continu C tel que

$$C\subset g^{-1}(z). \tag{5}$$

Il s'agit de montrer que C se réduit à un seul point.

On a d'après (3) et (5):

$$h^{-1}(C)\subset f^{-1}f[h^{-1}(C)]=f^{-1}g(C)\subset f^{-1}g[g^{-1}(z)]=f^{-1}(z).$$

La fonction h étant monotone (par définition), l'ensemble $h^{-1}(C)$ est un continu (d'après 4), donc un sous-continu d'une composante Q de l'ensemble $f^{-1}(z)$. La fonction h étant constante sur Q, donc sur $h^{-1}(C)$, l'ensemble $C=h[h^{-1}(C)]$ se réduit à un seul point.

VII. Espace $2^{\mathcal{X}}$. D'après le th. 4 du N° II *la famille* $\boldsymbol{C}$ *de tous les sous-continus (non-vides) d'un espace compact* $\mathcal{X}$ *est fermée dans l'espace* $2^{\mathcal{X}}$. De façon analogue:

1. *A et B étant deux sous-ensembles d'un espace compact $\mathcal{X}$, la famille des $X\in 2^{\mathcal{X}}$ connexes entre A et B est fermée.*

En effet, pour que X ne soit pas connexe entre A et B, il faut et il suffit qu'il existe un G ouvert tel que (cf. § 41, IV, 7):

$$A\subset G,\quad B\bar{G}=0\quad \text{et}\quad X\cdot \mathrm{Fr}(G)=0.$$

La famille des X qui satisfont à ces conditions étant, pour G donné, ouverte (cf. § 38, II (5)), la conclusion demandée s'en suit immédiatement.

2. *Soit, dans un espace compact $\mathcal{X}$, $\boldsymbol{F}$ une famille monotone de sous-ensembles fermés de $\mathcal{X}$. Si $\boldsymbol{F}$ est un continu (dans $2^{\mathcal{X}}$), $\boldsymbol{F}$ est un arc.*

En effet, E étant un élément de $\boldsymbol{F}$, soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ les sous-familles de $\boldsymbol{F}$ formées des X tels que

$$X\subset E\neq X\quad \text{respectivement}\quad E\subset X\neq E.$$

En supposant que E n'est ni le premier, ni le dernier élément de $\boldsymbol{F}$, on a $\boldsymbol{M}\neq 0\neq \boldsymbol{N}$. De plus, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont séparés, car la condition $L=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\,X_n$ entraîne respectivement $L\subset E$ ou $E\subset L$ suivant que $X_n\in\boldsymbol{M}$ ou $X_n\in\boldsymbol{N}$ pour tout n.

On voit ainsi que, abstraction faite du premier et du dernier élément de $\boldsymbol{F}$, tout élément de $\boldsymbol{F}$ en est un élément de séparation. D'après V, 1, $\boldsymbol{F}$ est donc un arc.

3. *A et C étant deux continus (non vides) tels que $A\subset C\neq A$, il existe une famille monotone de continus qui constitue dans l'espace 2^C un arc à extrémités A et C* [1].

Remarquons d'abord que, étant donné un $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon\leqslant \mathrm{dist}(A,C)$, il existe un continu A_ε satisfaisant aux conditions:

$$A\subset A_\varepsilon\subset C\quad \text{et}\quad \mathrm{dist}(A,A_\varepsilon)=\varepsilon.$$

En effet, S étant l'ensemble des x tels que $\varrho(x,A)\leqslant\varepsilon$ et $x\in C$, et A_ε étant sa composante qui contient A, on a $A_\varepsilon=C$ dans le cas où $\varepsilon=\mathrm{dist}(A,C)$, et $A_\varepsilon\cdot\overline{1-S}\neq 0$ dans le cas contraire (cf. III, 1); or, pour $p\in A_\varepsilon\cdot\overline{1-S}$, on a $\varrho(p,A)=\varepsilon$, d'où $\mathrm{dist}(A,A_\varepsilon)=\varepsilon$.

Dans le cas où $\mathrm{dist}(A_\varepsilon,C)>\varepsilon$, on procède de façon analogue en remplaçant dans la définition de A, A par A_ε, et on définit $A_{\varepsilon,\varepsilon}$, puis $A_{\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon}$ etc.

Après un nombre fini de pas, on parvient nécessairement à un continu dont la distance de C est $\leqslant\varepsilon$; car, autrement, on aurait une suite infinie de points de l'espace 2^C dont les distances mutuelles seraient $\geqslant\varepsilon$ (ce qui contredit la compacité de 2^C).

On voit ainsi qu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un système fini de continus

$$B_0=A\subset B_1\subset B_2\subset\ldots\subset B_n=C$$

où $\mathrm{dist}(B_{i-1},B_i)\leqslant\varepsilon$ pour $i=1,\ldots,n$. Il existe par conséquent une famille (dénombrable) monotone de continus $\boldsymbol{D}$ telle que $A\in\boldsymbol{D}$, $C\in\boldsymbol{D}$ et que, pour tout couple $D_1,D_2\in\boldsymbol{D}$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe dans $\boldsymbol{D}$ un système $B_0,B_1,\ldots,B_n$ tel que

$$B_0=D_1,\quad B_n=D_2\quad \text{et}\quad \mathrm{dist}(B_{i-1},B_i)\leqslant\varepsilon.$$

[1] Théorème (et le corollaire qui suit) de K. Borsuk et S. Mazurkiewicz, *Sur l'hyperespace d'un continu*, C. R. Soc. Sc. Varsovie **24** (1931), p. 149.

La famille $\boldsymbol{\bar{D}}$ est donc un continu (dans 2^C, cf. N° I) et ses éléments sont des continus (dans C).

Comme famille monotone, elle est donc un arc d'après le th. 2.

4. *Corollaire. C étant un continu, tout couple A, B d'éléments de 2^C se laisse unir par un arc dans 2^C.*

Plus précisément: *si $A \in 2^C$ et $A \neq C$, il existe une famille monotone de sous-ensembles fermés de C qui constitue dans l'espace 2^C un arc à extrémités A et C.*

Soit $p \in \boldsymbol{A}$. Il existe d'après le th. 3 un arc $\boldsymbol{A}$ dans 2^C à extrémités p et C. La famille $\boldsymbol{B}$ de tous les ensembles de la forme $A+X$, où $X \in \boldsymbol{A}$, est donc monotone, contient A et C et, en tant qu'image continue de $\boldsymbol{A}$ (cf. § 38, II, 3), elle est un continu, donc un arc (d'après 2).

Pour déduire la première partie du théorème de la deuxième, on considère deux arcs: l'arc $\boldsymbol{A}_0$ unissant A à C et l'arc $\boldsymbol{A}_1$ unissant B à C. En désignant par E le premier élément de l'arc $\boldsymbol{A}_1$ (orienté de B vers C) qui appartient à $\boldsymbol{A}_0$, les sous-arcs $\boldsymbol{B}_0$ de $\boldsymbol{A}_0$ et $\boldsymbol{B}_1$ de $\boldsymbol{A}_1$, aux extrémités A, E et B, E respectivement, constituent un arc unissant A à B.

Remarque. Le corollaire 4 admet la généralisation suivante: *C étant un continu, l'espace 2^C est l'image continue du continu qui s'obtient en unissant le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ à chaque point de l'ensemble $\mathbb{C}$ de Cantor* (cf. p. 85)[1].

Ajoutons que $\mathcal{I}^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{\subset} 2^C$ [2]).

VIII. Semi-continus. Coupures de l'espace. Un espace dont tout couple de points se laisse unir par un continu est dit un *semi-continu*.

La somme de tous les continus contenant un point donné p est dite le *constituant* de ce point. Le constituant de p est donc *le plus grand* semi-continu contenant p. Évidemment, deux constituants différents sont toujours disjoints.

1. *Tout semi-continu est connexe.*

Par conséquent, le constituant de p est contenu dans la composante de p; de sorte que la décomposition d'un espace en constituants est plus fine que la décomposition en composantes.

[1]) S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **18** (1932), p. 171.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur le type de dimension de l'hyperespace d'un continu*, C. R. Soc. Sc. Varsovie **24** (1931), p. 191.

2. *Tout semi-continu localement compact (mais non compact) est somme d'une série (dénombrable) de continus croissants.*

En effet, tout espace localement compact étant homéomorphe à un espace compact privé d'un seul point (§ 39, VII, 3), il s'agit de démontrer que, C étant un continu et p étant un point de C tel que $C-p$ est un semi-continu (homéomorphe au semi-continu donné), il existe une suite de continus $K_1, K_2, \ldots$ telle que

$$(1) \qquad C-p = K_1+K_2+\ldots \quad \text{et} \quad K_1 \subset K_2 \subset \ldots$$

Or, soient $q \in C-p$, S_n la sphère ouverte de centre p et de rayon $\frac{1}{n}|q-p|$, et K_n la composante de q dans $C-S_n$. L'ensemble $C-p$ étant un semi-continu, à tout $x \in C-p$ correspond un continu Q_x tel que

$$x, q \in Q_x \subset C-p, \quad \text{d'où} \quad Q_x \subset K_n$$

pour n suffisamment grand.

L'égalité (1) en résulte aussitôt.

On dit qu'un ensemble *coupe* l'espace (ou: en est une *coupure*) si son complémentaire n'est pas un semi-continu. Un ensemble E *coupe l'espace entre a et b*, si ces deux points appartiennent à deux constituants différents de $1-E$ (c'est-à-dire appartiennent à $1-E$, mais ne se laissent pas unir par un continu en dehors de E).

Évidemment, *si E sépare l'espace entre a et b, il le coupe entre ces points.*

L'implication inverse est en défaut. Ainsi, par exemple, la fermeture de la courbe $y=\sin(1/x)$, $0<x\leqslant 1$, considérée comme l'espace, est coupée par le point $(0,0)$ entre les points $(0,+1)$ et $(0,-1)$, mais n'est pas séparée entre ces points.

Cependant, *pour qu'un ensemble ouvert sépare un espace compact entre a et b, il faut et il suffit qu'il le coupe entre ces points.*

Car tout espace compact et connexe entre deux points contient un continu qui les unit (II, 3 et I, 6).

Citons sans démonstration le théorème suivant:

3. *Si aucun sous-continu du continu C n'en est une coupure, C est une courbe simple fermée*[1]).

[1]) Voir ma note de Fund. Math. **5** (1924), p. 119.

IX. Espaces ponctiformes. Un espace est dit *ponctiforme* lorsqu'il ne contient aucun continu (contenant plus d'un point).

Évidemment tout espace dispersé est ponctiforme. Inversement, *dans le domaine des espaces compacts, les notions suivantes coïncident: d'ensemble ponctiforme, d'ensemble dispersé, d'ensemble nulle part connexe et d'ensemble de dimension* 0.

Car tout espace de dimension positive est connexe entre deux ensembles fermés et disjoints (§ 41, IV, 2), donc — en tant qu'espace compact — contient un continu unissant ces ensembles d'après II, 3.

Il existe aussi des espaces (complets séparables) *connexes ponctiformes*[1]). Ainsi, par exemple, $g(x)$ désignant la fonction de Pompeiu (§ 41, VI, 3°), l'ensemble

$$C=\underset{xy}{E}\left[y=\frac{dg(x)}{dx}\right] \tag{1}$$

est connexe d'après le th. 8 du § 41, I, et il est ponctiforme, puisque la dérivée $dg(x)/dx$ admet des points de discontinuité dans tout intervalle (C ne peut donc contenir aucun arc, ni, par conséquent, aucun continu contenant plus d'un point).

Un simple exemple d'espace (complet séparable) connexe ponctiforme peut être construit aussi en condensant la singularité de la fonction définie par les conditions: $\varphi(x)=\sin(1/x)$ pour $x\neq 0$ et $\varphi(0)=0$. En posant, en effet,

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(x-r_n)}{2^n} \tag{2}$$

où $\{r_n\}$ est la suite des nombres rationnels, l'ensemble $\underset{xy}{E}[y=\psi(x)]$ est connexe d'après le th. 7 du § 41, I, et il est ponctiforme, puisque la fonction ψ est discontinue en chaque point r_n[2]).

[1]) Le premier exemple de ce genre a été défini par Mazurkiewicz; voir *Sur un ensemble G_δ ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire*, Fund. Math. **1** (1920), p. 61.

[2]) Voir la note de M. Sierpiński et de moi-même dans Fund. Math. **3** (1922), p. 306.

§ 43 [1]). Espaces irréductibles. Espaces indécomposables.

L'espace est supposé métrique séparable.

I. Définition. Exemples. Généralités. L'espace est dit *irréductible entre les points a et b* lorsqu'il est connexe et lorsque ces deux points ne se laissent unir par aucun ensemble fermé et connexe qui soit différent de l'espace tout entier; autrement dit: lorsque l'espace est irréductible relativement à la propriété: être un ensemble connexe et fermé contenant a et b[2]).

Le point a est dit *point d'irréductibilité* de l'espace.

Exemples. 1) Tout intervalle est irréductible entre ses extrémités.

2) La courbe „sin $1/x$" définie par les conditions

$$y=\sin 1/x,\quad 0<|x|\leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1\leqslant y\leqslant 1,\quad x=0,$$

est un continu irréductible entre $[-1, \sin(-1)]$ et $[1, \sin 1]$.

Sa moitié composée des points d'abscisse $\geqslant 0$ est irréductible entre le point $(1, \sin 1)$ et chaque point $(0,y)$ où $-1\leqslant y\leqslant 1$.

2 a) ψ désignant la fonction définie p. 130 (2), l'ensemble

$$\overline{\underset{xy}{E}[y=\psi(x)][0\leqslant x\leqslant 1]}$$

est un continu irréductible.

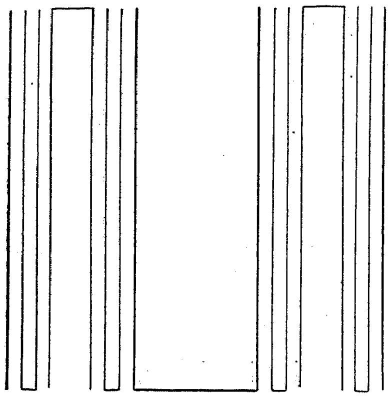
3) La courbe $r=1+1/\theta$, $\theta\geqslant 1$ (r et θ désignant les coordonnées polaires), augmentée de la circonférence $r=1$, est irréductible entre le point $r=1$, $\theta=1$ et chaque point de la circonférence.

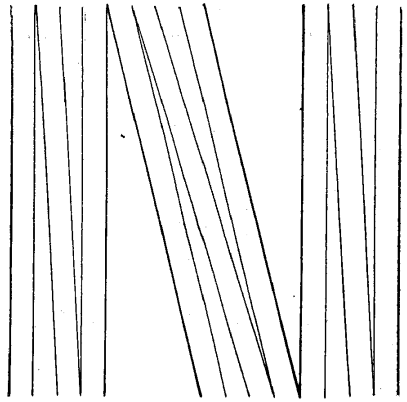
4) Soient C_0 l'ensemble de Cantor situé sur l'axe des x, et C_1 — le même ensemble situé sur la droite $y=1$ (du plan XY). Unissons chaque point de C_0 par un segment vertical au point correspondant de C_1 et ajoutons y les intervalles contigus de C_0 de longueur $1/3, 1/3^3, \ldots$ et les intervalles contigus à C_1 de longueur $1/3^2, 1/3^4, \ldots$ Le continu

[1]) Comp. ma *Théorie des continus irréductibles entre deux points*, Fund. Math. **3** (1922) et **10** (1927).

[2]) Cette définition est due à L. Zoretti, qui l'introduisit en cherchant à caractériser de façon topologique l'intervalle 01. Voir *La notion de ligne*, Ann. Éc. Norm. Sup. **26** (1909). La notion de continu irréductible entre deux points a été étudiée d'une façon méthodique par S. Janiszewski dans sa Thèse (Paris 1911); cf. Journ. Éc. Polyt. II, **16** (1912).

ainsi obtenu est irréductible entre chaque point d'abscisse 0 et chaque point d'abscisse 1.





5) Unissons par un segment rectiligne chaque point x de l'intervalle 01 de l'axe X, dont l'abscisse peut être écrite dans le système de numération à base 4 sans le chiffre 1, avec le point (ou les deux points) de la droite $y=1$, dont l'abscisse s'obtient de celle de x en remplaçant dans le développement de cette dernière le chiffre 2 par 1[1]). Ce continu est irréductible entre les mêmes points que celui de l'exemple 4.

$\mathfrak{X}$ étant un continu, la famille de tous les sous-continus de $\mathfrak{X}$ qui contiennent deux points donnés $a, b \in \mathfrak{X}$ est fermée dans l'espace $2^{\mathfrak{X}}$ (cf. § 42, II, 4). On en déduit en vertu du théorème 1 du § 38, V, le suivant

1. *Théorème d'existence*[2]). *Tout continu qui unit deux points a et b contient un continu irréductible entre ces points.*

L'exemple de la „moitié gauche de la courbe $\sin 1/x$" (ex. 2) diminuée du point (0, 0) montre qu'un espace connexe et l o c a l e m e n t compact peut être dépourvu de sous-ensemble irréductible entre deux points donnés (les points 0, 1 et 0, —1).

2. *$\mathfrak{X}$ étant un continu et f étant une transformation continue de $\mathfrak{X}$ telle que $f(\mathfrak{X})$ est irréductible entre deux points, $\mathfrak{X}$ contient un continu C irréductible entre deux points et tel que $f(C)=f(\mathfrak{X})$.*

---

[1]) Cet exemple est dû à M. Knaster. Voir aussi W. A. Wilson, Amer. Journ. Math. **48** (1926).

[2]) Dû à S. Janiszewski et S. Mazurkiewicz, C. R. Paris **151** (1910). Cf. S. Mazurkiewicz, Bull. Acad. Polon. 1912, p. 44.

Soit, en effet, C un continu irréductible par rapport à la propriété: être un continu tel que $f(C)=f(\mathfrak{X})$ (cf. § 42, II, 7); a et b étant deux points de C tels que $f(\mathfrak{X})$ est irréductible entre $f(a)$ et $f(b)$, C est irréductible entre a et b.

3. *$\mathfrak{X}$ étant un continu irréductible entre a et b et f étant une transformation continue monotone de $\mathfrak{X}$, $f(\mathfrak{X})$ est un continu irréductible entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Soit, en effet, C un continu tel que $f(a), f(b) \in C \subset f(\mathfrak{X})$. D'après le th. 4 du § 42, VI, $f^{-1}(C)$ est un continu. Comme $a, b \in f^{-1}(C)$, il vient $f^{-1}(C)=\mathfrak{X}$, d'où $C=ff^{-1}(C)=f(\mathfrak{X})$.

Citons sans démonstration le théorème suivant[1]):

4. *Si $\mathfrak{X}$ est un continu et a est un point de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{X}$ ne se laisse pas décomposer en deux vrais sous-continus qui contiennent a tous les deux, il existe un point b tel que $\mathfrak{X}$ est irréductible entre a et b.*

II. Sous-ensembles connexes des espaces irréductibles. Soit 1 un espace irréductible entre les points a et b.

1. *Si C est un sous-ensemble connexe de 1 unissant a à b, C est irréductible entre a et b.*

En effet, F étant un ensemble connexe contenant a et b, on a $\overline{F}=1$. Donc, si l'on suppose que F est fermé dans C, c'est-à-dire que $F=\overline{F}\cdot C$, il vient $F=C$.

2. *L'espace ne se laisse pas décomposer en deux ensembles connexes et fermés A et B tels que $a \in AB$ et $A \neq 1 \neq B$.*

Car l'un de ces ensembles contiendrait b, donc a et b simultanément, contrairement à l'irréductibilité de l'espace.

3. *Soit C connexe et fermé. Si $1-C$ n'est pas connexe, il est somme de deux ensembles connexes ouverts dont l'un contient a et l'autre b.*

Par conséquent, *si $a \in C$, $1-C$ est connexe.*

En effet, sous l'hypothèse que $1-C$ n'est pas connexe, il existe deux ensembles ouverts P et Q tels que

$$1-C=P+Q, \quad PQ=0, \quad P\neq 0 \neq Q.$$

D'après le th. 4 du § 41, II, les ensembles $A=C+P$ et $B=C+Q$ sont donc connexes et fermés et on a

$$\text{(i)} \qquad 1=A+B, \quad AB=C \quad \text{et} \quad A\neq 1 \neq B.$$

---

[1]) Pour la démonstration, voir Fund. Math. **10**, op. cit., p. 270.

Il en résulte, en vertu de 2, que a *non*-$\epsilon\, C$. La deuxième partie du théorème se trouve ainsi établie.

D'après (i), ni A ni B ne peut contenir simultanément les deux points a et b. Posons donc $a \epsilon A$ et $b \epsilon B$. L'ensemble A étant connexe et fermé, son complémentaire Q est, comme nous venons de prouver, connexe et $b \epsilon Q$. Par raison de symétrie, P est connexe et $a \epsilon P$.

4. *A et B étant deux ensembles connexes, fermés et tels que $a \epsilon A$ et $b \epsilon B$, l'ensemble $1-(A+B)$ est connexe.*

Il est légitime d'admettre que $AB=0$, car, autrement, $A+B=1$. Or, d'après 3, l'ensemble $C=1-A$ est connexe. Supposons que

$$C-B=U+V, \quad UV=0, \quad U \text{ et } V \text{ étant ouverts.}$$

Il s'agit de prouver que

$$\text{soit} \quad U=0, \quad \text{soit} \quad V=0.$$

D'après § 41, II, 4, les ensembles $B+U$ et $B+V$ sont connexes. Il en est donc de même de $B+\overline{U}$ et $B+\overline{V}$. Comme

$$1=A+B+\overline{1-A-B} \quad \text{et} \quad AB=0,$$

on a

$$A\cdot\overline{1-A-B}\neq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\cdot\overline{U+V}\neq 0.$$

On a donc, soit $A\cdot\overline{U}\neq 0$, soit $A\cdot\overline{V}\neq 0$. Posons p. ex. $A\cdot\overline{U}\neq 0$. Donc $A+\overline{U}+B$ est connexe. Comme $a,b \,\epsilon\, (A+\overline{U}+B)$, il vient

$$A+\overline{U}+B=1, \quad \text{d'où} \quad 1-A-B\subset\overline{U},$$

et comme $V\subset C-B=1-A-B$, on a $V\subset\overline{U}$.

Comme $UV=0$, il en résulte que $V=0$ (V étant ouvert).

5. *Si l'ensemble fermé C est connexe,* $\mathrm{Int}(C)$ *l'est également.*

Il est légitime d'admettre que $C\neq 1$, donc que $a \epsilon 1-C$. Il y a deux cas à distinguer.

Si $1-C$ est connexe, $\overline{1-C}$ l'est également et, comme $a \epsilon \overline{1-C}$, l'ensemble $\mathrm{Int}(C)=1-\overline{1-C}$ est connexe d'après 3.

Si $1-C$ n'est pas connexe, on a $1-C=P+Q$, somme de deux ensembles connexes, et $a \epsilon P$, $b \epsilon Q$. En posant dans 4, $A=\overline{P}$ et $B=\overline{Q}$, on en déduit que l'ensemble $\mathrm{Int}(C)=1-(\overline{P}+\overline{Q})$ est connexe.

6. *Si l'ensemble C est fermé et connexe et $a \epsilon \mathrm{Fr}(C)$, C est non-dense.*

D'après 3, $1-C$ est connexe. Donc, en posant $A=C$ et $B=\overline{1-C}$, on déduit de 2 que $\overline{1-C}=1$.

7. *Si l'ensemble C est fermé et connexe et $a \epsilon C$, l'ensemble $\overline{1-C}$ est irréductible entre b et tout point de* $\mathrm{Fr}(C)$.

En particulier, *si C est non-dense, l'espace est irréductible entre b et tout point de C.*

En effet, d'après 3, $\overline{1-C}$ est connexe. D'autre part, si F est connexe et fermé et si $b \epsilon F\subset\overline{1-C}$ et $F\cdot\mathrm{Fr}(C)\neq 0$, l'ensemble $C+F$ est connexe, d'où $C+F=1$, donc $1-C\subset F$ et par suite $F=\overline{1-C}$.

III. Sous-domaines fermés et connexes. Soit, comme auparavant, 1 un espace irréductible entre a et b. Soit $\boldsymbol{D}$ la famille admettant comme éléments tous les domaines fermés connexes contenant le point a; soit, en outre, $0 \epsilon \boldsymbol{D}$. Rappelons que D est par définition un domaine fermé lorsque (cf. § 8, VIII):

$$D=\overline{1-\overline{1-D}}. \tag{0}$$

1. *Si $0\neq D \epsilon \boldsymbol{D}$, D est irréductible entre a et tout point de* $\mathrm{Fr}(D)$ (*et ce dernier ensemble n'est jamais vide, à moins que $D=1$*).

Car, en posant $D\neq 1$, l'ensemble $\overline{1-D}$ est connexe et contient b. Donc, d'après II, 7, l'ensemble $D=\overline{1-\overline{1-D}}$ est connexe entre a et tout point de l'ensemble $\mathrm{Fr}(\overline{1-D})$.

Or, D étant un domaine fermé, on a $\mathrm{Fr}(\overline{1-D})=\mathrm{Fr}(D)$ (cf. § 8, VIII).

2. *$\boldsymbol{D}$ est une famille strictement monotone.*

Il s'agit de prouver que:

$$\text{si} \quad D_1, D_2 \epsilon \boldsymbol{D} \quad \text{et} \quad D_1\neq D_2 \not\subset \mathrm{Int}(D_1), \quad \text{on a} \quad D_1\subset\mathrm{Int}(D_2).$$

Or, la formule $D_2\not\subset\mathrm{Int}(D_1)$ équivaut à $D_2\cdot\overline{1-D_1}\neq 0$ et celle-ci implique que $D_2+\overline{1-D_1}=1$ (puisque $D_1\neq 1$, donc $b \epsilon \overline{1-D_1}$, et $\overline{1-D_1}$ est connexe selon II, 3). Il en résulte que

$$1-\overline{1-D_1}\subset D_2, \quad \text{donc} \quad D_1\subset D_2$$

d'après (0).

Or, D_2 étant d'après 1 irréductible entre a et chaque point de $D_2\cdot\overline{1-D_2}$, l'inégalité $D_1\neq D_2$ entraîne

$$D_1\cdot\overline{1-D_2}=0, \quad \text{d'où} \quad D_1\subset\mathrm{Int}(D_2).$$

3. *La famille $\boldsymbol{D}$, considérée comme ordonnée par la relation $D_1\subset D_2\neq D_1$, n'admet pas de lacunes.*

Autrement dit, si l'on décompose la famille $\boldsymbol{D}$ en deux familles $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ telles que tout ensemble-élément de $\boldsymbol{D}_1$ est un sous-ensemble de tout élément de $\boldsymbol{D}_2$, il existe soit le premier élément dans $\boldsymbol{D}_2$, soit le dernier dans $\boldsymbol{D}_1$. Tel est, en effet, l'ensemble $\bar{S}$ où S désigne la somme de tous les éléments de $\boldsymbol{D}_1$ ($\bar{S}$ est un domaine fermé, cf. § 8, VIII).

Les th. 2 et 3 rapprochés du th. 2, du § 19, VII, impliquent que

4. *Les éléments D de $\boldsymbol{D}$ peuvent être munis d'indice parcourant un sous-ensemble fermé $J\subset\mathcal{J}$ de façon que*

$$[y_1<y_2]\equiv[D_{y_1}\subset D_{y_2}\neq D_{y_1}].$$

5. *La famille $\boldsymbol{E}$ des domaines connexes fermés contenant le point b (augmentée de l'ensemble vide) coïncide avec la famille des ensembles $\overline{1-D}$ où $D\in\boldsymbol{D}$.*

En symbole:

$$\boldsymbol{E}=\{E_y\},\quad E_y=\overline{1-D_y},\quad \overline{1-E_y}=D_y.$$

De façon générale, *c étant un point d'irréductibilité de l'espace, la famille $\boldsymbol{F}$ des domaines connexes fermés contenant le point c (augmentée de l'ensemble vide) coïncide soit avec $\boldsymbol{D}$, soit avec $\boldsymbol{E}$.*

La première partie du théorème est évidente et la deuxième résulte de l'énoncé suivant:

Lemme[1]. *Si l'espace est irréductible entre a et b, ainsi qu'entre c et d, il est irréductible, soit entre a et c, soit entre b et c.*

En effet, en supposant que l'espace n'est irréductible ni entre a et c, ni entre b et c, il existe deux ensembles connexes fermés K et L tels que

$$c\in KL,\quad a\in K,\quad b\in L,\quad K\neq1\neq L.$$

L'espace étant irréductible entre c et d, il vient

$$d\in(1-K)(1-L)=1-(K+L),\quad \text{d'où}\quad K+L\neq1.$$

Cela contredit l'hypothèse que l'espace est irréductible entre a et b, car $a,b\in(K+L)$.

[1]) Voir K. Yoneyama, Tôhoku Math. Journ. 1917, th. 3, p. 48.

Remarque. Désignons par α le type d'ordre de la famille $\boldsymbol{D}$ (donc de l'ensemble J); le type d'ordre α^*, inverse à α, est donc le type de $\boldsymbol{E}$. En désignant par $|\alpha|$ la „valeur absolue de α", qui ne dépend pas du sens de l'ordre (en convenant que $|\alpha|=|\alpha^*|$), on conclut du th. 5 que $|\alpha|$ *est déterminé par l'espace irréductible de façon univoque* (c'est-à-dire indépendante du choix de ses points d'irréductibilité).

Tous les espaces des exemples 1—5 du N° I ont le même type $|\alpha|$, à savoir, celui de l'intervalle $\mathcal{J}$[1]. Comme on verra dans le N° VII, à tout $J=\bar{J}\subset\mathcal{J}$ correspond un espace du même type d'ordre que J.

Posons:

I_y = ensemble des x tels que D_y est irréductible entre a et x,
J_y = ensemble des x tels que E_y est irréductible entre b et x.

6. *On a les formules suivantes:*

(1) $\mathrm{Fr}(D_y)=\mathrm{Fr}(E_y)=D_y\cdot E_y=I_y\cdot J_y$,
(2) *si* $y_1<y_2$, *on a* $D_{y_1}\cdot I_{y_2}=0=E_{y_2}\cdot J_{y_1}$ *et* $D_{y_1}\cdot E_{y_2}=0$,
(3) *si* $y_1<y_2$, *on a* $I_{y_1}\cdot I_{y_2}=0=J_{y_1}\cdot J_{y_2}$ *et* $I_{y_1}\cdot J_{y_2}=0$,
(4) *si* $y_1<y_2<y_3$, *on a* $I_{y_3}\cdot J_{y_1}=0$.

La formule (1) est une conséquence directe du th. 1.

Les formules (2) et (3) résultent de (1).

D'après (2), $E_{y_2}\cdot J_{y_1}=0$, donc $J_{y_1}\subset1-E_{y_2}\subset D_{y_2}$; en supposant que $y_2<y_3$, on a $D_{y_2}\cdot I_{y_3}=0$, et il vient $J_{y_1}\cdot I_{y_3}=0$.

7. $1=\sum_{y\in J}(I_y+J_y)$.

Autrement dit, *à tout point p correspond un domaine fermé irréductible soit entre a et p, soit entre b et p.*

La famille $\boldsymbol{D}$ n'ayant pas de lacunes, distinguons deux cas suivant qu'il existe le plus petit $D\in\boldsymbol{D}$ tel que $p\in D$ ou qu'il en existe le plus grand $D\in\boldsymbol{D}$ tel que $p\in1-D$.

Supposons, dans le premier cas, que D ne soit pas irréductible entre a et p, donc qu'il existe un C connexe tel que

$$a,p\in C,\quad C=\bar{C}\subset D\neq C.$$

Comme sous-ensemble de C, l'ensemble $\overline{1-\overline{1-C}}$ est un vrai sous-ensemble de D; en outre, il appartient à $\boldsymbol{D}$ d'après II, 5 et 6. Donc

$$p\in1-\overline{1-\overline{1-C}}\subset\overline{1-C},$$

[1]) Les espaces de ce type sont dits aussi *du type λ*.

et on a $p \in \mathrm{Fr}(C)$. L'ensemble $\overline{1-C}$ est parsuite un domaine fermé irréductible entre b et p (d'après 1).

Dans le deuxième cas, posons $E = \overline{1-D}$. Donc $E \in \boldsymbol{E}$. Par raison de symétrie, il est légitime d'admettre qu'il n'existe pas dans $\boldsymbol{E}$ le plus petit ensemble contenant p. Soit donc

$$F \in \boldsymbol{E}, \quad p \in F \subset E \neq F.$$

Il vient

$$D = \overline{1-E} \subset \overline{1-F} \neq D, \quad \text{donc} \quad p \in \overline{1-F} \in \boldsymbol{D}$$

d'après la définition de D. Parsuite, $p \in \mathrm{Fr}(F)$ et F est irréductible entre b et p.

Corollaire [1]. *S'il existe deux ensembles fermés irréductibles entre a et p, il n'en existe qu'un seul qui soit irréductible entre b et p.*

Ce corollaire résulte du th. 7, rapproché de l'énoncé suivant: *Si D est un domaine fermé irréductible entre a et p, D est le seul ensemble fermé irréductible entre ces points.*

Admettons par impossible que

$$a, p \in F = \overline{F} \not\subset D, \quad \text{d'où} \quad F \cdot \overline{1-D} \neq 0.$$

F étant connexe, $F + \overline{1-D}$ l'est également et, comme $D \neq 1$, on a $b \in \overline{1-D}$, d'où $F + \overline{1-D} = 1$. Il vient

$$1 - \overline{1-D} \subset F, \quad \text{d'où} \quad D = \overline{1 - \overline{1-D}} \subset F, \quad \text{donc} \quad F = D.$$

8. *Si $y_1 < y_2$, on a $D_{y_2} \cdot E_{y_1} = \overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$ et l'ensemble $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$ est connexe.*

En effet,

$$D_{y_2} \cdot E_{y_1} = D_{y_2} \cdot \overline{1 - D_{y_1}} = \overline{D_{y_2} - D_{y_1}},$$

la dernière égalité étant une conséquence [2] de l'inclusion $D_{y_1} \subset \mathrm{Int}(D_{y_2})$. Le point a étant un point d'irréductibilité de D_{y_2} (d'après 1), on conclut de II, 3, que $D_{y_2} - D_{y_1}$, donc $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$, est connexe.

---

[1]) S. Janiszewski, *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*, Bull. Acad. Sc. Cracovie 1912, p. 906. On rapprochera ce corollaire de l'exemple 3 du N° I.

[2]) Soit, en effet, $A \subset \mathrm{Int}(B)$ et $B = \overline{B}$. Donc

$$A \cdot \overline{1-A} \subset \overline{1-A} - \overline{1-B} \subset \overline{(1-A)-(1-B)} = \overline{B-A},$$

d'où

$$B \cdot \overline{1-A} = A \cdot \overline{1-A} + (B-A) \cdot \overline{1-A} \subset \overline{B-A} \subset \overline{B} \cdot \overline{1-A} = B \cdot \overline{1-A}.$$

Par conséquent, $B \cdot \overline{1-A} = \overline{B-A}$.

IV. Tranches d'un espace irréductible. En substituant $\boldsymbol{D}$ à $\boldsymbol{F}$ dans le N° X du § 19, considérons la fonction g. Les tranches $g^{-1}(t)$ de cette fonction seront nommées *tranches T_t de l'espace $\mathfrak{X}$ irréductible entre a et b.*

D'après § 19, X, 2, on a

$$T_t = g^{-1}(t) = \prod_{\Gamma(t) < z} D_z \cdot \prod_{u < \gamma(t)} E_u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

Les tranches sont indépendantes du choix des points d'irréductibilité de $\mathfrak{X}$.

Si $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \leqslant \aleph_0$, $\mathfrak{X}$ se réduit à une seule tranche (est *monostratique*). Si $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} > \aleph_0$, la décomposition en tranches présente une stratification linéaire (un ordre partiel) de $\mathfrak{X}$ en ensembles fermés non vides.

1. *Étant donnée une fonction $h \in \mathcal{J}^{\mathfrak{X}}$ telle que, abstraction faite de $\aleph_0$ valeurs de t, $h^{-1}(0t)$ est connexe et contient a, toute tranche de la fonction h est somme de certaines tranches de g.*

Ceci est une conséquence du § 19, X, 4 (d'après § 19, IX, 1 et VIII (5), $h^{-1}(0t)$ peut être supposé un domaine fermé).

2. *Les tranches d'un continu irréductible sont des continus.*

Si $\gamma(t) \neq 0$ et $\Gamma(t) \neq 1$, il existe dans $\mathcal{J}$ deux suites telles que

$$\gamma(t) = \lim_{n=\infty} u_n, \quad u_n < u_{n+1} \quad \text{et} \quad \Gamma(t) = \lim_{n=\infty} z_n, \quad z_n > z_{n+1}.$$

Par conséquent (cf. § 19, X, 2),

$$T_t = \prod_{n=1}^{\infty} D_{z_n} \cdot E_{u_n} \quad \text{et} \quad D_{z_n} \cdot E_{u_n} \supset D_{z_{n+1}} \cdot E_{u_{n+1}}.$$

$D_{z_n} \cdot E_{u_n}$ étant un continu d'après III, 8, il en est de même de T_t d'après § 42, II, 5.

Si $\gamma(t) = 0$ ou $\Gamma(t) = 1$, on a

$$\prod_{u < \gamma(t)} E_u = \mathfrak{X} \quad \text{ou} \quad \prod_{\Gamma(t) < z} D_z = \mathfrak{X},$$

et T_t est un continu en raison de III, 1 et § 42, II, 5.

3. *La décomposition d'un continu irréductible en tranches est la plus loin poussée parmi toutes les décompositions semi-continues linéaires en continus* [1].

---

[1]) Op. cit., Fund. Math. **10**, p. 259, théorème fondamental. Des décompositions qui sont moins loin poussées ou bien qui ne sont applicables que dans des hypothèses supplémentaires sur l'espace, ont été considérées par H. Hahn (sous le nom des „Primteile"), L. Vietoris („Schichten") et W. A. Wilson („complete oscillatory sets"); cf. ibid. pp. 226—229 et 264.

Autrement dit, *si* $h \in \mathcal{J}^{\mathcal{X}}$, $h(\mathcal{X})=\mathcal{J}$ *et tout* $h^{-1}(t)$, *où* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *est un continu, ce continu est somme de certaines tranches du continu* $\mathcal{X}$.

Soient, en effet, $h(a)=t_0$, $h(b)=t_1$. L'intervalle $t_0 t_1$ (resp. $t_1 t_0$) coïncide avec $\mathcal{J}$, car $h^{-1}(t_0 t_1)$ en tant qu'un continu (cf. § 42, VI, 4) contenant a et b, est identique à $\mathcal{X}$. On peut donc poser $t_0=0$ et $t_1=1$.

Soit $0<t<1$. On a donc la décomposition

$$\mathcal{X}-h^{-1}(t)=h^{-1}(0t-t)+h^{-1}(t1-t)$$

en deux ensembles ouverts disjoints dont l'un contient a et l'autre b. L'ensemble $h^{-1}(t)$ étant connexe et fermé, $\mathcal{X}-h^{-1}(t)$ se compose d'après II, 3, de deux ensembles connexes ouverts et disjoints dont l'un contient a et l'autre b. Donc $h^{-1}(0t-t)$ est connexe. L'ensemble $h^{-1}(0t)=h^{-1}(0t-t)+h^{-1}(t)$ l'est également et la conclusion résulte du th. 1.

Remarques. D'après le th. 2 du § 19, IX, *toutes les tranches* T_t, *sauf une infinité dénombrable, satisfont à la condition*

$$T_t=\overline{\sum_{u<t} T_u}\cdot\overline{\sum_{v>t} T_v}.$$

Les tranches de ce genre sont dites *de cohésion*. La tranche T_t est donc une tranche de cohésion lorsque t est un point de continuité des deux fonctions $g^{-1}(0t)$ et $g^{-1}(t1)$. Cependant une tranche de cohésion T_t n'est pas nécessairement une tranche de continuité (cf. § 39, VI), autrement dit, t peut être un point de discontinuité de la fonction $g^{-1}(t)$.

Ainsi, par exemple, le segment vertical de la courbe $\sin 1/x$ (voir N° I, ex. 2) est une tranche de discontinuité, tout en étant une tranche de cohésion.

Les segments verticaux du continu de l'ex. 4 sont des tranches de discontinuité; ceux qui contiennent une extrémité d'un intervalle contigu à l'ensemble de Cantor ne sont pas des tranches de cohésion.

Sur l'ex. 5 on voit apparaître un ensemble *dense* d'indices t tels que T_t n'est pas une tranche de cohésion; ce sont les tranches de la forme V ou Λ. Toutes les autres tranches sont des tranches de continuité.

Comme l'a montré M. Knaster[1]), *il existe un continu irréductible tel que* $J=\mathcal{J}$ *et dont toute tranche est une tranche de continuité contenant plus d'un point.*

Rappelons enfin que, d'après le th. 1 du § 39, VI, *les indices* t *tels que* T_t *est une tranche de continuité constituent un* $\boldsymbol{G}_\delta$ *dense dans l'intervalle* $\mathcal{J}$.

4. $$T_t=\sum_{\gamma(t)\leqslant y\leqslant \Gamma(t)}(I_y+J_y).$$

Soit, en effet, $\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)$. Donc

$$I_y\subset D_y\subset\prod_{\Gamma(t)<z} D_z$$

et, pour $u<\gamma(t)$, on a d'après III, 6 (2)

$$I_y\subset\mathcal{X}-D_u\subset E_u, \quad \text{d'où} \quad I_y\subset\prod_{u<\gamma(t)}E_u.$$

Parsuite $I_y\subset T_t$ (cf. (1)),et par raison de symétrie, $J_y\subset T_t$. Donc

$$\sum_{\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)}(I_y+J_y)\subset T_t.$$

Les tranches étant disjointes deux à deux, cette inclusion, rapprochée du th. III, 7, implique l'inclusion inverse.

5. $g^{-1}(0t-t)=D_{\gamma(t)}-I_{\gamma(t)}$, $g^{-1}(t1-t)=E_{\Gamma(t)}-J_{\Gamma(t)}$.

Les deux ensembles envisagés sont par conséquent connexes (ouverts et disjoints).

Posons, pour abréger, $\gamma(t)=\gamma$ et $\Gamma(t)=\Gamma$. En vertu de 4, on a

$$g^{-1}(0t-t)=\sum_{t'<t}T_{t'}=\sum_{u<\gamma}(I_u+J_u).$$

Il s'agit de prouver que

$$\sum_{u<\gamma}(I_u+J_u)=D_\gamma-I_\gamma.$$

Or, soit $u<\gamma$. D'après la définition de γ, il existe un u_1 tel que $u<u_1<\gamma$. Donc d'après III, 6 (2):

$$E_{u_1}\cdot J_u=0, \quad \text{d'où} \quad J_u\subset\mathcal{X}-E_{u_1}\subset D_{u_1}, \quad \text{donc} \quad I_u+J_u\subset D_{u_1}.$$

D'autre part, $D_{u_1}\cdot I_\gamma=0$, d'où $D_{u_1}=D_{u_1}-I_\gamma\subset D_\gamma-I_\gamma$. Ainsi

$I_u+J_u\subset D_\gamma-I_\gamma$ et par conséquent $\sum_{u<\gamma}(I_u+J_u)\subset D_\gamma-I_\gamma$.

[1]) Fund. Math. **25** (1935), p. 568.

Pour établir l'inclusion inverse, posons $p \in D_\gamma - I_\gamma$ et (cf. 4) $p \in I_u + J_u$. Il s'agit de prouver que $u < \gamma$. Or, lorsque $p \in I_u$, on a $u \neq \gamma$ (puisque p *non*-$\in I_\gamma$), et D_γ ne peut être un vrai sous-ensemble de D_u. Donc $u < \gamma$. Lorsque $p \in J_u$, l'hypothèse que $p \in D_\gamma - I_\gamma$ entraîne d'après III, 6 (1). $p \in \mathfrak{X} - E_\gamma$. Comme $p \in E_u$, il vient $E_\gamma \subset E_u \neq E_\gamma$, d'où $u < \gamma$.

6. $$T_t = I_{\gamma(t)} + D_{\Gamma(t)} \cdot E_{\gamma(t)} + J_{\Gamma(t)}.$$

Posons, comme auparavant, $\gamma(t) = \gamma$ et $\Gamma(t) = \Gamma$. En multipliant les identités $\mathfrak{X} = D_\gamma + E_\gamma$ et $\mathfrak{X} = D_\Gamma + E_\Gamma$ et en tenant compte des formules

$$D_\gamma \cdot D_\Gamma = D_\gamma, \quad E_\gamma \cdot E_\Gamma = E_\Gamma \quad \text{et} \quad D_\gamma \cdot E_\Gamma \subset D_\Gamma \cdot E_\gamma,$$

qui résultent de l'inégalité $\gamma \leqslant \Gamma$, il vient

$$\mathfrak{X} = D_\gamma + D_\Gamma \cdot E_\gamma + E_\Gamma,$$

d'où

$$\mathfrak{X} = (D_\gamma - I_\gamma) + (I_\gamma + D_\Gamma \cdot E_\gamma + J_\Gamma) + (E_\Gamma - J_\Gamma).$$

Ces sommandes sont disjointes, car d'après III, 6 (1):

$$D_\gamma \cdot J_\Gamma \subset D_\gamma \cdot E_\Gamma \subset D_\gamma \cdot E_\gamma \subset I_\gamma$$

et

$$E_\Gamma \cdot I_\gamma \subset E_\Gamma \cdot D_\gamma \subset E_\Gamma \cdot D_\Gamma \subset J_\Gamma.$$

Il en résulte, en tenant compte de 5, que

$$\begin{aligned} T_t &= \mathfrak{X} - [g^{-1}(0t - t) + g^{-1}(t1 - t)] = \\ &= \mathfrak{X} - [(D_\gamma - I_\gamma) + (E_\Gamma - J_\Gamma)] = I_\gamma + D_\Gamma \cdot E_\gamma + J_\Gamma. \end{aligned}$$

Citons sans démonstration le théorème suivant:

7. *Soient $\mathfrak{X}$ un continu et f une transformation continue de $\mathfrak{X}$ en l'intervalle: $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{J}$. Si toutes les tranches $f^{-1}(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, sont des continus non-denses, il existe un ensemble connexe C qui contient un et un seul point de chaque tranche.*

Par conséquent, *si $a \in C \cdot f^{-1}(0)$ et $b \in C \cdot f^{-1}(1)$, C est irréductible par rapport à la propriété: être un ensemble connexe unissant a à b* [1]).

[1]) Théorème de B. Knaster, *Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points*, Fund. Math. **10** (1927), p. 277, th. η.

V. Espaces indécomposables [1]). Un espace est dit *indécomposable* lorsqu'il est connexe et n'est pas somme de deux ensembles connexes, fermés et différents de lui.

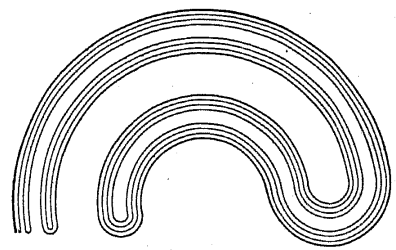
Exemples. 1) Le plus simple exemple d'un continu indécomposable est défini comme il suit [2]).

Le continu se compose:

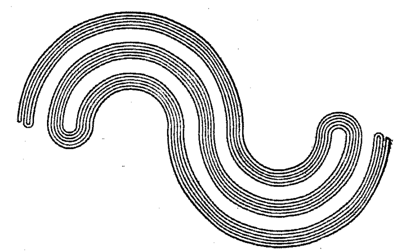
1⁰ de toutes les demi-circonférences aux ordonnées $\geqslant 0$, décrites du centre $(\frac{1}{2}, 0)$ par tous les points de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor,

2⁰ de toutes les demi-circonférences aux ordonnées $\leqslant 0$, décrites pour tout $n \geqslant 1$ du centre $\left(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0\right)$ par tous les points de l'ensemble $\mathcal{C}$ contenus dans l'intervalle $\frac{2}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3^{n-1}}$.

Pour la démonstration de l'indécomposabilité du continu envisagé, voir VI, 8, remarque.



Ex. 1.



Ex. 3.

[1]) Les continus indécomposables ont été découverts par L. E. J. Brouwer pour mettre en défaut l'hypothèse (de Schönflies), que toute frontière commune à deux régions du plan est décomposable (Math. Ann. **68**, 1910, p. 426). Comme on verra, ils interviennent dans de nombreux problèmes topologiques. Pour des applications des continus indécomposables à la théorie des groupes topologiques, voir D. v. Dantzig, Fund. Math. **15** (1930), p. 102, L. Vietoris Math. Ann. **97** (1927) p. 454, v. Heemert, *Topologische Gruppen und unzerlegbare Kontinua*, Comp. Math. **5**, 319—326 (1937).

A côté de M. Brouwer, les premiers exemples des continus indécomposables ont été signalés par M. Denjoy, C. R. Paris **151** (1910) et par M. Yoneyama, Tôhoku Math. Journ. 1917, p. 60 (l'exemple provient de M. Wada).

[2]) Cette définition est due à B. Knaster (voir Fund. Math. **3**, p. 209). Elle s'obtient en simplifiant celle de Janiszewski (Thèse, p. 36), qui — à son tour — est intimement liée à la définition citée de M. Brouwer.

2) En enlevant le point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ du continu de l'ex. 1, on obtient un espace indécomposable (cf. th. 3)[1]) qui jouit de la singularité suivante. L'arc qui unit les points $(0,0)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, dépourvu de ce dernier, est saturé par rapport à la propriété: être un vrai sous-ensemble connexe et fermé.

3) Soit E l'ensemble des nombres de l'intervalle $\mathcal{J}$ qui s'écrivent dans le système de numération à base 5 sans chiffres 1 et 3. Soient

$$E_n = \underset{x}{E}\,(x \in E)\left(\frac{2}{5^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{5^n}\right) \quad \text{et} \quad F_n = \underset{x}{E}\,[(1-x) \in E_n].$$

Le continu demandé s'obtient par la réunion de:

1° toutes les demi-circonférences aux ordonnées $\leqslant 0$ décrites du point $\dfrac{7}{10\cdot 5^n}$ par tous les points de E_n,

2° toutes les demi-circonférences aux ordonnées $\geqslant 0$ décrites du point $1-\dfrac{7}{10\cdot 5^n}$ par tous les points de F_n $(n \geqslant 0)$[2]).

La différence essentielle entre les continus des exemples 1 et 3 est qu'il n'existe dans le premier qu'un seul composant (dans le sens du N° VI) contenant des points accessibles, tandis que, dans le second, il en existe deux (celui du point 0 et celui du point 1)[3]).

4) De nombreux exemples des continus indécomposables se déduisent du théorème suivant[4]):

Tout espace compact de dimension $\geqslant 2$ contient un continu indécomposable.

---

[1]) Cet espace est évidemment homéomorphe à l'ensemble fermé dans le plan qui s'obtient du continu de l'ex. 1 par l'inversion effectuée du point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Voir la note de B. Knaster et de moi-même, Fund. Math. **5** (1924), p. 43, fig. II.

[2]) Cet exemple est également dû à B. Knaster.

[3]) Dans cet ordre d'idées, il est intéressant de noter les deux théorèmes suivants de Mazurkiewicz (Fund. Math. **14** (1929), pp. 107 et 271):

1° *la somme des composantes d'un continu plan indécomposable qui contiennent un point accessible est de I-e catégorie dans ce continu,*

2° *la famille des composantes d'un continu plan indécomposable qui contiennent plus d'un point accessible est (au plus) dénombrable.*

Cf. aussi ma note *Sur une condition qui caractérise les continus indécomposables*, qui se rattache au th. 1° (Fund. Math. **14**, p. 116).

[4]) S. Mazurkiewicz, *Sur l'existence des continus indécomposables*, Fund. Math. **25** (1935), p. 327. Ce théorème répond à un problème posé par P. Alexandroff.

5) Il existe des continus *héréditairement indécomposables*, c'est-à-dire dont tout sous-continu est indécomposable[1]). Plus précisément[2]): *dans l'espace de tous les sous-continus du carré $\mathcal{J}^2$, les continus héréditairement indécomposables constituent un G_δ[3]) dense (donc résiduel)*[4]).

1. *Aucun sous-ensemble connexe et fermé C d'un espace indécomposable n'en est un séparateur.*

En effet, si l'on avait

$$1-C=M+N, \quad M\neq 0\neq N, \quad MN=0,$$

où M et N sont ouverts, les ensembles $C+M$ et $C+N$ seraient connexes, fermés et on aurait (cf. § 41, II, 4):

$$1=(C+M)+(C+N), \quad C+M\neq 1\neq C+N.$$

2. *Pour qu'un espace connexe soit indécomposable, il faut et il suffit que tout sous-ensemble connexe soit dense ou non-dense*; ou encore: *que tout sous-ensemble connexe, fermé et différent de l'espace soit non-dense.*

En effet, en supposant que l'espace est décomposable, on a $1=A+B$, décomposition en deux ensembles connexes, fermés et tels que $A\neq 1\neq B$. Donc, ni A, ni B n'est non-dense (ni dense).

Inversement, soit C un ensemble connexe qui n'est ni dense, ni non-dense, c'est-à-dire que $\overline{C}\neq 1\neq \overline{1-\overline{C}}$. L'ensemble $1-\overline{C}$ étant connexe selon 1, l'espace est décomposable, car $1=\overline{C}+\overline{1-\overline{C}}$.

---

[1]) B. Knaster, Fund. Math. **3** (1922), p. 247. Pour une application intéressante, voir E. E. Moise, *An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), p. 581.

Évidemment un continu héréditairement indécomposable *ne contient aucun arc*. L'existence des continus jouissant de cette dernière propriété remarquable a été signalée par Janiszewski au Congrès Int. Math. de Cambridge 1912.

[2]) S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **16** (1930), p. 151.

[3]) Le fait que, dans l'espace de tous les sous-continus d'un espace compact, les continus indécomposables, respectivement héréditairement indécomposables, constituent un G_δ, résulte immédiatement de leurs définitions (cf. § 38, II (1) et 3):

$$\{C \text{ est décomposable}\} \equiv \sum_{K,L} (C=K+L)\,(K\neq C\neq L),$$

$$\{C \text{ n'est pas héréd. décomp.}\} \equiv \sum_{K} (K\subset C)\,(K \text{ est décomposable}),$$

les variables C, K et L parcourant l'espace des continus.

[4]) Ce fait paraît bien paradoxal: parmi les sous-continus du carré, les continus les plus singuliers sont les plus fréquents.

3. *Tout sous-ensemble connexe et dense d'un espace indécomposable est indécomposable.*

Soient C un ensemble connexe et dense, et D un sous-ensemble connexe de C. Il s'agit de prouver — conformément à 2 — que D est dense ou non-dense dans C. Or, D étant d'après 2 dense ou non-dense dans l'espace (c'est-à-dire dans $\overline{C}$), la conclusion demandée des th. 2 et 4 du § 8, VI.

4. *$\mathfrak{X}$ étant un continu et f étant une transformation continue de $\mathfrak{X}$ telle que $f(\mathfrak{X})$ est indécomposable, $\mathfrak{X}$ contient un sous-continu indécomposable.*

Tel est en effet tout continu irréductible par rapport à la propriété: être un continu C vérifiant l'égalité $f(C)=f(\mathfrak{X})$.

En effet, A et B étant deux sous-continus de C tels que

$$A \neq C \neq B \quad \text{et} \quad C = A + B,$$

il vient

$$f(A) \neq f(C) \neq f(B) \quad \text{et} \quad f(C) = f(A) + f(B).$$

VI. Composants. On appelle *composant du point p*[1]) l'ensemble C de tous les points qui se laissent unir au point p par un ensemble connexe, fermé et différent de l'espace tout entier.

Exemples et remarques. 1) Les composants d'un espace non-connexe coïncident avec ses *composantes* (cf. § 41, III).

Si l'espace est connexe, l'ensemble $1-C$ coïncide avec l'ensemble des points x tels que l'espace est irréductible entre p et x.

Si l'espace est connexe, mais p n'en est pas un point d'irréductibilité, on a $C=1$.

On voit ainsi que la notion de composant du point p ne présente d'intérêt que lorsque p est un point d'irréductibilité de l'espace.

2) On montre facilement[2]) que le composant du point 0 dans le continu de l'exemple V, 1) est constitué par la suite infinie des demi-circonférences qui passent par les extrémités des intervalles contigus à $\mathbf{C}$. Ce composant est une image biunivoque et continue de la demi-droite $x \geqslant 0$. Tous les autres composants de ce continu sont des images biunivoques et continues de la droite toute entière.

[1]) Cf. la notion de nerf chez L. E. J. Brouwer.
[2]) Voir Fund. Math. **5** (1924), p. 40.

3) La famille des composants du même continu est *strictement transitive au sens de la catégorie*[1]), c.-à-d. qu'étant donné un ensemble à propriété de Baire, formé par la réunion d'un certain nombre de composants, soit cet ensemble, soit son complémentaire (le continu étant considéré comme l'espace) est de première catégorie[2]).

1. *C étant le composant du point p, il existe une suite d'ensembles connexes fermés $K_1, K_2, \ldots$ telle que*

$$(1) \qquad C = K_1 + K_2 + \ldots, \quad p \in K_n, \quad K_n \neq 1.$$

Soit, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace privée de termes contenant le point p. Soit K_n la composante du point p dans l'ensemble $1-R_n$. Il vient

$$p \in K_n = \overline{K}_n \neq 1, \quad \text{d'où} \quad K_n \subset C, \quad \text{donc} \quad K_1 + K_2 + \ldots \subset C.$$

Inversement, si $x \in C$ et Q est un ensemble connexe, fermé et tel que $x \in Q \neq 1$, il existe un R_n disjoint de Q. Donc

$$Q \subset 1 - R_n, \quad \text{d'où} \quad Q \subset K_n \quad \text{et} \quad x \in K_n; \quad \text{finalement} \quad C \subset K_1 + K_2 + \ldots$$

2. *Si un composant n'est pas dense, il est fermé. Il est alors saturé par rapport à la propriété: être connexe, fermé et différent de l'espace tout entier.*

En conséquence (cf. § 42, III, 5), *tout composant d'un continu est dense.*

En effet, en supposant que le composant C n'est pas dense, c'est-à-dire que $\overline{C} \neq 1$, il vient $\overline{C} \subset C$, puisque $\overline{C}$ est un vrai sous-ensemble connexe et fermé de l'espace.

Remarques. 1) Comme le prouve l'ex. 2 du N° V, l'hypothèse du th. 2 peut être réalisée.

2) L'existence d'un ensemble saturé par rapport aux propriétés considérées dans le th. 2 est intimement liée à l'existence d'un sous-ensemble indécomposable. On a, en effet, les deux théorèmes suivants[3]):

2'. *S étant un sous-ensemble d'un espace connexe, saturé par rapport à la propriété: être connexe, fermé et différent de l'espace, $1-S$ est indécomposable.*

[1]) Cette propriété correspond à la transitivité stricte (au sens de la mesure) considérée en Mécanique Statistique. Voir par exemple G. D. Birkhoff, Proc. Nat. Ac. Sc. **17** (1931), p. 650 et 656.
[2]) Voir ma note de Fund. Math. **19** (1932), p. 252.
[3]) Voir la note de B. Knaster et de moi-même, Fund. Math. **5** (1924), p. 45.

2''. *Tout espace connexe qui contient deux ensembles* **disjoints**, *saturés par rapport auxdites propriétés, est indécomposable.*

3. *C étant un composant du continu 1, l'ensemble $1-C$ est connexe.*

Il est légitime d'admettre que l'espace est irréductible entre a et b et que C est le composant du point a (cf. ex. et rem. 1). Posons

(2) $$1-C=M+N, \quad \overline{M}\cdot N=0=\overline{N}\cdot M, \quad b\in M.$$

Il s'agit de montrer que $N=0$.

Les ensembles M et N étant séparés, il existe (cf. § 16, V, 6) un ensemble ouvert G tel que

(3) $$M\subset G \quad \text{et} \quad \overline{G}\cdot N=0, \quad \text{d'où} \quad (\overline{G}-G)\cdot(M+N)=0.$$

Soit K la composante de b dans G. En supposant que $N\neq0$, donc que $G\neq1$, on a $\overline{K}-G\neq0$ (d'après le th. 2 du § 42, III). Soit

$$p\in\overline{K}-G, \quad \text{donc} \quad p\in\overline{G}-G\subset1-(M+N)=C$$

d'après (3) et (2). Il existe par conséquent un continu P tel que $a,p\in P\subset C$. Comme $b,p\in\overline{K}$, l'ensemble $\overline{K}+P$ est un continu unissant a à b; d'où

$$\overline{K}+P=1, \quad \text{donc} \quad N\subset\overline{K}+P.$$

Comme $K\subset G$, il vient $N\cdot\overline{K}\subset N\cdot\overline{G}=0$ d'après (3), et comme $P\subset C$, il vient $NP\subset NC=0$ d'après (2). On a donc $N=0$.

D'après le th. 2, le complémentaire d'un composant d'un continu est toujours un ensemble frontière. Dans le même ordre d'idées, on a le théorème suivant:

4. *Soit C un composant du continu 1. Si $\overline{1-C}$ n'est pas un ensemble frontière, il est un domaine indécomposable.*

Admettons, comme auparavant, que l'espace est irréductible entre a et b et que C est le composant du point a.

Posons $Q=\overline{1-\overline{1-C}}$. Admettons que l'ensemble $\overline{1-C}$ n'est pas frontière, c'est-à-dire que $Q\neq1$.

L'ensemble $\overline{1-C}$ étant un continu contenant le point b (d'après 3), l'ensemble Q est aussi un continu (d'après II, 3). Il vient $Q\subset C$. Car, en supposant que $Q\neq0$, donc que $\overline{1-C}\neq1$, on a $a\in1-\overline{1-C}\subset Q$ (puisque 1 est irréductible entre a et b) et comme $Q\neq1$, on a $Q\subset C$. Il en résulte que $1-C\subset1-Q$, d'où

$$\overline{1-C}\subset\overline{1-Q}=\overline{1-\overline{1-\overline{1-C}}}\subset\overline{1-C},$$

donc

(4) $$\overline{1-C}=\overline{1-Q},$$

ce qui prouve que $\overline{1-C}$ est un domaine fermé.

Supposons que $\overline{1-C}$ soit décomposable. Soient M et N deux continus tels que

(5) $$\overline{1-C}=M+N \quad \text{et} \quad M\neq\overline{1-C}\neq N.$$

Il vient

(6) $$M-C\neq0\neq N-C.$$

Car l'égalité $N-C=0$ donne $1-C\subset1-N$, d'où selon (5):

$$1-C\subset\overline{1-C}-N\subset M, \quad \text{donc} \quad \overline{1-C}\subset M,$$

contrairement à l'inégalité (5).

Considérons deux cas, suivant que $Q=0$ ou $Q\neq0$. Dans le premier cas, on a $\overline{1-C}=1=M+N$. Soit $a\in M$. En vertu de (6), on a donc $M=1$. Mais cela contredit l'inégalité (5).

Passons au deuxième cas. On a alors, comme nous avons démontré, $a\in Q$. L'espace étant connexe, l'identité (cf. (5)):

$$1=\overline{1-\overline{1-C}}+\overline{1-C}=Q+M+N$$

implique que $Q(M+N)\neq0$. On peut admettre que $QM\neq0$. L'ensemble $Q+M$ est donc un continu unissant a à un point de $M-C$ (d'après (6)). Par conséquent

$$Q+M=1, \quad \text{d'où} \quad 1-Q\subset M, \quad \text{donc} \quad \overline{1-Q}\subset M,$$

et les égalités (4) et (5) donnent $\overline{1-C}=M$, contrairement à l'inégalité (5).

5. *Les composants d'un espace indécomposable sont disjoints deux à deux.*

Soient, en effet, P le composant de p et Q le composant de q. Supposons que $a\in PQ$ et $b\in P-Q$. Il existe donc trois ensembles connexes et fermés A, B et C tels que

$$p,a\in A\neq1, \quad p,b\in B\neq1, \quad q,a\in C\neq1.$$

Par conséquent, $A+B+C$ est connexe, fermé et unit b à q. Comme $b\in1-Q$, l'espace est irréductible entre b et q. Donc

$$A+B+C=1.$$

De là on conclut que l'espace est décomposable. Cette conclusion est, en effet, évidente si $A+B=1$; d'autre part, si $A+B\neq 1$, on envisage la décomposition $1=(A+B)+C$.

Le th. 1, rapproché de V, 2 implique que:

6. *Tout composant d'un espace indécomposable est un F_σ de première catégorie*[1]).

Il en résulte en vertu du th. de Baire (cf. § 30, IV) que

7. *Tout espace indécomposable complet contient une infinité indénombrable de composants.*

Tout point de cet espace en est un point *d'irréductibilité*. Plus précisément, *l'ensemble des x tels que l'espace est irréductible entre a et x est un G_δ dense.*

Remarques. 1° La première partie du th. 7 peut être précisée comme suit.

Dans tout continu indécomposable, il existe un ensemble parfait (de puissance $\mathfrak{c}$) qui contient un point au plus de chaque composant[2]).

2° Le th. 7 entraîne l'énoncé suivant:

7'. *Pour qu'un espace connexe et complet soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il contienne trois points a, b et c entre chaque couple desquels il est irréductible*; ou encore: *que tout point en soit un point d'irréductibilité.*

La nécessité de cette condition résulte, en effet, du fait que l'espace contient 3 composants au moins. Pour démontrer qu'elle est suffisante, soient K et L deux continus tels que

$$1=K+L,\quad K\neq 1\neq L.$$

Étant donnés trois points a, b et c, soit K, soit L en contient deux. L'espace n'est donc pas irréductible entre eux.

8. *Tout espace connexe qui contient un composant frontière est indécomposable.*

En conséquence (cf. 7), *pour qu'un espace connexe complet soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il contienne un composant frontière.*

1) Théorème de S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **1** (1920), p. 35.
2) Voir S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **10** (1927), p. 305.

Soit p un point dont le composant P est frontière: $\overline{1-P}=1$. En supposant l'espace décomposable, on a

$$1=A+B,\quad A\neq 1\neq B,$$

où A et B sont connexes et fermés.

Soit $p\in A$. Donc $A\subset P$, d'où

$$1-P\subset 1-A\subset B,\quad \text{donc}\quad 1=\overline{1-P}\subset B,$$

contrairement à l'inégalité $B\neq 1$.

Remarque. Le th. 8, rapproché de la remarque 2), p. 146, implique aussitôt que l'exemple 1 du N° V est un continu indécomposable.

9. *Pour qu'un continu irréductible entre a et b soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il contienne un semi-continu S frontière, dense et contenant a*[1]).

En désignant par S le composant du point a, on constate aussitôt que la condition est nécessaire (cf. 2 et 6).

Pour démontrer qu'elle est suffisante, il suffit — en vertu de 8 — de prouver que le composant C de b est frontière, ou encore, que $C\cdot S=0$ (puisque S est dense).

Or, en admettant que $C\cdot S\neq 0$, il existe deux continus K et L tels que

$$a\in K\subset S,\quad b\in L\subset C\quad \text{et}\quad KL\neq 0.$$

L'espace étant irréductible entre a et b, il vient

$$K+L=1,\quad \text{d'où}\quad 1-S\subset 1-K\subset L,\quad \text{donc}\quad \overline{1-S}\subset L.$$

Par hypothèse $\overline{1-S}=1$, donc $L=1$, et comme $L\subset C$, il vient $a\in C$. Mais cela contredit l'hypothèse que l'espace est irréductible entre b et a.

VII. Sous-ensembles indécomposables des espaces irréductibles.

1. *C étant un sous-ensemble indécomposable fermé d'un espace irréductible entre a et b, C est ou bien un domaine fermé, ou bien un ensemble non-dense. Dans le premier cas (et si $C\neq 0$), il existe dans la famille $\boldsymbol{D}$ (envisagée au N° III) un D tel que D et $D+C$ constituent un saut.*

1) Théorème d'Urysohn, Fund. Math. **8** (1926), p. 226.

En effet, d'après II, 5, l'ensemble $A=1-\overline{1-C}$ est connexe. Donc d'après V, 2, A est dense ou non-dense dans C.

Dans le premier cas, on a $\overline{1-\overline{1-C}}=C$, ce qui prouve que C est un domaine fermé.

Dans le deuxième cas, A est non-dense (dans l'espace), donc vide (en tant qu'ouvert), et il vient $\overline{1-C}=1$.

Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème. Soit C un domaine fermé indécomposable $\neq 0$. Si $C=1$, posons $D=0$. Soit donc $C\neq 1$. Il vient soit $a\in 1-C$, soit $b\in 1-C$. Par raison de symétrie, on peut admettre que $a\in 1-C$. D'après II, 3, $\overline{1-C}$ se compose de deux domaines fermés et connexes dont l'un, désignons le par D, contient a et l'autre est vide ou contient b. Comme $D\cdot C\neq 0$, $D+C$ est connexe et appartient à $\boldsymbol{D}$, en tant que domaine fermé (cf. § 8, VIII).

Soit

$$D^*\in\boldsymbol{D},\quad D\subset D^*\subset D+C.$$

Il s'agit de prouver que soit $D^*=D$, soit $D^*=D+C$.

D'après III, 1, a est un point d'irréductibilité de D^*. Donc, selon II, 3, D^*-D est connexe. $\overline{D^*-D}$ étant un domaine fermé relativement à D^*, qui est lui-même un domaine fermé, $\overline{D^*-D}$ est un domaine fermé (cf. § 8, VIII). Comme sous-ensemble de C, $\overline{D^*-D}$ en est donc un sous-domaine fermé relatif, connexe. C étant indécomposable, on a d'après V, 2, soit $\overline{D^*-D}=0$, soit $\overline{D^*-D}=C$. Dans le premier cas, $D^*=D$ et dans le deuxième:

$$D+C=D+\overline{D^*-D}\subset D+D^*=D^*,\quad \text{d'où}\quad D^*=D+C.$$

Réciproquement, on a le théorème suivant:

2. *Si les éléments D_{y_1} et D_{y_2} de $\boldsymbol{D}$ constituent un saut, l'ensemble $\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}$ est indécomposable.*

D'après III, 1 et II, 3, $\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}$ est connexe. Soient A et B deux ensembles fermés et connexes tels que $\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=A+B$. Il s'agit de prouver que l'un d'eux coïncide avec $\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}$.

Posons $A^*=1-\overline{1-A}$ et $B^*=1-\overline{1-B}$. D'après II, 5, les ensembles A^* et B^* sont connexes. En outre, l'ensemble $A+B=\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}$, en tant que domaine fermé relatif au domaine fermé D_{y_2}, est un domaine fermé:

$$A+B=\overline{1-\overline{1-(A+B)}},$$

d'où (cf. § 8, VII (i))

$$A^*+B^*=A+B=\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}.$$

Si $D_{y_1}\neq 0$, on a soit $D_{y_1}\cdot A^*\neq 0$, soit $D_{y_1}\cdot B^*\neq 0$. On peut admettre que la première inégalité se présente. On a par conséquent $(D_{y_1}+A^*)\in\boldsymbol{D}$. La même formule a lieu lorsque $D_{y_1}=0$ et que A^* désigne celui des deux ensembles A^* et B^* qui contient a.

Il en résulte par hypothèse que:

$$\text{soit}\quad D_{y_1}+A^*=D_{y_1},\quad \text{soit}\quad D_{y_1}+A^*=D_{y_2}.$$

Dans le premier cas, on a

$$D_{y_2}=D_{y_1}+\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=D_{y_1}+A^*+B^*=D_{y_1}+B^*,$$

d'où

$$D_{y_2}-D_{y_1}\subset B^*\subset B,\quad \text{donc}\quad \overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=B.$$

Dans le deuxième cas, il vient

$$D_{y_2}-D_{y_1}\subset A^*\subset A,\quad \text{d'où}\quad \overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=A.$$

Les théorèmes 1 et 2 impliquent que

3. *Pour que le type d'ordre de $\boldsymbol{D}$ soit celui de l'intervalle, il faut et il suffit que l'espace irréductible considéré ne contienne aucun sous-ensemble fermé indécomposable non-frontière.*

Remarque. Étant donné un ensemble fermé $F\subset\mathcal{J}$ qui contient les points 0 et 1, il existe un continu irréductible entre 0 et 1 pour lequel $J=F$ (autrement dit, tel que $\boldsymbol{D}$ est semblable à F).

Il suffit, en effet, de remplacer tout intervalle contigu à F par le continu de l'ex. V, 3, convenablement diminué et ayant les mêmes extrémités que cet intervalle.

En particulier, le couple (0,1) coïncide avec l'ensemble J pour tout continu indécomposable (non vide).

4. *Les tranches d'un continu $\mathfrak{X}$ irréductible entre a et b coïncident avec les ensembles saturés par rapport à la propriété: être un continu-somme d'une suite (finie ou infinie) de continus non-denses et de continus indécomposables.*

Soit d'abord f une transformation continue monotone telle que $f(\mathfrak{X})=\mathcal{J}$. Soit C un continu non-dense: $\overline{\mathfrak{X}-C}=\mathfrak{X}$. Nous allons démontrer que $f(C)$ se réduit à un seul point.

Supposons, par contre, que $f(C)=\alpha\beta$ où $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$.

$f^{-1}(0\alpha)$ et $f^{-1}(\beta 1)$ étant des continus (cf. § 42, VI, 4) dont l'un contient a et l'autre b et qui ont des points en commun avec C, il vient

$$f^{-1}(0\alpha)+C+f^{-1}(\beta 1)=\mathfrak{X}, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{X}-C\subset f^{-1}(0\alpha)+f^{-1}(\beta 1),$$

donc $\overline{\mathfrak{X}-C}\subset f^{-1}(0\alpha)+f^{-1}(\beta 1)$ et, comme $\overline{\mathfrak{X}-C}=\mathfrak{X}$, il vient finalement $\mathfrak{X}=f^{-1}(0\alpha)+f^{-1}(\beta 1)$, ce qui contredit l'hypothèse que $f(\mathfrak{X})=\mathcal{J}$.

Ceci établi, on en déduit que, S étant un semi-continu, somme d'une série de continus non-denses, $f(S)$ se réduit aussi à un seul point: $f(S)=p$. Tout continu indécomposable K étant, d'après les th. 1 et 6 du N° VI, la fermeture d'un semi-continu S de ce genre, il vient $f(K)=p$. Il en résulte finalement que, si Q est un continu-somme d'une série de continus non-denses et de continus indécomposables, $f(Q)$ est aussi un seul point; autrement dit, Q est contenu dans une seule tranche (on substituera à f la fonction g du N° IV).

Réciproquement, d'après IV, 4:

$$T_t=\sum(I_y+J_y)=\sum(\bar{I}_y+\bar{J}_y),$$

la sommation étant étendue à l'ensemble (dénombrable) des y tels que $y\in J$ et $\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)$. Tout $\bar{I}_y$ et $\bar{J}_y$ étant soit un continu non-dense, soit un continu indécomposable (cf. VI, 4), la tranche T_t est donc un continu-somme d'une série de continus non-denses et de continus indécomposables. Tout ensemble de ce genre étant contenu — comme nous venons de prouver — dans une seule tranche et les tranches étant deux à deux disjointes, toute tranche est donc un ensemble saturé par rapport auxdites propriétés.

5. *Les tranches d'un continu irréductible dont le type d'ordre est celui de l'intervalle coïncident avec les continus non-denses saturés*[1] *(c'est-à-dire avec les continus non-denses qui ne sont pas des vrais sous-continus des autres continus non-denses).*

[1] On trouvera de nombreuses propriétés des continus non-denses saturés dans mon mémoire de Fund. Math. **10**, § 2.

Car, d'une part, comme nous venons de démontrer, tout continu non-dense est contenu dans une seule tranche. D'autre part, comme l'espace ne contient aucun continu indécomposable qui ne soit pas non-dense, toute tranche est, en vertu du th. 4, un continu-somme d'une série de continus non-denses, donc un continu non-dense.

6. *Tout continu irréductible entre deux points qui ne contient aucun continu non-dense (composé de plus d'un point) est un arc*[1].

En effet, le continu considéré ne contient aucun sous-continu indécomposable (contenant plus d'un point), puisque tout continu indécomposable admet des sous-continus non-denses (contenant plus d'un point, cf. V, 2). D'après les th. 3 et 5, les tranches sont donc des continus non-denses, donc des points individuels. La fonction g (du N° IV) est, par conséquent, une homéomorphie.

7. *Tout espace discohérent, décomposable et irréductible entre a_0 et a_1 est somme de deux ensembles indécomposables A_0 et A_1 tels que*

$$(1) \qquad A_0=\overline{1-A_1} \quad et \quad A_1=\overline{1-A_0}\;{}^{2)}.$$

Soient, conformément au § 41, X, 2, A_0 et A_1 deux ensembles connexes satisfaisant à (1) et tels que $A_0\neq 1\neq A_1$. Soient donc $a_0\in A_0$ et $a_1\in A_1$.

Admettons que A_1 soit décomposable:

$$A_1=B_0+B_1, \quad B_0\neq A_1\neq B_1,$$

où B_0 et B_1 sont connexes et fermés. Soit $a_1\in B_1$. D'après le th. 1 du § 41, X, $\overline{1-B_0}$ est connexe. Or

$$\overline{1-B_0}=\overline{A_0-B_0}+\overline{A_1-B_0}=\overline{A_0-B_0}+\overline{B_1-B_0}$$

et

$$A_0-B_0\neq 0\neq B_1-B_0 \quad \text{d'où} \quad 0\neq\overline{A_0-B_0}\cdot\overline{B_1-B_0}\subset A_0\cdot B_1.$$

Donc A_0+B_1 est connexe et comme $a_0\in A_0$ et $a_1\in B_1$, il vient

$$A_0+B_1=1, \quad \text{d'où} \quad 1-A_0\subset B_1, \quad \text{donc} \quad A_1=\overline{1-A_0}\subset B_1,$$

contrairement à l'inégalité $A_1\neq B_1$.

[1] Théorème de Janiszewski, Thèse. Voir aussi § 42, V, 1. Cf. Hallett, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1919).

[2] Voir Math. Ann. **98** (1927), p. 403. Cf. P. Alexandroff, Math. Ann. **96**, p. 537.

VIII. Espaces irréductiblement connexes entre A et B. Ainsi s'appelle l'espace 1 lorsqu'il est connexe entre A et B, tandis que, quel que soit $F=\overline{F}\neq 1$, l'ensemble $F+A+B$ n'est pas connexe entre A et B; autrement dit, lorsque l'espace est irréductible relativement à la propriété: être un X fermé tel que $X+A+B$ est connexe entre A et B.

1. *Si l'espace est irréductiblement connexe entre A et B, les ensembles A et B sont séparés et non-vides et l'espace est connexe.*

Par conséquent, *en supposant que $A\neq 0\neq B$, on peut remplacer dans la définition la connexité de l'espace entre A et B par sa connexité (tout court).*

Il s'agit de prouver que l'espace est connexe, car le reste du théorème est une conséquence directe du § 41, IV, 1a.

Or, supposons que

$$1=M_0+M_1,\quad M_0\cdot M_1=0,\quad M_j=\overline{M}_j\neq 1,\quad \text{où}\quad j=0,1.$$

La dernière inégalité implique par hypothèse que M_j+A+B n'est pas connexe entre A et B, donc que M n'est pas connexe entre AM_j et BM_j.

On a parsuite

$$M_j=P_j+Q_j,\quad P_j=\overline{P}_j,\quad Q_j=\overline{Q}_j,\quad P_j\cdot Q_j=0,\quad AP_j=0=BQ_j.$$

Posons $P=P_0+P_1$ et $Q=Q_0+Q_1$. Il vient

$$1=P+Q,\quad \overline{P}=P,\quad \overline{Q}=Q,\quad PQ=0\quad \text{et}\quad AP=0=BQ,$$

ce qui prouve que l'espace n'est pas connexe entre A et B.

2. *Un espace irréductiblement connexe entre A et B est irréductible entre tout couple $a\in A$, $b\in B$.*

En effet, C étant un ensemble fermé, connexe et tel que $a,b\in C$, l'ensemble $C+A+B$ est évidemment connexe entre A et B; donc $C=1$.

Remarque. Le théorème réciproque n'est pas vrai en général (il est vrai dans les espaces compacts, cf. IX, 2).

Pour s'en convaincre, considérons l'exemple 2 du N° V. L'espace envisagé est irréductible entre les points $a=(0,0)$ et $b=(1,0)$. Cependant, il n'est pas irréductiblement connexe entre ces points; car la suite des demi-circonférences décrites du point $(\frac{1}{2},0)$ par les points $(3^{-n},0)$, où $n=0,1,\dots$ (pour $n=0$, la demi-circonférence est privée du point $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$), constitue un ensemble fermé et connexe entre a et b.

3. *Si l'espace est irréductiblement connexe entre A et B, il l'est également entre tout couple A_1, B_1 où $0\neq A_1\subset A$ et $0\neq B_1\subset B$.*

Car, d'une part, l'espace étant connexe, il est, en vertu de la formule $A_1\neq 0\neq B_1$, connexe entre A_1 et B_1 et, d'autre part, si $F+A+B$ n'est pas connexe entre A et B, $F+A_1+B_1$ ne l'est nonplus entre A_1 et B_1.

4. *Si l'espace est irréductiblement connexe entre A et $B_0=\overline{B}_0$, ainsi qu'entre A et $B_1=\overline{B}_1$, il est irréductiblement connexe entre A et B_0+B_1.*

D'après § 41, IV, 1a, l'espace est connexe entre A et B_0+B_1 (puisque $B_0\subset B_0+B_1$). Soit, d'autre part, $F=\overline{F}\neq 1$. L'ensemble $F+A+B_j$, $j=0,1$, n'est donc pas connexe entre A et B_j et, par conséquent, ne coïncide pas avec 1; donc $F+B_j\neq 1$. On en conclut que $(F+B_0)+A+B_1$ n'est connexe ni entre A et B_1, ni entre A et B_0 (par raison de symétrie); d'après § 41, IV, 3, cet ensemble n'est nonplus connexe entre A et B_0+B_1.

5. *Si l'espace est irréductiblement connexe entre les ensembles fermés A et B, l'ensemble $1-(A+B)$ est connexe et dense dans l'espace.*

Supposons que $1-(A+B)$ ne soit pas connexe. Soient G et H deux ensembles ouverts tels que

$$1-(A+B)=G+H,\quad GH=0,\quad G\neq 0\neq H.$$

En tant que fermé, l'ensemble $G+A+B=1-H\neq 1$ n'est pas connexe entre A et B. On a donc:

$$G+A+B=P+Q,\quad 0=PQ=AP=BQ,$$
$$H+A+B=W+Z,\quad 0=WZ=AW=BZ,$$

les ensembles P, Q, W et Z étant fermés.

La formule $1=(P+W)+(Q+Z)$ présente donc une décomposition de l'espace en deux ensembles fermés et disjoints, puisque

$$PZ=P\cdot ZH+P\cdot ZA=PG\cdot ZH+PB\cdot ZH=0,$$

dont l'un contient B et l'autre A. Cela contredit la connexité de l'espace entre A et B.

L'espace étant connexe, les formules

$$1=A+\overline{1-(A+B)}+B\quad \text{et}\quad AB=0$$

entraînent

$$A\cdot\overline{1-(A+B)}\neq 0\neq B\cdot\overline{1-(A+B)}.$$

La connexité de l'ensemble $\overline{1-(A+B)}$ implique donc la connexité de l'ensemble $\overline{1-(A+B)}+A+B$ entre A et B. Il vient par hypothèse

$$\overline{1-(A+B)}=1.$$

6. *Étant donnés deux ensembles fermés E_j, $j=0,1$, irréductiblement connexes entre $A_j=\bar{A}_j$ et $E_0\cdot E_1$, la somme E_0+E_1 est irréductiblement connexe entre A_0 et A_1* [1]).

L'ensemble E_0+E_1 étant connexe, il s'agit de prouver, qu'étant donné un ensemble

$$F=\bar{F}\subset E_0+E_1\neq F,$$

$F+A_0+A_1$ n'est pas connexe entre A_0 et A_1.

Or, l'inégalité $F\neq E_0+E_1$ implique que soit $FE_0\neq E_0$, soit $FE_1\neq E_1$. Admettons que $FE_0\neq E_0$. Donc $FE_0+A_0+E_0\cdot E_1$ n'est pas connexe entre A_0 et $E_0\cdot E_1$:

$$FE_0+A_0+E_0\cdot E_1=M+N, \quad M=\bar{M}, \quad N=\bar{N}, \quad 0=MN=ME_1=NA_0.$$

Il vient

$$F+A_0+A_1=FE_0+A_0+FE_1+A_1\subset M+(N+E_1),$$

où $M\cdot(N+E_1)=0$, $A_0\subset M$ (puisque $A_0\cdot N=0$) et $A_1\subset N+E_1$. Cela prouve que $F+A_0+A_1$ n'est pas connexe entre A_0 et A_1.

IX. Espaces compacts irréductiblement connexes. 1. *Tout espace compact connexe entre deux ensembles fermés disjoints A et B contient un ensemble fermé C irréductiblement connexe entre CA et CB.*

En effet, d'après le th. 1 du § 42, VII, la famille des ensembles F fermés et connexes entre A et B est fermée. Il en est donc de même de la famille $\boldsymbol{F}$ des ensembles fermés X tels que $X+A+B$ est connexe entre A et B, puisque la fonction $X+A+B$ est une fonction continue de la variable X (cf. § 38, II, 3).

Soit C l'élément irréductible de la famille $\boldsymbol{F}$.

C est connexe entre CA et CB, car en supposant que

$$C=M+N, \quad CA\subset M=\bar{M}, \quad CB\subset N=\bar{N}, \quad MN=0,$$

on aurait la décomposition

$$C+A+B=(A+M)+(B+N)$$

en deux ensembles fermés et disjoints, contrairement à la formule $C\in\boldsymbol{F}$.

[1]) Cf. J. R. Kline, Fund. Math. **7** (1925), p. 315.

En outre, si $H=\bar{H}\subset C\neq H$, l'ensemble $H+CA+CB$ n'est pas connexe entre CA et CB, puisque $H+A+B$ n'est pas connexe entre A et B.

2. *Pour qu'un espace compact soit irréductiblement connexe entre deux ensembles fermés et disjoints A et B, il faut et il suffit qu'il soit irréductible entre tout couple de points a,b où $a\in A$ et $b\in B$.*

En vertu des th. 1 et VIII, 2, il s'agit de démontrer que, l'espace 1 étant supposé irréductible entre tout couple $a\in A$, $b\in B$, et C étant fermé et irréductiblement connexe entre CA et CB, on a $C=1$.

Or, soient $a\in CA$ et $b\in CB$. L'ensemble C étant connexe (d'après VIII, 1), fermé et unissant a à b, il vient $C=1$.

3. *Si un continu indécomposable 1 est irréductiblement connexe entre deux ensembles fermés A_0 et A_1, il existe un composant C tel que $C\cdot(A_0+A_1)=0$.*

$R_0, R_1, \ldots$ désignant la base du continu 1, soit S_{jn}, où $j=0,1$, la somme des composantes de $1-R_n$ non disjointes de A_j. La somme

$$(1) \qquad S_j=S_{j0}+S_{j1}+\ldots$$

coïncide avec la somme des composants de l'espace non disjoints de A_j; car K étant un continu tel que $K\cdot A_j\neq 0$ et $K\neq 1$, il existe un n tel que $K\subset 1-R_n$, donc que $K\subset S_{jn}\subset S_j$.

Il suffit donc de prouver que S_j est de I-e catégorie; ou encore — S_j étant un $\boldsymbol{F}_\sigma$ (d'après (1)) — que S_j est un ensemble frontière:

$$(2) \qquad \overline{1-S_j}=1.$$

Or, Q étant un composant arbitraire contenu dans S_{1-j}, Q est dense dans l'espace (cf. VI, 2): $\bar{Q}=1$, d'où

$$(3) \qquad \bar{S}_{1-j}=1.$$

1 étant irréductible entre tout couple $a_0\in A_0$, $a_1\in A_1$, on a

$$S_0\cdot S_1=0, \quad \text{donc} \quad S_{1-j}\subset 1-S_j, \quad \text{d'où} \quad \bar{S}_{1-j}\subset\overline{1-S_j}.$$

La formule (2) en résulte en vertu de (3).

4. *Étant donnés deux continus indécomposables E_0 et E_1 et deux ensembles fermés A_0 et A_1 tels que $E_0\cdot E_1=A_0+A_1$ et que E_j (où $j=0,1$) est irréductiblement connexe entre A_0 et A_1, la somme E_0+E_1 est irréductible entre deux points.*

En effet, d'après 3, il existe un composant C de E_j, où $j=0,1$, tel que

$$C_j\cdot(A_0+A_1)=0, \quad \text{donc que} \quad C_j\cdot E_0\cdot E_1=0.$$

Soit $a_j \in C_j$. Le continu E_j est donc irréductible entre a_j et tout point de $E_0\cdot E_1$ et il est, par conséquent (th. 2), irréductiblement connexe entre a_j et $E_0\cdot E_1$.

Il en résulte d'après VIII, 6, que E_0+E_1 est irréductible entre a_0 et a_1.

SIXIÈME CHAPITRE.

Espaces localement connexes.

§ 44. Notion de connexité locale.

L'espace 1 est supposé métrique.

I. Points de connexité locale. L'espace est dit *localement connexe au point p (l. c. au point p)*[1]) lorsque, dans tout entourage G de p, il existe un entourage connexe de p; c'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un entourage connexe E de p tel que $\delta(E)<\varepsilon$. Autrement dit: qu'en désignant par C la composante de p dans G, on a $p\in \mathrm{Int}(C)$.

L'entourage G peut, bien entendu, être supposé ouvert (ou fermé).

Par définition, la connexité locale est une propriété *topologique*. Elle est une propriété *locale*, c'est-à-dire que, H étant un entourage d'un point p donné, H est l. c. au point p dans le cas où l'espace y est l. c. et dans ce cas seulement.

1. *L'ensemble des points de connexité locale d'un espace est un* $\boldsymbol{G_\delta}$.

Car cet ensemble est le produit infini $G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ où G_n est la somme des ensembles $\mathrm{Int}(E)$, E parcourant la famille des ensembles connexes tels que $\delta(E)<1/n$.

2. *Pour que l'espace soit l. c. au point p, il faut et il suffit qu'à tout $\varepsilon>0$ corresponde un $\eta>0$ tel que l'inégalité $|x-p|<\eta$ implique l'existence d'un C connexe tel que $x,p\in C$ et $\delta(C)<\varepsilon$.*

En effet, si l'espace est l. c. au point p et si E est un entourage connexe de p tel que $\delta(E)<\varepsilon$, on posera $C=E$ et on désignera par η le rayon d'une sphère contenue dans E et de centre p.

[1]) Cf. Pia Nalli, Rend. di Palermo **32** (1911), p. 392, S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. des Sc. de Varsovie **6** (1913), H. Hahn, Wiener Ber. **123** (1914), p. 2433.